ОТЗЫВ
ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертации Горбовой Татьяны Владимировны
«Численные методы исследования дробных моделей популяционной динамики», представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Диссертационная работа Т.В. Горбовой посвящена построению и исследованию численных методов решения дробно-дифференциальных моделей популяционной динамики, осложненных эффектами нелинейности в операторе дифференцирования и запаздывания по времени. Решение этих задач имеет не только большое теоретическое значение, но и представляет значительный практический интерес. *Актуальность* проведенного автором исследования не вызывает сомнений.

Диссертационная работа включает введение, пять глав, заключения и библиографический список, содержащий 118 наименований. Общий объем диссертации составляет 104 страницы. Структура диссертации отвечает общепринятым требованиям.

Остановимся кратко на содержании основных разделов работы.

Во *введении* с должной подробностью описано современное состояние проблемы, четко сформулированы цели и задачи исследования, выносимые на защиту результаты, определена их научная новизна, а также теоретическая и практическая значимость работы. Дано представление о применяемых методах и приведены сведения о публикациях и апробациях результатов. Приводится краткий обзор результатов диссертации по главам.

Первая глава (с. 19-43) посвящена конструированию и исследованию численных алгоритмов решения начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с нелинейностью в операторе дифференцирования и с эффектом наследственности. Проводится дискретизация задачи, строится неявный численный метод, при этом для учета эффекта наследственности применяется кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением. Для возникающей нелинейной дискретной системы применяется вариант метода Ньютона, сводящий нелинейную систему к последовательности линейных трехдиагональных систем. Большая часть главы содержит обоснование сходимости и устойчивости предложенного алгоритма. Для этого излагаются элементы общей нелинейной разностной схемы с эффектом наследственности. При условиях ограничения на константу Липшица, которые обеспечивают устойчивость, выводится порядок сходимости этой схемы. Производится вложение неявного численного метода в эту схему. Далее разрабатывается более точный численный алгоритм, являющийся аналогом метода Кранка-Николсон, при этом для учета эффекта наследственности применяется кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением. Аналогично неявному методу, возникающая система решается методом Ньютона. Метод исследуется на порядок сходимости, который оказывается большим относительно шага по времени, чем порядок сходимости неявного метода. Эти результаты подтверждаются численными экспериментами на тестовых примерах.

Во второй главе (с. 44-56) изучаются численные алгоритмы для уравнений, дробных по пространственной переменной, без запаздывания, но с эффектом нелинейности в операторе дробного дифференцирования. Дробная производная понимается в смысле Римана-Лиувилля, показатель дробности от 1 до 2, т.е. рассматривается случай супердиффузии. Строится нелинейный аналог схемы Кранка-Никольсон, основу дискретизации дробных производных составляют сдвинутые формулы Грюнвальда-Летникова. Для возникающей системы нелинейных уравнений применяется метод Ньютона, в результате возникает последовательность линейных систем специальной структуры. Эти системы исследуются на разрешимость. Так же, как в первой главе, путем вложения в общую разностную схему, устанавливается порядок сходимости метода. Приводятся тестовые примеры.

В третьей главе (с. 57-70) изучаются численные алгоритмы для уравнения, с дробным порядком по времени, с эффектом запаздывания общего вида, и, главное, с эффектом нелинейности в операторе дробного дифференцирования. Дробная производная понимается в смысле Капуто, показатель дробности от 0 до 1, т.е. рассматривается случай субдиффузии. Именно такие уравнения рассматривались в базовых моделях теории популяции. Строится неявный разностный метод, его основу составляет L1-алгоритм для аппроксимации дробных производных Капуто. Для возникающей нелинейной системы применяется вариант метода Ньютона, сводящий нелинейную систему к последовательности линейных трехдиагональных систем. Далее нелинейная разностная схема исследуется на порядок сходимости. В отличие от первых трех глав, для этого используется техника дробных дискретных неравенств Гронуолла. Результат справедлив при выполнении некоторого, вообще говоря, трудно проверяемого условия, однако в приводимых примерах это условие выполняется.

В четвертой главе (с. 71-76) производится описание программного комплекса, состоящего из программ, предназначенных для численного моделирования систем с нелинейность в дифференциальном операторе, возникающих в популяционной динамике. Также приводится пример работы программного комплекса.

Пятая глава (с. 77-86) посвящена описанию численных экспериментов на модельных примерах из теории популяций. Рассматривается классическая модель Колмогорова-Пискунова-Петровского. Затем в эту модель вводится запаздывание, как в модели Хатчинсона. Далее в модель вводится нелинейность в дифференциальном операторе и дробность по времени, как в модели Шривастовы. Приведенные расчеты показывают работоспособность изученных в диссертации алгоритмов.

В *заключении* подводятся итоги исследования, даются рекомендации и кратко описываются перспективы дальнейших разработок.

Научной новизной, обладают на наш взгляд, следующие результаты:

1. Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе разработан неявный численный метод решения; при этом нелинейные системы алгебраических уравнений, возникающие на каждом временном слое, решаются методом Ньютона. В рамках общей нелинейной схемы для предложенного метода исследована устойчивость и определен порядок сходимости. При этом порядок сходимости зависит не только от шагов дискретизации по времени и пространству, но и от числа итерации при решении нелинейной системы.

2. Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе разработан численный метод, являющийся аналогом метода Кранка-Николсон, для которого исследована устойчивость и определен порядок сходимости.
3. Для дробного по пространственной переменой уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе разработан неявный численный метод. Метод исследован на устойчивость и сходимость путем вложения в общую нелинейную разностную схему.
4. Для модели популяционной динамики дробного по времени порядка с запаздыванием общего вида разработан неявный численный метод, который исследован на устойчивость и определен порядок его сходимости с помощью техники применения дробных дискретных неравенств Гронуолла.

Степень обоснованности научных положений и выводов, сформулированных в диссертации, определяется тем, что все построения и конструкции соответствуют современному уровню математической строгости. Все ключевые утверждения снабжены подробными доказательствами. Основу работу составляют положения, которые разработаны и опубликованы диссертантом (в совместных работах вклад соавторов описан) в серии статей в журналах, известных специалистам. Достоверность этих положений сомнений не вызывает. Результаты проведенных вычислительных экспериментов на тестовых и модельных примерах являются дополнительным подтверждением защищаемых положений.

Полученные результаты неоднократно докладывались и обсуждались на российских и международных конференциях.

Автором диссертации опубликованы 8 статей, из них 6 статей в изданиях, индексируемых системами Scopus и WoS.

Практическая ценность. Построенные новые разностные схемы решения нелинейных задач могут быть использованы при решении актуальных проблем математического моделирования в теории популяций. Отметим, что близкие задачи возникают в математическом моделировании задач газовой динамики.

Замечания к работе.

1. В теореме о порядке невязки (теорема 4) и далее в теоремах о порядках сходимости возникает число λ (лямбда). В доказательстве стоит ссылка на соотношение (1.34). Но в этом соотношении нет числа λ (лямбда), а есть число q. Как они связаны?
2. В главе 3 условие 3.1 представляется крайне неконструктивным. А условие 3.2 представляется достаточно жестким и, вообще говоря, не выполняется даже в простейших примерах. Насколько необходимы эти условия?
3. На странице 88 диссертации дважды написано одно и то же предложение: «Эти, более точные методы, могут быть описаны в виде комплекса программ, предназначенных для решения соответствующих задач в теории популяций и в других науках, например, в газовой динамике». Дважды это предложение написано также на странице 16 автореферата.

Заключение. Сделанные замечания носят технический характер и не влияют на положительную оценку работы в целом. Диссертация Т.В. Горбовой представляет собой законченную научно-квалификационную работу. Материал диссертации изложен подробно в логической последовательности и не содержит заимствований без соответствующих ссылок.

Автореферат диссертации соответствует своему назначению и правильно отражает её содержание. Все выносимые на защиту результаты опубликованы с достаточной полнотой в профильных научных журналах и доступны специалистам. Личный вклад автора описан и не вызывает вопросов.

Считаю, что диссертация Т.В. Горбовой «Численные методы исследования дробных моделей популяционной динамики» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук соответствует требованиям п.9 Положения о присуждении ученых степеней в УрФУ, предъявляемых к кандидатским диссертациям, и научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а её автор Татьяна Владимировна Горбова несомненно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Официальный оппонент:
доктор физ.-мат. наук, профессор,
заведующий отделом прикладных задач
Федерального государственного бюджетного
учреждения науки Института математики и меха
им. Н.Н. Красовского Уральского отделения
Российской академии наук (ИММ УрО РАН)

Короткий
Александр Илларионович

бря 2022 г.

Почтовый адрес организации:
620108, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16;
телефон: +7 (343) 374-83-32;
e-mail: dir-info@imm.uran.ru

Подпись А.И. Короткого заверяю.
Ученый секретарь ИММ УрО РАН,
кандидат физ.-ма

Ульянов Олег Николаевич

оября 2022 г.