Отзыв официального оппонента о диссертационной работе Башкирцевой Ирины Адольфовны «Нелинейные стохастические системы в зонах порядка и хаоса: математическое моделирование, анализ и управление», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

При изучении поведения нелинейных динамических систем весьма важно анализировать их области притяжения или аттракторы. Исследование аттракторов и их качественных преобразований (бифуркаций) является одним из наиболее активно разрабатываемых разделов современной нелинейной динамики. Потребность в теоретическом обосновании обнаруженных в последнее время интересных явлений приводит к новым постановкам и разработкам нового математического аппарата. Значительное влияние этих новых идей испытывает и современная теория управления. Вопросы стабилизации и управления колебаниями, генерации и подавления хаоса привлекают внимание многих исследователей, а присутствие случайных помех является важным дополнительным обстоятельством, которое необходимо учитывать как в решении теоретических вопросов, так и в практической реализации. Это позволяет оценить тему диссертации Башкирцевой И.А. как весьма актуальную. У автора по теме диссертации имеется 49 статей, результаты которых выносятся на защиту. Все они опубликованы в журналах, индексируемых в базах WOS или SCOPUS с высоким рейтингом. Это также подтверждает актуальность работы.

Во Введении автор формулирует цели и задачи диссертации, дает обзор современного состояния исследований в области математического моделирования нелинейных стохастических систем. Здесь акцентируется научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, формулируются основные положения, выносимые на защиту, приводятся сведения, подтверждающие достоверность и апробацию результатов.

В первой главе описаны основные математические результаты по аппроксимации аттракторов дискретных стохастических систем. Известно, что динамика вероятностных распределений в таких системах задается функциональным уравнением Перрона-Фробениуса, решение которого затруднительно даже в одномерном случае. В диссертационной работе автор предлагает методы аппроксимации этих распределений, основанные на технике стохастических линейных расширений в окрестности аттракторов детерминированной системы. Здесь ключевыми теоретическими результатами являются Теоремы 1.1 и 1.2, дающие спектральные критерии существования устойчивых стационарных и периодических решений для систем вторых моментов в случае равновесий и дискретных циклов. Для практического использования этих критериев важной представляется Теорема 1.3, дающая параметрические мажоранты для спектральных радиусов. Здесь также описан алгоритм построения решений соответствующих уравнений для моментов. Далее теория развита для случаев более сложных аттракторов – замкнутых инвариантных кривых и хаотических аттракторов. Здесь автору удалось охватить квазипериодические режимы и многокусочные хаотические аттракторы.

Математические результаты первой главы сопровождаются конструктивными алгоритмами и иллюстративными примерами. Здесь важной является идея автора строить аппроксимацию стохастических аттракторов в форме доверительных областей (эллипсоидов и полос вокруг детерминированных аттракторов), конструируемых на основе развиваемой в диссертации техники стохастической чувствительности.

Во второй главе развивается математический аппарат аппроксимации вероятностных распределений вблизи аттракторов систем с непрерывным временем. Здесь базовой моделью являются стохастические дифференциальные уравнения Ито. В этой главе охвачен более широкий класс математических моделей, часто встречающихся в важных практических приложениях, а именно системы с цветными шумами и системы с периодическими возмущениями. Дано конструктивное описание распространенного на эти случаи варианта техники стохастической чувствительности. Здесь интересным практическим приложением полученных общих теоретических результатов является пример нелинейного осциллятора с цветным шумом, для которого найдена параметрическая зона резонанса, где вследствие высокой стохастической чувствительности осциллятор переходит в режим возбуждения.

В третьей главе автор показывает приложение теории предыдущих глав не только для количественного описания разброса случайных состояний вокруг аттракторов, но и для параметрического анализа разнообразных качественных изменений в динамике, вызываемых стохастическими воздействиями. Дается систематическое описание возможных эффектов, связанных с особенностями фазовых портретов нелинейных систем, областями притяжения сосуществующих аттракторов и сепаратрис. Здесь представлена общая авторская методика исследования широкого круга индуцированных шумом явлений на основе разработанной в диссертации теории стохастической чувствительности, а именно стохастических переходов между аттракторами и их частями, стохастических бифуркаций, генерации новых режимов, в том числе и фантомных аттракторов, стохастической возбудимости и генерации/подавления хаоса. Отметим исследованный в диссертации механизм так называемых обратных стохастических P-бифуркаций, при котором шум увеличивающейся интенсивности уменьшает количество пиков плотности. Общий характер этого явления подтверждается примерами дискретной модели Рулькова (п.3.2.1) и непрерывной модели Лоренца (п.3.2.2).

Четвертая глава посвящена решению новых задач синтеза равновесных и осцилляционных режимов динамических систем с заданными вероятностными характеристиками. Здесь поставлены и решены задачи управления стохастической чувствительностью аттракторов. Охватывается случай дискретных (п.4.1) и непрерывных (п.4.2) систем, в том числе и при неполной информации. В задаче синтеза стохастической чувствительности вопросы управляемости и достижимости в зависимости от геометрии управляющих воздействий сводятся к решению матричных уравнений. Здесь в формальном анализе используется техника псевдообращений. Для двумерного случая получены явные формулы, связывающие матрицу стохастической чувствительности с коэффициентами обратной связи, и детально исследованы вопросы достижимости.

Рассмотрены важные проблемы, связанные с возможной некорректностью задачи стохастического синтеза и разработкой подходящих методов регуляризации. Показано, что задача управления стохастическим циклом непрерывной системы уже в двумерном случае может быть некорректной. Предложен и реализован конструктивный метод регуляризации, эффективность которого иллюстрируется на примере стохастической модели брюсселятора. Среди представленных результатов отметим исследование задачи синтеза в условиях неполной информации и авторская техника управления доверительными областями при решении задачи структурной стабилизации и подавления хаоса.

Пятая глава посвящена математическому моделированию и анализу сложных стохастических режимов динамики нелинейных систем, относящихся к различным разделам механики, химической кинетики, нейронной активности, популяционной, вулканической и климатической динамики. Хочется подчеркнуть, что методика исследования носит междисциплинарный характер и эффективно применяется к объектам разной физической природы, относящихся как к микро, так и макро-уровням. Здесь следует отметить результаты не только по анализу сложных осцилляционных стохастических процессов в нелинейных моделях, но и по управлению ими. Так, например, в п.5.2 показано конструктивное решение задачи подавления нежелательных стохастических выбросов в проточном химическом реакторе в условиях полной и неполной информации, а в п. 5.5.2 — решение задачи предотвращения вымирания популяции.

В шестой главе приводится описание комплекса программ, реализующих разработанные в диссертации численные процедуры и алгоритмы, позволяющие эффективно решать задачи моделирования, анализа и управления стохастическими нелинейными динамическими системами.

Таким образом, в диссертации рассмотрены важные вопросы анализа и синтеза нелинейных динамических систем со случайными параметрами. В работе рассматриваются как дифференциальные уравнения (ДУ), так и разностные уравнения (РУ). Последние могут рассматриваться как аппроксимации ДУ, так и как имеющие самостоятельное значение. Можно лишь упомянуть знаменитое РУ Ферхюльста, положившее начало целому направлению в изучении хаоса. Основные теоретические достижения диссертации сосредоточены вокруг весьма важного оригинального понятия — матрицы стохастической чувствительности. Это понятие дает представление о степени устойчивости или неустойчивости системы к малым случайным возмущениям в точке равновесия, в цикле, или даже в точках кривой притяжения. С помощью этой матрицы формируются эллипсоиды рассеивания, с большой вероятностью содержащие траектории системы. Еще одной важной положительной чертой диссертации является рассмотрение малых стохастических возмущений хаотических аттракторов. Это исследование также проводится с единых позиций стохастической чувствительности. Несомненно важным является изучение задач управления чувствительностью в системах с полной и неполной информацией.

Некоторые замечания.

1. На стр. 7 во Введении говорится, что аналитическое решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова для СДУ возможно только в одномерном случае. С этим следует согласится, но известны также многочисленные работы по численному решению многомерных подобных уравнений, и такой подход, наверное, не следует игнорировать совсем.

2. Далее на стр. 9 утверждается: «Математическое описание динамики вероят-

ностных распределений в системах с дискретным временем дается функциональными уравнениями с операторами Перрона-Фробениуса, допускающими решение только для специально подобранных примеров». Это тоже верно, однако если в правой части РУ есть аддитивное возмущение с плотностью, то допустим рекуррентный пересчет плотностей. Для некоторых примеров вполне возможно сосчитать точное значение плотности на n-ом шаге и сравнить его с величиной, полученной приближенным подходом автора. В частности, это можно проделать с уравнением Ферхюльста (логистическим). Для геометрического распределения и уравнения Ферхюльста соответствующие интегралы можно точно сосчитать. То же верно и для нормального распределения. При любом ε полученная плотность будет наверняка отличаться от приближенного нормального распределения по методу автора. Было бы интересно сравнить результаты.

3. Начиная с 25 стр. главы 1, излагается основной подход работы, состоящий в линеаризации нелинейной системы с малыми шумами в окрестности равновесия, цикла или притягивающей кривой и выписывании уравнений для первых и вторых моментов линеаризованной системы. Указанный основной подход работы является универсальным, т. к. годится для определения стохастической чувствительности РУ в окрестности устойчивого цикла и замкнутой инвариантной кривой. На стр 56 в разделе 1.4 начинается разбор случая хаотического аттрактора для РУ. В хаотическую одномерную нелинейную систему добавляется еще нелинейно входящий малый шум. Теоретическое исследование становится несколько однообразным, поскольку подход используется тот же самый – линеаризация нелинейной системы вдоль неслучайного решения и нулевого шума. Хотя для хаоса есть и другие многочисленные результаты и подходы. Для разности, деленной на ε, получается линейное стохастическое РУ, которое легко исследовать. Здесь понятие хаотического аттрактора точно не определено. Хотелось бы дать определение этого понятия так же, как выше для асимтотической устойчивости и устойчивости в среднем квадратичном. По хаосу и аттракторам издано уже много монографий.

4. На стр. 58 выражение «аттрактор состоит из конечного числа непересекающихся частей, каждая из которых заполняет интервал конечной длины» требует разъяснения, т. к. понятие аттрактора ранее не определено! Рис. 1.4.1 также нужно пояснить. Это диаграмма Ламерея, для квадратичной системы (какой?). Положение несколько проясняется позже на стр. 63., где рассматривается конкретная система Ферхюльста с аддитивно добавленным малым шумом. Из рис. 1.4.2 более или менее понятно, что под хаотическим аттрактором автор понимает набор точек притяжения системы, которых становится очень много и они очень близко расположены друг к другу.

5. Со стр. 68 начинается исследование двумерного хаотического аттрактора. Метод тот же самый. И в дальнейшем никаких новых методов исследования нелинейных уравнений не появляется. Только линеаризация и переход к линейным уравнениям со случайными возмущениями. Причём функций распределения этих возмущений не требуется, достаточны 1-е и 2-е моменты. Для вычисления разброса применяется «правило 3-х σ». В главе 2 со стр. 73 проводится

аппроксимация аттракторов СДУ по тому же плану, что и для стохастических РУ. Приводятся примеры, отдельное внимание уделяется системам с цветным шумом, исследуются частные случаи.

6. В главе 3 рассматриваются стохастические переходы между аттракторами. Под действием случайных возмущений возможны переходы стохастической траектории в область притяжения другого аттрактора. Здесь приводятся примеры как для стохастических РУ, так и для СДУ, поскольку все исследуется единым способом. Отметим, что рис. 3.2.18 уже встречался ранее под другим номером.

7. Поскольку все многочисленные конкретные РУ и СДУ исследуются единым способом при малых стохастических шумах, распределения которых не учитываются, рецензент пришел к выводу (гипотезе), что стохастика при исследовании чувствительности не очень и важна. Действительно, рассматриваются детерминированные системы с хаосом, в которые добавляется малый шум. Можно заменить стохастику неопределенными помехами из малого шара, рассмотреть линеаризованную систему, как выше, и вместо уравнений для матрицы дисперсии и эллипсоидов рассеивания исследовать области достижимости (ОД) полученных линейных систем. То же возможно проделать и для исходных нелинейных систем. Так можно делать практически в любых примерах, исследованных со стохастикой. Размер областей достижимости будет показателем чувствительности. Отметим, что оценка ОД линейных и нелинейных детерминированных систем сейчас активно исследуется многими авторами.

8. В главе 4 со стр. 157 рассматривается управление стохастической чувствительностью для РУ и ДУ в условиях полной и неполной информации. Методы, которые для этого используются — это линейная обратная связь по состоянию и конкретный вид фильтра с подбираемой матрицей усиления. Теория управления и оценивания сейчас существенно продвинулась. Однако диссертация защищается по специальности 05.13.18, и применение новейших методов управления здесь возможно натолкнется на трудности численной реализации. Поэтому, считаю, что применение старых и проверенных методов в данном контексте вполне уместно.

Представленные-здесь замечания играют роль пожеланий для дальнейшей разработки вопроса и не снижают значимости уже проведенных исследований. Теория иллюстрируется на большом количестве примеров из разных областей естествознания. Многие примеры выливаются в самостоятельные исследования, имеющие практическое применение. Работа содержит большое число иллюстраций, поясняющих смысл теории и примеров. Количество рассмотренных конкретных моделей производит большое впечатление.

Диссертационная работа демонстрирует удачное сочетание разработки весьма общего теоретического аппарата и конструктивных приложений, позволяющих получать новые интересные результаты.

Все основные выводы и положения диссертации аккуратно и с необходимой полнотой обоснованы и представлены докладами на международных конференциях. Результаты, вынесенные на защиту, опубликованы в 49 статьях в рецензируемых журналах, причем 19 статей - в журналах первого квартиля. Следует также отметить 11 свидетельств о регистрации программ для ЭВМ. Автореферат правильно отражает содержание работы.

Данная диссертационная работа полностью соответствует паспорту специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Полученные в диссертации результаты можно квалифицировать как научное достижение. Считаю, что диссертационная работа «Нелинейные стохастические системы в зонах порядка и хаоса: математическое моделирование, анализ и управление» соответствует требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней в УрФУ, а ее автор Башкирцева Ирина Адольфовна заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Официальный оппонент: **Ананьев Борис Иванович**

Доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник отдела оптимального управления
ФГБУН «Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского» Уральского отделения РАН Ананьев Б.И.
09.11.2020г.

Почтовый адрес: 620108, г. Екатеринбург, ул. Ковалевской, д. 16
Электронный адрес: abi@imm.uran.ru

Подпись Б.И. Ананьева заверяю:

Ученый секретарь ИММ УрО РАН
кандидат физико-математических наук Ульянов О.Н.