Отзыв официального оппонента

на диссертацию Ибрахима Абделрахима Кхалифа Омрана «Finite-difference and spectral-Galerkin methods in models, described by fractional partial differential equations with delay» («Конечно-разностные и спектрально-Галеркинские методы в моделях, описываемых дробными уравнениями в частных производных с запаздыванием»), представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

В диссертационной работе А.К.О. Ибрахима исследуется актуальная проблема разработки численных методов решения моделей, описываемых дробными уравнениями в частных производных с запаздыванием. Основные задачи рассматриваемой работы состоят в том, как численно аппроксимировать дробную производную Капуто по времени, дробные производные Рисса по пространству и запаздывание по времени при создании последовательной численной схемы.

Актуальность работы связана с необходимостью численного исследования дробных моделей с запаздыванием, возникающих в сложных математических моделях анормального поведения в естествознании.

Краткая характеристика основного содержания работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитируемой литературы.

Во **введении** обосновывается актуальность и дается обзор современного состояния исследований по данной теме.

В **первой главе** описывается численный метод для нелинейных пространственно-временных дробных уравнений реакции-диффузии с запаздыванием. Разностная $L1$-формула аппроксимирует задачу по временни на равномерной сетке. Затем с помощью соответствующей базисной функции в терминах полиномов Лежандра строится спектральный метод Галеркина для дискретизации пространственного оператора. Кроме того, приближения Тейлора используются для дискретизации члена нелинейной функции источника. В результате аппроксимаций возникает полностью дискретная схема, которая может быть выражена в виде линейной системы в матричной форме, что позволяет эффективно получать приближенные решения. Основное преимущество предлагаемого метода заключается в том, что разностная схема реализуется линейно. Обоснование устойчивости и сходимости проводится с использованием дискретных энергетических оценок, выражающихся в применении подходящего варианта дискретных дробных неравенств Гронуолла. Доказаны безусловная устойчивость и порядок сходимости $2-\beta$, $0<\beta<1$

относительно шага дискретизации по времени для предложенной схемы. Полученным теоретическим результатам соответствуют численные эксперименты на специально подобранных тестовых примерах.

Во **второй главе** разработана спектральная схема $L1$-Галеркина для обобщенных нелинейных многочленных пространственно-временных дробных уравнений реакции-диффузии с запаздыванием. Эта глава является обобщением первой. Автор строит гибридную численную схему на равномерной сетке на основе комбинации разностной $L1$-формулы для временного направления и спектрального метода Галеркина–Лежандра для пространственного направления. Подход, используемый для доказательства устойчивости и теоремы о порядке сходимости, близок к тому, что использовался в первой главе. Однако возникают новые трудности принципиального характера, связанные с анализом многочленных уравнений в частных производных с дробным по времени и запаздыванием. Предложена специальная форма неравенства Гронуолла. Доказано, что предложенный метод безусловно устойчив и имеет порядок сходимости $2-\beta_m$, $0<\beta_0<\beta_1<...<\beta_m<1$ по времени при одновременной экспоненциальной скорости сходимости по пространству. В конце главы представлены результаты численного эксперимента, иллюстрирующие доказанные теоремы.

В **третьей главе** автор разрабатывает и исследует эффективный линейный численный метод для нелинейной дробной модели реакции-диффузии Шнакенберга, которая включает влияние запаздывания. Новая задача связана с соответствующей нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка по времени и пространству. Численные решения для этой модели получены путем построения эффективного численного алгоритма, сочетающего $L1$-приближение со спектральным методом Лежандра-Галеркина. Приближенное решение системы с запаздыванием исследовано на сходимость и устойчивость. Для исследования устойчивости и сходимости численной схемы использовалась соответствующая модификация дискретного дробного неравенства Гронуолла. Показано, что предложенный метод безусловно устойчив, экспоненциально быстро сходится по пространству и сходится по времени с порядком $2-\beta$, $0<\beta<1$. В конце главы представлены результаты численного эксперимента, подтверждающие доказанные теоремы и объясняющие влияние временных и пространственных дробных порядков на динамику поведения решений.

В **четвертой главе** для повышения точности разрабатывается численная схема высокого порядка, решающая ту же задачу, что и в первой главе. Этот подход был реализован путем построения эффективного численного алгоритма, который объединяет эффективность аппроксимации типа $L2-1\sigma$ наряду с эффективностью галеркинского спектрального метода Лежандра. Техника доказательства устойчивости и сходимости близка к изложенной в предыдущих главах; автор использует разработанное $L2-1\sigma$ дробное неравенство типа Гронуолла в дискретной форме. Благодаря этому, оценки погрешности для предложенной схемы были получены без каких-либо ограничений по сравнению с более ранними исследованиями. Кроме того, показано, что численный метод является безусловно устойчивым, со сходимостью второго порядка по времени и с экспоненциальной скоростью по пространству. Приведенный численный эксперимент подтверждает теоретические результаты.

В **пятой главе** описан разработанный программный комплекс для численного исследования моделей, характеризуемых дробными уравнениями в частных производных с запаздыванием. Приведены примеры использования пакета программ для численного решения дифференциальных уравнений с дробными пространственно-временными производными и нелинейным запаздыванием.

Диссертационная работа представляет собой законченное научное исследование.

Автореферат диссертации полно и правильно отражает ее содержание.

К работе имеются следующие **замечания и вопросы**:

1. Статьи по теме диссертации опубликованы в журналах с высоким импакт-фактором, вместе с тем нет хотя бы одной статьи (или свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ) без соавторов.

2. На стр. 61 в таблице 3 явно не отражены значения β_r, $r = 1,...,m$, что затрудняет анализ численных расчетов.

3. Результаты численных расчетов получены с помощью формулы 1.50 (стр. 46). Отношение $Order = \dfrac{\ln \| e(N, M_1) \|}{\ln {}^{1}\!/_{M_1}}$ дает более реальный порядок сходимости схемы. Для анализа желательно использовать обе эти формулы.

4. Часто в работе используется неравенство Коши с ε, но трактуется как неравенство Юнга, а оператор дробной производной Герасимова-Капуто трактуется как Капуто.

5. В тестовых примерах точное решение подбирается в основном без зависимости от порядков дробных производных по пространству и времени.

6. Одной из значимых характеристик дробных производных по времени является начальная особенность. Численные схемы предполагают гладкость решения. В работе практически нет численных расчетов, показывающих влияние на численные свойства разработанных схем нарушение требуемой гладкости решения.

7. Численные схемы построены для одномерных по пространству задач. Можно ли распространить полученные результаты на многомерные задачи?

Эти замечания не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Заключение

Я считаю, что диссертация Ибрахима А.К.О. «Finite-difference and spectral-Galerkin methods in models, described by fractional partial differential equations with delay» («Конечно-разностные и спектрально-Галеркинские методы в моделях, описываемых дробными уравнениями в частных производных с запаздыванием»), представленная на соискание степени кандидата физико-математических наук, отвечает всем требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней в УрФУ для кандидатских диссертаций и научных специальностей 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а ее автор Ибрахим Абдельрахим Кхалифа Омран заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Кандидат физико-математических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник
отдела Вычислительных методов
Института прикладной математики и
автоматизации – филиала ФГБНУ «Федеральный
научный центр «Кабардино-Балкарского
научного РАН» Бештоков Мурат Хамидбиевич

07.03.2023

Почтовый адрес организации: 360000,
Кабардино-Балкарская Республика, г. Нальчик,
ул.Шортанова, 89А;
телефон: 8(8662) 42-66–61;
e-mail: ipma@niipma.ru

Подпись Бештокова М.Х. заверяю.

Ученый секретарь ИПМА КБНЦ РАН Х