

### **Отзыв официального оппонента**

на диссертационную работу Горбовой Татьяны Владимировны  
«Численные методы исследования дробных моделей популяционной динамики»,  
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 1.2.2. – «Математическое моделирование, численные методы и  
комплексы программ»

Диссертационная работа Горбовой Татьяны Владимировны «Численные методы исследования дробных моделей популяционной динамики» посвящена разработке и обоснованию численных методов, предназначенных для реализации математических моделей популяционной динамики, формализуемых с использованием дифференциальных уравнений с частными производными, содержащими нелинейность в операторе дифференцирования и с учетом эффекта запаздывания общего вида.

#### **Актуальность темы диссертационного исследования**

В последние десятилетия развитие подходов к математическому моделированию целого класса объектов происходит при активном привлечении дробно-дифференциального аппарата. Нецелые производные нашли свое применение в различных областях науки и техники, таких как экономика, механика, биология, химия, анализ управления, обработка сигналов и изображений, движение жидкости, распространение сейсмических волн и т.д. Стоит отметить, что производные нецелого порядка часто служат для описания процессов, происходящих в объектах со сложной структурой и в динамических системах, проявляющих эффекты памяти. Для многих биологических систем учет нелокальных свойств носит принципиальный характер, и такими важными характеристиками, как запаздывание, сложная морфология, и/или эффекты памяти, при построении и реализации адекватных математических моделей пренебрегать нельзя. Построение аналитических решений для дифференциальных уравнений, содержащих запаздывание и/или дробные производные, часто встречает серьезные затруднения. Поэтому во многих практических ситуациях оправданным является применение приближенных методов, основанных на аппроксимациях производных дробного порядка, в частности, на основе конечно-разностного подхода.

В фокусе внимания настоящего исследования находится класс задач, применяющихся для моделирования сложной популяционной динамики, и включающий наследственность и нелинейность в дифференциальном операторе. Специфика построения конечно-разностной схемы для уравнений такого вида обусловлена не только наличием дробной производной, но и нелинейностью в операторе дифференцирования, что наделяет задачу существенными особенностями.

Поэтому направление исследований, связанное с развитием и обоснованием методов математического моделирования дробно-дифференциальных моделей популяционной динамики с нелинейностью в операторе дифференцирования и с наличием эффекта запаздывания общего вида, несомненно, представляется актуальным.

### **Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, их достоверность**

В диссертации представлен анализ достижений и теоретических положений отечественных и зарубежных авторов, включающий постановки задач моделирования популяционной динамики, результаты исследования разработанных алгоритмов и вычислительных схем, средства программных реализаций. Автором проведено корректное позиционирование собственных результатов в общей системе научных знаний, сложившейся в данной предметной области. Обоснованность научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации, подтверждается следующим.

Достоверность научных результатов, полученных соискателем, обеспечивается использованием апробированных численных методов для решения уравнений в частных производных и функционально-дифференциальных уравнений, использованием аппарата дробных дискретных неравенств Гронуолла для доказательств сходимости сконструированных методов решения дробных по времени уравнений, а также положительными результатами проверки адекватности численных решений путем сравнения с аналитическими решениями для тестовых задач.

Основное содержание диссертации достаточно полно отражено в 8 научных публикациях автора, в числе которых 6 работ, опубликованных в профильных изданиях, цитируемых международными базами Web of Science и Scopus и 2 работы в журналах, рекомендованных ВАК РФ, соответствующих научной специальности 1.2.2. – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». Диссертационная работа прошла апробацию на всероссийских и международных конференциях.

### **Научная новизна проведенных исследований и полученных результатов**

Можно отметить ряд оригинальных результатов, полученных соискателем.

Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе исследован вопрос устойчивости и проведена оценка порядка сходимости для неявного метода в сочетании с методом Ньютона и аналога метода Кранка – Николсон. Для дробного по пространственной переменной уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе разработан и исследован на устойчивость и порядок сходимости аналог метода Кранка – Николсон в сочетании с методом Ньютона для решения системы нелинейных уравнений. Также для дробного по времени уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе и с эффектом запаздывания разработан и исследован неявный численный метод в совокупности с методом Ньютона.

Существенно, что новые результаты присутствуют в научных областях: математическое моделирование, численные методы, комплексы программ, соответствующих паспорту научной специальности 1.2.2. – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе разработаны неявный численный метод и аналог метода Кранка – Николсон. Для дробного по пространственной переменной уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе разработан неявный численный метод. Для модели популяционной динамики дробного по времени порядка с запаздыванием

общего вида разработан неявный численный метод. Для всех представленных методов исследованы устойчивость и определен порядок сходимости. В области разработки программ соискатель разработал прикладные программы, позволяющие проводить компьютерное моделирование популяционной динамики.

### **Значимость результатов для науки и практики**

Научная значимость диссертационной работы Т.В. Горбовой заключается в разработке и исследовании численных алгоритмов для новых классов задач, возникающих в популяционной динамике, а именно, для уравнений диффузионного типа с нелинейностью в операторе дифференцирования и эффектом наследственности; для уравнений диффузионного типа с нелинейностью в операторе дифференцирования и дробной пространственной производной; для уравнений диффузионного типа с нелинейностью в операторе дифференцирования и эффектом наследственности и дробной временной производной.

Практическая значимость работы состоит в возможном применении результатов работы для исследования с помощью компьютерных экспериментов сложных моделей популяционной динамики. Возможно также применение разработанных численных алгоритмов в моделировании других явлений, описываемых подобными математическими моделями, например, в газовой динамике.

### **Общая оценка диссертационной работы**

Диссертационная работа Горбовой Татьяны Владимировны характеризуется аккуратностью и аргументированностью математических выводов и доказательств. Автор на высоком уровне демонстрирует свою научную квалификацию. Особого внимания заслуживает научный результат – теоретическое обоснование и алгоритмическая реализация конечно-разностного метода реализации дробно-дифференциальной модели популяционной динамики, формализуемой с помощью достаточно «экзотического» дробно-дифференциального уравнения, включающего запаздывание и нелинейность.

Материал диссертации представлен системно, четко прослеживается логическая связь между отдельными главами. Текст работы оформлен в соответствии с действующими стандартами, написан грамотно, с использованием общепринятой математической символики и системы обозначений.

При детальном рассмотрении, по содержанию и оформлению диссертационной работы можно сделать следующие замечания.

### **Общие замечания и вопросы по диссертационной работе**

1. Не умаляя достоинств диссертационной работы и ценности разработанного теоретического базиса, в качестве основного замечания можно отметить следующее.

В работе фокус внимания явно смещен в сторону научного направления «Численные методы», двум другим компонентам научной специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» уделено значительно меньше внимания. В принципе, этот факт можно рассмотреть как авторское право соискателя, однако ключевые позиции считаю нужным отметить, учитывая, что

специальность 1.2.2 относится к группе научных специальностей «Компьютерные науки и информатика».

Во-первых, общая цель диссертационного исследования, фабула которой имеет вид: «Целью работы является разработка и обоснование сходимости численных методов ... », не содержит акцентов на части исследования, включающие математическое моделирование и программную реализацию.

Во-вторых, заявленный в теме объект исследования – модели популяционной динамики очень скромно представлены в части литературного обзора: если исключить из рассмотрения вводную часть (дублирует автореферат и само содержание) и 4–5 главы диссертации, то словосочетания, включающие «модели популяции», встречаются только 4 раза: в разделах 1.1, 2.1 в числе перечисленных прочих приложений рассматриваемого класса уравнений и на стр. 20 и 58 со ссылкой на одну работу [103]. Представляется, что автор мог бы уделить больше внимания эволюции математических моделей популяционной динамики, подходам к математической формализации пространственно-временной динамики популяций, а также обоснованию смыслов введения нелинейности и нелокальности в уравнения, которые описывают рассматриваемые процессы. Материал глав 1–3 изложен в обобщенных постановках с верификацией на тест-примерах, имеющих аналитические решения. Между тем, возникают вопросы – какой смысл имеет и почему вводится нелинейность в модель динамики популяции? Почему важна пространственная неоднородность и эффекты памяти, служащие основанием для введения модификаций таких задач, включающих дробные производные по координате и времени соответственно?

В-третьих, комплекс программ предназначен для исследования разработанных численных методов решения определенных классов задач, а не для компьютерного моделирования популяционной динамики. Отсутствует интерфейс пользователя для работы с комплексом программ и возможность варьирования параметров модели (даже в рамках рассматриваемых классов задач), например, задание другого вида нелинейности, коэффициентов при реакционном, динамическом и диффузионном слагаемых.

2. Несколько препятствует цельному восприятию материала диссертации отсутствие каких-либо комментариев к предположениям: «Будем предполагать, что задача (\*) – (\*) имеет единственное решение...», представленным на стр. 22, 47, 59. Является ли данный вопрос открытым или автор отказался от выполнения обзора в этом направлении? Присутствие библиографических ссылок на анализ разрешимости подобного класса задач существенно подкрепило бы введенные предположения.

3. При рассмотрении задачи, включающей дробную производную по пространственной координате в главе 2, автор использует определение дробной производной в смысле Римана – Лиувилля и в дальнейшем переходит к аппроксимации с помощью конечно-разностного аналога смещенной формулы Грюнвальда – Летникова. В главе 3 соискатель для постановки задачи, включающей дробную производную по времени, выбирает уже определение Капуто. Понятно, что при наличии неоднородных начальных условий в части использования подхода Грюнвальда есть ограничение (требуется введение корректирующего слагаемого (например, [K. Diethelm, N.J., Ford, A.D. Freed, Yu. Luchko, Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical method,

Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 194(2005) 743-773]). Однако здесь явно не хватает комментария относительно выбора определения дробных производных.

4. Можно высказать замечания терминологического плана. Начиная со стр. 36 и далее (стр. 70, 54, 69, 74, 78) автор некорректно употребляет термин «начально-краевая задача», записывая при этом только дифференциальное уравнение с частными производными; начальные и граничные условия следуют отдельно («задача» и «уравнение» в данном контексте имеют разный смысл, поскольку «задача» включает уравнение, начальные и краевые условия). Раздел 3.4 носит название «Приближенное решение нелинейной разностной схемы», что также включает некорректность.

#### *Замечания по оформлению текстовой части и графического материала*

5. В рукописи диссертации встречаются отдельные неточности, опечатки и небрежности, а также различные стили оформления одних и те же элементов текста.

На стр. 4 написано некорректно имя знаменитого бельгийского математика Пьер-Франсуа Ферхюльста (фр. Pierre François Verhulst, 1804–1849): «...модели (Мальтуса, Верхлюста)...».

На стр. 15 в формуле (15) следует писать « $u(x,t)$ ».

В некотором смысле фамильярное обращение к читателю присутствует на стр. 19, 21: «...смотри, например, ...».

Для обозначения дробной части чисел используется и точка, и запятая (например, стр. 42).

Во многих частях текста пропущены тире (например, при описании параметров после уравнения (1)) и дефисы (например, «начально-краевая задача», стр. 80) – возможно, конечно, это представляет собой артефакт конвертации исходного файла в pdf-формат), тем не менее, соискатель должен был это проконтролировать.

На стр. 42 стилистически некорректная фраза: «Обратим внимание, что ушло (потребовалось?)  $2.336 \pm 0.006$  сек. чтобы ... ».

На рис. 4.1 не подписаны оси. На рис. 3.1 ось времени обозначена прописной буквой  $T$ , хотя до этого она введена как граница интервала изменения времени. Используются разные стили оформления таблиц и рисунков (выравнивание по центру и слева, таблица 3.1 подписана сверху, а таблица 5.1 – снизу). Таблица 1.1 должна быть размещена после упоминания.

Встречаются несогласованные языковые формы, например, «число сегментов..., взят равный...» (стр. 42), «главе, в отличие от предыдущего, ... » (стр. 57), «уравнение диффузионного типа, осложненное эффектами дробных производных, нелинейности в операторах дифференцирования...» (стр. 87), «...программ, предназначенные для решения...» (стр. 89).

Сделанные замечания не влияют на общую положительную оценку научных результатов диссертационной работы и носят рекомендательный характер для дальнейшего улучшения качества представления научных результатов соискателя.

#### **Заключение**

В целом можно заключить, что диссертация Горбовой Татьяны Владимировны «Численные методы исследования дробных моделей популяционной динамики»

