

## ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

Осипова Сергея Ивановича

о диссертации Мунц Натальи Владимировны

«Численный метод решения дифференциальных игр  
быстродействия с линией жизни»,

представленной на соискание

ученой степени кандидата физико-математических наук  
по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

В диссертационной работе Натальи Владимировны Мунц изучается раздел теории дифференциальных игр быстродействия, введенный американским математиком Р. Айзексом. Рассматриваются игры с линией жизни, в которых у второго игрока есть дополнительная возможность выигрыша, связанная с приведением системы на заданное множество (которое, собственно, и называется линией жизни).

**Актуальность** темы подтверждается тем, что получено расширение множества дифференциальных игр, для которых имеются эффективные численные методы решения, а также обосновано применение имеющихся численных методов (предложенных итальянскими математиками М. Барди и М. Фальконе) для решения классических дифференциальных игр быстродействия.

Дифференциальные игры с линией жизни ранее рассматривались отечественными и иностранными математиками как в игровой постановке, так и с точки зрения решения краевых задач для соответствующих уравнений в частных производных типа Гамильтона-Якоби. Однако к настоящему времени, не разработано единой теории, охватывающей все аспекты данного класса задач: существование функции цены, существование обобщенного решения соответствующего уравнения Гамильтона-Якоби, формулировка и сходимости численной процедуры. Диссертационная работа Н. В. Мунц всесторонне исследует данную проблематику. Задачи и положения, выносимые на защиту, включают:

1. обоснование существования функции цены игры;
2. обоснование существования обобщенного решения соответствующего уравнения типа Гамильтона-Якоби и его совпадение с функцией цены;
3. характеристика области совпадения функции цены дифференциальной игры быстродействия с линией жизни и игры с той же динамикой, возможностями игроков и терминальным множеством, но без линии жизни;
4. формулировка сеточного метода численного построения функции цены;
5. обоснование сходимости предложенного метода;
6. программная реализация предложенного метода;
7. разработка процедур визуализации результатов вычислений;
8. проведение приближенных вычислений функции цены для ряда модельных примеров.

Диссертационная работа Н. В. Мунц состоит из введения, списка обозначений, четырех глав, заключения, списка литературы, списка иллюстраций и приложений.

Первая глава связана с теоретическими аспектами проблемы и решает задачи 1–3 из приведенного выше списка. Доказательство существования функции цены проводится в рамках формализации Н. Н. Красовского, традиционной для Свердловской/Екатеринбургской школы по дифференциальным играм.

Задача рассматривается как игра с фазовыми ограничениями на первого игрока. Основная сложность построения доказательств заключается в том, что эти фазовые ограничения открыты. Существование обобщенного решения проводится в рамках подхода, предложенного А. И. Субботиным — рассматриваются минимаксная формализация обобщенного решения. Все эти рассуждения существенным образом используют введенные предположения С3 и С4 о возможности первого игрока на границе терминального множества и второго игрока на линии жизни, соответственно.

Вторая глава связана с численной процедурой, в ней решаются задачи 4–6 из приведенного выше списка. Следует отметить, что здесь уже используется вязкостная формализация обобщенного решения уравнения Гамильтона-Якоби. Это, по всей видимости, обусловлено тем, что идеологически идея численного метода и доказательство его сходимости близки к работам М. Барди и М. Фальконе, которые опираются именно на такую формализацию.

Третья глава посвящена описанию процедур визуализации результатов вычислений для случая игр с двух- и трехмерным фазовым вектором, то есть для случаев, когда требуется визуализировать вещественнозначную функцию двух и трех аргументов — решается задача 7 из приведенного списка. Для функции двух аргументов обсуждается процедура построения разрывного графика. Для функции трех аргументов обсуждается процедура сглаживания поверхности воксельного множества, составленного из параллелепипедов части узлов сетки, на которой ведутся вычисления. Особое внимание уделяется сохранению симметрии получаемых поверхностей для ситуаций, когда теми или иными симметриями обладает исходная задача.

В четвертой главе приводятся результаты счета ряда модельных примеров — решается задача 8. Среди приведенных примеров как игровые задачи, так и задачи управления, которые также могут быть решены предложенным методом. Приводятся примеры двумерных и трехмерных задач. Приводятся примеры задач, в которых множество игры имеет прямоугольную форму.

В списке цитируемой литературы 76 источников, российских и западных. Также приводятся публикации Н. В. Мунц по теме диссертации в количестве 13 работ.

Приложения включают вспомогательные теоретические сведения, на которые опирается основная часть диссертации. Одно из приложений (приложение А.3) представляет собой вспомогательный результат Н. В. Мунц, связанный с доказательством эквивалентности (с точки зрения получаемых обобщенных решений) краевых задач для уравнения Гамильтона-Якоби, используемых в Главах 1 и 2 диссертации.

По моему мнению, результаты диссертационной работы Н. В. Мунц являются новыми поскольку, сводятся воедино построения теоретического характера, связанные с существованием функции цены и обобщенного решения уравнения Гамильтона-Якоби, и вопросы численных методов для построения этих объектов.

Можно утверждать, что результаты получены в результате самостоятельных исследований и частично представляют собой адаптацию общей теории и известных подходов к конкретному классу задач, а частично — оригинальные доказательства, разработанные ею самостоятельно для преодоления проблем, возникающих при использовании общей теории.

Все теоретические утверждения сопровождаются строгими доказательствами, что говорит о достоверности и обоснованности полученных в работе результатов.

Автореферат полно и корректно отображает содержание диссертации.

На защиту выносятся следующие положения:

1) обоснование существования функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни (теорема 1.2);

2) обоснование существования непрерывного обобщенного (минимаксного) решения краевой задачи для уравнения Гамильтона-Якоби, соответствующей дифференциальной игре оптимального быстрогодействия с линией жизни (предложения 1.5, 1.6), и совпадение его с функцией цены такой игры (теоремы 1.3, 1.4);

3) характеристика области совпадения функций цены дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни и без нее (теоремы 1.5, 1.6);

4) формулировка численной схемы построения непрерывной функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни, доказательство ее сходимости к вязкостному решению соответствующей краевой

задачи для уравнения Гамильтона-Якоби и ее программная реализация (предложения 2.1–2.3, теорема 2.1);

5) программная реализация предложенной численной схемы (разделы 2.4–2.8); модификация и программная реализация алгоритмов визуализации трехмерных множеств – Marching Cubes (раздел 3.1) и HC-алгоритма (разделы 3.2, 3.3); программная реализация алгоритма восстановления графика разрывной функции двух аргументов (раздел 3.4); исследование качества визуализации при применении их к представлению результатов решения дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни (глава 4).

### Замечания по диссертационной работе:

1. Досадная краткость описания программной реализации предложенной численной процедуры и задач, решенных в процессе написания программы, в частности, предпринятых оптимизаций производительности предложенной вычислительной программы.
2. Отсутствие государственной регистрации программ, реализующих численную процедуру и процедуры визуализации.
3. Отсутствие оценки трудоемкости реализации программного кода в условных человеко-годах, например, согласно Брукс, Ф. «Мифический человеко-месяц, или Как создаются программные системы.» - СПб.: Питер, 2021. - 368 с.

Считаю, что диссертационная работа, выполненная Натальей Владимировной Мунц, представляет собой самостоятельно проведенное завершённое научное исследование. Н. В. Мунц продемонстрирована высокая квалификация во всех областях направления исследования по специальности 1.2.2: созданы новые математические модели, разработаны новые численные методы, создан комплекс программ для их реализации. Программы отлажены, протестированы. Отмеченные недостатки диссертации не умаляют качества проделанной работы и не снижают ее положительной оценки.

Диссертация Н. В. Мунц «Численный метод решения дифференциальных игр быстрогодействия с линией жизни» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук соответствует требованиям п.9 Положения о присуждении ученых степеней УрФУ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, и паспорту научной специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а её автор Мунц Наталья Владимировна заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

02 июня 2023 г.

Официальный оппонент  
Осипов Сергей Иванович,  
кандидат физико-математических наук,  
Доцент департамента математики, механики и компьютерных наук  
Института естественных наук и математики  
ФГАОУ ВО «УрФУ имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,  
620002, Свердловская область, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19,  
тел.: +7 (343) 3507521,  
[Sergei.Osipov@urfu.ru](mailto:Sergei.Osipov@urfu.ru),

Подпись *Осипова С.И.*  
Закрываю: вед. документовед  
*С.В. Мурова*

