

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации

Ибрахима Абделрахима Кхалифа Омрана

«Finite-difference and spectral-Galerkin methods in models, described by fractional partial differential equations with delay» («Конечно-разностные и спектрально-Галеркинские методы в моделях, описываемых дробными уравнениями в частных производных с запаздыванием»), представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертационная работа А. К. О. Ибрахима посвящена построению и исследованию численных методов решения для некоторых моделей, описываемых уравнениями в частных производных, осложненных действием операторов дифференцирования, дробного во времени и пространству, а также эффектом запаздывания по времени. Решение для этих типов моделей имеет не только большое теоретическое значение, но и значительный практический интерес. Актуальность исследования, проведенного автором, не вызывает сомнений.

Диссертационная работа включает введение, пять глав, заключение и библиографический список, содержащий 190 наименований. Общий объем диссертации составляет 135 страниц. Структура диссертации соответствует общепринятым требованиям.

Кратко остановимся на содержании основных разделов работы.

Во введении достаточно подробно описывается современное состояние проблемы, формулируются цели и задачи исследования, определяются результаты, подлежащие защите, их научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы. Даётся представление об использованных методах, сведения о публикациях и апробации результатов. Дан краткий обзор результатов диссертации по главам.

Первая глава (стр. 27-47) посвящена построению и анализу линеаризованной конечно-разностной и спектральной схемы Галеркина–Лежандра для нелинейного уравнения реакции–диффузии с дробной производной Капуто по времени и дробной производной Рисса по пространству с эффектом запаздывания. Проведена полная дискретизация по временному и пространственному направлениям задачи; построен явный численный метод. Затем решение для полностью дискретной системы расширяется с использованием базовых функций в терминах полиномов Лежандра. Таким образом, единая полная дискретная схема выражается в виде линейной системы в матричной форме. В остальной части главы обосновывается устойчивость и сходимость полудискретного и полностью дискретного приближения. Устойчивость и сходимость полудискретного приближения доказываются привлечением дискретного дробного неравенства Халаная. В то же время устойчивость и сходимость полностью дискретной схемы исследуются с использованием дискретных дробных неравенств Гронуолла, которые показывают устойчивость и сходимость предлагаемого метода. В основе схемы лежит явный численный метод. Метод исследован на порядок сходимости, показано, что разработанная схема имеет порядок $2-\beta$ относительно шага дискретизации по времени и экспоненциальную скорость сходимости относительно степени многочлена n по пространству. Экспоненциальный порядок сходимости достигается для пространственного направления за

счет использования спектральной схемы Галеркина-Лежандра. Все результаты численного эксперимента согласуются с теоретическими результатами.

Во второй главе (стр. 48-62) представлен численный алгоритм для обобщенных нелинейных многочленных пространственно-временных дробных уравнений реакции-диффузии с запаздыванием. Многочленное уравнение диффузии с дробным временем является частным случаем уравнения диффузии с дробным временем распределенного порядка. Эти уравнения могут моделировать сложные многоскоростные физические процессы. Разработана явная численная методика, состоящая в полной дискретизации по времени и пространству. Напоминается соответствующая версия дискретного дробного неравенства Гронуолла, которая предназначена для анализа многочленных уравнений в частных производных с дробным временем. Также как в первой главе, были исследованы устойчивость и сходимость, доказано, что разработанный метод устойчив и имеет порядок сходимости $2 - \beta_m$ по времени и экспоненциальную скорость сходимости по пространству. Приведены численные эксперименты, демонстрирующие эффективность теоретических результатов.

В третьей главе (стр. 63-83) представлен новый численный алгоритм для дробной модели реакции-диффузии Шнакенберга с эффектом временной задержки. Эта модель представляет собой естественную систему автокатализа, часто встречающуюся в различных биологических системах. Проведена полная дискретизация по времени и пространственному направлению задачи. Численные решения для этой модели получены путем построения эффективного численного алгоритма для аппроксимации дробных производных Рисса по пространству и дробных производных Капуто по времени. Оценки погрешности полученных решений получаются путем применения соответствующего дискретного дробного неравенства Гронуолла. Разработанный метод исследован на устойчивость и порядок сходимости и доказано, что полученная схема имеет порядок $2 - \beta_n$ по времени и экспоненциальную скорость сходимости в пространстве. Приведены численные примеры, чтобы показать влияние дробных порядков времени и пространства на поведение динамики решений нелинейной дробной модели Шнакенберга с запаздыванием по сравнению с целочисленной моделью.

В четвертой главе (стр. 84-99) описан численный алгоритм высокого порядка для решения нелинейных пространственно-временных уравнений дробной диффузии с эффектом запаздывания. Проведена полная дискретизация рассматриваемой задачи, как по времени, так и по пространству. Далее проводится всестороннее исследование устойчивости и скорости сходимости для полностью дискретной схемы. Теоретически показано, что численное решение предложенной схемы является безусловно устойчивым, со сходимостью второго порядка по времени и порядка экспоненциальной скорости сходимости по пространству. При этом, подходящее дискретное дробное неравенство Гронуолла затем используется для количественной оценки погрешности для полученного решения. Результаты приведенного численного эксперимента на тестовой задаче близко соответствуют теоретическому исследованию для оценки погрешности предложенного метода.

В пятой главе (стр. 100-110) описывается пакет прикладных программ, состоящий из программ, предназначенных для численного моделирования моделей, описываемых дробными уравнениями в частных производных с запаздыванием. Представлены основные характеристики разработанного программного комплекса, позволяющего моделировать влияние временных и пространственных дробных порядков на поведение динамики решений нелинейных дробных моделей с запаздыванием. Также приведены два примера работы программного комплекса.

В заключении подводятся итоги исследования, даются рекомендации и кратко описываются перспективы дальнейшего развития.

По нашему мнению, *научную новизну* представляют следующие результаты:

1. Сконструирован явный численный метод для нелинейных пространственно-временных дробных уравнений реакции-диффузии с запаздыванием по времени. Исследована устойчивость и сходимость полудискретных и полностью дискретных схем с помощью дробных неравенств Халаная и дробных неравенств Гронуолла соответственно. Доказано, что метод безусловно устойчив, имеет время $2-\beta$ порядок $2-\beta$ по шагу времени и экспоненциальную скорость сходимости по степени многочлена в пространстве.
2. Сконструирован явный численный метод для обобщенных нелинейных многочленных пространственно-временных дробных уравнений реакции-диффузии с запаздыванием. Доказано, что схема безусловно устойчива, имеет порядок сходимости $2 - \beta_m$ по времени и экспоненциальную скорость сходимости по пространству. На численных примерах показано, что численные результаты согласуются с теоретическими.
3. Разработан и проанализирован новый численный алгоритм для обобщенной модели дробной диффузии Шнакенберга с эффектом запаздывания по времени. Доказано, что предложенный метод безусловно устойчив, экспоненциально быстро сходится в пространстве и сходится с порядком $2-\beta$ по времени. Получены новые эффекты при исследовании модели Шнакенберга с дробным запаздыванием по сравнению с целочисленной моделью.
4. Введено приближение высокого порядка для решения нелинейных пространственно-временных дробных уравнений реакции-диффузии с запаздыванием. Подтверждена безусловная устойчивость полученного метода со сходимостью второго порядка по времени и экспоненциальной скорости по пространству.

Степень обоснованности научных утверждений и выводов, сформулированных в диссертации, определяется тем, что все построения и построения соответствуют современному уровню математической строгости. Все ключевые утверждения снабжены подробными доказательствами. Основу работы составляют положения, которые были разработаны и опубликованы диссертантом (в совместных работах описывается вклад соавторов) в серии статей в известных специалистам журналах. Надежность этих положений не вызывает сомнений. Результаты проведенных вычислительных экспериментов на тестовых и модельных примерах являются дополнительным подтверждением защищаемых положений.

Результаты неоднократно докладывались и обсуждались на семинарах кафедры и международных конференциях.

Автор диссертации опубликовал 4 статьи, индексируемые системами Scopus и WoS.

Практическая ценность. Разработанные схемы могут быть использованы для решения актуальных задач математического моделирования сложных химико-биологических процессов. Отметим, что аналогичные задачи возникают при математическом моделировании широкого спектра биологических и медицинских задач.

Замечания к работе.

1. Следовало бы изучить условия существования и единственности решений рассматриваемых задач или, по крайней мере, цитировать из литературы.

2. Сохраняется ли принцип максимума в построенных численных схемах? Сохраняется ли монотонность численного решения?
3. Точные решения численных примеров выбираются гладкими. Не могли бы вы объяснить причины?
4. Что можно сказать о существовании и единственности решений в рассмотренных численных схемах?
5. Если точное решение имеет разрывы производной по времени, порожденные запаздыванием или дробной производной Капуто, можно ли применять предложенные численные схемы? По этой причине есть ли способ модифицировать численные схемы и дать строгий анализ погрешности?

Заключение. Высказанные замечания носят технический характер и не влияют на общую положительную оценку работы. Диссертация Ибрагима А.К.О. является законченной научной квалификационной работой. Материал диссертации изложен подробно в логической последовательности и не содержит заимствований без соответствующих ссылок. Автореферат соответствует своей цели и правильно отражает содержание диссертации. Все представленные на защиту результаты с достаточной полнотой опубликованы в специализированных научных журналах и доступны специалистам. Личный вклад автора описан и не вызывает вопросов.

Я считаю, что диссертация Ибрахима А.К.О. «Finite-difference and spectral-Galerkin methods in models, described by fractional partial differential equations with delay» («Конечно-разностные и спектрально-Галеркинские методы в моделях, описываемых дробными уравнениями в частных производных с запаздыванием») на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук соответствует требованиям п. 9 Положения о присуждении ученых степеней в УрФУ, необходимых для кандидатских диссертаций, а также научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а ее автор Абдельрахим Кхалифа Омран Ибрахим, несомненно, заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Официальный оппонент:

доктор физ.-мат. наук, доцент,
профессор кафедры математического анализа
ФГБОУ ВО «Челябинский государ-

ственный университет»

Подпись *Плеханова Марина Васильевна*

удостоверяю *04.03.2023*

одиннадцатого марта

Почтовый адрес организации:

454001, г. Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129;
телефон: +7(351)799-71-29

e-mail: odou@csu.ru