

Отзыв

официального оппонента Мазалова Владимира Викторовича на диссертационную работу Мунц Натальи Владимировны «Численный метод решения дифференциальных игр быстрогодействия с линией жизни», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертационная работа Н.В. Мунц посвящена исследованию комплекса вопросов, связанных с задачами оптимального быстрогодействия в ситуации конфликта. Особенностью круга изучаемых задач является наличие *линии жизни* – множества, на котором второй игрок безусловно выигрывает. Речь идет о доказательстве существования функции цены такой игры, существования обобщенного решения уравнения Гамильтона-Якоби, формируемого на основе исходной игры, и их совпадения. Также приводятся и обосновываются утверждения, характеризующие совпадение функции цены дифференциальной игры с линией жизни и функции цены игры, в которой присутствует только терминальное множество. Задачи с линией жизни берут начало в исследованиях Р. Айзекса, американского математика, одного из основоположников теории дифференциальных игр в США. Соответствующие постановки предложены им в 1950-е годы и изложены в его известной книге «Дифференциальные игры». В дальнейшем задачи с линией жизни и эквивалентные им изучались как в СССР, так и в западных странах. Свой вклад в изучение внесли Л.А. Петросян, применявший геометрический подход; Н.Н. Красовский и А.И. Субботин, предложившие формулировки дифференциальных игр с фазовыми ограничениями для первого игрока; французские математики М. Quincampoix, Р. Cardaliaguet, Р. Saint-Pierre, основывавшиеся на теории дифференциальных включений и теории выживаемости и исследовавшие игры с разделенной динамикой, в которых у каждого игрока свое целевое множество; и другие. Однако вплоть до текущего момента не сформулирована аккуратно теория дифференциальных игр с линией жизни в объеме, охватывающем все де-факто стандартные элементы: функцию цены и решение соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона-Якоби, формируемого на основе исходной игры. Отсюда проистекает **актуальность** диссертационного исследования Н.В. Мунц, в котором осуществлен именно такой комплексный подход к рассмотрению данной задачи.

Однако в рамках работы уделяется внимание также и численному методу приближенного построения функции цены дифференциальной игры с линией жизни как обобщенного решения соответствующей краевой задачи. Предлагаемый численный метод в своей алгоритмической части повторяет процедуру, предложенную в 1990-2000-е годы группой итальянских математиков под руководством М. Bardi и М. Falcone. Несмотря на то, что, в целом, идея построения заимствована автором, существенные усилия потребовались, чтобы обосновать сходимость такой процедуры в рамках иной задачи. Сходимость была доказана также для полилинейной аппроксимации конструируемой функции между узлами сетки, в то время как у итальянских математиков доказательство проведено только для кусочно-линейной аппроксимации.

Наряду с теоретическими исследованиями, Н.В. Мунц провела и существенную практическую работу, связанную с разработкой компьютерных реализаций предложенной численной процедуры, а также ряда вспомогательных программ для визуализации результатов, получаемых для игр с фазовым

вектором размерности два или три. Ею создана параллельная вычислительная программа, использующая возможности языка C# для одновременной обработки больших массивов данных в нескольких исполняемых потоках, независимо работающих на ядрах процессора. Программы, связанные с визуализацией, реализуют оригинальные авторские идеи и восстанавливают трехмерные объекты, представляющие функцию цены. Для случая двумерного фазового вектора предложен и реализован алгоритм для аккуратного восстановления поверхности графика разрывной функции цены. Для случая трехмерного фазового вектора естественным представлением функции цены является набор множеств уровня, которые при восстановлении из результатов счета на сетке имеют воксельную структуру. Такие множества состоят из кубиков, навешенных на узлы сетки, и, как следствие, имеют весьма изломанную поверхность, требующую сглаживания. В диссертации предложена модификация классического алгоритма MarchingCubes для сглаживания таких поверхностей. Модифицированный алгоритм восстанавливает триангуляцию поверхности множества, симметричную относительно координатных плоскостей, осей или какого-то узла сетки, если исходное множество обладало такой симметрией. Исследовано качество визуализации при совместном использовании модифицированного алгоритма MarchingCubes и других алгоритмов сглаживания поверхностей.

Основными являются следующие результаты диссертационной работы:

- 1) обоснование существования функции цены дифференциальной игры оптимального быстрого действия с линией жизни;
- 2) обоснование существования непрерывного обобщенного (минимаксного) решения краевой задачи для уравнения Гамильтона-Якоби, соответствующей дифференциальной игре оптимального быстрого действия с линией жизни, и совпадение его с функцией цены такой игры;
- 3) характеристика области совпадения функций цены дифференциальных игр оптимального быстрого действия с линией жизни и без нее;
- 4) формулировка численной схемы построения непрерывной функции цены дифференциальной игры оптимального быстрого действия с линией жизни, доказательство ее сходимости к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона-Якоби и ее программная реализация;
- 5) программная реализация алгоритма Marching Cubes и HC-алгоритма и исследование качества визуализации при применении их к представлению результатов решения дифференциальных игр оптимального быстрого действия с линией жизни.

Все научные положения, выводы и рекомендации, выносимые на защиту диссертационной работы Н.В. Мунц, являются **обоснованными** в полной мере. **Достоверность полученных результатов** обеспечивается строгими выводами и математическими доказательствами, воспроизводимостью вычислительных экспериментов, сопоставлением с известными из литературы результатами.

Научная новизна работы заключается в следующем. По всей видимости, впервые изложено комплексное исследование дифференциальных игр с линией жизни, включающее теоретико-игровой подход, подход на основании уравнений Гамильтона-Якоби и численных методов. Доказаны важные с точки зрения практического применения численные схемы теоремы о совпадении функции цены дифференциальной игры с линией жизни и функции цены игры, в которой присутствует только терминальное множество. Насколько известно оппоненту, новым является и применение полилинейной аппроксимации в численных методах, связанных с дифференциальными играми. Использование такой

аппроксимации позволяет получать более точные результаты при тех же мелкостях разбиений.

По существу работы возникли следующие **вопросы**, относящиеся, скорее, к изложению результатов, а не к их содержанию:

1. В главе 1 обобщенные решения краевой задачи для уравнения Гамильтона-Якоби рассматриваются как минимаксные в формализации А.И. Субботина. В главе 2 те же обобщенные решения рассматриваются как вязкостные в формализации M.G. Crandall и P.L. Lions. Нигде не объясняется переход от одной формализации к другой, что вызывает некоторое недопонимание у читателя.
2. В главе 1 значительная часть доказательства теоремы о существовании функции цены дифференциальной игры быстрого действия с линией жизни носит геометрический характер (предложения 1.2-1.4), в то время как формализация Н.Н. Красовского и А.И. Субботина, используемая в диссертации, имеет алгебраический характер. Чем объясняется использование таких подходов?
3. Нет анализа сложности предложенных алгоритмов.

Указанные вопросы не носят принципиального характера и не умаляют качества результатов, полученных Н.В. Мунц в ходе диссертационного исследования.

Диссертация в полном объеме соответствует критериям Положения о присуждении ученых степеней в ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», которым должна отвечать диссертация на соискание ученой степени кандидата наук. Тематика и содержание диссертации соответствует паспорту научной специальности 1.2.2 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

На основании анализа текстов диссертации и автореферата можно сделать следующее **заключение**. Диссертация Н.В. Мунц представляет собой законченную научно-квалификационную работу, которая в полной мере отвечает требованиям п.9 Положения о присуждении ученых степеней в УрФУ, предъявляемых к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 - Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

27 мая 2023 г.

Официальный оппонент
Мазалов Владимир Викторович,
доктор физико-математических наук,
директор Института прикладных математических исследований
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
ФИЦ Карельский научный центр РАН,
620990, Петрозаводск, ул. Пушкинская 116
тел.: 8(8142)781108
e-mail: vmazalov@krc.karelia.ru

Подпись Мазалова В.В. заверяю.

*Ст. Специалист
ИТМИ КарНЦ РАН
(Злобин)
29.05.2023*

