

ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертации Мунц Натальи Владимировны
**«Численный метод решения дифференциальных игр
быстродействия с линией жизни»,**
представленной на соискание
ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ»

Актуальность темы диссертации

Диссертационная работа Н.В. Мунц связана с теоретическим и численным исследованием дифференциальных игр быстродействия с линией жизни. Понятие «линии жизни» было предложено Р. Айзексом в его книге «Дифференциальные игры». Согласно Р. Айзексу, линия жизни – множество, на котором выигрывает второй игрок в противоположность терминальному множеству, на котором выигрывает первый игрок. В диссертации актуальность данной задачи обосновывается тем, что в существующих сеточных численных методах решения дифференциальных игр быстродействия применяется конечная сетка, на внешней границе которой необходимо задавать краевое условие. Естественным способом задания этого условия является постулирование выигрыша второго игрока (то есть равенства результата бесконечности). Такой подход фактически приводит к рассмотрению задач с линией жизни.

Исследования в этой области проводились многими математиками: собственно Р. Айзексом, Л.А. Петросяном, П. Кардальеге, М. Квинкампуа, П. Сент-Пьер. Дифференциальные игры с фазовыми ограничениями на первого игрока, которые являются вариантом игр с линией жизни, изучались Н.Н. Красовским и А.И. Субботиним. Представленная диссертационная работа комплексно рассматривает данную задачу: в рамках теории дифференциальных игр изучается существование функции цены игры; в рамках теории обобщенных решений уравнений типа Гамильтона-Якоби обосновывается существование соответствующего обобщенного решения и его совпадение с функцией цены; формулируется сеточный метод приближенного численного построения функции цены и обосновывается его сходимость.

Краткое содержание диссертации

Структурно рассматриваемая диссертационная работа состоит из введения, списка обозначений, четырех глав, заключения, списка литературы, списка иллюстраций и приложений. **Первая глава** включает постановку дифференциальной игры быстродействия с линией жизни, введение формализации (Н.Н. Красовского), в рамках которой проводится исследование, формулировку и доказательство теоремы о существовании функции цены. При этом существенно используется геометрический подход, опирающийся на введенные условия динамического преимущества игроков на границе терминального множества и линии жизни. Далее в тех же предположениях доказывается существование минимаксного обобщенного решения краевой задачи для уравнения типа Гамильтона-Якоби, соответствующего рассматриваемой игре. Также обосновывается совпадение обобщенного решения и функции цены. Первая глава завершается доказательством теорем, в каком-то смысле, отвечающих на вопрос, лежащий в начале исследования: в какой области имеется совпадение функций цены игры с линией жизни и без нее.

Вторая глава посвящена вопросам, связанным с численным методом. Приводится формулировка метода, который фактически совпадает с методом, предложенным М. Барди и М. Фальконе. Несмотря на совпадение алгоритмов, сходимость метода должна быть

обоснована при применении к новой задаче, что и делается далее. Кроме того, сходимость метода обосновывается и для случая использования полилинейной аппроксимации функции между узлами сетки (в исходной процедуре используется кусочно-линейная аппроксимация). Также описывается программная реализация предложенного теоретического алгоритма.

В **третьей главе** описываются методы визуализации, применявшиеся для представления результатов счета разработанной компьютерной программы в задачах с двух- и трехмерным фазовым вектором. Н.В. Мунц использовала существующие алгоритмы восстановления трехмерных поверхностей и модифицировала их для получения геометрических объектов, адекватно воспроизводящих специфические черты визуализируемых функций: линии разрыва функции, симметричность функции относительно координатных плоскостей. Предложенные модификации были реализованы автором в виде компьютерных программ.

В **четвертой главе** приводятся результаты работы разработанной вычислительной программы на ряде модельных примеров дифференциальных игр и задач оптимального управления. Рассматриваются как классические задачи – материальная точка на прямой, машина Дубинса с исходным трехмерным фазовым вектором и в редуцированном виде с двумерным, задача «шофер-убийца» (с машиной Дубинса) – так и их модификации – задача «шофер-убийца» с машиной Ридса-Шеппа, задача «изотропные ракеты» с ограничением на величину скорости догоняющего объекта. По всей видимости, примеры подбирались таким образом, чтобы можно было провести сравнение результатов работы программы автора с результатами, полученными другими исследователями при помощи других вычислительных методов.

Далее следуют заключение и список литературы, состоящий из 89 источников, как русскоязычных, так и англоязычных. Данный список включает также и публикации Н.В. Мунц по теме диссертации, которые выделены в конце списка. Всего имеется 13 публикаций автора по теме диссертации. Из них 6 русскоязычных, 1 выполнена индивидуально, 2 опубликованы в журналах из списка ВАК, в том числе 8 проиндексированы в системе Scopus.

Диссертация завершается списком иллюстраций и приложениями, часть из которых содержит вспомогательную информацию общематематического плана, используемую в диссертации (приложения А.1, А.2, А.4, А.5), а часть – вспомогательные результаты, полученные автором (приложение А.3).

Новизна и достоверность результатов

По мнению оппонента, результаты, представленные в диссертации Н.В. Мунц являются новыми и получены ею самостоятельно. Следует отметить, что часть результатов (существование функции цены, существование минимаксного решения краевой задачи для уравнения типа Гамильтона-Якоби) является следствием из общей теории. Однако для обоснования этого следования автору потребовалось доказать ряд вспомогательных утверждений (предложения 1.1–1.4, 1.5–1.6 соответственно). Достоверность и обоснованность полученных в работе результатов определяется их строгими доказательствами. Автореферат полно и корректно отображает содержание диссертации.

На защиту выносятся следующие **положения**:

- 1) обоснование существования функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни (теорема 1.2);
- 2) обоснование существования непрерывного обобщенного (минимаксного) решения краевой задачи для уравнения Гамильтона-Якоби, соответствующей дифференциальной игре оптимального быстрогодействия с линией жизни (предложения 1.5, 1.6), и совпадение его с функцией цены такой игры (теоремы 1.3, 1.4);
- 3) характеристика области совпадения функций цены дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни и без нее (теоремы 1.5, 1.6);

4) формулировка численной схемы построения непрерывной функции цены дифференциальной игры оптимального быстрогодействия с линией жизни, доказательство ее сходимости к вязкостному решению соответствующей краевой задачи для уравнения Гамильтона-Якоби и ее программная реализация (предложения 2.1–2.3, теорема 2.1);

5) программная реализация предложенной численной схемы (разделы 2.4–2.8); модификация и программная реализация алгоритмов визуализации трехмерных множеств – Marching Cubes (раздел 3.1) и HC-алгоритма (разделы 3.2, 3.3); программная реализация алгоритма восстановления графика разрывной функции двух аргументов (раздел 3.4); исследование качества визуализации при применении их к представлению результатов решения дифференциальных игр оптимального быстрогодействия с линией жизни (глава 4).

Замечания к диссертации

1. Условия С.3, С.4 динамического преимущества игроков на границах соответствующих множеств, наложенные на динамику игры, вообще говоря, являются достаточно нетипичными для большинства классических игр и задач управления. Как отмечается в тексте диссертации, выполнение этих условий приводит к непрерывности функции цены. При этом примеры в главе 4, в основном, соответствуют играм с разрывной функцией цены, то есть играм, в которых эти условия не выполняются, и корректность применения алгоритма к которым не обосновано. Пример 4.7, в котором условия все-таки выполняются, выглядит несколько искусственным. Для хорошей демонстрации возможностей алгоритма было бы разумно подобрать хорошие примеры, удовлетворяющие всем условиям, накладываемым на изучаемую задачу.

С другой стороны, хорошее совпадение результатов работы предложенного алгоритма с результатами других авторов в случае разрывной функции цены игры обнадеживает и обещает возможность обоснования корректности работы алгоритма и в общем случае.

2. Проводить более тонкие оценки множества достижимости системы в теоремах о совпадении функции цены классической игры и игры с линией жизни для получения более хороших оценок множеств совпадения этих функций.
3. Значительная часть работы посвящена программным реализациям тех или иных алгоритмов (авторская вычислительная процедура, алгоритмы восстановления визуализируемых трехмерных объектов). Однако в тексте диссертации не приводится информация о государственной регистрации программ, реализующих разработанные автором алгоритмы.
4. Встречаются опечатки. Например на стр. 109 (седьмая строка сверху) в первом уравнении системы пропущен знак минус у первого слагаемого первой строки и у второго слагаемого индекса P должен быть заменен на индекс E .

Заключение

По мнению оппонента, диссертационная работа Н.В. Мунц является законченной самостоятельно выполненной научно-квалификационной работой. Полученные результаты, как связанные с теоретическими построениями, так и в плане программных реализаций, являются новыми и представляют интерес для специалистов в области оптимального управления и дифференциальных игр. Предложенные доказательства теоретических утверждений представляются логически правильными и полными, их изложение достаточно подробно и последовательно. Приведенные выше замечания к диссертации носят, скорее, рекомендательный характер и не оказывают влияния на положительную оценку работы.

Диссертация Н.В. Мунц «Численный метод решения дифференциальных игр быстрого действия с линией жизни» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук соответствует требованиям п.9 Положения о присуждении ученых степеней УрФУ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, и паспорту научной специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а её автор Мунц Наталья Владимировна заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ».

31 мая 2023 г.

Официальный оппонент
Григоренко Николай Леонтьевич,
доктор физико-математических наук,
профессор факультета вычислительной математики и кибернетики
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
Высшего образования «Московский государственный университет имени
М.В.Ломоносова»,
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М.В.Ломоносова, 2 УК, факультет ВМК
тел.: 8 (916) 583 01 89
e-mail: grigor@cs.msu.ru

Подпись Григоренко Н.Л. заверяю.
Зам декана факультета ВМК МГУ,
Профессор

Фомичев В.В.

