

Отзыв официального оппонента

на диссертацию Горбовой Татьяны Владимировны
на тему: «Численные методы исследования дробных моделей
популяционной динамики», представленной на соискание ученой
степени кандидата физико-математических наук по
специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ

В диссертационной работе Т. В. Горбовой исследуется актуальная проблема разработки разностных методов решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с нелинейными операторами дифференцирования; кроме того, порядок операторов дифференцирования может быть нецелым, а уравнения могут быть осложнены эффектом распределенного запаздывания.

Актуальность работы связана с необходимостью численного исследования моделей, возникающих в биомедицине и популяционной динамике.

Диссертация изложена на 104 страницах, состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитированной литературы, включающего 128 источника.

Во введении обосновывается актуальность и дан обзор современного состояния исследований по данной теме.

В первой главе дается формальная постановка начально-краевой задачи для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе. Строится равномерная сетка и строится оператор интерполяции-экстраполяции сеточного решения, позволяющий вычислять значения оператора запаздывания. Далее, с помощью замены переменных нелинейность переносится в левую часть уравнения, что позволяет упростить построение неявной нелинейной разностной схемы и ее решение. На каждом временном слое разностная схема представляет собой систему нелинейных уравнений, и для поиска ее решения применяется метод

Ньютона. В свою очередь, линейные системы, возникающие при приближении нелинейных, являются трехдиагональными и допускают эффективное решение методом прогонки. Обоснование сходимости проводится методом вложения в общую схему, предложенную в работах В. Г. Пименова. При этом возникает ряд новых сложностей принципиального характера, связанных с нелинейностью схемы, и, как следствие, необходимостью включать в доказательство учет итерационного процесса. Доказывается теорема о порядке сходимости неявного метода, после чего строится аналог схемы Кранка-Николсон, обладающий более высоким по времени порядком. Численные эксперименты на специально подобранных примерах соответствуют полученным теоретическим результатам.

Во второй главе автор строит разностные схемы для дробного по пространству уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе, при этом используются левосторонние производные Римана-Лиувилля. Подход, использованный для доказательства теорем о порядке сходимости, близок к тому, что был применен в первой главе. Из технических трудностей можно отметить то, что системы линейных уравнений, возникающих в методе Ньютона, перестают быть трехдиагональными. В конце главы приведены результаты численных экспериментов, которые иллюстрируют доказанные теоремы.

В третьей главе автор строит численный алгоритм для дробного по времени уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе, при этом используются производные Капуто. Техника доказательства устойчивости и сходимости принципиально меняется, автор использует дискретный вариант неравенства Гронуолла. Накладывая специфические достаточные условия на вид нелинейности в дифференциальном операторе, автор доказывает сходимость разностного метода. Отметим, что такой подход – сужение класса допустимых нелинейностей – представляется естественным, так как построить сходящиеся методы для уравнений с нелинейностью произвольного вида, судя по всему,

невозможно. Автор показывает, что наложенные ограничения заведомо выполняются для нелинейных функций, чья производная не меньше единицы. В конце главы приведены результаты численных экспериментов, которые иллюстрируют доказанные теоремы.

В четвертой главе описан разработанный программный комплекс для численного исследования моделей популяционной динамики. Приведены примеры использования программного комплекса для численного решения дифференциальных уравнений с дробными по времени производными, нелинейными операторами дифференцирования и распределенным запаздыванием.

В пятой главе с использованием программного комплекса проводятся численные эксперименты с моделями популяционной динамики. Показано, как изменение параметров системы может выводить систему разные стационарные режимы, в частности, приводить к вымиранию.

Диссертационная работа является законченным научным исследованием. Автореферат диссертации полно и правильно отражает ее содержание. К работе имеется несколько замечаний и вопросов.

1. Хорошо известны линейные схемы повышенного порядка точности по пространству, имеющие четвертый порядок сходимости. Эти схемы описаны в монографии А.А. Самарского «Теория разностных схем», на которую ссылается автор. Однако, в первой главе строятся схемы второго порядка по пространству. Чем вызвано такое решение? Можно ли повысить порядок нелинейных схем, предложенных в первой главе?

2. В первой главе в постановке задачи рассматриваются неоднородные граничные условия. В параграфе 1.4 написано «Без ограничения общности будем рассматривать однородные граничные условия». При этом не показано, как именно сводить задачу к однородным граничным условиям, не нарушая общности. Этот пункт доказательства следовало бы описать более четко.

3. В главе 3 в постановке задачи рассматривается отрезок изменения пространственной переменной $[0, X]$. Фиксировать левую границу равной

нулю необязательно. На самом деле можно рассмотреть произвольный отрезок $[a, b]$, это никак не отразится на технике доказательства.

4. В главе рассматриваются уравнения, содержащие одновременно и дробную по времени производную, и запаздывание. В чем смысл одновременного присутствия этих объектов, каждый из которых по сути описывает зависимость от предыстории?

Эти замечания не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Считаю, диссертация Т. В. Горбовой на тему: «Численные методы исследования дробных моделей популяционной динамики», представленная на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук соответствует всем требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней в УрФУ, предъявляемых к кандидатским диссертациям, и научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а ее автор Татьяна Владимировна Горбова заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Кандидат физико-математических наук,
проректор по научной и исследовательской
работе ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский
федеральный университет»

Алиханов Анатолий Алиевич

Почтовый адрес организации: 355017, г. Ставрополь, ул. Пушкина, 1;
телефон: (8652) 95-68-08; e-mail: info@ncfu.ru