Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого
Президента России Б. Н. Ельцина»
Институт естественных наук и математики
Кафедра физики конденсированного состояния и наноразмерных систем

На правах рукописи

Сограби Тимур Вагидович

Роль взаимодействия газа с поверхностью аэрозольной частицы в ее движении при больших числах Кнудсена

Специальность 1.3.14 — Теплофизика и теоретическая теплотехника

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Черняк Владимир Григорьевич

Екатеринбург — 2022

Оглавление

Введение

Актуальность темы.

Научные исследования в области физики аэрозолей стимулируются большим разнообразием актуальных проблем, связанных с атмосферными явлениями, медициной и промышленным производством. Требует решения проблема контроля и очистки атмосферы от вредных для здоровья человека и окружающей среды аэрозолей. К таковым относятся как промышленные выбросы, так и аэрозоли естественного происхождения (извержения вулканов, лесные пожары, пыль из почвы и т. д.). Актуальна проблема получения промышленных аэрозолей и контроля физико-химических свойств отдельных частиц. Оптимизация процессов горения и детонации топливных аэрозолей находит применение во множестве технологических процессах, а также в химической промышленности. Влияние оптического излучения на аэродисперсные системы важно знать при лазерном зондировании атмосферы, а также в различных приложениях астрофизики.

В физике аэрозолей принято выделять два основных направления исследований – макрофизику и микрофизику аэрозолей. Под макрофизикой аэрозолей понимается изучение коллективных свойств аэродисперсных систем. Исследования в данной области затрагивают образование аэрозолей, оптическую прозрачность аэрозольных сред, фильтрацию, динамику аэрозольных полей и т. д.

В микрофизике аэрозолей изучаются явления образования, движения и взаимодействия одной или двух аэрозольных частиц с газовой фазой. Определяющим направлением является изучение процессов переноса массы, импульса и энергии от газовой фазы к находящейся в ней аэрозольной частице, а именно процессы испарения и конденсации, движение частицы в полях градиентов температуры, концентрации, электромагнитного излучения и другие. Существуют критерии, позволяющие свойства отдельных частиц связать со свойствами аэродисперсной системы в целом.

Интенсивность теплообмена между газом и аэрозольной частицей, силы, действующие на частицу в неоднородном газе, в существенной степени определяются характером взаимодействия молекул с поверхностью частицы. Выявление роли этого взаимодействия в движении частицы и ее теплообмене с газовой средой расширит понимание физической природы явлений переноса в аэрозолях, позволит более точно прогнозировать осаждение аэрозолей в фильтрах различных типов, а в перспективе и влиять на эффективность этого процесса. Актуальность такой теории связана также с тем, что сравнение ее с экспериментальными результатами для модельных частиц, поверхность которых можно готовить и контролировать, будет стимулировать разработку новых моделей ядра рассеяния.

Степень разработанности темы

Систематические целенаправленные исследования сил, действующих на аэрозольную частицу, в зависимости от характера взаимодействия молекул газа с ее поверхностью до настоящего времени не проводились. В большинстве теоретических работ использовалось приближение полной аккомодации молекул газа на поверхности частицы независимо от рода газа и поверхности. В ряде работ принималась или максвелловская модель зеркально-диффузного отражения молекул на поверхности частицы, или какая-либо эвристическая модель функции распределения скоростей отраженных молекул. Результаты такого подхода часто не соответствуют экспериментальным данным, а иногда оказываются противоречивыми. Решение этой проблемы возможно, если следовать положению кинетической теории газов о том, что функция распределения скоростей отраженных молекул должна не задаваться, а вычисляться через вероятность рассеяния (ядро рассеяния) и функцию распределения налетающих на поверхность молекул. Факт отсутствия такого подхода в задачах микрофизики аэрозолей связан, прежде всего, с трудностями разработки моделей ядра рассеяния, что является самостоятельным направлением исследований в динамике разреженного газа.

Целью работы является:

- разработка физико-математической модели силы сопротивления, термофоретического, фотофоретического и диффузиофоретического движения сферической аэрозольной частицы в условиях свободномолекулярного и почти свободномолекулярного режимов при любом ядре рассеяния;
- численный расчет этих величин с использованием нескольких известных моделей ядра рассеяния при различных значениях аккомодационных параметров моделей;

- сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными и определение численных значений аккомодационных параметров моделей ядра рассеяния.

В первой главе диссертации приведены основные положения кинетической теории газов. Введены определяющие безразмерные критерии движения макроскопических тел в газах, критерий связи закономерностей движения отдельной аэрозольной частицы и свойств аэродисперсной системы. Приведено кинетическое уравнение с аппроксимирующим интегралом столкновений третьего порядка, сформулирован итерационный метод его решения при больших числах Кнудсена. Обсуждается проблема граничных условий для функции распределения молекулярных скоростей и некоторые известные модели ядра рассеяния.

Во второй главе изложены постановка задачи и результаты расчетов силы сопротивления при движении аэрозольной частицы в газе в условиях почти свободномолекулярного режима ($Kn \gg 1$) при произвольном характере взаимодействия газа с поверхностью частицы (ядре рассеяния). Проведены аналитические (где возможно) и численные расчеты силы сопротивления и полей макроскопических величин вблизи частицы с использованием четырех известных моделей ядра рассеяния. Проведено сравнение полученных результатов с имеющимися теоретическими и экспериментальными данными. В результате сравнения теории с экспериментом получены численные значения аккомодационных параметров использованных моделей ядра рассеяния.

В третьей главе изложены постановка и решение задачи о термофорезе аэрозольной частицы в почти свободномолекулярном режиме при произвольном ядре рассеяния. Проведены расчеты термофоретической силы и скорости движения частицы, а также полей макроскопических величин с использованием некоторых известных моделей ядра рассеяния. На основе сравнения результатов расчета термофоретической силы с экспериментальными данными, представленными в литературе, проведен анализ адекватности использованных моделей ядра рассеяния и определены численные значения аккомодационных параметров этих моделей.

В четвертой главе представлены постановка и решение задачи о силе, действующей на частицу в поле монохроматического оптического излучения (фотофорезе) в условиях свободномолекулярного режима для любого ядра рассеяния. Проведены численные расчеты фотофоретической силы с использованием некоторых известных моделей ядра рассеяния при различных значениях аккомодационных параметров моделей. Проводится сравнение с теоретическими результатами других авторов.

В пятой главе представлены постановка и решение задачи о силах, действующих на частицу при ее движении в бинарной газовой смеси, неоднородной по концентрации компонентов (сила сопротивления и диффузионная сила) в условиях свободномолекулярного режима при произвольном ядре рассеяния. Проведено сравнение с теоретическими и экспериментальными данными других авторов. Выполнены численные расчеты диффузионной силы и скорости движения частицы с использованием некоторых известных моделей ядра рассеяния при различных значениях аккомодационных параметров этих моделей. Исходя из требования наилучшего согласия результатов расчета с экспериментальными данными определены численные значения аккомодационных параметров использованных моделей ядра рассеяния.

Объект исследования. Химически однородная мелкая сферическая аэрозольная частица, взвешенная в неоднородном по температуре и концентрации компонентов газе, а также находящаяся в поле оптического излучения.

Предмет исследования. Влияние характера взаимодействия молекул газа с поверхностью частицы на величины действующих на неё сил в неоднородных по температуре и концентрации газах, а также в поле оптического излучения; на соответствующие величины скоростей движения частицы.

Методология и методы исследования. Использовано приближение одиночной частицы в неограниченном газе. В основе теории линеаризованное кинетическое уравнение для функции распределения с аппроксимирующим интегралом столкновений. Функция распределения отраженных на поверхности частицы молекул определялась интегральным соотношением через ядро рассеяния и функцию распределения налетающих на поверхность молекул. С учетом этого граничного условия кинетическое уравнение записано в интегральной форме. Представлен итерационный метод решения этого уравнения при больших числах Кнудсена Kn (отношения средней длины свободного пробега молекул газа к радиусу частицы). Результаты получены в первом приближении с учетом членов порядка Kn^{-1}.

Личный вклад автора заключается в обсуждении и формулировке идей и методов исследования, проведении численных расчетов, описании полученных результатов, формулировке основных выводов исследования, подготовке публикаций.

Научная новизна диссертационной работы состоит в следующем:

1. Разработаны физико-математические модели силы сопротивления, термофоретической силы и скорости движения аэрозольной частицы в почти свободномолекулярном режиме, фотофореза и диффузиофореза в свободномолекулярном режиме при произвольном ядре рассеяния.
2. Проведены аналитические и численные расчеты сил, действующих на частицу в неоднородных газах, и скоростей ее движения с использованием известных моделей ядра рассеяния в зависимости от аккомодационных параметров этих моделей. Сделан сравнительный анализ полученных результатов.
3. На основе сравнения теории с экспериментальными данными проведена оценка эффективности использованных моделей ядра рассеяния и извлечены численные значения аккомодационных параметров моделей. Показано, что изучение сил и скоростей движения частиц в неоднородных газах является источником достоверной информации о взаимодействии газа с поверхностью.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Физико-математические модели силы сопротивления, силы и скорости термофореза аэрозольной частицы в почти свободномолекулярном режиме, фотофоретической и диффузионной сил в свободномолекулярном режиме при любом ядре рассеяния.
2. Результаты расчета сил, действующих на аэрозольную частицу, и скоростей её движения с использованием известных моделей ядра рассеяния при различных значениях аккомодационных параметров этих моделей.
3. Разработанная теория действующих на аэрозольную частицу сил при сравнении с экспериментальными данными позволяет оценить реалистичность и эффективность модели ядра рассеяния и является источником достоверной информации о значениях ее аккомодационных параметров.

Достоверность полученных результатов обеспечена адекватностью используемых физических представлений, подтверждается согласием с результатами других авторов в случае полной аккомодации и количественным согласием теории с экспериментальными данными.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертационном исследовании результаты могут быть полезны для прогнозирования распространения аэрозолей (в том числе вирусов) в атмосфере, для более полного анализа результатов лазерного мониторинга атмосферы, для оптимизации процессов сепарации и осаждения аэрозольных частиц в термопреципитаторах и диффузионных фильтрах.

Полученные выражения для сил и скоростей движения аэрозольных частиц позволяют провести вычисление этих величин для любой модели ядра рассеяния, как известной, так и той, которая будет разработана в будущем.

Можно надеяться, что разработанные теоретические модели будут стимулировать новые экспериментальные исследования в области физики аэрозолей и в области взаимодействия газа с поверхностью.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на представительных научных конференциях и сипозиумах: European Aerosol Conference EAC 2019 (Gotheborg, Sweden), Международная XXVI конференция «Аэрозоли Сибири» 2019 (Томск, Россия), Международный симпозиум «Оптика Атмосферы и Океана» 2020 (онлайн), Международная XXVII конференция «Аэрозоли Сибири» 2020 (онлайн), European Aerosol Conference EAC 2020 (online), RGD32 pre-workshop 2021 (online).

Публикации. По теме исследования опубликовано 9 научных работ, в том числе 4 статьи в ведущем международном рецензируемом научном журнале, входящем в международные базы цитирования Scopus и Web of Science.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и 1 приложения. Полный объём диссертации составляет 123 страницы, включая 37 рисунков и 14 таблиц. Список литературы содержит 105 наименований.

Глава 1. Основные положения кинетической теории газов

1.1 Определяющие безразмерные критерии

В связи с тем, что зачастую аэродисперсные системы содержат чрезвычайно малые концентрации аэрозольных частиц, в широком спектре задач исследуется поведение одиночной аэрозольной частицы в неограниченном объеме газовой среды. Иными словами, другие взвешенные аэрозольные частицы, физические границы для окружающего газа и другие объекты в газе считаются расположенными расстояниях от одной частицы, поведение которой представляет интерес.

Сложность и разнообразие физико-химических процессов, протекающих в аэрозолях приводят к использованию модельных представлений при описании таких явлений.

В качестве моделей аэрозольных частиц как правило рассматриваются твердные или жидкие сферические тела, макроскопически гладкие и химически инертные. При этом детали их поверхности и внутреннего строения описываются в терминах макроскопических параметров.

При исследовании аэродисперсной системы можно сформировать набор безразмерных криетриев подобия, описывающих свойства аэрозольной системы.

Предполагая, что аэрозольные частицы представляют собой сферы радиуса r_0, можно ввести следующие основные безразмерные критерии подобия [1]:

$$\begin{aligned} &\text{Число Кнудсена} \qquad Kn = l/r_0; \\ &\text{Число Маха} \qquad M = |\mathbf{U}_\infty|/\bar{v}^*; \\ &\text{Число Броуна} \qquad Br = \bar{v}_p^*/\bar{v}^*; \\ &\text{Число Шмидта} \qquad Sc = r_0^2 nl. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{U}_\infty$ — скорость набегающего потока, n — числовая плотнсть газа, l — средняя длина свободного пробега молекул;

$$\bar{v}_p^* = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_p}}; \qquad \bar{v}^* = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

— средние тепловые скорости движения аэрозольных частиц и молекул газа соответственно.

В случае, когда выполняются неравенства

$$n_p/n_g \ll 1,$$
$$ln_p^{1/3} \ll 1,$$
$$r_0 n_p^{1/3} \ll 1,$$

где n_p – числовая плотность взвешенных аэрозольных частиц, аэродисперсная система достаточно разрежена и частицы можно рассматривать независимо друг от друга.

Для тропосферы имеют место следующие значения [1]:

$$n_p/n \simeq 10^{-13} \dots 10^{-19},$$
$$ln_p^{1/3} \simeq 10^{-3} \dots 10^{-5},$$
$$r_0 n_p^{1/3} \simeq 10^{-1} \dots 10^{-7}.$$

Если в аэродисперсной системе имеет место относительное движение газа и частиц, уместно использовать число Маха (M). Отметим, что в реальных аэрозолях относительная скорость движения газа и частиц существенно меньше скорости звука в газе, в связи с чем является адекватным приближение $M \ll 1$.

Числа Броуна Br и Шмидта Sc описывают интенсивность броуновского движения аэрозольных частиц. Оценки числа Броуна для капли воды с радиусом $r_0 = 0.1$ мкм в воздухе дают $Br \simeq 10^{-3}$. Следовательно, приближение $Br \ll 1$ является адекватным для большинства аэрозольных частиц, вплоть до субмикронных размеров.

Число Шмидта характеризует относительную интенсивность переноса импульса молекулами газа и аэрозольными частицами. Броуновским движением аэрозольных частиц можно пренебречь при $Sc \simeq 10^6 \dots 10^7$.

Очевидно, при броуновском вращении частицы её температура может оказаться однородной. В связи с этим оценим роль броуновского вращения частицы.

Средний квадрат угла поворота сферической частицы за время её температурной релаксации τ равен [2]:

$$\overline{\theta^2} = \frac{kT\tau}{4\pi\eta r_0^2}. \tag{1.2}$$

Принимая во внимание, что $\tau \sim r_0^3$ и для большинства веществ время температурной релаксации $\tau < 2{,}5 \cdot 10^{-6}\,$с при $r_0 = 1$ мкм и $\tau < 2{,}5 \cdot 10^{-8}\,$с при $r_0 = 0.1$ мкм, получим для воздуха при нормальных условиях $\sqrt{\overline{\theta^2}} < 0.4^\circ$ при $r_0 = 1$ мкм и $\sqrt{\overline{\theta^2}} < 1.1^\circ$ при $r_0 = 0.1$ мкм. Таким образом, частица за время температурной релаксации поворачивается на очень небольшой угол, а, следовательно, броуновским вращением для частиц радиусом $r_0 \geqslant 0.1$ мкм можно пренебречь.

В диссертационном исследовании предполагается, что число Кнудсена $Kn \gg 1$, число Маха $M \ll 1$. Эффектами стохастического броуновского движения частицы пренебрегается, т. е. число Броуна $Br \ll 1$, а число Шмидта $Sc \gg 1$.

1.2 Модельное кинетическое уравнение

Теоретическое исследование в области кинетической теории газов так или иначе должно полагаться на решение кинетического уравнения Больцмана с соответствующими начальными и граничными условиями. В общем виде это уравнение в случае однокомпонентного газа для стационарного состояния при отсутствии внешних сил записывается следующим образом:

$$\mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = Q(ff_1), \tag{1.3}$$

где

$$Q(ff_1) = \int (f'f_1' - ff_1) g b db d\varepsilon d\mathbf{v}_1$$

–интеграл межмолекулярных столкновений, описывающий скорость изменения числа молекул в единичном объеме шестимерного фазового пространства координат и скоростей $(\mathbf{x},\mathbf{v})$ в результате соударений; g, b – относительная скорость и прицельное расстояние сталкивающихся молекул соответственно; интегрирование ведется по скоростям молекул-пуль.

Уравнение (1.3) – интегродифференциальное уравнение для функции распределения $f(t,\mathbf{x},\mathbf{v})$, определяющей плотность числа молекул (фазовых точек) в фазовом пространстве.

Результатом решения уравнения Больцмана была бы функция распределения молекул по скоростям, используя которую можно было бы вычислить все неободимые макропараметры газа. Таким образом задача решается наиболее полно. Основная причина трудностей при решении кинетического уравнения Больцмана состоит в сложной структуре интеграла межмолекулярных столкновений. Однако в большинстве прикладных задач динамики разреженного газа представляет интерес не сама функция распределения, а только несколько ее первых моментов, которые можно измерить экспериментально: плотность, давление, температура, гидродинамическая скорость и т. д. В таком случае изначальный полный объем информации о функции распределения, заложенный в уравнении Больцмана, является избыточным и излишне детализированным. В связи с этим возникла идея построения модельных кинетических уравнений, сохраняющих основные средние свойства уравнения Больцмана, но при этом решающихся намного проще.

С использованием метода равных моментов, состоящего в требовании равенства моментов больцмановского и аппроксимирущего интегралов столкновений, была получена следующая форма интеграла столкновений [3]:

$$Q_m = \frac{p}{\eta}\left\{ f^{(0)}\left[1 + \frac{4}{15}\frac{m}{2kT}\frac{1}{p}q_i V_i \left(\frac{mV^2}{2kT} - \frac{5}{2}\right)\right] - f\right\}, \tag{1.4}$$

$$f^{(0)} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mV^2}{2kT}\right).$$

Здесь $f^{(0)}$ – локальная максвелловская функция распределения, $n, \mathbf{U}, T, \mathbf{q}$ – числовая плотность, макроскопическая скорость, температура газа и плотность теплового потока в газе соответственно, m – масса молекулы, k – постоянная Больцмана, p – давление, η – коэффициент вязкости, $\mathbf{V} = \mathbf{v} - \mathbf{U}$ – вектор скорости теплового движения молекул. Макроскопические величины газа определяются через функцию распределения следующим образом:

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x},t) &= \int f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}, \\ \mathbf{U}(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{n}\int \mathbf{v} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}, \\ T(\mathbf{x},t) &= \frac{2}{3nk}\int \frac{mV^2}{2} f(\mathbf{x},\mathbf{v},t)d\mathbf{v}, \\ \mathbf{q}(\mathbf{x},t) &= \frac{m}{2}\int V^2\mathbf{V} f d\mathbf{v}; \end{aligned} \tag{1.5}$$

Выражение (1.4) известно как S – модель интеграла столкновений. Кинетическое уравнение с интегралом столкновений в форме (1.4) корректно описывает релаксацию всех моментов функции распределения, имеющих физический смысл, а также дает точные выражения для макроскопических величин в пределе сплошной среды.

Недостатком S – модели является ее квазилинейность, поскольку при ее построении используется разложение интеграла обратных столкновений в ряд по полиномам Эрмита в пространстве скоростей относительно локального максвелловского распределения. В результате, ставится под сомнение возможность использования данной модели при описании сильно неравновесных процессов.

В случае, если состояние газа мало отличается от равновесного, его возможно описать функцией распределения, мало отличающейся от равновесной максвелловской, т. е.

$$f = f_0(1 + h(\mathbf{x},\mathbf{v})). \tag{1.6}$$

Здесь f_0 – максвелловская функция распределения, соответствующая равновесным значениям n_0 и T_0. Тогда функция возмущения h при отсутствии внешних сил в стационарном состоянии будет удовлетворять следующему линеаризованному кинетическому уравнению:

$$\mathbf{v}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} = \frac{p_0}{\eta}[\Phi(\mathbf{x},\mathbf{v}) - h(\mathbf{x},\mathbf{v})]. \tag{1.7}$$

Линейный интегральный оператор $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{v})$ включает макроскопические величины.

В случае S – модели [3] имеем:

$$\Phi(\mathbf{x},\mathbf{c}) = \nu + 2\mathbf{cu} + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right)\tau + \frac{4}{15}\mathbf{cQ}\left(c^2 - \frac{5}{2}\right), \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{U}(\mathbf{x})}{\bar{v}} = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int h(\mathbf{x},\mathbf{c})\exp(-c^2)\mathbf{c}d\mathbf{c}, \\ \nu(\mathbf{x}) &= \frac{n(\mathbf{x}) - n_0}{n_0} = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int h(\mathbf{x},\mathbf{c})\exp(-c^2)d\mathbf{c}, \\ \tau(\mathbf{x}) &= \frac{T(\mathbf{x} - T_0}{T_0} = \frac{2}{3\pi^{3/2}}\int h(\mathbf{x},\mathbf{c})\exp(-c^2)\left(c^2 - \frac{3}{2}\right)d\mathbf{c}, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{x}) &= \frac{\mathbf{q}(\mathbf{x})}{p_0\bar{v}} = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int h(\mathbf{x},\mathbf{c})\exp(-c^2)\mathbf{c}\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)d\mathbf{c}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Введена безразмерная скорость молекул:

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{v}}{\bar{v}}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2kT_0}{m}}. \tag{1.10}$$

Необходимо отметить, что условия линеаризации должны оговариваться отдельно для каждой конкретной задачи.

1.3 Интегральная форма кинетического уравнения.

В ряде случаев удобно иметь дело не с дифференциальной, а с интегральной формой кинетического уравнения [4]. Метод приведения модельного кинетического уравнения к интегральному виду состоит в формальном интегрировании последнего вдоль характеристик [5].

Рассмотрим сферу радиуса r_0, находящуюся в газовой среде. Перепишем линеаризованное кинетическое уравнение (1.7) в безразмерном виде:

$$\mathbf{c}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} = \delta[\Phi(\mathbf{r},\mathbf{c}) - h(\mathbf{r},\mathbf{c})], \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{x}}{r_0}, \quad \delta = \frac{p_0 r_0}{\eta \bar{v}}. \tag{1.11}$$

Здесь $\mathbf{r}$ – безразмерный радиус-вектор; δ – параметр разреженности газа.

Определим связь между параметром разреженности и числом Кнудсена (Kn). Если вязкость газа η определяется через среднюю длину свободного пробега молекул газа l как $\eta = n_0 m \bar{v} l/\sqrt{\pi}$, то

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2Kn}. \tag{1.12}$$

Рассмотрим точку A, определяющуюся радиус-вектором $\mathbf{r}$ (рис. 1.1). При этом имеет место т. н. «конус влияния». Внутри конуса будут находиться векторы скоростей молекул, отразившихся от поверхности и пришедших в A без соударений. Все остальные векторы скоростей молекул будут лежать вне этого конуса. Отсюда очевидно, что функция распределения претерпевает разрыв на границе «конуса влияния» [6].

Выберем произвольную траекторию молекулы газа, летящей в точку A и введем единичный вектор скорости её движения:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{\mathbf{c}}{c}. \tag{1.13}$$

Тогда уравнение (1.11) запишется следующим образом:

$$\mathbf{\Omega}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\delta}{c}[\Phi(\mathbf{r},\mathbf{c}) - h(\mathbf{r},\mathbf{c})]. \tag{1.14}$$

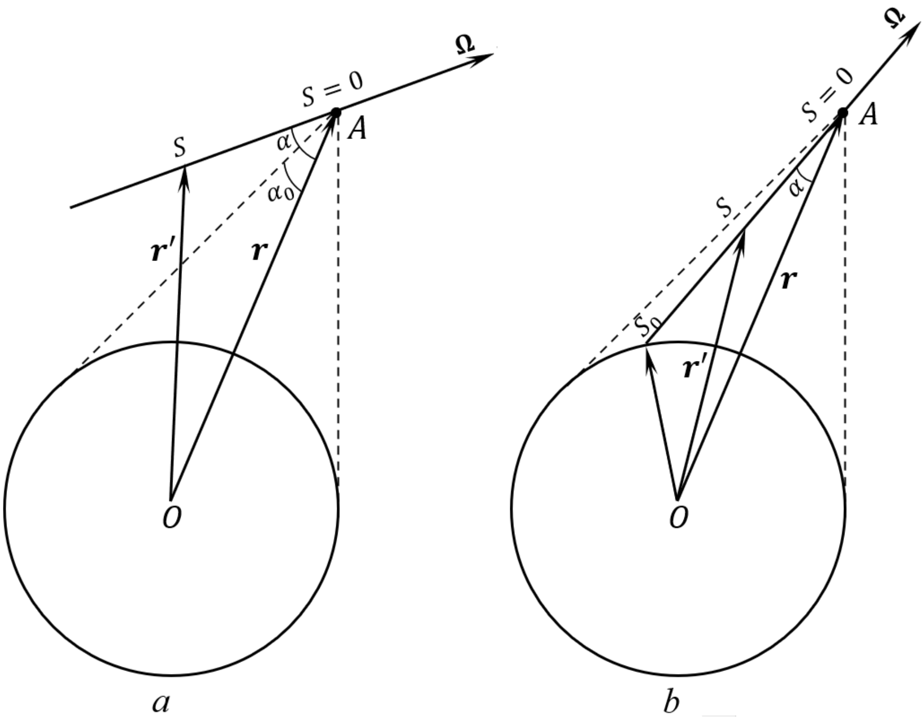

Рисунок 1.1 — Траектории движения молекул относительно частицы

Левую часть уравнения (1.14) можно записать в виде производной вдоль траектории молекулы [7]:

$$\mathbf{\Omega}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial S}h(\mathbf{r} - S\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega},c), \tag{1.15}$$

Координата S отсчитывается от точки A в направлении, противоположном $\mathbf{\Omega}$ (рис. 1.1).

На рис. 1.1 представлены две траектории движения молекул, имеющие место при обтекании выпуклого тела. Введем сферическую систему координат в пространстве скоростей (c, α, β) и рассмотрим каждую из траекторий более подробно:

а) Вектор $\mathbf{\Omega}$ лежит вне «конуса влияния». Молекулы, попадающие в точку A, прилетают из невозмущенной газовой среды. Вектор $\mathbf{r}'$ описывает текущее значение координаты S. Тогда $\alpha_0 < \alpha \leqslant \pi$. Угол $\alpha_0 = \arcsin(1/r)$ лежит между радиус-вектором $\mathbf{r}$ и касательной к сфере. Формально интегрируя выражение (1.11) с учетом (1.15) вдоль характеристик, получим выражение для функции возмущения $h(\mathbf{r},\mathbf{\Omega})$:

$$h_a(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}) = h_\infty + \frac{\delta}{c}\int_0^\infty \Phi(\mathbf{r} - s\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega},c)\exp\left(-\delta\frac{S}{c}\right)dS, \tag{1.16}$$

где

$$h_\infty = \lim_{r\to\infty} h_a(\mathbf{r},\mathbf{\Omega}). \tag{1.17}$$

Функцию возмущения h_a для налетающих на поверхность частицы молекул обозначим h^-, т. е.

$$h_a(\mathbf{c},r=1)=h^-.$$

b) Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ лежит внутри «конуса влияния». Молекулы попадают в точку A, покинув поверхность частицы с возмущенной функцией распределения. В этом случае $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$,

$$S_0=r\cos\alpha-\sqrt{1-r^2\sin^2\alpha}. \tag{1.18}$$

В результате интегрирования получим:

$$h_b(\mathbf{r},\boldsymbol{\Omega})=h^+(\mathbf{r}_0,\boldsymbol{\Omega})\exp\left(-\delta\frac{S_0}{c}\right)+ \tag{1.19}$$
$$\frac{\delta}{c}\int_0^{S_0}\Phi(\mathbf{r}-s\boldsymbol{\Omega},\boldsymbol{\Omega},c)\exp\left(-\delta\frac{S}{c}\right)dS,$$

где $h^+(\mathbf{r}_0,\boldsymbol{\Omega})$ – функция возмущения отраженных молекул при $\mathbf{n}\boldsymbol{\Omega}>0$.

Основным преимуществом интегральной формы кинетического уравнения является учет геометрии задачи и граничных условий.

1.4 Метод последовательных приближений

При решении задач динамики разреженного газа с использованием интегральной формы кинетического уравнения зачастую используется интегрально-моментный метод, а также его модификации.

Используя общие определения для макроскопических величин (1.9), можно из (1.16) и (1.19) получить замкнутую систему уравнений для макропараметров. Принимая во внимание, что $d\mathbf{c}=c^2dc\sin\alpha d\alpha d\beta$, где $0\leqslant c\leqslant\infty$, $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $0\leqslant\beta\leqslant2\pi$, из (1.9) несложно получить выражение для момента функции возмущения h любого молекулярного признака $\xi_\alpha(\mathbf{c})$ в произвольной точке $\mathbf{r}$ вдали от частицы:

$$M_{\xi_\alpha}(\mathbf{r})=\frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty\exp(-c^2)c^2dc\int_0^{2\pi}d\beta\left\{\int_{\alpha_0}^{\pi}h_a\xi_\alpha(\mathbf{c})\sin\alpha d\alpha+\right. \tag{1.20}$$
$$\left.\int_0^{\alpha_0}h_b\xi_\alpha(\mathbf{c})\sin\alpha d\alpha\right\}.$$

Физически значимые значения $\xi_\alpha(\mathbf{c})$: 1, $\mathbf{c}$, $(c^2-5/2)$, $\mathbf{c}(c^2-5/2)$.

Из выражений (1.16) и (1.19) очевидно, что (1.20) можно переписать как

$$M_{\xi_\alpha}(\mathbf{r}) = M^{(0)}_{\xi_\alpha}(\mathbf{r},\delta) + \delta M^{(1)}_{\xi_\alpha}[\mathbf{r},\Phi(\delta)]. \tag{1.21}$$

Здесь

$$\begin{aligned} M^{(0)}_{\xi_\alpha}(\mathbf{r},\delta) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty e^{-c^2}c^2dc\int_0^{2\pi}d\beta\Bigg\{\int_{\alpha_0}^{\pi}h_\infty\xi_\alpha(\mathbf{c})\sin\alpha d\alpha + & (1.22) \\ \int_0^{\alpha_0}h^+e^{-\delta\frac{S_0}{c}}\xi_\alpha(\mathbf{c})\sin\alpha d\alpha\Bigg\}; & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M^{(1)}_{\xi_\alpha}[\mathbf{r},\Phi(\delta)] = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty e^{-c^2}cdc\int_0^{2\pi}d\beta\Bigg\{\int_{\alpha_0}^{\pi}\sin\alpha d\alpha\int_0^\infty \Phi(\delta)e^{-\delta\frac{S}{c}}dS\xi_\alpha(\mathbf{c}) + \\ \int_0^{\alpha_0}\sin\alpha d\alpha\int_0^{S_0}\Phi(\delta)e^{-\delta\frac{S}{c}}dS\xi_\alpha(\mathbf{c})\Bigg\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $M^{(1)}_{\xi_\alpha}[\mathbf{r},\Phi(\delta)]$ – функционал, зависящий от интеграла обратных столкновений $\Phi(\delta)$, определяемого из (1.8). Из (1.21) напрямую следует, что для определения момента функции возмущения M_{ξ_α} в приближении δ^k достаточно учитывать слагаемые порядка δ^{k-1} в функционале $M^{(1)}_{\xi_\alpha}[\mathbf{r},\Phi(\delta)]$. Так, в случае почти свободномолекулярного режима, рассматриваемого в диссертационной работе, $M^{(1)}_{\xi_\alpha}[\mathbf{r},\Phi(\delta)]$ имеет вид:

$$\begin{aligned} M^{(1)}_{\xi_\alpha}[\mathbf{r},\Phi_0] = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty e^{-c^2}cdc\int_0^{2\pi}d\beta\Bigg\{\int_{\alpha_0}^{\pi}\sin\alpha d\alpha\int_0^\infty \Phi_0 dS\xi_\alpha(\mathbf{c}) + \quad & (1.23) \\ \int_0^{\alpha_0}\sin\alpha d\alpha\xi_\alpha(\mathbf{c})\Bigg\}, & \end{aligned}$$

где интеграл обратных столкновений Φ_0 содержит свободномолекулярные макропараметры при $\delta = 0$.

1.5 Граничные условия для функции распределения

Наряду с межмолекулярными столкновениями, ключевую роль при исследовании процессов переноса в системе «газ-частица» играет взаимодействие молекул газовой фазы с граничной поверхностью. Именно процессы взаимодействия молекул со стенкой определяют обмен импульсом и энергией между газом и телом.

Пусть молекулы, налетающие на граничную поверхность, имеющую температуру T_s, со скоростью $\mathbf{v}'$, покидают ее со скоростью $\mathbf{v}$. В этом случае граничное условие устанавливает связь между функциями распределения отраженных f^+ и налетающих на граничную поверхность молекул f^- [4; 8]:

$$f^+(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}) = \int_{\mathbf{v}'\mathbf{n}<0} K(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}'\to\mathbf{v},T_s) f^-(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}')d\mathbf{v}', \quad \mathbf{vn}>0. \tag{1.24}$$

Здесь $\mathbf{n}$ – единичная нормаль к поверхности в точке $\mathbf{r}_0$,

$$K(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}'\to\mathbf{v},T_s) = \frac{|\mathbf{v}'\mathbf{n}|}{|\mathbf{vn}|} P(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}'\to\mathbf{v},T_s) \tag{1.25}$$

–ядро рассеяния, определяющее плотность вероятности $P(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}'\to\mathbf{v},T_s)$ того, что молекулы, налетающие на поверхность со скоростями в интервале $(\mathbf{v}',\mathbf{v}'+d\mathbf{v}')$, отразятся со скоростями из интервала $(\mathbf{v},\mathbf{v}+d\mathbf{v})$.

В общем случае ядро рассеяния зависит от рода газа и поверхности, их физического состояния, структуры поверхности на макро- и микроуровнях. Ввиду того, что имеющихся в настоящее время экспериментальных данных по всем перечисленным факторам недостаточно для моделирования ядра рассеяния, как правило ограничиваются его физически оправданными моделями. В основе построения таких моделей лежат условия неотрицательности, нормировки и взаимности (принцип детального равновесия) [9]:

$$\begin{gathered} P(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}'\to\mathbf{v}) \geqslant 0, \\ \int_{\mathbf{v}'\mathbf{n}<0} P(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}'\to\mathbf{v})d\mathbf{v}' = 1, \\ |\mathbf{nv}'| \exp\left(-\frac{mv'^2}{2kT_0}\right) P(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}'\to\mathbf{v}) = \\ = |\mathbf{nv}| \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_0}\right) P(\mathbf{r}_0,-\mathbf{v}\to-\mathbf{v}'). \end{gathered} \tag{1.26}$$

Для системы в состоянии равновесия из соотношения взаимности и условия нормировки можно получить следующее важное следствие:

$$|\mathbf{nv}|f_0(\mathbf{v}) = \int_{\mathbf{v}'\mathbf{n}<0} |\mathbf{nv}'| P(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}'\to\mathbf{v}) f_0(\mathbf{v}')d\mathbf{v}'. \tag{1.27}$$

Особенности взаимодействия газа с поверхностью заложены в модельных ядрах рассеяния через феноменологические параметры, определяемые из эксперимента. В некоторых случаях эти параметры можно связать с коэффициентами аккомодации.

1.6 Некоторые модели ядра рассеяния

Одной из наиболее простых моделей ядра рассеяния яляется максвелловская модель зеркально-диффузного отражения. Впервые она была предложена Максвеллом [10] в предположении, что часть каждого элемента поверхности поглощает все налетающие молекулы, испаряющиеся затем со скоростями, соответствующими температуре стенки, а другая часть элемента поверхности отражает зеркально все прилетающие к нему молекулы. Предполагается, что доля ε молекул рассеивается от стенки диффузно, т. е. равновероятно во всех направлениях с максвелловской функцией распределения, а доля $(1-\varepsilon)$ отражается зеркально, создавая на поверхности только нормальные напряжения. Таким образом ядро рассеяния имеет вид:

$$K(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}' \to \mathbf{v}, T_s) = \varepsilon \frac{2}{\pi} \left(\frac{m}{2kT_s} \right)^2 |\mathbf{v}'\mathbf{n}| \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_s} \right) + (1-\varepsilon)\delta[\mathbf{v}' - (\mathbf{v} - 2\mathbf{n}v_n)], \tag{1.28}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Коэффициент зеркально-диффузного отражения в данной модели полагается независящим от молекулярных скоростей параметром, который необходимо определять из эксперимента.

Легко видеть, что аккомодация любого молекулярного признака в данной модели описывается лишь одним феноменологическим параметром. Вместе с тем, известно [8], что процессы переноса импульса и энергии в системах «газ–поверхность» происходят по разному. Возможный путь устранения данного недостатка состоит в учете зависимости коэффициента зеркально-диффузного отражения от скорости молекул.

С учетом принципа детального равновесия и условия непротекания, ядро рассеяния для любой функции $\varepsilon(\mathbf{v})$ будет иметь следующий вид [5; 11]:

$$K(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}' \to \mathbf{v}, T_s) = \chi\varepsilon(\mathbf{v}')\varepsilon(\mathbf{v} - 2v_n\mathbf{n})|\mathbf{v}'\mathbf{n}| \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_s} \right) + (1-\varepsilon(\mathbf{v}'))\delta[\mathbf{v}' - (\mathbf{v} - 2v_n\mathbf{n})], \tag{1.29}$$

где

$$\chi = \left[\int_{v_n'<0} |v_r'| \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_s} \right) \varepsilon(\mathbf{v}')d\mathbf{v}' \right]^{-1}. \tag{1.30}$$

Впервые зависимость ε от скорости молекул была представлена в работе [11]. На основе анализа экспериментов по коэффициентам аккомодации энергии различных газов на вольфрамовой проволоке было предложено следующее выражение для коэффициента зеркально-диффузного отражения:

$$\varepsilon(\mathbf{v}) = \exp\left(-\frac{mv^2}{2k\theta_1}\right) + \varepsilon_\infty\left[1 - \exp\left(-\frac{mv^2}{2k\theta_2}\right)\right]. \tag{1.31}$$

Здесь θ_1, θ_2 – независимые параметры, имеющие размерность температуры и учитывающие вклад молекул газа с низкими и высокими энергиями соответственно. Безразмерный параметр ε_∞ представляет собой коэффициент диффузного отражения молекул, имеющих предельно большие скорости ($v \gg (2k\theta_{1,2}/m)^{1/2}$).

Представляют интерес физически оправданные предельные значения параметров модели и соотношения между ними. Так, очевидно, что всегда выполняется $\theta_1 \leqslant \theta_2$. Случаю $\theta_1 = \theta_2 = T_0$ и $\varepsilon_\infty = 1$ соответствует полная аккомодация молекул на поверхности частицы. В случае больших энергий молекул, когда $mv^2/(2k\theta_1) \to \infty$, имеем полное зеркальное отражение при $\varepsilon \to 0$ или при $mv^2/(2k\theta_2) \to 0$.

Позднее в работе [12] была разработана кинетическая теория неравновесной системы, состоящей из поверхности, газа и приповерхностного слоя газовых молекул в поле действия поверхностных сил. Введено и обосновано кинетическое уравнение, описывающее как близкие к поверхности молекулы («над потенциальной ямой»), так и молекулы, захваченные в потенциальную яму на поверхности тела (адсорбированные в традиционном смысле). При этом для интеграла столкновений молекул газа с фононами поверхности использовалось приближение времени релаксации.

В результате теоретического анализа была получена следующая зависимость коэффициента диффузного отражения от нормальной составляющей вектора скорости отраженных молекул:

$$\varepsilon(\mathbf{c}) = (1 + Bc_n)^{-1}, \quad B = \bar{v}\frac{\tau}{d}, \tag{1.32}$$

где τ – время релаксации ансамбля приповерхностных молекул газа при взаимодействии с фононами поверхности, d – толщина слоя действия поверхностных сил. Таким образом, физический смысл параметра B есть отношение времени релаксации молекул газа при взаимодействии с фононами поверхности к среднему времени пролета молекулой поля поверхностных сил. Численные значения этих параметров могут быть получены из сравнения теории с экспериментальными данными. В рамках данной модели пределу полной аккомодации соответствует $B \to 0$ (время релаксации молекул газа на фононах поверхности много меньше времени пролета), а полному зеркальному отражению $B \to \infty$ (молекулы газа не успевают релаксировать за время пролета области действия поверхностных сил). Выражение (1.32) следует подставить в ядро рассеяния (1.29).

Наряду с моделью зеркально-диффузного отражения возможно построение принципиально иных моделей ядра рассеяния, удовлетворяющих условиям (1.26). Одной из таких моделей является так называемая CL – модель, полученная в [13]. При построении модели преполагалось следующее:

- время нахождения молекул газа на поверхности пренебрежимо мало по сравнению с другими характерными временами (отсутствует абсорбция молекул на поверхности);
- молекулы газа не взаимодействуют друг с другом при адсорбции на поверхности.

С учетом указанных предположений была разработана следующая модель ядра рассеяния:

$$K(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}' \to \mathbf{v}, T_s) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{m}{2kT_s}\right)^2 \frac{|\mathbf{n}\mathbf{v}'|}{\alpha_n\alpha_\tau(2-\alpha_\tau)} \times \tag{1.33}$$

$$\exp\left[-\frac{m}{2kT_s\alpha_n}(v_n^2 + (1-\alpha_n)v_n'^2) - \frac{m(\mathbf{v}_\tau - (1-\alpha_\tau)\mathbf{v}'_\tau)^2}{2kT_s\alpha_\tau(2-\alpha_\tau)}\right] \times$$

$$I_0\left(\frac{\sqrt{1-\alpha_n}}{\alpha_n} v_n v'_n \frac{m}{kT_s}\right).$$

Здесь $\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - \mathbf{n}v_r$ – вектор касательной к стенке скорости; I_0 – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка:

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(x\cos\theta)d\varphi; \tag{1.34}$$

α_τ – коэффициент аккомодации тангенциального импульса; α_n – коэффициант аккомодации энергии движения молекул по нормали к стенке.

Чтобы получить более детальную информацию о параметрах α_τ и α_n и дать им физическую интерпретацию, необходимо решать уравнение Фоккера–Планка, описывающее взаимодействие молекул газа с фононами стенки, с соответствующими граничными условиями. В результате было получено следующее выражение [8]:

$$\alpha_n = 1 - \exp\left(-\frac{4d}{l_n}\right), \quad \alpha_\tau = 1 - \exp\left(-\frac{2d}{l_\tau}\right), \tag{1.35}$$

где d – глубина проникновения молекулы в поверхность, l_n и l_τ – константы с физическим значением длин диффузии молекул газа в нормальном и касательном направлениях к поверхности.

Глава 2. Сила сопротивления при движении частицы в газе

2.1 Обзор современного состояния проблемы

Из гидродинамики известно, что сила сопротивления, возникающая при обтекании тела газовым потоком, полностью определяется неоднородностью нормальных и касательных напряжеий на поверхности тела. При этом физическую природу этого явления можно понять опираясь на кинетическую теорию газов. Сила, действующая на тело в газе представляет собой нескомпенсированный импульс, передаваемый телу газовыми молекулами за единицу времени.

Впервые задача об обтекании сферического тела газом была поставлена и решена Стоксом [14]. При изучении процесса затухания колебаний сферического маятника в воздухе, предполагая условия «прилипания» газа к поверхности сферы при малых числах Рейнольдса в гидродинамическом режиме, им было получено для силы сопротивления следущее выражение:

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\eta r_0 \mathbf{U}_\infty. \tag{2.1}$$

С увеличением числа Кнудсена следует учитывать изотермическое скольжение газа вдоль поверхности сферы, уменьшающее силу сопротивления. Это явление было учтено Бассе [15], который получил:

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\eta r_0 \mathbf{U}_\infty \frac{1 + 2c_m Kn}{1 + 3c_m Kn}. \tag{2.2}$$

Здесь c_m – коэффициент вязкостного скольжения газа.

Позднее Каннингем [16] провел линеаризцию выражения (2.2) при условии $c_m Kn \ll 1$. В результате получено:

$$\mathbf{F}_D = -6\pi\eta r_0 \mathbf{U}_\infty (1 - c_m Kn). \tag{2.3}$$

Как показывают результаты указанных работ, зависимость силы сопротивления от характера взаимодействия молекул с поверхностью при малых числах Кнудсена проявляется только через константу вязкого скольжения газа c_m. Эта константа была вычислена в работе [17] при произвольном характере взаимодействия молекул с поверхностью. Следовательно, в вязком со скольжением режиме не представляет трудностей учесть этот фактор при расчете силы сопротивления для любой модели ядра рассеяния.

В работах [18—20] была разработана асимтотическая теория обтекания сферической частицы слаборазреженным газом на основе решения модельного БГК-уравнения с граничными условиями скольжений и скачка температуры с учетом членов порядка Kn^2. Рассматривались частные случаи взаимодействия молекул с поверхностью, а именно: в [18] диффузное рассеяние молекул, в [19] полное зеркальное отражение, в [20] малые значения коэффициента диффузного отражения ε в модели Максвелла.

В работе [21] с использованием методов термодинамики необратимых процессов было получено выражение для силы сопротивления, учитывающее поправки по числу Кнудсена вплоть до членов порядка Kn^5. При этом из общего выражения в соответствующих приближениях следуют формулы Бассе (2.2) и Каннингема (2.3).

Впервые задача о силе сопротивления сферической частицы в условиях свободномолекулярного режима была решена Эпштейном [22]. Использовался метод прямого подсчета импульса, передаваемого молекулами газа частице и различные модели взаимодействия молекул с поверхностью. Для максвелловской модели граничных условий получено следующее выражение:

$$\mathbf{F}_D = -\frac{16}{3} p_0 r_0^2 \mathbf{U}_\infty \sqrt{\frac{\pi m}{2kT}} \left[1 + \frac{\pi}{8}\varepsilon\right]. \tag{2.4}$$

Позднее аналогичный результат был получен в [23].

В работе [24] задача была решена с использованием предположения о том, что частицы аэрозоля представляют собой один из компонентов газовой смеси. В результате получено:

$$\mathbf{F}_D = -\frac{16}{3} p_0 r_0^2 \mathbf{U}_\infty \sqrt{\frac{\pi m}{2kT}} \left[1 + \frac{4}{9}\varepsilon\right]. \tag{2.5}$$

Различие результатов (2.4) и (2.5) объясняется недостатками приближения, используемого в [24].

В работах [25; 26] было обнаружено, что при обтекании сферической частицы потоком газа её фронтальная часть испытывает нагрев, а тыльная – охлаждение. При этом средняя температура частицы не меняется и равна температуре газа. Эффект получил название «тепловой поляризации». Было установлено, что величина температурной разности определяется долей энергии, переданной частице налетающими молекулами. Отсюда очевидно, что эффект тепловой поляризации будет максимален при полной аккомодации и исчезает при её отсутствии.

Аккомодационная зависимость силы сопротивления и тепловой поляризации частицы при произвольных числах Кнудсена представлена в работе [27]. Функция распределения отраженных молекул моделировалась в виде ряда по компонентам скорости молекул. Коэффициенты ряда выражались через кнудсеновские коэффициенты аккомодации из уравнений баланса для нормального и тангенциального импульса и энергии на поверхности частицы. Было показано, что сила сопротивления существенно зависит от коэффициентов аккомодации импульса и в незначительной степени от коэффициента аккомодации энергии. Величина тепловой поляризации существенно зависит от коэффициентов аккомодации энергии и нормального импульса, и в незначительной степени от коэффициента аккомодации тангенциального импульса.

В работе [28] для свободномолекулярного режима были получены выражения для силы сопротивления и тепловой поляризации частицы. Коэффициенты аккомомодации вводились на макроскопическом уровне. Установлено, что сила сопротивления представляет собой линейную функцию коэффициентов аккомодации нормального и тангенциального импульса, а тепловая поляризация пропорциональна коэффициенту аккомодации энергии и не зависит от аккомодации импульса.

Работа [29] посвящена вычислению силы сопротивления абсолютно теплопроводной частицы при промежуточных числах Кнудсена. Модельное кинетическое уравнение решалось с использованием метода дискретных скоростей. В качестве граничных условий применялась CL–модель ядра рассеяния (1.33). Показано, что уменьшение аккомодации тангенциального импульса приводит к уменьшению силы сопротивления, а уменьшение аккомодации энергии движения молекул по нормали к стенке увеличивает её.

Таким образом, несмотря на большое количество теоретических работ в данной области, роль взаимодействия молекул с поверхностью, как правило, затрагивалась лишь косвенно в некоторых работах и не являлась предметом детального изучения.

Экспериментальные работы по силе сопротивления существующие в настоящее время, как правило, выполнены по методике конденсатора Милликена [30; 31]. Используются частицы из нелетучих материалов. Окружающим газом может быть воздух, либо однокомпонентный газ. Как правило, эксперименты проводятся при температурах, близких к комнатной.

Данные эксперименты охватывают большой диапазон чисел Кнудсена. Так, эксперимент Милликена с каплями часового масла в воздухе охватывает диапазон $0.1 < Kn \lesssim 100$, т. е. от вязкого до свободномолекулярного.

В этой главе диссертационной работы ставятся следующие цели:

- получить выражения для силы сопротивления и тепловой поляризации сферической частицы, обтекаемой потоком газа в условиях почти свободномолекулярного режима при произвольном ядре рассеяния;
- провести численные расчеты с использованием ряда известных моделей ядра рассеяния при различных значениях аккомодационных параметров этих моделей;
- сравнить полученные результаты с экспериментальными данными Милликена и извлечь значения аккомодационных параметров использованных моделей ядра рассеяния.

2.2 Постановка задачи

Рассмотрим сферическую частицу с радиусом r_0 и теплопроводностью λ_p, обтекаемую потоком газа. Скорость набегающего однородного потока $\mathbf{U}_\infty$ полагается много меньше скорости звука в газе. Равновесные значения температуры, давления и числовой плотности газа вдали от частицы обозначим соответственно T_0, p_0 и n_0.

Координатную ось z выберем в направлении скорости набегающего потока, как показано на рис 2.1. Начало сферической системы координат поместим в центр частицы. Полярный угол θ отсчитывается против часовой стрелки от направления оси z.

При медленном обтекании частицы (числа Маха и Рейнольдса малы) состояние газа мало отличается от равновесного. Используем для его описания следующую функцию распределения:

$$f(\mathbf{x},\mathbf{c}) = f_0[1 + 2\mathbf{c}\mathbf{u}_\infty + h(\mathbf{x},\mathbf{c})], \quad \mathbf{u}_\infty = \frac{\mathbf{U}_\infty}{\bar{v}}. \tag{2.6}$$

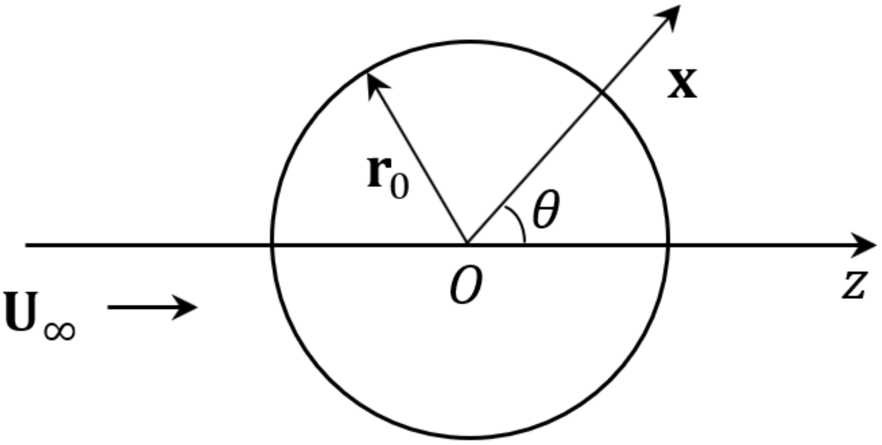

Рисунок 2.1 — Геометрия задачи

Здесь $\bar{v}$ – наиболее вероятная скорость молекул (1.9); функция h учитывает возмущение газа за счет наличия в нем частицы и удовлетворяет линеаризованному уравнению (1.11) со следующей функцией $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{c})$:

$$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{c}) = \nu(\mathbf{r}) + 2\mathbf{c}\mathbf{w}(\mathbf{r}) + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right)\tau(\mathbf{r}) + \frac{4}{15}\mathbf{c}\mathbf{Q}(\mathbf{r})\left(c^2 - \frac{5}{2}\right), \tag{2.7}$$

где $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\infty$ – возмущение безразмерной скорости газа, r – безразмерный радиус-вектор, макроскопические величины определяются выражениями (1.9).

Вдали от частицы функция возмущения обращается в ноль:

$$\lim_{r\to\infty} h(\mathbf{r},\mathbf{v}) = 0. \tag{2.8}$$

Это означает, что в выражении (1.16) $h_\infty = 0$.

Граничное условие на поверхности частицы ($r = 1$) определяется выражением (1.24).

В результате тепловой поляризации частицы, температура её поверхности T_s будет зависеть от полярного угла θ и отличается от равновесной температуры газа T_0.

В случае слабонеравновесного состояния газа температура T_s и соответствующая ей числовая плотность газа n_s мало отличаются от их равновесных значений:

$$T_s(\theta) = T_0[1 + \tau_s(\theta)], \quad n_s(\theta) = n_0[1 + \nu_s(\theta)]. \tag{2.9}$$

Возмущение числовой плотности газа ν_s определяется через возмущение температуры газа τ_s из условия непротекания:

$$\int_{v_r>0} v_r f^+ d\mathbf{v} = \int_{v_r<0} |v_r| f^- d\mathbf{v}. \tag{2.10}$$

Величина тепловой поляризации представляет собой разность температур в двух диаметрально противоположных точках поверхности частицы в направлении набегающего потока:

$$T_s(\theta = \pi) - T_s(\theta = 0) = T_0[\tau_s(\pi) - \tau_s(0)]. \tag{2.11}$$

Неизвестная температура T_s определяется из условия непрерывности радиального потока тепла в произвольной точке поверхности частицы:

$$\lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial r}\bigg|_{r=1} = q_r\bigg|_{r=1}. \tag{2.12}$$

Радиальная плотность теплового потока q_r определяется в (1.5). Распределение температуры внутри однородной частицы $T_p(r,\theta)$ определяется из решения уравнения Лапласа:

$$\Delta T_p(r,\theta) = 0 \tag{2.13}$$

с соответствующими граничными условиями:

$$T_p(r = 0) = T_0, \quad T_p(r = 1) = T_s(\theta). \tag{2.14}$$

Из решения (2.13) с граничными условиями (2.14), следует, что

$$\tau_s(\theta) \sim \cos\theta.$$

Примем для возмущения температуры поверхности частицы следующее выражение:

$$\tau_s(\theta) = -u_\infty \tau_0 \cos\theta; \tag{2.15}$$

множитель τ_0 зависит от числа Кнудсена, аккомодационных параметров и определяется из (2.12).

Здесь и далее при обсуждении тепловой поляризации частицы будет использоваться только величина τ_0.

В условиях полной аккомодации молекулы, покидающие поверхность частицы, имели бы максвелловскую функцию распределения:

$$f^+ = f_s = f_0\left[1 + \nu_s + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right)\tau_s\right]. \tag{2.16}$$

Если бы система «частица — газ» находилась в состоянии равновесия при температуре T_s, то в соответствии с принципом детального равновесия (1.27)

$$f_s(\theta, \mathbf{v}) = \int\limits_{v'_r<0} K(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}, T_s) f_s(\theta, \mathbf{v}')\, d\mathbf{v}'. \tag{2.17}$$

Вычитая (2.17) из (1.24), с учетом линеаризации (2.6), (2.16) получим граничное условие для функции возмущения h:

$$\begin{gathered}f_0(\mathbf{c})[2\mathbf{c}\mathbf{u}_\infty - c^2\tau_s(\theta) + h^+(\theta,\mathbf{c})] = \\ = \bar{v}^3 \int\limits_{v'_r<0} K[\mathbf{c}' \to \mathbf{c},T_0] f_0(\mathbf{c}')[2\mathbf{c}'\mathbf{u}_\infty - c'^2\tau_s(\theta) + h^-(\theta,\mathbf{c}')]\, d\mathbf{c}',\end{gathered} \tag{2.18}$$

Здесь h^- и h^+ соответствуют функциям возмущения для налетающих и отраженных молекул.

Отметим, что при записи граничного условия (2.18) вновь использовался принцип детального равновесия, аналогичный (2.17), но соответствующий равновесной температуре T_0. В рамках линейного приближения ядро рассеяния также зависит от T_0.

Сила, действующая на частицу, определяется прямым подсчетом нескомпенсированного импульса, передаваемого молекулами газа частице при столкновениях:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{e}_z \frac{2}{\pi^{3/2}} p_0 \int\limits_{\sigma} d\sigma \int c_r c_z e^{-c^2} (2\mathbf{c}\mathbf{u}_\infty + h)\, d\mathbf{c}, \tag{2.19}$$

где $\mathbf{e}_z$ – единичный вектор в направлении набегающего потока. Интегрирование проводится по поверхности частицы σ и по пространству молекулярных скоростей.

Дальнейшее решение состоит в получении системы интегральных уравнений для макропараметров, входящих в интеграл обратных столкновений (2.7) и последовательном отборе членов одного порядка по параметру разреженности δ.

Введем интегральный оператор, действующий на любую функцию молекулярных скоростей $\varphi(\mathbf{c})$

$$\hat{K}[\varphi(\mathbf{c}')] = \bar{v}^3 \int\limits_{c'_r<0} K(\mathbf{c}' \to \mathbf{c}, T_0) \exp(-c'^2) \varphi(\mathbf{c}')\, d\mathbf{c}' \tag{2.20}$$

и скалярные произведения для любых двух функций молекулярных скоростей

$$(g(\mathbf{c}),\xi(\mathbf{c}))^{\pm} = \int\limits_{c_r \gtrless 0} g(\mathbf{c})\xi(\mathbf{c})\, d\mathbf{c}. \tag{2.21}$$

Используя (2.19) и (2.12), получим выражения для силы сопротивления и тепловой поляризации частицы при произвольном ядре рассеяния и параметре разреженности δ:

$$F_D = -\frac{16}{3}\sqrt{\pi} r_0^2 p_0 u_\infty \left\{ 1 - \frac{3}{8}\frac{1}{\pi^2}\int\limits_\sigma d\sigma \left[\left(c_r c_z, \hat{K}[2\mathbf{c}'\mathbf{u}_\infty + \right.\right.\right. \tag{2.22}$$

$$\left. c'^2 u_\infty \tau_0 \cos\theta + h^-(\mathbf{c}', r=1)] \right)^+ -$$

$$\left.\left. \frac{5}{8}\pi^{3/2} u_\infty \tau_0 \cos^2\theta + \left(c_r c_z, \exp(-c^2) h^-(\mathbf{c}, r=1) \right)^- \right] \right\};$$

$$\frac{\lambda_p T_0}{r_0}\tau_0 u_\infty = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\tau_0 u_\infty + \frac{3}{4\pi^{5/2}}\int\limits_\sigma d\sigma \left\{ \left(c_r \left(c^2 - \frac{5}{2} \right), \hat{K}[2\mathbf{c}'\mathbf{u}_\infty + \right.\right. \tag{2.23}$$

$$\left. c'^2 u_\infty \tau_0 \cos\theta + h^-(\mathbf{c}', r=1)] \right)^+ + \left.\left(c_r \left(c^2 - \frac{5}{2} \right), \exp(-c^2) h^-(\mathbf{c}, r=1) \right)^- \right\}.$$

Необходимо отметить, что функция возмущения h^- содержит макроскопические величины в произвольной точке $\mathbf{r}'$ (рис. 1.1) и интегрируется в сферических координатах в пространстве скоростей в точке с радиус–вектором $\mathbf{r}'$ (c, α', β'). При этом угол α' изменяется в области $0 \leqslant \alpha' \leqslant \alpha'_0$; $d\mathbf{c} = c^2 dc \sin\alpha' d\alpha' d\beta'$; $\alpha'_0 = \arcsin 1/r'$.

Определим силу сопротивления и тепловую поляризацию частицы, ограничившись малыми значениями параметра разреженности δ. Данное приближение соответствует почти свободномолекулярному режиму. Используя (1.16) и (1.19), получим выражения для силы сопротивления, приведенной к её значению в свободномолекулярном режиме при полной аккомодации F_D^{fm} [(2.4) при $\varepsilon = 1$], и функции τ_0, определяющей тепловую поляризацию частицы:

$$F_D^* = \frac{F_D}{F_D^{fm}} = F_{D0}^* + \delta F_{D1}^*, \tag{2.24}$$

где

$$F_{D0}^* = \frac{8}{8+\pi}\left\{ 1 - \frac{5}{16}\sqrt{\pi}\tau_0 - \frac{1}{2\pi}\left(c_r, \hat{K}[2c_r c'_r + 4c_\theta c'_\theta - c'^2\tau_0] \right)^+ \right\};$$

$$F_{D1}^* = -\frac{3}{8+\pi}\frac{1}{\pi^2 u_\infty}\int\limits_\sigma d\sigma \left[\left(c_r c_z, \exp(-c^2)\psi(\mathbf{c}) \right)^- + \left(c_r c_z, \hat{K}[\psi(\mathbf{c}')] \right)^+ \right]; \tag{2.25}$$

При исследовании тепловой поляризации частицы примем во внимание, что

$$\frac{\lambda_p T_0}{r_0} = \frac{15}{8}\frac{\Lambda}{\delta} p_0 \bar{v}, \qquad \Lambda = \frac{\lambda_p}{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{15}{4\sqrt{\pi}} k \bar{v} n_0 l. \tag{2.26}$$

Безразмерную величину Λ, определеюяемую отношением коэффициентов теплопроводности частицы и газа, принято называть параметром теплопроводности. Из выражения (2.26) следует, что тепловая поляризация частицы не возникает в свободномолекулярном режиме, а в почти свободномолекулярном режиме является эффектом первого порядка по δ. В связи с этим можно ограничиться следующим выражением для τ_0:

$$\tau_0 = \frac{2}{15}\frac{\delta}{\lambda}\tau_0^*, \tag{2.27}$$

$$\tau_0^* = 1 + \frac{4}{\pi^{3/2}}\left(c_r \left(c^2 - \frac{5}{2} \right), \hat{K}[2c'_r + \sqrt{\pi}] \right). \tag{2.28}$$

Кратко остановимся на используемых обозначениях и процедуре интегрирования. Введем сферическую систему координат в пространстве молекулярных скоростей (c,α,β) и соответственно запишем компоненты скорости:

$$0 \leqslant c < \infty, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 2\pi; \tag{2.29}$$

$$c_i = -c\Omega_{0i}, \quad i = r,\theta,\varphi, \quad c_z = c_r \cos\theta - c_\theta \sin\theta;$$

$$\boldsymbol{\Omega}_0 = \frac{\mathbf{r}' - \mathbf{n}}{|\mathbf{r}' - \mathbf{n}|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_0}{r_0}.$$

Для упрощения записи обозначим интеграл по координате вдоль выделенной (рис. 1.1) траектории молекулы от $\Phi_0(\mathbf{c})$ следующим образом:

$$\psi(\mathbf{c}) = \frac{1}{c}\int\limits_0^\infty \Phi_0(\mathbf{c}) dS. \tag{2.30}$$

Функция $\Phi_0(\mathbf{c})$, определяемая выражением (2.7), соответствует макропараметрам в свободномолекулярном режиме, которые будут определены далее.

В сферических координатах в пространстве скоростей скалярное произведение (2.21) для функции $e^{-c^2}\psi(\mathbf{c})$ записывается следующим образом:

$$(c_r c_z, e^{-c^2}\psi(\mathbf{c}))^- = \int_0^\infty c^3 e^{-c^2} dc \int_0^{2\pi} d\beta \int_{\pi/2}^{\pi} \Omega_{0r}\Omega_{0z} \sin\alpha d\alpha \int_0^\infty \Phi_0 dS. \tag{2.31}$$

Поскольку [7]

$$dS \sin\alpha d\alpha d\beta = \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{n}|^2}, \tag{2.32}$$

то выражение (2.31) запишется следующим образом:

$$(c_r c_z, e^{-c^2}\psi(\mathbf{c}))^- = \int_0^\infty c^3 e^{-c^2} dc \int\limits_G \Omega_{0r}\Omega_{0z}\Phi_0 \frac{d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'-\mathbf{n}|^2}. \qquad (2.33)$$

Внутреннее интегрирование проводится по полупространству G, ограниченному плоскостью, касательной к поверхности сферы в точке $\mathbf{r}_0$.

Интегрирование по поверхности частицы σ в (2.19) записывается как [7]

$$\int d\sigma = r_0^2 \int d\mathbf{r}_s; \quad d\mathbf{r}_s = |\mathbf{r}'-\mathbf{n}|^2 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{|\Omega_{0r}|}, \qquad (2.34)$$

что окончательно дает

$$\int d\sigma (c_r c_z, e^{-c^2}\psi(\mathbf{c}))^- = r_0^2 \int\limits_{V_0} d\mathbf{r}' \int\limits_{\omega_0} \Omega_{0z} d\boldsymbol{\omega} \int_0^\infty c^3 e^{-c^2} \Phi_0 dc. \qquad (2.35)$$

Здесь V_0 – все пространство вокруг сферы, ω_0 – телесный угол, под которым видна сфера из точки с радиус-вектором $\mathbf{r}'$.

Используя выражения (1.16)–(1.19) с учетом линеаризации (2.6) легко показать, что при $\delta = 0$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{r},\mathbf{c}) &= h^+, \quad at \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0; \\ h(\mathbf{r},\mathbf{c}) &= 0, \quad at \quad \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \pi, \end{aligned} \qquad (2.36)$$

Зная граничное условие для функции возмущения, не представляет трудностей получить из (1.9) выражения для макропараметров, входящих в (2.7). Для вычисления силы сопротивления и тепловой поляризации частицы в условиях почти свободномолекулярного режима достаточно определить макропараметры в свободномолекулярном режиме (при $\delta = 0$), как указано в §1.4. В результате получим:

$$\nu(r,\theta) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{r^2} u_\infty \cos\theta + \frac{3}{4}\left(1 - \sqrt{1-\frac{1}{r^2}}\right)\tau_s(\theta) +$$
$$\frac{1}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty c^2 dc \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\alpha_0} \sin\alpha d\alpha \hat{K}[\varphi^-(\theta,\mathbf{c}')],$$
$$w_r(r,\theta) = -\frac{1}{2}\left[1 - \left(1-\frac{1}{r^2}\right)^{3/2}\right] u_\infty \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{r^2}\tau_s(\theta) +$$
$$\frac{1}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty c^3 dc \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^{\alpha_0} \sin\alpha \cos\alpha d\alpha \hat{K}[\varphi^-(\theta,\mathbf{c}')],$$

$$w_\theta(r,\theta) = \frac{1}{2}\left[1-\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}\left(1+\frac{1}{2r^2}\right)\right]u_\infty\sin\theta +$$
$$\frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty c^3dc\int_0^{2\pi}\cos\beta d\beta\int_0^{\alpha_0}\sin^2\alpha d\alpha\hat{K}[\varphi^-(\theta,\mathbf{c}')], \qquad (2.37)$$
$$\tau(r,\theta) = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{r^2}}\right)\tau_s(\theta) - \frac{1}{3\sqrt{\pi}}\frac{1}{r^2}u_\infty\cos\theta +$$
$$\frac{2}{3\pi^{3/2}}\int_0^\infty c^2(c^2-\frac{3}{2})dc\int_0^{2\pi}d\beta\int_0^{\alpha_0}\sin\alpha d\alpha\hat{K}[\varphi^-(\theta,\mathbf{c}')],$$
$$q_r(r,\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{r^2}\tau_s(\theta) +$$
$$\frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty c^3(c^2-\frac{5}{2})dc\int_0^{2\pi}d\beta\int_0^{\alpha_0}\sin\alpha\cos\alpha d\alpha\hat{K}[\varphi^-(\theta,\mathbf{c}')],$$
$$q_\theta(r,\theta) = \frac{1}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty c^3(c^2-\frac{5}{2})dc\int_0^{2\pi}\cos\beta d\beta\int_0^{\alpha_0}\sin^2\alpha d\alpha\hat{K}[\varphi^-(\theta,\mathbf{c}')].$$

2.3 Расчет силы сопротивления для некоторых моделей ядра рассеяния

Результаты для силы сопротивления, приведенные к её значению при полной аккомодации, а также тепловой поляризации, полученные с использованием известных моделей ядра рассеяния, представлены ниже. В случаях, когда аналитические результаты привести невозможно, проводилось численное интегрирование с использованием программного пакета Wolfram Mathematica 12.0. Использовался адаптивный метод, детально описанный в работах [32] и [33], с точностью в пять значащих цифр.

Зеркально–диффузная модель Максвелла [10]

Для данной модели, представленной выражением (1.28), были получены аналитические выражения для любых значений коэффициента диффузного отражения ε:

$$F_D^* = 0.718 + \varepsilon(0.282 + 0.0795\tau_0) - \qquad (2.38)$$
$$\delta[0.710 - 0.210\varepsilon + 0.0312\varepsilon^2],$$

$$\tau_0^* = \varepsilon.$$

На рис. 2.2 представлена зависимость приведенной силы сопротивления от коэфффициента диффузного отражения ε при трех значениях параметра разреженности δ. Увеличение доли зеркально отраженных молекул приводит к уменьшению силы сопротивления и тепловой поляризации частицы, поскольку уменьшаются напряжения трения на её поверхности, а также обмен энергией между газом и частицей.

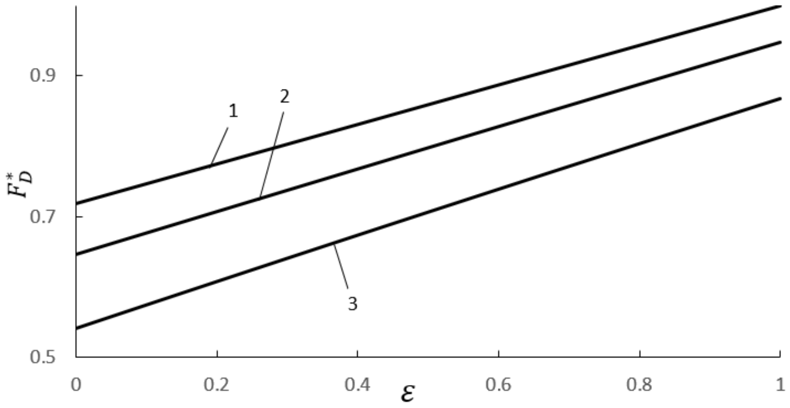

Рисунок 2.2 — Приведенная сила сопротивления как функция ε, δ: 1–0; 2–0.1; 3–0.25.

Представляет интерес поле макроскопических величин газа в свободномолекулярном режиме, приведенных к их значениям на поверхности частицы при полной аккомодации вблизи частицы в зависимости от аккомодационных параметров:

$$\begin{gathered}
\nu^*(r) = \frac{\nu(r)}{\nu^{(fm)}}; \qquad w_r^*(r) = \frac{w_r(r)}{w_r^{(fm)}}; \\
w_\theta^*(r) = \frac{w_\theta(r)}{w_\theta^{(fm)}}; \qquad \tau^*(r) = \frac{\tau(r)}{\tau^{(fm)}}; \\
q_r^*(r) = \frac{Q_r(r)}{Q_r^{(fm)}},
\end{gathered} \tag{2.39}$$

где

$$\begin{gathered}
\nu^{(fm)} = -\frac{(2+\pi)u_\infty\cos\theta}{2\sqrt{\pi}}; \qquad w_r^{(fm)} = -u_\infty\cos\theta; \\
w_\theta^{(fm)} = \frac{1}{2}u_\infty\sin\theta; \qquad \tau^{(fm)} = -\frac{u_\infty\cos\theta}{3\sqrt{\pi}}; \\
Q_r^{(fm)} = \frac{1}{4}u_\infty\cos\theta.
\end{gathered} \tag{2.40}$$

Результаты расчета представлены на рис. 2.3. Отметим, что касательная составляющая плотности теплового потока в свободномолекулярном режиме при полной аккомодации на поверхности частицы $Q_\theta^{(fm)}$ равна нулю.

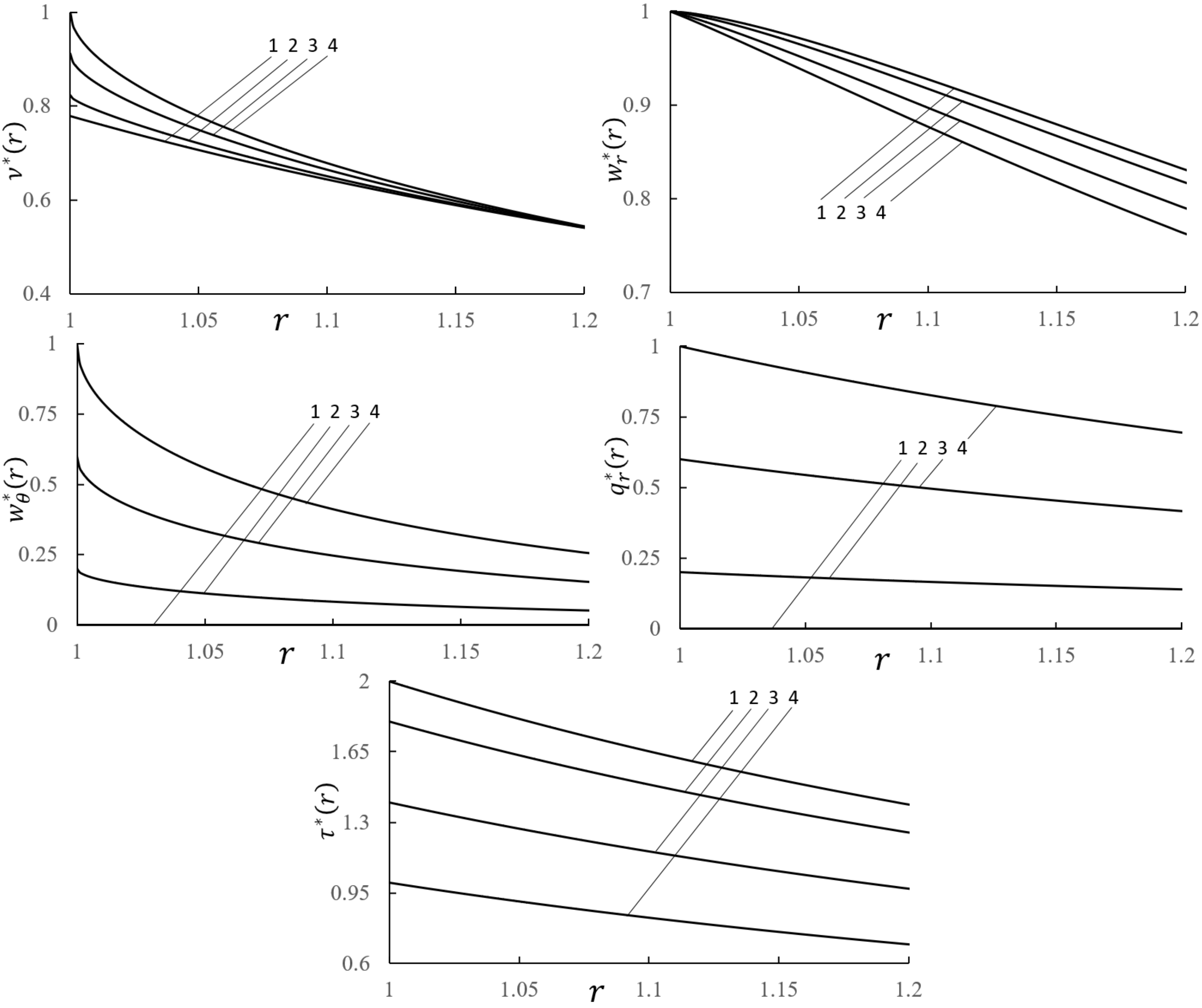

Рисунок 2.3 — Приведенные значения макроскопических величин в зависимости от r, ε: 1–0; 2–0.2; 3–0.6; 4–1.

Как видно из рис 2.3, аккомодационная зависимость проявляется по разному для различных макроскопических величин. Так, возмущение числовой плотности газа $\nu^*(r)$ и радиальная плотность теплового потока в газе $q_r^*(r)$ в наибольшей степени зависят от коэффициента диффузного отражения при $r = 1$, т. е. на поверхности частицы; расхождение соответственно составляет от 23% до 100% при полностью диффузном рссеянии и полностью зеркальном отражении. Такое поведение связано с уменьшением доли нормального импульса, переданного газом поверхности частицы при увеличении доли зеркально отраженных молекул. Аккомодационная зависимость возмущения нормальной компоненты скорости газа $w_r^*(r)$ начинает проявляться с удалением от частицы и достигает 16% в случае полной аккомодации и её отсутствии при $r \approx 4$, причем величина $w_r^*(r)$ тем больше, чем меньше аккомодация молекул на стенке. Возмущение касательной составляющей скорости газа $w_\theta^*(r)$ максимально при полной аккомодации и исчезает при её отсутствии, что обусловлено уменьшением доли переданного стенке тангенциального импульса при уменьшении аккомодации, и, как следствие, уменьшением силы трения. Величина $\tau^*(r)$ при отсутствии аккомодации превышает её значение при полной аккомодации в два раза. Данный эффект вызван снижением интенсивности обмена энергией между газом и поверхностью частицы при уменьшении аккомодации. Как следствие, температура газа вблизи стенки максимальна при полностью зеркальном отражении молекул.

Отметим, что все указанные макропараметры стремятся к нулю по мере удаления от частицы, и их значениями можно пренебречь при $r \sim 10$, т. е. на расстоянии 10 радиусов частицы.

В использованной модели ядра рассеяния касательная плотность теплового потока $q_\theta^*(r)$ в свободномолекулярном режиме равна нулю.

Полученные выражения показывают увеличение вклада тепловой поляризации в силу сопротивления с уменьшением теплопроводности материала частицы, а также с увеличением аккомодации на поверхности частицы и параметра разреженности δ. В случае полной аккомодации, величина тепловой поляризации частицы будет максимальной. Чтобы оценить максимальный вклад тепловой поляризации в силу сопротивления, рассмотрим частицу аэрогеля ($\lambda_p = 0.017$ Вт/(м·К)) [34] в воздухе при температуре $T_0 = 300$ К и параметре разреженности $\delta = 0.25$. При полной аккомодации на поверхности частицы, вклад тепловой поляризации в силу составляет около 4%. Для других материалов с теплопроводностью не ниже окружающего газа, вклад будет пренебрежимо мал. В связи с этим, для других моделей ядра рассеяния, мы пренебрегаем вкладом тепловой поляризации в силу сопротивления.

Модель Бормана и соавторов [12]

В общем случае аналитические результаты для данной модели получить не удается. Однако можно рассмотреть предельные случаи по параметру B, а для промежуточных значений провести численный анализ.

При почти диффузном рассеянии ($B \ll 1$) получим следующие выражения:

$$F_D^* = 1 - 0.159B - \delta(0.531 + 0.323B); \tag{2.41}$$

$$\tau_0^* = 1 - B\frac{8-\pi}{2\sqrt{\pi}}.$$

В случае почти зеркального отражения ($B \gg 1$) имеем:

$$F_D^* = 0.718 - 0.693\delta + \frac{1}{B}\left(0.636 + 0.141\delta\right); \tag{2.42}$$

$$\tau_0^* = \frac{2}{B\sqrt{\pi}}.$$

Результаты численного расчета при промежуточных значениях параметра B представлены на рис. (2.4), а также в табл. 9 в приложении.

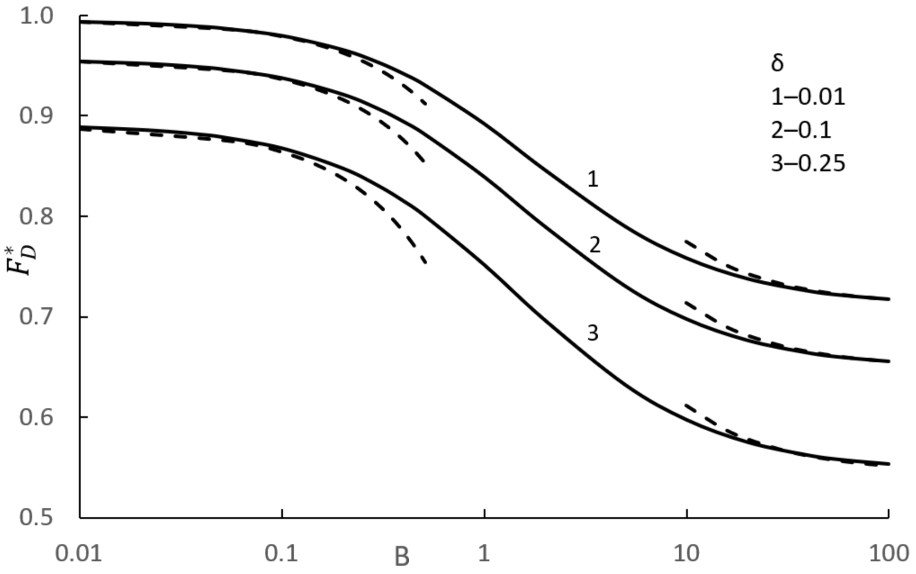

Рисунок 2.4 — Приведенная сила сопротивления для модели (1.29); пунктирные линии соответствуют формулам (2.41) и (2.42).

Результаты расчета величины τ_0, приведенные к её значению при полной аккомодации, представлены на рис. 2.5. Наблюдается монотонное уменьшение данной величины по мере увеличения доли зеркально отраженных молекул.

Наблюдается монотонное уменьшение силы сопротивления с увеличением доли зеркально отраженных молекул для всех рассмотренных значений параметра разреженности δ, аналогично максвелловской модели зеркально–диффузного отражения. Если время релаксации молекул в пристеночном слое частицы существенно превышает время пролета поля поверхностных сил, напряжения трения практически не возникают.

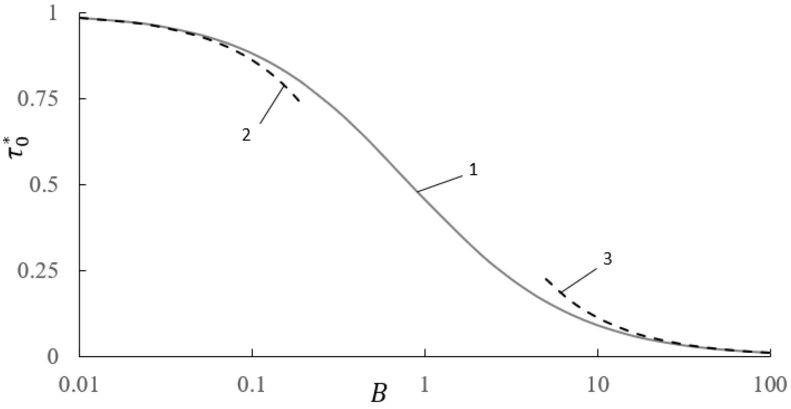

Рисунок 2.5 — Приведенная величина τ_0^* для модели (1.29):
1 – общий случай; 2 – выражение (2.41); 3 – выражение (2.42).

Результаты численного расчета поля течения газа вблизи частицы с использованием модели Бормана и соавторов представлены на рис. 2.6.

На рис. 2.7 представлена зависимость касательной плотности теплового потока от параметра B на различном удалении от частицы. В отличие от зеркально-диффузной модели с коэффициентом ε, независящим от скорости, использование модели Бормана дает ненулевое значение касательной плотности теплового потока. Помимо этого, величина Q_θ зависит от параметра B немонотонно. При $B = 0$, что соответствует полной аккомодации, касательная плотность теплового потока равна нулю. С увеличением доли зеркально отраженных молекул величина Q_θ растет вплоть до $B \lesssim 2$, где она имеет максимум, и в дальнейшем уменьшается до нуля в пределе $B \to \infty$. В связи с тем, что при полной аккомодации на поверхности частицы $Q_\theta^{fm} = 0$, на графике $q_\theta^* = Q_\theta/(u_\infty \sin\theta)$.

Модель Эпштейна [11]

Для упрощения представления результатов для данной модели введем два параметра:

$$b_i = \sqrt{1 + \frac{T_0}{\theta_i}}, \quad i = 1{,}2.$$

С использованием данной модели получены результаты для произвольных значений аккомодационных параметров, однако ввиду их излишней громоздкости представим результаты только для предельных случаев, соотвествующих почти диффузному рассеянию и почти зеркальному отражению.

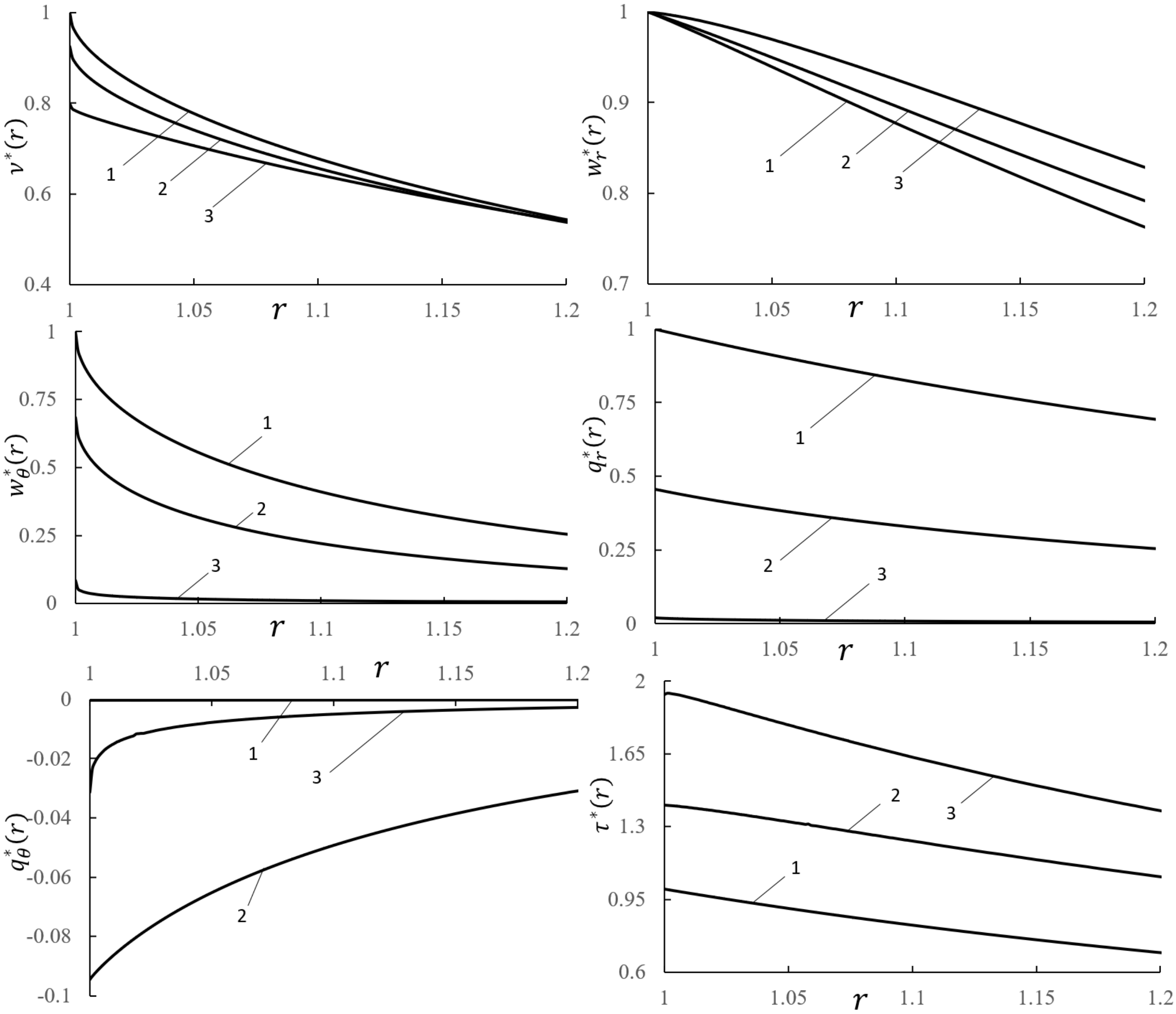

Рисунок 2.6 — Приведенные значения макроскопических величин в зависимости от r, B: 1–0; 2–1; 3–50.

Почти полному диффузному рассеянию соответствует случай $1 - \varepsilon_\infty \ll 1, 1 - \theta_i/T_0 \ll 1$. В результате получим:

$$F_D^* = 1 - 0.531\delta - (1 - \varepsilon_\infty)(0.253 + 0.114\delta) - \\ (0.0541 + 0.0323\delta)(b_1^2 - b_2^2); \tag{2.43}$$

$$\tau_0^* = 0.235 - 0.139(b_1^2 - b_2^2) + 0.765\varepsilon_\infty.$$

При рассмотрении случаев, соответствующих почти зеркальному отражению молекул, ограничимся ситуацией, когда $mv^2/(2k\theta_1) \gg 1$ и $mv^2/(2k\theta_2) \ll 1$. Тогда получим:

$$F_D^* = 0.718 + 0.8812\frac{T_0}{\theta_2}\varepsilon_\infty - \delta\left(0.71 + 0.4917\frac{T_0}{\theta_2}\varepsilon_\infty\right); \tag{2.44}$$

$$\tau_0^* = \frac{5}{2}\frac{T_0}{\theta_2}\varepsilon_\infty.$$

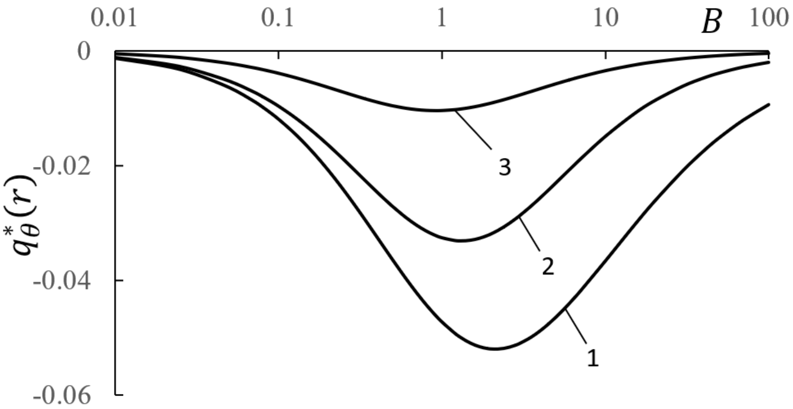

Рисунок 2.7 — Приведенная касательная плотнсть теплового потока как функция параметра B, r: 1–1; 2–1.05; 3–1.3.

Результаты для промежуточных значений аккомодационных параметров представлены на рис. 2.8 и в приложении в табл. 10.

На рис. 2.9 представлены зависимости макроскопических величин от r, приведенные к их значениям при полной аккомодации на поверхности частицы с использованием модели Эпштейна.

Для всех макроскопичческих величин, за исключением Q_θ, зависимости от аккомодационных параметров и расстояния аналогичны моделям Максвелла и Бормана. Аккомодационная зависимость $q^*_\theta(r)$ является немонотонной.

CL-Модель [13]

С использованием данной модели для силы сопротивления можно получить аналитические результаты при почти полной аккомодации молекул газа на поверхности частицы, т. е. при

$$(1-\alpha_\tau) \ll 1, \qquad (1-\alpha_n) \ll 1. \tag{2.45}$$

Ограничиваясь линейным приближением по параметрам (2.45), получим:

$$F^*_D = 1 - 0.359(1-\alpha_\tau) + 0.0704(1-\alpha_n) - \delta[0.531 + 0.177(1-\alpha_n)]. \tag{2.46}$$

Для величины τ_0 получено при произвольной аккомодации:

$$\tau^*_0 = \alpha_n. \tag{2.47}$$

Для промежуточных значений параметров модели был проведен численный расчет. Результаты представлены на рис. 2.10 и в табл. 11 приложения.

Из графика видно, что неполная аккомодация тангенциального импульса приводит к уменьшению силы сопротивления, а неполная аккомодация энергии движения по нормали увеличивает её.

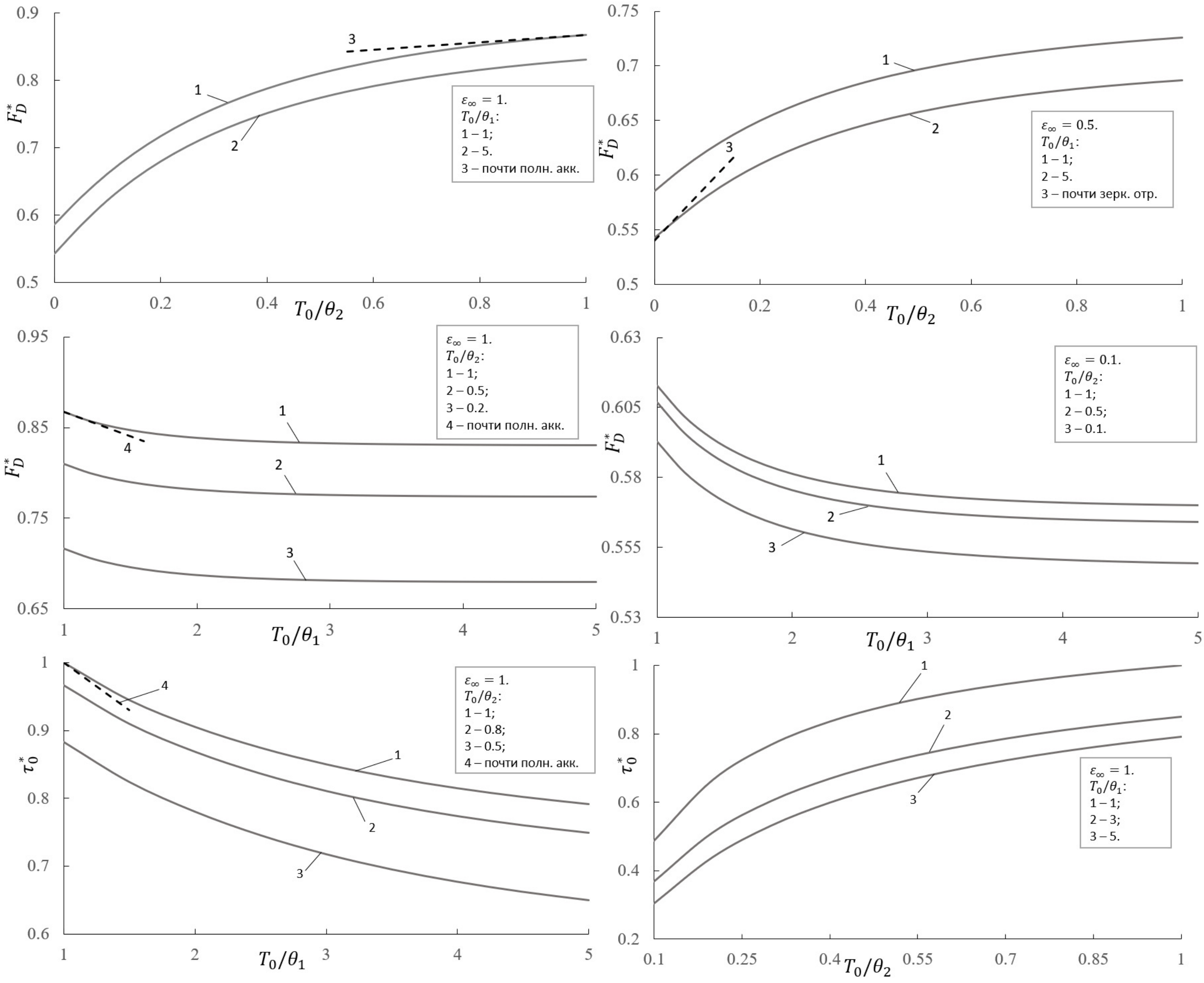

Рисунок 2.8 — Зависимости приведенной силы сопротивления при $\delta = 0.25$ и величины τ_0^* от аккомодационных параметров модели Эпштейна. Пунктирные линии соответствуют случаям почти полной аккомодации (2.43) и почти зеркального отражения (2.44).

На рисунках 2.11 и 2.12 показаны поля макроскопических величин газа вблизи частицы.

Аналогично модели Максвелла, для модели CL имеем равенство нулю касательной плотности теплового потока $Q_\theta(r)$. Для всех остальных макроскопических величин, за исключением $w_\theta(r)$, показана независимость от коэффициента аккомодации тангенциального импульса α_τ. Касательная составляющая возмущения скорости газа $w_\theta(r)$ не зависит от коэффициента аккомодации энергии движения по нормали α_n.

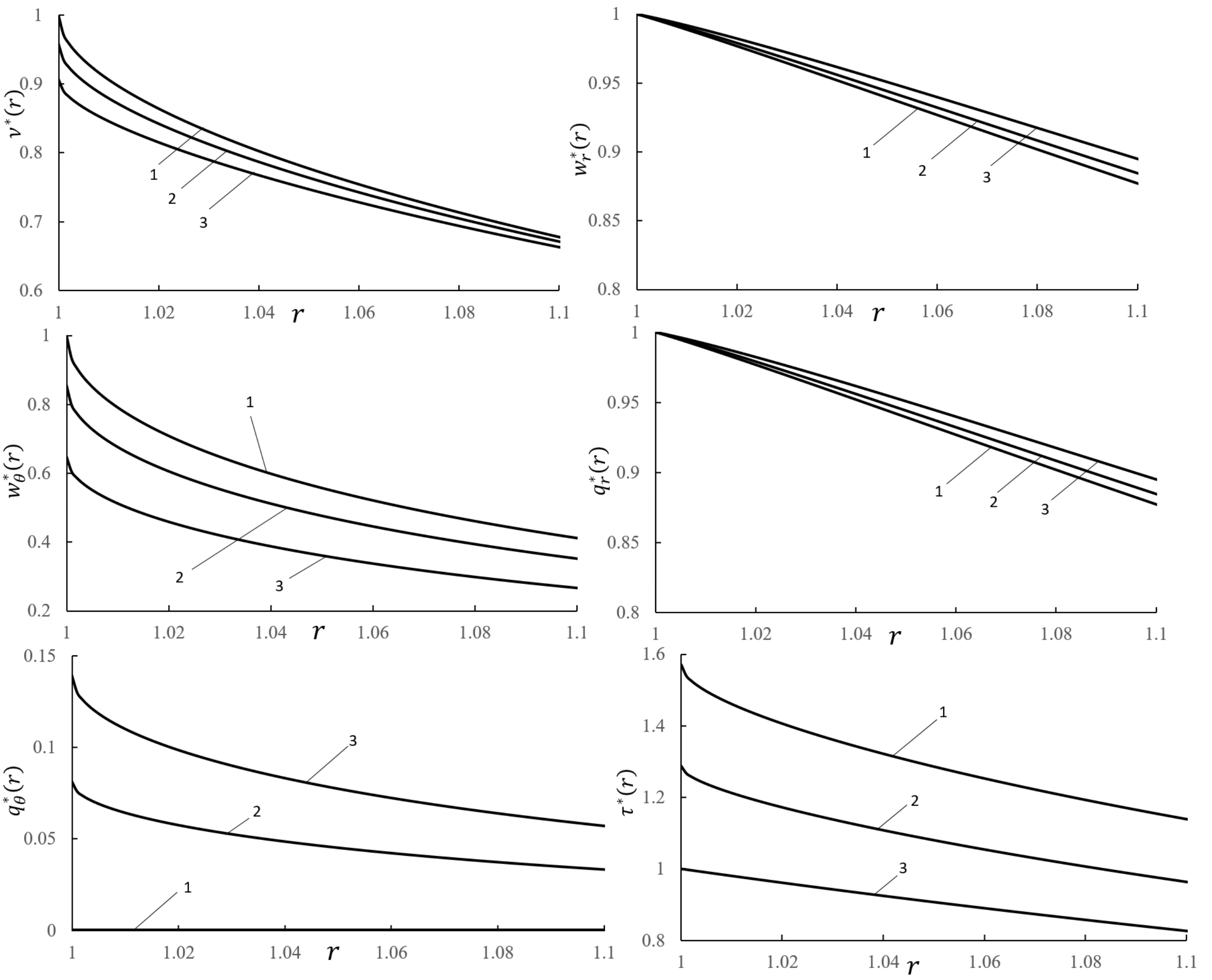

Рисунок 2.9 — Приведенные значения макроскопических величин в зависимости от r при $\varepsilon_\infty = 1$: 1 – $T_0/\theta_1 = T_0/\theta_2 = 1$; 2 – $T_0/\theta_1 = 1, \quad T_0/\theta_2 = 3$; 3 – $T_0/\theta_1 = 0.5, \quad T_0/\theta_2 = 5$.

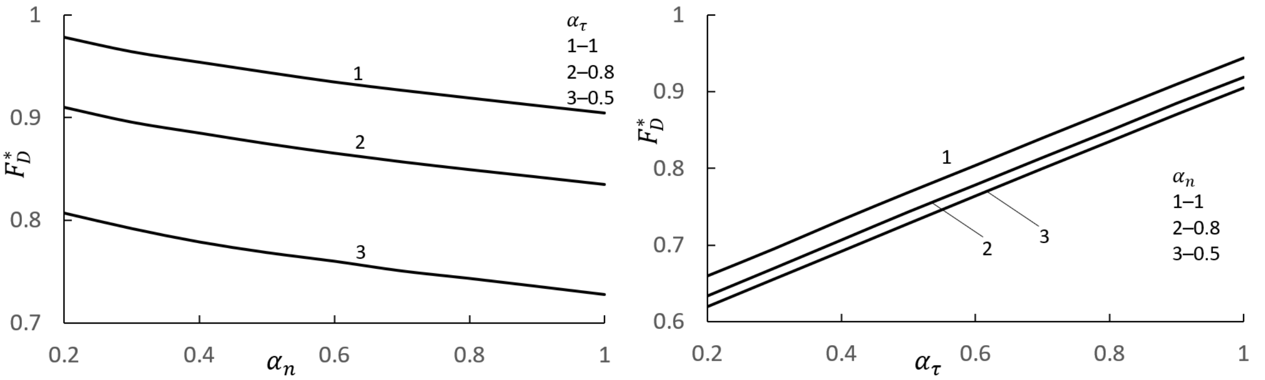

Рисунок 2.10 — Приведенная сила сопротивления как функция аккомодационных параметров CL-модели при $\delta = 0.2$.

2.4 Обсуждение результатов

В первую очередь оценим возможный интервал значений параметра разреженности, в котором результаты линейного приближения имеют удовлетвори-

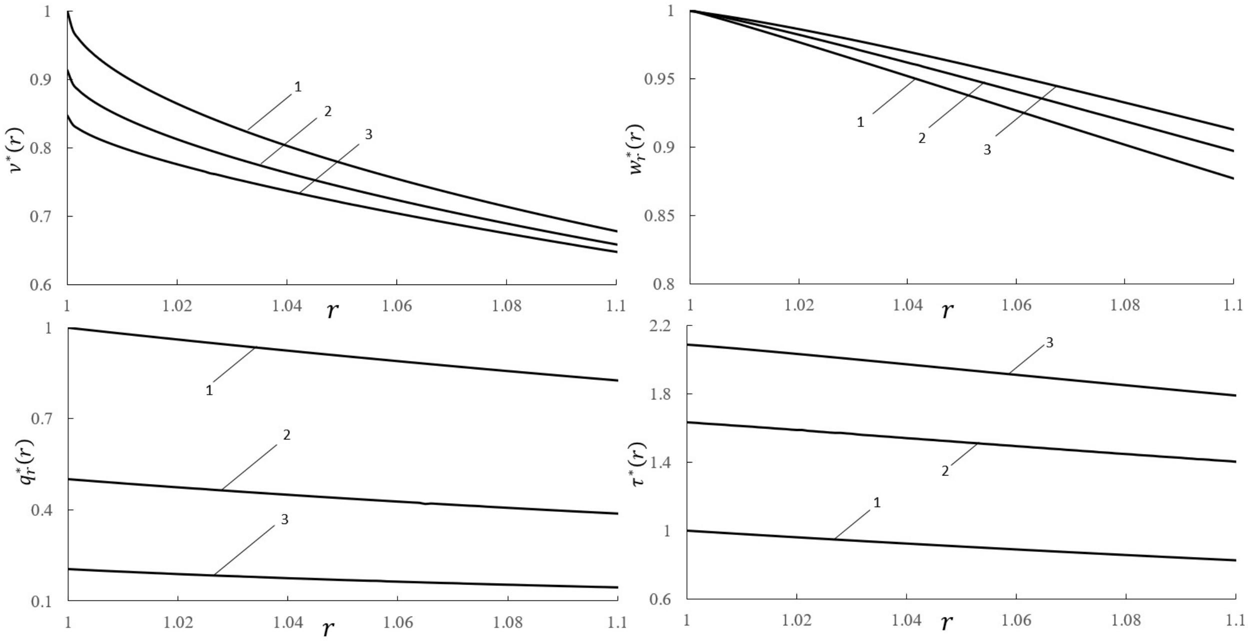

Рисунок 2.11 — Приведенные значения макроскопических величин для модели CL в зависимости от r при $\alpha_\tau = 1$: α_n: 1 – 1; 2 – 0.5; 3 – 0.2.

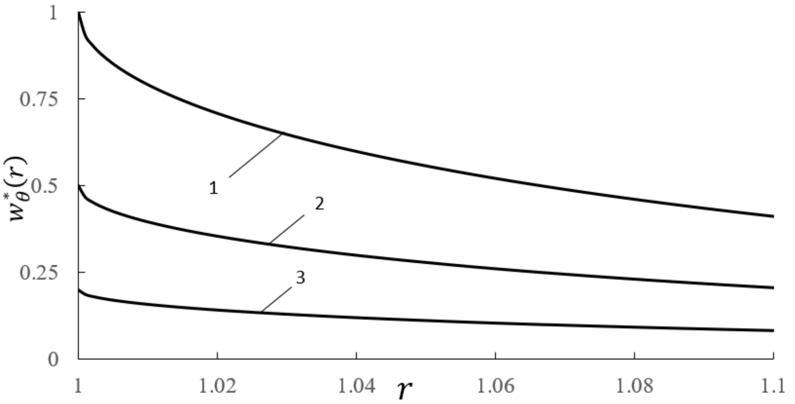

Рисунок 2.12 — Приведенные значения возмущения касательной гидродинамической скорости газа для модели CL в зависимости от r при $\alpha_n = 1$: α_τ: 1 – 1; 2 – 0.5; 3 – 0.2.

тельную точность. В табл. 1 представлены результаты по силе сопротивления, полученные в диссертационной работе, а также результаты ряда других авторов: работы [35] из решения модельного БГК–уравнения вариационным методом; работы [36] из численного решения кинетического уравнения; работы [37], в которой представлены результаты как для газа из твердых сферических молекул (линеаризованное уравнение Больцмана), так и для БГК–модели и показано, что эти два набора результатов близки между собой. Все представленные результаты соответствуют полному диффузному рассеянию молекул.

Как показывает сравнение, максимальное расхождение между результатами имеет место при $\delta = 0.25$ и не превышает 2.5%.

δ	Дисс.	[35]	[36]	[37]	
				Твердые сферы	модель БГК
0.05	0.973	0.978	0.982	—	—
0.075	0.960	0.965	0.966	—	—
0.1	0.947	0.953	0.948	0.959	0.951
0.25	0.867	0.886	0.887	0.908	0.886

Таблица 1 — Значения приведенной силы сопротивления F_D^*, полученные в данной работе, [35], [36] и [37].

В качестве дополнительного критерия для оценки диапазона применимости приближения было проведено сравнение результатов для CL-модели [13] с результатами работы [29]. Сравнение полученных в диссертации результатов по силе сопротивления с результатами [29] представлено в табл. 2.

δ	α_n	0.1		0.5		0.9	
	α_τ	[29]	Дисс.	[29]	Дисс.	[29]	Дисс.
0.01	0.5	0.928	0.890	0.894	0.858	0.863	0.828
	0.8	1.040	0.998	1.006	0.965	0.976	0.935
	0.9	1.077	1.033	1.044	1.001	1.013	0.971
	1	1.114	1.069	1.081	1.037	1.050	1.007
	α_n	0.1		0.5		0.9	
	α_τ	[29]	Дисс.	[29]	Дисс.	[29]	Дисс.
0.1	0.5	0.895	0.899	0.863	0.863	0.832	0.829
	0.8	1.003	1.006	0.971	0.970	0.939	0.937
	0.9	1.038	1.042	1.006	1.006	0.977	0.972
	1	1.074	1.078	1.042	1.042	1.013	1.008

Таблица 2 — Сравнение приведенной силы сопротивления с результатами работы [29]

Как видно из таблицы, максимальное расхождение результатов имеет место при $\delta = 0.1$ и не превышает 4.1%.

Представляет интерес численная оценка размерной величины силы сопротивления, возникающей в реальных аэродисперсных системах. Для этого рассмотрим сферическую частицу радиуса $\sim 1\,$мкм в атмосфере при давлении $p \sim 1000\,$Па. Число Кнудсена при этом $Kn \approx 5.5$. Используя каплю воды в качестве материала частицы и полагая среднюю скорость набегающего потока в $\mathbf{U}_\infty = 50\,$м/с получим, что сила сопротивления имеет порядок $10^{-12}\,$Н. При этом сила тяжести имеет порядок 10^{-14} Н. Для частицы радиусом 0.1 при давлении $p \sim 1000$ Па силы сопротивления и тяжести имеют порядки 10^{-14} Н и 10^{-17} Н соответственно.

Сила сопротивления в почти свободномолекулярном режиме исследовалась в работах [38] и [39] с использованием метода кнудсеновских итераций при полной аккомодации молекул на поверхности частицы. В табл. 3 представлены результаты для множителя F^*_{D1} при параметре разреженности δ (см. выражение (2.24)).

Работа	[38]	[39]	[31]	Дисс.
F^*_{D1}	0.331	0.413	0.499	0.531

Таблица 3 — Значения F^*_{D1}, полученные в различных работах.

Видно, что результаты диссертационного исследования адекватно согласуются с экспериментальным результатом Милликена [31] с поправкой Аллена-Раабе [40]. Максимальное расхождение достигается при $\delta = 0.25$ и составляет 6%.

На рис. 2.13 показано сравнение теории с экспериментальными данными Милликена для капель часового масла в воздухе, повторно проанализированных в работе [40].

Следует отметить, что в эксперименте Милликена точек, приближенно соответствующих свободномолекулярному режиму, всего три. Данный факт не позволяет провести качественное сравнение в таком режиме и делать обоснованные выводы относительно моделей ядра рассеяния и значений параметров, входящих в них. Учет слагаемых порядка Kn^{-1} позволяет покрыть более 30 экспериментальных точек, что служит хорошей базой для обоснованного определения значений аккомодационных параметров моделей ядра рассеяния.

Исходя из условия наилучшего согласия теории с экспериментом были подобраны значения параметров всех рассмотренных моделей ядра рассеянинbackup. Результаты представлены в таблице 4.

Очевидно, существует проблема неоднозначного определения значений аккомодационных параметров многопараметрических моделей ядра рассеяния. Однако следует принимать во внимание соотношение между параметрами моделей. В частности, для модели Эпштейна, эти соотношения обсуждались в разделе 1.4. Их учет существенно ограничивает возможный выбор значений

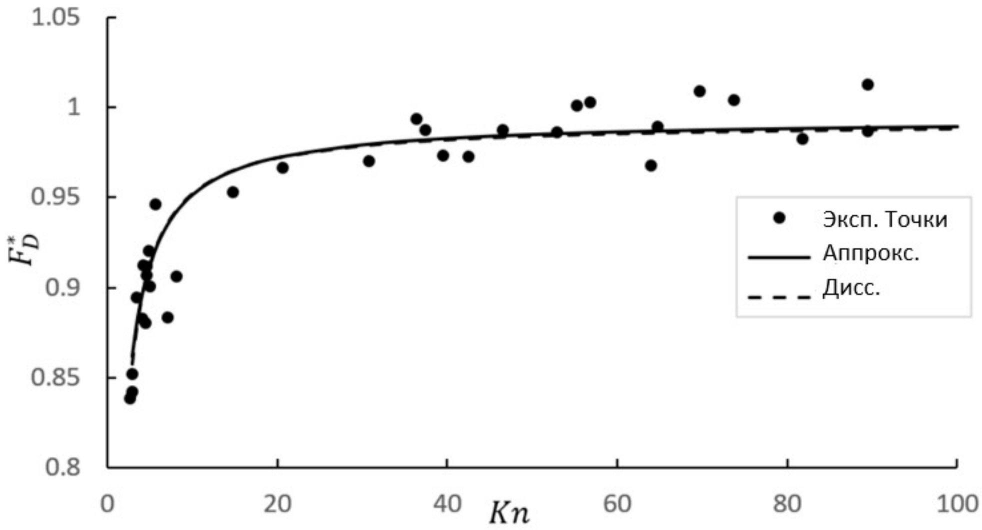

Рисунок 2.13 — Приведенная сила сопротивления для модели (1.32). Пунктирные линии соответствуют результатам работы.

Модель зеркально–диффузного отражения [10]	$\varepsilon = 0.98$
Модель Эпштейна [11]	$T_0/\theta_1 = 1, T_0/\theta_2 = 0.9, \varepsilon_\infty = 1$
Модель Бормана и соавторов [12]	$B = 0.05$
Модель CL [13]	$\alpha_n = 0.6, \alpha_\tau = 0.9$

Таблица 4 — Аккомодационные параметры для различных моделей

параметров. Количественное согласие с эмпирической кривой Милликена достигается при варьировании параметров модели в пределах $\pm 5\%$.

Что касается CL–модели, следует принимать во внимание, что обмен импульсом между молекулой и стенкой происходит легче, чем обмен энергией. Кроме того, неоднозначность определения значений параметров в многопараметрических моделях может быть решена корректной обработкой экспериментальных данных при сравнении с теорией, например, по методу наименьших квадратов. Для наиболее физически обоснованного определения аккомодационных параметров необходимы различные типы экспериментов с одинаковыми газами и поверхностями.

Итоги

Получены выражения для силы сопротивления и тепловой поляризации сферической аэрозольной частицы, медленно обтекаемой газом в условиях почти свободномолекулярного режима при произвольном характере взаимодействия молекул газа с поверхностью частицы (ядре рассеяния).

Расчеты силы сопротивления с использованием четырех известных моделей ядра рассеяния показывают качественное согласие результатов. Сила сопротивления максимальна при полной аккомодации и монотонно уменьшается с уменьшением аккомодации. Единственным исключением является модель Черчиньяни–Лэмпис [13]. Результат для силы с использованием этой модели показывает уменьшение силы сопротивления с уменьшением аккомодации тангенциального импульса и с увеличением аккомодации энергии движения молекул по нормали к стенке. Авторы работы [29] пришли к аналогичному выводу на основе численного решения кинетического уравнения, полагая частицу идеальным проводником тепла.

Величина тепловой поляризации частицы максимальна при полной аккомодации и монотонно уменьшается с уменьшением аккомодации для всех использованных моделей ядра рассеяния. При этом вклад тепловой поляризации в силу сопротивления не превышает 4%.

Использование различных моделей ядра рассеяния при расчете поля течения газа вблизи частицы приводит к противоречивым результатам. Так, для максвелловской модели зеркально–диффузного отражения и CL–модели получено равенство нулю касательной плотности теплового потока при любых значениях аккомодационных параметров как на поверхности, так и на произвольном удалении от частицы. Вместе с тем, модель Бормана и соавторов, а также модель Эпштейна, дают ненулевые значения q_θ при промежуточных значениях аккомодационных параметров. При полной аккомодации и при зеркальном отражении для этих моделей $Q_\theta = 0$, что согласуется с двумя другими моделями ядра рассеяния. По мере увеличения доли зеркально отраженных молекул (уменьшения аккомодации), абсолютное значение Q_θ возрастает до некоторого максимума, и в дальнейшем монотонно убывает до нуля при полностью зеркальном отражении. Использование CL–модели показывает независимость всех макропараметров, кроме w_θ, от коэффициента аккомодации тангенциального импульса α_τ, при этом w_θ не зависит от коэффициента аккомодации энергии движения по нормали α_n.

Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными Милликена [31] по каплям часового масла в воздухе позволило извлечь численные значения аккомодационных параметров моделей исходя из условия наилучшего их согласия. Данный факт позволяет надеятся, что дальнейшие эксперименты по силе сопротивления с модельными частицами могут быть надежным источником информации по проблеме взаимодействия газа с поверхностью.

Глава 3. Термофорез сферической частицы

3.1 Обзор современного состояния проблемы

На любое тело, взвешенное в неоднородно нагретом газе, действует сила, пропорциональная градиенту температуры. Это явление называют термофорезом [2].

Термофоретическая сила, будучи уравновешенной силой сопротивления газовой среды, приводит к равномерному прямолинейному движению тела относительно газа. Скорость движения тела в этом случае принято называть термофоретической скоростью.

Движение аэрозольных частиц в газе под действием градиента температуры было обнаружено Джоном Тиндаллом [41]. Обзор результатов, полученных по термофорезу в последующие годы, представлен в работах [1; 2; 26; 42—45].

При экспериментальном исследовании термофореза при больших числах Кнудсена имеет место эффект «стесненности» пространства, в котором помещена аэрозольная частица. В теоретических исследованиях как правило используется модель частицы в неограниченном газе. Поэтому при сравнении теории с экспериментом необходимо анализировать значения внешнего числа Кнудсена $Kn_L = l/L$, где L – характерный размер системы, создающей градиент температуры. В случае теплового конденсатора это будет расстояние между нагретой и охлажденной пластиной.

В работе [46] был представлен приближенный диапазон значений чисел Кнудсена Kn и Kn_L в соответствии с режимами по частице и по экспериментальной ячейке. Графически области значений этих чисел,соответствующих модели частицы в неограниченном газе, представлены на рис. 3.1. В диссертационной работе исследуется почти свободномолекулярный режим ($Kn > 3$). В этом случае модели частицы в неограниченном газе соответствует $Kn_L \leqslant 10^{-2}$.

До настоящего времени большинство теоретических исследований по силе и скорости термофореза проведены предполагая либо полное диффузное рассеяние молекул, либо различного рода аппроксимации функции распределения отраженных молекул. При этом результат зависит от выбранной аппроксимации и метода решения кинетического уравнения. Так, в работах [47] и

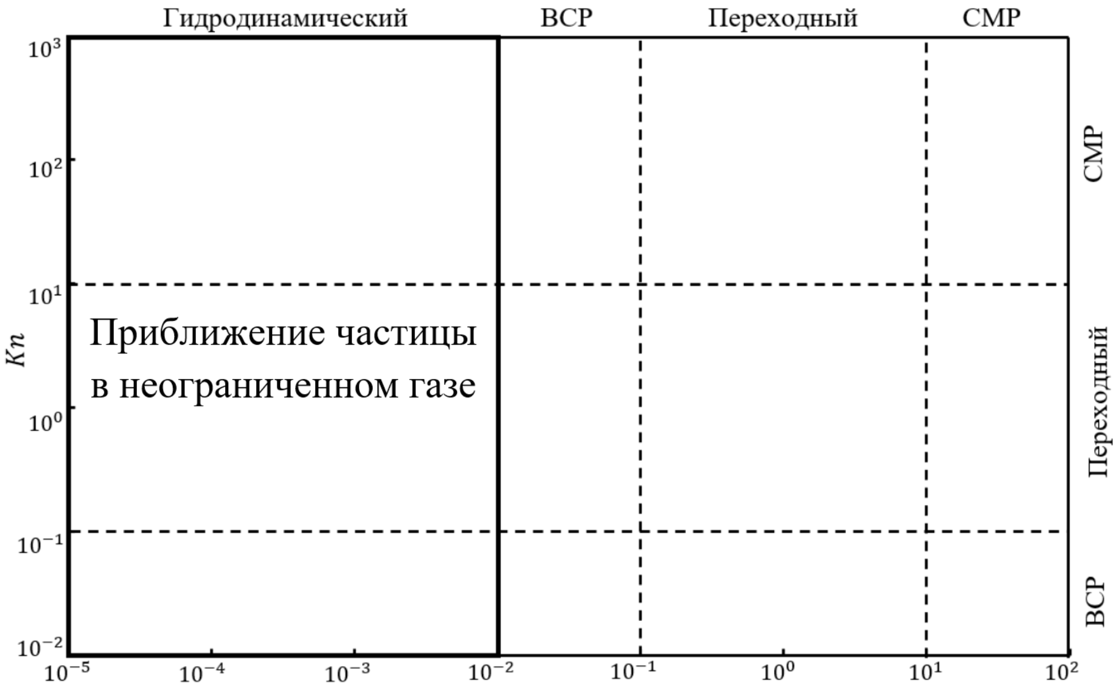

Рисунок 3.1 — Характерные области изменений чисел Кнудсена.

независимо [48] методом прямого подсчета импульса, переданного частице молекулами в случае зеркально-диффузного отражения молекул на поверхности частицы, для силы термофореза в свободномолекулярном режиме было получено:

$$\mathbf{F}_T = -\frac{16}{15}\sqrt{\pi} r_0^2 \frac{\lambda}{\bar{v}} |\nabla T|_\infty. \tag{3.1}$$

Выражение для скорости термофореза имеет следующий вид:

$$\mathbf{U}_T = -\frac{8}{5}\frac{\lambda}{p_0(8+\sqrt{\pi}\varepsilon)} |\nabla T|_\infty, \tag{3.2}$$

где $|\nabla T|_\infty$ — величина градиента температуры в газе; λ — теплопроводность газа; r_0 — радиус аэрозольной частицы; ε — коэффициент зеркально-диффузного отражения.

Следует отметить, что в свободномолекулярном режиме сила и скорость термофореза не зависят от теплопроводности частицы λ_p. Кроме того, термофоретическая сила не зависит от коэффициента зеркально–диффузного отражения ε. В работе [45] при анализе термофореза проведен учет теплофизических свойств частицы. Был введен параметр теплопроводности, определяемый как отношение теплопроводностей частицы λ_p к теплопроводности газа λ:

$$\Lambda = \frac{\lambda_p}{\lambda}.$$

В результате решения уравнения теплопроводности частицы получено следующее выражение для термофоретической силы:

$$\mathbf{F}_T = -\frac{16}{15}\sqrt{\pi}r_0^2\frac{\lambda}{\bar{v}}|\nabla T|_\infty \left[1 + \frac{\pi}{8}\varepsilon\left(\frac{5\varepsilon}{4\varepsilon + 15\Lambda Kn}\right)\right]. \tag{3.3}$$

Выражение (3.3) стремится к (3.1) при $Kn \to \infty$.

Если предполагать произвольную аккомодацию энергии α_e при полностью диффузном рассеянии молекул с поверхности частицы, то сила термофореза определяется следующим выражением [45]:

$$\mathbf{F}_T = -\frac{16}{15}\sqrt{\pi}r_0^2\frac{\lambda}{\bar{v}}|\nabla T|_\infty \left[1 + \frac{5\pi}{32}\left(1 - \frac{15Kn\Lambda\alpha_e}{4\alpha_e + 15Kn\Lambda}\right)\right]. \tag{3.4}$$

В случае $Kn\Lambda \to \infty$, имеем:

$$\mathbf{F}_T = -\frac{16}{15}\sqrt{\pi}r_0^2\frac{\lambda}{\bar{v}}|\nabla T|_\infty \left(1 + \frac{5\pi(1-\alpha_e)}{32}\right). \tag{3.5}$$

При $\alpha_e = 1$ выражение для термофоретической силы совпадает с выражением Вальдмана - Баканова - Дерягина (3.1).

Следует обратить внимание, что при получении выражений (3.3–3.5) не учтено возмущение состояния газа за счет наличия в нем частицы. Иными словами, интеграл столкновений в линеаризованном кинетическом уравнении положен равным нулю, т. е. рассматривается свободномолекулярный режим ($Kn \to \infty$). Вместе с тем, эти формулы показывают независимость термофоретической силы от параметра теплопроводности Λ в свободномолекулярном режиме.

В работах [49; 50] представлены аналитические результаты для термофоретической силы в случае почти свободномолекулярного режима. В [50] решалось модельное кинетическое уравнение БГК методом кнудсеновских итераций с учетом членов порядка Kn^{-1}.

Броком [49] в качестве модели взаимодействия молекул газа с поверхностью предполагалось зеркально-диффузное отражение. Ввиду того, что в работе многие детали не приведены, восстановить промежуточные этапы получения результата затруднительно. Тем не менее, при детальном анализе этой работы Янг [45] утверждает, что при расчете свободномолекулярных макроскопических величин Брок получил некорректные выражения. Кроме того, Брок допустил ошибку при интегрировании выражения в пространстве координат.

Было проведено разложение экспоненты под интегралом с дальнейшим интегрированием только первого слагаемого ряда. При таком подходе все слагаемые кроме первого расходятся. Корректным подходом является последовательное интегрирование по частям, что создает требуемый сходящийся ряд по Kn^{-1}. В связи с этим можно утверждать, что выражение для силы термофореза в работе [49] некорректно.

В работе [50] принималось приближение диффузного рассеяния молекул с произвольным коэффициентом аккомодации энергии α_e. В результате с использованием дифференциально–моментного метода решения линеаризованного кинетического уравнения получено:

$$\mathbf{F}_T = -\frac{16}{15}\sqrt{\pi}r_0^2\frac{\lambda}{\bar{v}}|\nabla T|_\infty\Bigg\{1 + 0.491(1-\alpha_e) - \tag{3.6}$$

$$-\left[0.267\alpha_e\left(1-\frac{1}{2\Lambda}\alpha_e\right) + 0.0672 - 0.0015\alpha_e - 0.0679(1-\alpha_e)^2\right]\frac{1}{Kn}\Bigg\}.$$

Как показано в работе [45], выражение (3.6) удовлетворительно описывает экспериментальные данные вплоть до числа Кнудсена $Kn \simeq 1$, хотя получено в линейном приближении по Kn^{-1}.

В работе [28] представлены результаты по силе и скорости термофореза в условиях свободномолекулярного режима. Коэффициенты аккомодации энергии, нормального и тангенциального импульса вводились на макроскопическом уровне через потоки импульса и энергии. В результате было получено:

$$\mathbf{F}_T = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}r_0^2\frac{\lambda}{\bar{v}}|\nabla T|_\infty(\alpha_n + \alpha_\tau), \tag{3.7}$$

$$\mathbf{U}_T = -\frac{4}{5}\frac{\lambda(\alpha_n + \alpha_\tau)}{p_0[\alpha_n(\pi+4) + 4\alpha_\tau]}|\nabla T|_\infty. \tag{3.8}$$

Показано, что сила термофореза зависит только от коэффициентов аккомодации нормального и тангенциального импульса.

В работе [51; 52] была разработана теория термофореза при произвольных числах Кнудсена на основе S – модели интеграла столкновений. Функция распределения отраженных молекул аппроксимировалась разложением в ряд в пространстве скоростей относительно максвелловской функции распределения. Коэффициенты разложения выражались через коэффициенты акккомодации энергии и тангенциального импульса. Были получены интегральные уравнения для макропараметров, которые были решены методом Бубнова-Галеркина. Показано, что неполная аккомодация энергии увеличивает силу термофореза, а неполная аккомодация тангенциального импульса уменьшает её.

Работа [29] была посвящена вычислению силы и скорости термофореза для всех значений параметра разреженности на основе численного решения линеаризованного кинетического уравнения методом дискретных скоростей. В качестве граничных условий использовалась CL-модель [13]. Рассматривалась абсолютно теплопроводная частица. Макроскопические характеристики газа вблизи сферы, а именно возмущения числовой плотности и температуры газа, макроскопическая скорость и тепловой поток в газе рассчитаны как функции расстояния до центра частицы для нескольких значений параметра разреженности и коэффициентов аккомодации. Для проверки правильности методики и результатов было задействовано соотношение взаимности между перекрестными кинетическими коэффициентами, верное на произвольном удалении от частицы и численно подтвержденное с точностью 0.1%.

В настоящее время в литературе существует большой объем эспериментальных данных. Подавляющее большинство экспериментальных исследований проводились при малых числах Кнудсена [53—58] и лишь две работы затрагивают почти свободномолекулярный режим [59; 60]. Краткая информация по исследуемым частицам и диапазонам чисел Кнудсена приведена в таблице 5. В диссертационной работе при сравнении теории с экспериментом будут использованы только последние две статьи.

Важно отметить проблему многатомных газов. Все указанные выше теоретические исследования предполагают, что окружающий частицу газ одноатомный, но экспериментальные исследования включают многоатомные газы (CO_2). Строгой теории влияния молекулярной структуры газа на термофоретическую силу к настоящему времени не разработано [45]. Следуя Вальдману [47], как правило, предполагается, что должна использоваться «трансляционная» составляющая теплопроводности. Обоснованность данной рекомендации подтверждается расчетами DSMC в работе [61].

Таким образом, систематического целенаправленного изучения роли взаимодействия молекул газа с поверхностью частицы до настоящего времени не проводилось. Полученные результаты носят разрозненный характер и, как правило, не лишены ограничений.

Целями данной главы являются:

- вычисление силы и скорости термофореза мелкой аэрозольной частицы в условиях почти свободномолекулярного режима при произвольном ядре рассеяния;

Авторы и источник	Частица и газ	Λ	Kn
[53], рис 3	Касторовое масло в воздухе	9.5	0.05–0.12
[54], рис 6	Силиконовое масло в воздухе	7.5	0.11–2.00
[55], рис 1b	Трикрезилфосфат (TCP) в воздухе	10	0.14–0.76
[55], рис 2b	$NaCl$ в воздухе	322	0.20–1.49
[55], рис 3	Hg в воздухе	581	0.45–3.60
[56], рис 4 и 5	$NaCl$ в Ar	300	0.06–0.67
[57], рис 6	Al в He	1519	0.01–0.32
[58], рис 5	Пробка в воздухе	2.5	0.05–1.80
[59], рис 11 (0905b)	Полистирол (PSL) в воздухе	5.4	0.06–5.00
[59], рис 8 (0501a)	Диоктилфталат (DOP) в воздухе	6	0.06–1.55
[59], рис 10 (0510d)	Диоктилфталат (DOP) в воздухе	6	0.05–5.00
[59], рис 12 (0927b)	Стекло в воздухе	40	0.10–5.00
[59], рис 12 (0726a)	Ni в воздухе	4700	0.09–5.00
[60], рис 6	Полистирол (PSL) в CO_2	10	0.10–3.50
[60], рис 6	Диоктилфталат (DOP) в CO_2	12	0.05–4.20
[60], рис 6	Стекло в CO_2	75	0.12–4.00
[60], рис 10	Диоктилфталат (DOP) в He	0.8	0.10–1.90

Таблица 5 — Экспериментальные данные по термофоретической силе.

- проведение численных расчетов силы и скорости термофореза с использованием известных моделей ядра рассеяния при различных значениях аккомодационных параметров этих моделей;
- проведение качественного и количественного сравнения результатов для всех физических величин, полученных с использованием различных моделей ядра рассеяния, а так же сравнение их с имеющимися экспериментальными данными.

3.2 Постановка задачи

Рассмотрим сферическую частицу, имеющую радиус r_0 и коэффициент теплопроводности λ_p, которая находится в неоднородно нагретом газе. Постоянный градиент температуры в газе ∇T_∞ создается внешними источниками.

Внешние силы не рассматриваются. Давление газа и радиус частицы таковы, что реализуется почти свободномолекулярный режим, т. е. число Кнудсена велико, но ограничено.

Координатную ось z выберем в направлении градиента температуры ∇T_∞, как показано на рис. 3.2. Начало сферической системы координат (r, θ, φ) поместим в центр частицы.

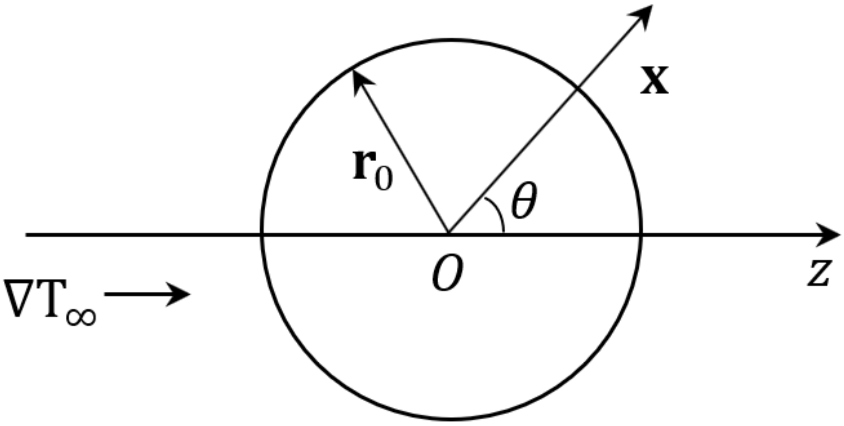

Рисунок 3.2 — Геометрия задачи.

Температура в центре частицы и в газе вдоль плоскости, перпендикулярной оси z и проходящей через центр частицы равна равновесной температуре газа T_0. В произвольной точке вдали от частицы температура газа запишется в виде

$$T = T_0 + |\nabla T|_\infty z. \tag{3.9}$$

Пусть n_0 и p_0 – соответственно равновесные значения числовой плотности и давления газа. Локальные значения числовой плотности, давления и температуры газа в любой точке вдали от частицы имеют вид:

$$n(z) = n_0 \left(1 + \frac{1}{n_0} \nabla n_\infty z\right); \tag{3.10}$$
$$p(z) = p_0 \left(1 + \frac{1}{p_0} \nabla p_\infty z\right);$$
$$T(z) = T_0 \left(1 + \frac{1}{T_0} \nabla T_\infty z\right).$$

Поскольку вдали от частицы давление газа постоянно, то из (3.10) следует:

$$\frac{1}{n_0} \nabla n_\infty = -\frac{1}{T_0} \nabla T_\infty. \tag{3.11}$$

В случае малого градиента температуры состояние газа можно описать функцией распределения, мало отличающиейся от линеаризованной функции распределения Чепмена-Энскога[5]. Ограничившись линейным приближением с учетом (3.10) и (3.11), имеем:

$$f(\mathbf{x},\mathbf{c}) = f_0\left[1 + \left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\frac{|\nabla T|_\infty}{T_0}z - \frac{4}{5}\frac{\lambda}{p_0\bar{v}}|\nabla T|_\infty c_z\left(c^2 - \frac{5}{2}\right) + h(\mathbf{x},\mathbf{c})\right], \tag{3.12}$$

где h — функция возмущения состояния газа, связанная с наличием частицы,

$$f_0 = n_0\frac{1}{\bar{v}^3\pi^{3/2}}\exp\left(-c^2\right) \tag{3.13}$$

— функция распределения Максвелла, соответствующая равновесным значениям n_0 и T_0, $\mathbf{c}$ — безразмерная скорость молекул, определенная в (1.10)

В результате приведения к безразмерному виду, аналогичного представленному в §1.4, получим:

$$\mathbf{c}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} + \left(c^2 - \frac{5}{2}\right)c_z\frac{|\nabla T|_\infty}{T_0}r_0 = \delta\left[\nu + 2\mathbf{cu} + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right)\tau + \left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{4}{15}\mathbf{cQ} - \frac{|\nabla T|_\infty}{T_0}r_0\cos\theta + \frac{4}{5}\frac{\lambda}{p_0\bar{v}}|\nabla T|_\infty c_z\right) - h\right]. \tag{3.14}$$

Далее необходимо принять во внимание связь между коэффициентами вязкости η и теплопроводности λ, а также выражение для параметра разреженности δ:

$$\eta = \frac{4}{15}\frac{m}{k}\lambda; \qquad \delta = \frac{p_0}{\eta\bar{v}}r_0, \tag{3.15}$$

откуда

$$r_0 = \frac{8}{15}\frac{\lambda}{p_0\bar{v}}T_0\delta. \tag{3.16}$$

Используя выражение (3.16) и перенося неизвестную функцию возмущения h в левую часть уравнения, окончательно получим:

$$\mathbf{c}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} + \delta h = \delta\left[\nu + 2\mathbf{cu} + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right)\tau + \left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{4}{15}\mathbf{cQ} - \frac{|\nabla T|_\infty}{T_0}z + \frac{4}{15}\frac{\lambda}{p_0\bar{v}}|\nabla T|_\infty c_z\right)\right]. \tag{3.17}$$

Теперь необходимо определить макропараметры, входящие в правую часть уравнения (3.17). Если функцию распределения (3.12) подставить в определения макропараметров (1.5), то получим:

$$\begin{aligned} \nu(\mathbf{r}) &= -\frac{|\nabla T|_\infty}{T_0} r_0 \cos\theta + \nu'(\mathbf{r}); \\ \tau(\mathbf{r}) &= \frac{|\nabla T|_\infty}{T_0} r_0 \cos\theta + \tau'(\mathbf{r}); \\ Q_r(\mathbf{r}) &= -\frac{\lambda}{p_0\bar{v}} |\nabla T|_\infty \cos\theta + Q'_r(\mathbf{r}); \\ Q_\theta(\mathbf{r}) &= \frac{\lambda}{p_0\bar{v}} |\nabla T|_\infty \sin\theta + Q'_\theta(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{3.18}$$

где

$$\begin{aligned} \nu'(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int e^{-c^2} h d\mathbf{c}; \\ \tau'(\mathbf{r}) &= \frac{2}{3}\frac{1}{\pi^{3/2}} \int \left(c^2 - \frac{3}{2}\right) e^{-c^2} h d\mathbf{c}'; \\ Q'_i(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\pi^{3/2}} \int c_i \left(c^2 - \frac{5}{2}\right) e^{-c^2} h d\mathbf{c}, \quad i = r, \theta. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь $\nu'(\mathbf{r})$, $\tau'(\mathbf{r})$, $Q'_i(\mathbf{r})$ — добавки соответственно к возмущениям числовой плотности газа, температуры газа и безразмерной плотности теплового потока в газе, обусловленные наличием частицы.

Подставляя (3.18) в (3.17) и, окончательно получим кинетическое уравнение, содержащее только величины, связанные с наличием в газе частицы:

$$\mathbf{c}\frac{\partial h}{\partial \mathbf{r}} + \delta h = \delta\left[\nu' + 2\mathbf{c}\mathbf{u} + \left(c^2 - \frac{3}{2}\right)\tau' + \frac{4}{15}\mathbf{c}\mathbf{Q}'(\mathbf{r})\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\right]. \tag{3.20}$$

Из вида функции распределения (3.12) следует, что

$$\lim_{r\to\infty} h(\mathbf{r},\mathbf{c}) = 0. \tag{3.21}$$

Граничное условие на поверхности частицы определяется выражением (1.24).

Вследствие неоднородности температуры газа вблизи частицы, температура её поверхности будет также неоднородной. При этом в случае малого градиента температуры в газе можем записать:

$$T_s(\theta) = T_0[1 + \tau_s(\theta)], \quad n_s(\theta) = n_0[1 + \nu_s(\theta)]. \tag{3.22}$$

Здесь $T_s(\theta)$ — неизвестная температура поверхности частицы, $n_s(\theta)$ — соответствующая ей числовая плотность газа.

Возмущение числовой плотности газа ν_s определяется через возмущение температуры поверхности частицы τ_s из условия непротекания аналогично (2.10).

Для определения неизвестной температуры T_s воспользуемся условием непрерывности радиального потока тепла в любой точке поверхности частицы:

$$\lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial r}\bigg|_{r=1} = q_r\bigg|_{r=1}, \tag{3.23}$$

где q_r — радиальная компонента вектора плотности теплового потока, определяемая в (1.5); распределение температуры внутри однородной частицы $T_p(r,\theta)$ определяется из решения уравнения Лапласа:

$$\Delta T_p(r,\theta) = 0 \tag{3.24}$$

с граничными условиями:

$$T_p(r=0) = T_0, \quad T_p(r=1) = T_s(\theta). \tag{3.25}$$

Поскольку $q_r(\theta) \sim \cos\theta$, из (3.24) следует:

$$\tau_s(\theta) \sim \cos\theta.$$

Примем для $\tau_s(\theta)$ следующее выражение:

$$\tau_s(\theta) = \frac{|\nabla T|_\infty}{T_0} r_0 \tau_{0T} \cos\theta,$$

что с использованием (3.16) дает

$$\tau_s(\theta) = \frac{8}{15}\frac{\lambda}{p_0\bar{v}}\delta|\nabla T|_\infty \tau_{0T}\cos\theta. \tag{3.26}$$

Безразмерный параметр τ_{0T} зависит от числа Кнудсена, аккомодационных параметров и определяется из уравнения (3.23).

Проводя рассуждения, аналогичные приведенным в §2.2 (выражения (2.16) и (2.17)) и учитывая линеаризацию (3.12), получим граничное условие для функции возмущения h, содержащее произвольное ядро рассеяния:

$$f_0\varphi^+(\theta,\mathbf{c}) = \bar{v}^3 \int_{v_r'<0} K[\mathbf{c}' \to \mathbf{c}, T_0] f_0 \varphi^-(\theta,\mathbf{c}') d\mathbf{c}', \tag{3.27}$$

$$\varphi^\pm(\theta,\mathbf{c}) = \frac{4}{5}\frac{\lambda}{p_0\bar{v}}|\nabla T|_\infty \left[\frac{2}{3}\delta c^2(1-\tau_{0T}) - c_z\left(c^2 - \frac{5}{2}\right)\right] + h^\pm(\theta,\mathbf{c}).$$

Используя определение (2.19) для силы, действующей на частицу, а также выражения (1.16)–(1.19), окончательно получим для термофоретической силы, приведенной к её значению при полной аккомодации в свободномолекулярном режиме F_T^{fm} (3.1)

$$F_T^* = \frac{F_T}{F_T^{fm}} = F_{T0}^* + \delta F_{T1}^*, \tag{3.28}$$

где

$$\begin{gathered} F_{T0}^* = 1 - \frac{2}{\pi}\left(c_r, \hat{K}\left[(c_r c_r' + 2c_\theta c_\theta')\left(c'^2 - \frac{5}{2}\right)\right]\right); \\ F_{T1}^* = (\tau_{0T} - 1)\left[\frac{5}{6}\sqrt{\pi} - \frac{4}{3\pi}(c_r^2, \hat{K}[c'^2])\right] + \\ \frac{15}{8}\frac{p_0\bar{v}}{\lambda|\nabla T|_\infty}\frac{1}{\pi^2}\int\limits_\sigma d\sigma\left(c_r c_z, \left[\exp(-c^2)\psi(\mathbf{c}) + \hat{K}[\psi(\mathbf{c}')]\right]\right). \end{gathered} \tag{3.29}$$

При записи использованы обозначения, введенные в §2 (выражения (2.20) и (2.21)).

Для определения термофоретической скорости учтем, что при равномерном движении полная сила, действующая на частицу, равна нулю:

$$\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_T = 0. \tag{3.30}$$

Кроме того, отметим, что в выражении для силы сопротивления (2.22) содержится скорость газа относительно неподвижной частицы, следовательно, скорости термофореза частицы и набегающего потока газа связаны следующим соотношением:

$$\mathbf{u}_T = -\mathbf{u}_\infty. \tag{3.31}$$

3.3 Расчет силы и скорости термофореза для некоторых моделей ядра рассеяния

Результаты для термофоретической силы и скорости, приведенные к их значению в свободномолекулярном режиме при полной аккомодации, полученные с использованием известных моделей ядра рассеяния, представлены ниже.

В случаях, когда аналитические результаты привести невозможно, проводилось численное интегрирование с использованием программного пакета Wolfram Mathematica 12.0. Использовался адаптивный метод, детально описанный в работах [32] и [33], с точностью в пять значащих цифр.

Зеркально–диффузная модель Максвелла [10]

Для данной модели, представленной выражением (1.28), были получены аналитические выражения для любых значений коэффициента диффузного отражения ε:

$$F_T^* = 1 + \delta\left[0.094 - \varepsilon\left(0.442 - 0.124\frac{1}{\Lambda}\right) + \varepsilon^2\frac{1}{\Lambda}(0.023 + 0.050\Lambda)\right]. \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} u_T^* = \frac{3.55}{2.55+\varepsilon} + \delta\Bigg[&\frac{9.78 - 6.30\varepsilon - 0.725\varepsilon^2 + 0.177\varepsilon^3}{(2.55+\varepsilon)^2} \\ &+\frac{1.13\varepsilon + 0.649\varepsilon^2 + 0.0810\varepsilon^3}{\Lambda(2.55+\varepsilon)^2}\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.33}$$

На рис. 3.3 представлены приведенная термофоретическая сила и скорость движения частицы в зависисимости от коэффициента диффузного отражения ε при различных значениях параметра теплопроводности Λ и при $\delta = 0.25$. Получено уменьшение величины силы термофореза с ростом коэффициента диффузного отражения. Отметим, что зависимость от аккомодации для данной модели не проявляется в свободномолекулярном режиме. Увеличение доли зеркально отраженных молекул приводит к уменьшению напряжений трения на поверхности частицы, а также обмена энергией между частицей и газовой средой. В результате термофоретическая скорость увеличивается. Во всем диапазоне значений ε термофоретическая скорость слабо зависит от параметра теплопроводности Λ.

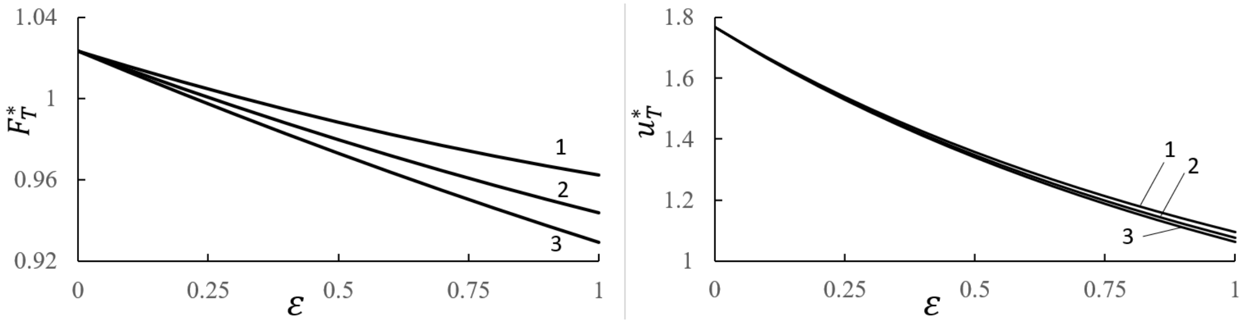

Рисунок 3.3 — Приведеннные сила и скорость термофореза для зеркально–диффузной модели Максвелла; Λ: 1 – 1, 2 – 2, 3 – 10.

Представляет интерес поле макропараметров газа вблизи частицы. Ограничимся обсуждением только составляющих макропараметров, обусловленных наличием частицы и приведем макропараметры к их значениям при полной аккомодации на поверхности частицы:

$$\nu^{*\prime}(r) = \frac{\nu'(r)}{\nu'^{(fm)}}; \qquad q_r^{*\prime}(r) = \frac{Q'_r(r)}{Q_r'^{(fm)}};$$
$$q_\theta^{*\prime}(r) = \frac{Q'_\theta(r)}{Q_\theta'^{(fm)}}; \qquad \tau^{*\prime}(r) = \frac{\tau'(r)}{\tau'^{(fm)}}; \tag{3.34}$$

где

$$\nu'^{(fm)} = -\frac{\lambda}{p_0\bar{v}}|\nabla T|_\infty \frac{1}{5\sqrt{\pi}}\cos\theta; \qquad Q_r'^{(fm)} = \frac{\lambda}{p_0\bar{v}}|\nabla T|_\infty \frac{1}{2}\cos\theta;$$
$$Q_\theta'^{(fm)} = -\frac{\lambda}{p_0\bar{v}}|\nabla T|_\infty \frac{1}{2}\sin\theta; \qquad \tau'^{(fm)} = \frac{\lambda}{p_0\bar{v}}|\nabla T|_\infty \frac{7}{15\sqrt{\pi}}\cos\theta; \tag{3.35}$$

Отметим, что значения компонент макроскопической скорости в рамках данной модели равны нулю во всем диапазоне значений ε.

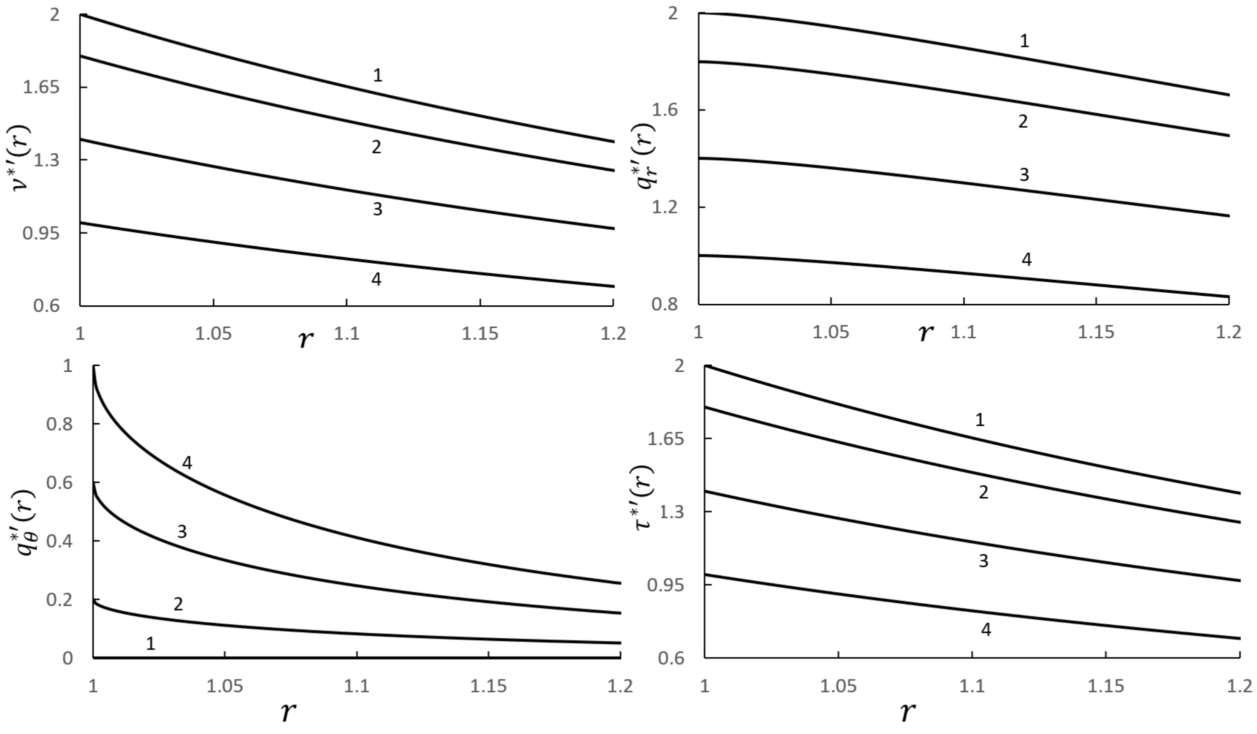

Рисунок 3.4 — Зависимость макроскопических величин, приведенных к их значениям при полной аккомодации на поверхности частицы для зеркально–диффузной модели Максвелла; ε: 1 – 0, 2 – 0.2, 3 – 0.6, 3 – 1.

Из рис. 3.4 видно, что все макропараметры уменьшаются по мере удаления от частицы. Для ряда величин $(\nu^{*\prime}, q_r^{*\prime}, \tau^{*\prime})$ в случае полностью зеркального отражения молекул имеет место превышение в два раза относительно значений при полной аккомодации. Данный факт объясняется снижением интенсивности обмена энергией между газом и частицей при уменьшении аккомодации. В результате температура газа вблизи поверхности частицы максимальна. В случае полного зеркального отражения молекул касательная составляющая возмущения теплового потока $q_\theta^{*\prime}$ равна нулю на любом удалении от частицы, так как отсутствует обмен энергией между газом и телом.

Заметим, что все указанные макропараметры уменьшаются до нуля по мере удаления от частицы, и становятся пренебрежимо малыми при $r \sim 10$.

Модель Бормана и соавторов [12]

В общем случае аналитические результаты для данной модели получить не удается. Однако можно рассмотреть предельные случаи по параметру B, а для промежуточных значений провести численный анализ.

При почти диффузном рассеянии $(B \ll 1)$ получим следующие выражения:

$$F_T^* = 1 - \delta\left[0.298 - 0.170B - \frac{1}{\Lambda}(0.147 - 0.436B)\right]; \tag{3.36}$$

$$u_T^* = 1 + 0.159B + \delta\left[0.233 + 0.614B - \frac{1}{\Lambda}(0.148 - 0.412B)\right].$$

В случае почти зеркального отражения $(B \gg 1)$ имеем:

$$F_T^* = 1 + 0.0940\delta - \frac{1}{B}(0.282 + 0.693\delta); \tag{3.37}$$

$$u_T^* = 1.393 + 1.475\delta - \frac{1}{B}(1.63 + 4.12\delta).$$

Результаты численного расчета термофоретической силы и скорости при промежуточных значениях параметра B и различных значениях δ представлены на рис. (3.5), а также в табл. 9 в приложении.

Получена немонотонная зависимость термофоретической силы от параметра B. При промежуточных значениях параметра B сила термофореза имеет максимум, в свободномолекулярном режиме превышающий значение при полной аккомодации на 7%. Увеличение параметра разреженности (переход к почти свободномолекулярному режиму) изменяет характер зависимости от B, как показано на рисунке. По мере уменьшения аккомодации термофоретическая скорость увеличичивается.

Результаты численного расчета возмущений макропараметров, стимулируемых наличием частицы, с использованием модели Бормана и соавторов

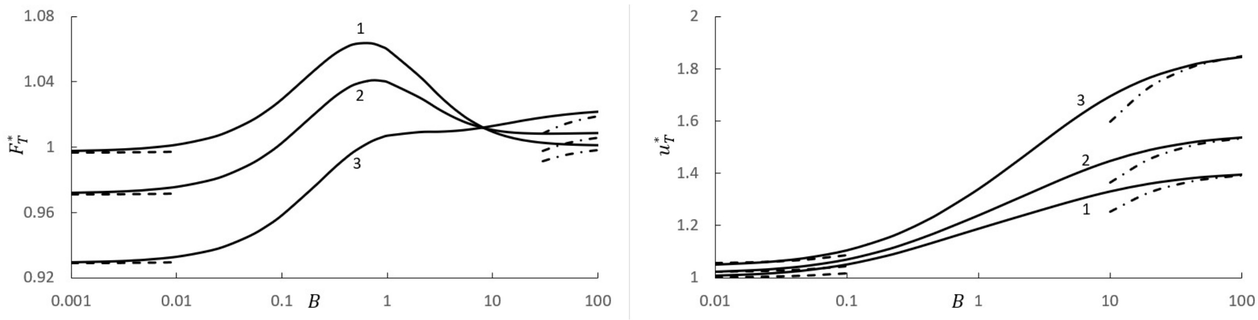

Рисунок 3.5 — Зависимость термофоретической силы и скорости от параметра B; δ: 1 – 0.01, 2 – 0.1, 3 – 0.25. Пунктирная линия – выражение (3.36), штрих-пунктирная линия – выражение (3.37).

представлены на рис. 3.6. В отличие от зеркально-диффузной модели с коэффициентом ε, не зависящим от скорости молекул, использованная модель дает ненулевые значения нормальной и касательной компонент макроскопической скорости газа, а так же показывает немонотонную зависимость этих величин от параметра B. Увеличение доли зеркально отраженных молекул приводит сначала к увеличению компонент вектора скорости газа, а в дальнейшем к уменьшению до нуля в пределе $B \to \infty$. Отметим, что на поверхности частицы ($r = 1$) нормальная составляющая макроскопической скорости равна нулю, что соответствует граничному условию непротекания. В связи с тем, что при полной аккомодации в свободномолекулярном режиме $u_r^{(fm)} = 0$, $u_\theta^{(fm)} = 0$, указанные макропараметры приводились следующим образом:

$$u_r^*(r) = u_r \frac{p_0 \bar{v}}{\lambda |\nabla T|_\infty \cos\theta}; \qquad u_\theta^*(r) = -u_\theta \frac{p_0 \bar{v}}{\lambda |\nabla T|_\infty \sin\theta}. \tag{3.38}$$

Более наглядно поведение компонент макроскопической скорости газа вблизи частицы показано на рис. 3.7.

Модель Эпштейна [11]

Для упрощения представления результатов для данной модели введем два параметра:

$$b_i = \sqrt{1 + \frac{T_0}{\theta_i}}, \quad i = 1{,}2.$$

С использованием данной модели получены результаты для произвольных значений аккомодационных параметров, однако ввиду их излишней громоздкости представим результаты только для предельных случаев, соотвествующих почти диффузному рассеянию и почти зеркальному отражению.

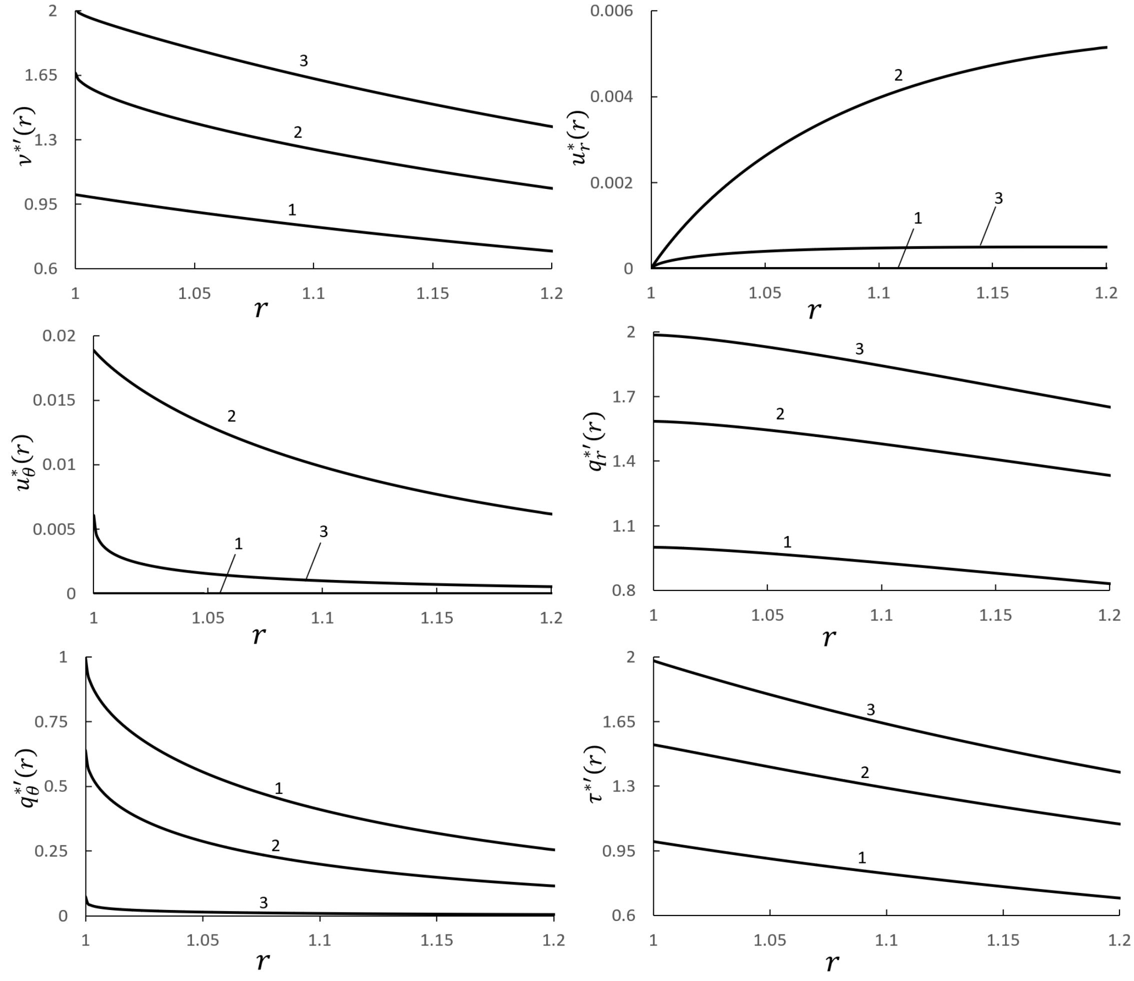

Рисунок 3.6 — Приведенные макроскопические величины в зависимости от r, B: 1 – 0, 2 – 1, 3 – 50.

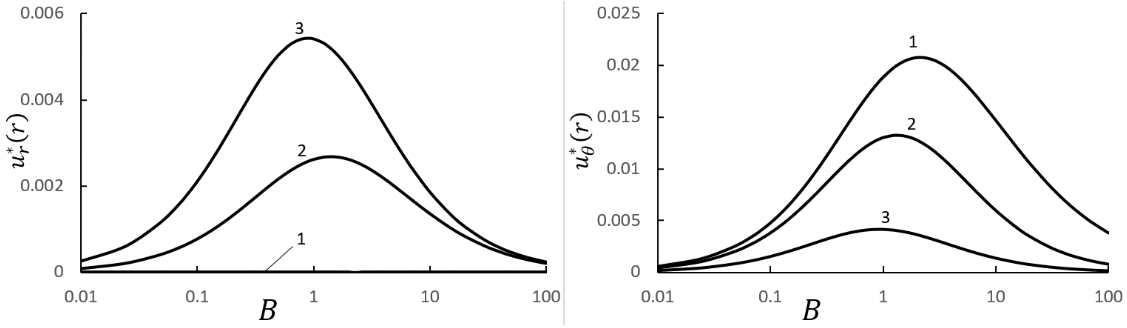

Рисунок 3.7 — Приведенные компоненты макроскопической скорости газа как функции параметра B, r: 1 – 1, 2 – 1.05, 3 – 1.3.

Почти диффузному рассеянию соответствует случай $1-\varepsilon_\infty \ll 1, 1-\theta_i/T_0 \ll 1$. В результате получим:

$$F_T^* = 0.826 + 0.174\varepsilon_\infty + 0.130(b_1^2 - b_2^2) - \delta\Bigg\{0.0690 + 0.229\varepsilon_\infty \tag{3.39}$$

$$-0.0774(b_1^2 - b_2^2) - \frac{1}{\Lambda}\left[0.0220 + 0.119\varepsilon_\infty - 0.0228(b_1^2 - b_2^2)\right]\Bigg\};$$

$$u_T^* = 1.08 - 0.0794\varepsilon_\infty + 0.184(b_1^2 - b_2^2) + \delta\Bigg\{0.677 - 0.444\varepsilon_\infty$$

$$+0.220(b_1^2 - b_2^2) + \frac{1}{\Lambda}\left[0.0577 + 0.0835\varepsilon_\infty - 0.0152(b_1^2 - b_2^2)\right]\Bigg\}.$$

При рассмотрении случаев, соответствующих почти зеркальному отражению молекул, ограничимся ситуацией, когда $mv^2/(2k\theta_1) \gg 1$ и $mv^2/(2k\theta_2) \ll 1$. Тогда получим:

$$F_T^* = 1 + 2.45\varepsilon_\infty\frac{T_0}{\theta_2} + \delta\left(0.0479 - 0.378\varepsilon\frac{T_0}{\theta_2}\right); \qquad (3.40)$$

$$u_T^* = 1.393 + 1.71\frac{T_0}{\theta_2}\varepsilon_\infty + \delta\left(1.33 + 0.348\frac{T_0}{\theta_2}\varepsilon_\infty\right).$$

Для промежуточных значений параметров модели был проведен численный расчет. Результаты представлены на рис. (3.8) и в приложении в табл. 10.

Наблюдается превышение термофоретической силы над ее значением при полной аккомодации при промежуточных значениях аккомодационных параметров модели. Величина максимального превышения достигается при $\delta = 0$ и составляет 28%. Аналогично двум представленным выше моделям, термофоретическая скорость увеличивается по мере увеличения доли зеркально отраженных молекул.

Результаты для возмущений макропараметров, стимулируемых наличием аэрозольной частицы для данной модели представлены на рис. 3.9.

CL-Модель [13]

С использованием данной модели для силы сопротивления можно получить аналитические результаты при почти полной аккомодации молекул газа на поверхности частицы, т. е. при

$$(1-\alpha_\tau) \ll 1, \qquad (1-\alpha_n) \ll 1. \qquad (3.41)$$

Ограничиваясь линейным приближением по параметрам (2.45), получим:

$$F_T^* = 1 + 0.589(1-\alpha_n) - 0.500(1-\alpha_\tau) \qquad (3.42)$$

$$-\delta\Big\{0.298 + 0.417(1-\alpha_n) - 0.0314(1-\alpha_\tau)$$

$$-\frac{1}{\Lambda}[0.148 - 0.236(1-\alpha_n)]\Big\};$$

$$u_T^* = 1 + 0.518(1-\alpha_n) - 0.141(1-\alpha_\tau)$$

$$+\delta\Big\{0.144 + 0.0113(1-\alpha_n) + 0.0283(1-\alpha_\tau)$$

$$+\frac{1}{\Lambda}[0.148 - 0.247(1-\alpha_n) + 0.0530(1-\alpha_\tau)]\Big\}.$$

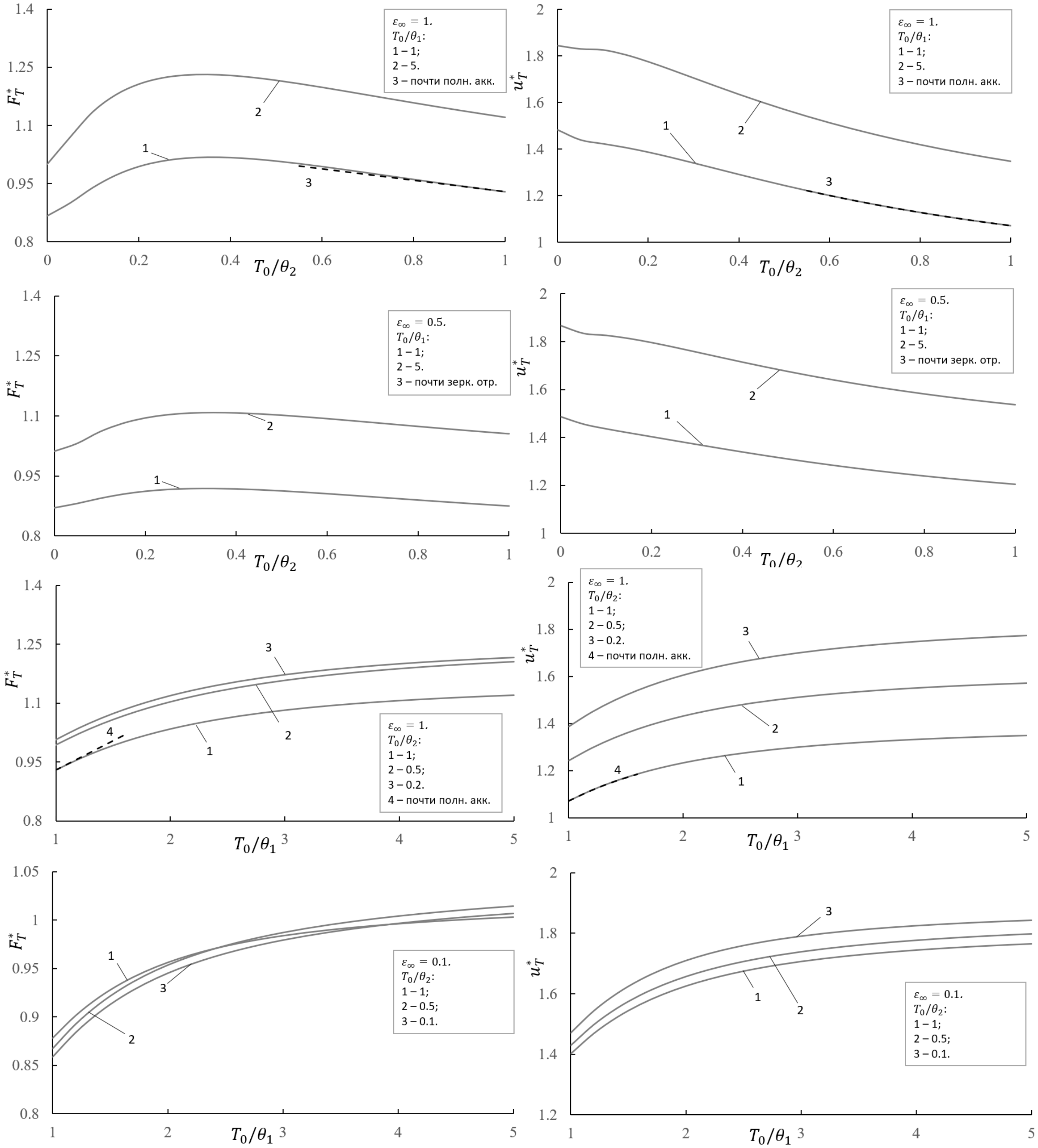

Рисунок 3.8 — Зависимости приведенных силы и скорости термофореза при $\delta = 0.25$ от аккомодационных параметров модели Эпштейна. Пунктирные линии соответствуют случаям почти полной аккомодации (3.39).

Для промежуточных значений параметров модели был проведен численный расчет. Результаты представлены на рис. 3.10 и в табл. 11 в приложении. Результаты для поля возмущений макроскопических величин представлены на рис. 3.11.

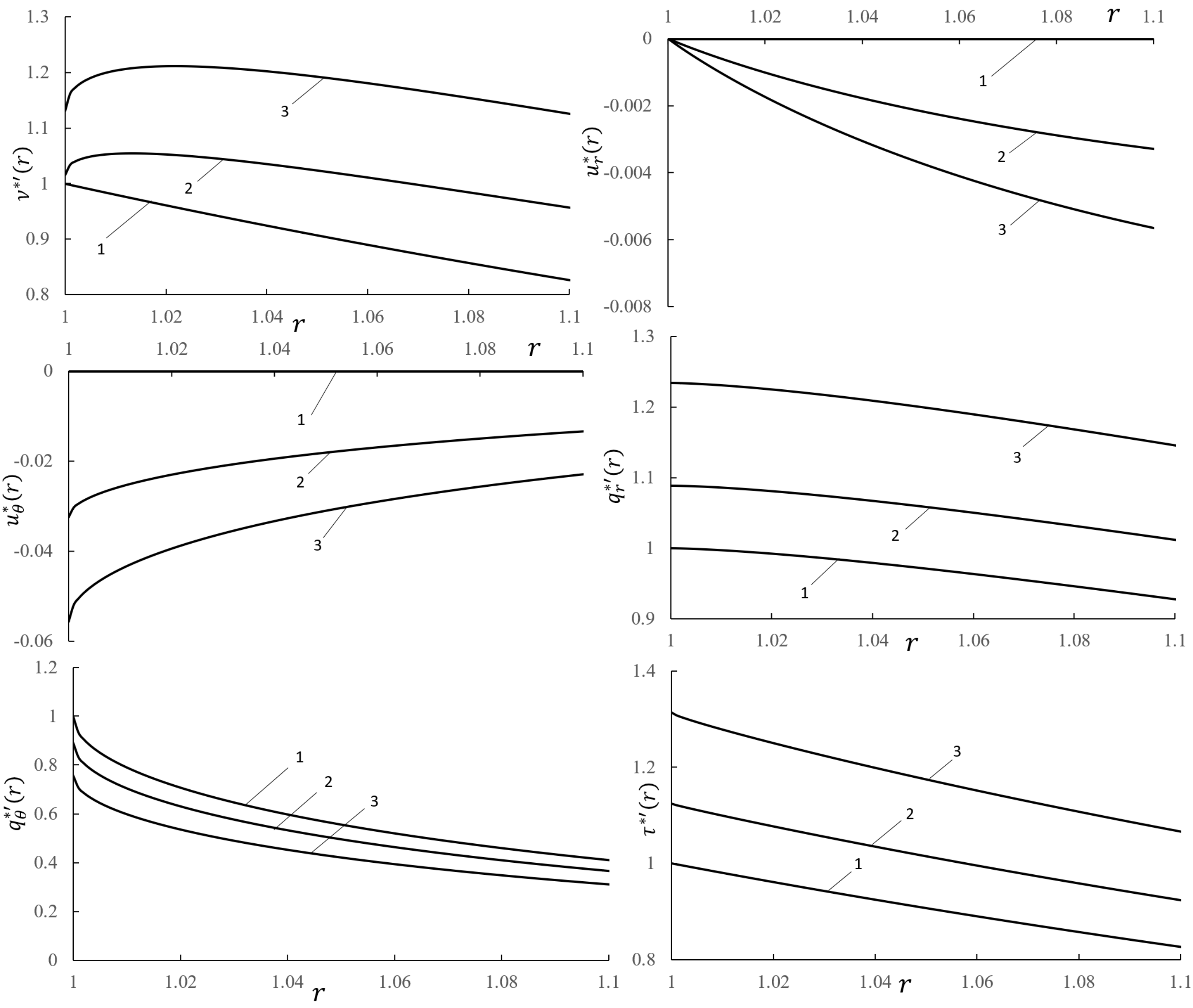

Рисунок 3.9 — Приведенные значения макроскопических величин в зависимости от r при $\varepsilon_\infty = 1$: 1 – $T_0/\theta_1 = T_0/\theta_2 = 1$; 2 – $T_0/\theta_1 = 1, \quad T_0/\theta_2 = 3$; 3 – $T_0/\theta_1 = 0.5, \quad T_0/\theta_2 = 5$.

Как и в предшествующих моделях, возмущения макроскопических величин становятся пренебрежимо малыми на расстояниях $r \sim 10$. Возмущение числовой плотности газа $\nu^{*\prime}$ зависит от двух аккомодационных коэффициентов. В случае увеличения доли зеркально отраженных молекул наблюдается превышение значений данной величины над ее значениями при полной аккомодации. Причина такого поведения заключается в уменьшении интенсивности обмена импульсом и энергией при снижении аккомодации. При полной аккомодации имеем равенство нулю нормальной и касательной компонент вектора макроскопической скорости газа $\mathbf{u}^*$ на любом удалении от частицы. При полной аккомодации тангенциального импульса u_θ^* не зависит от α_n и равна нулю на любом удалении от частицы. Равенство нулю u_r^* на поверхности частицы при

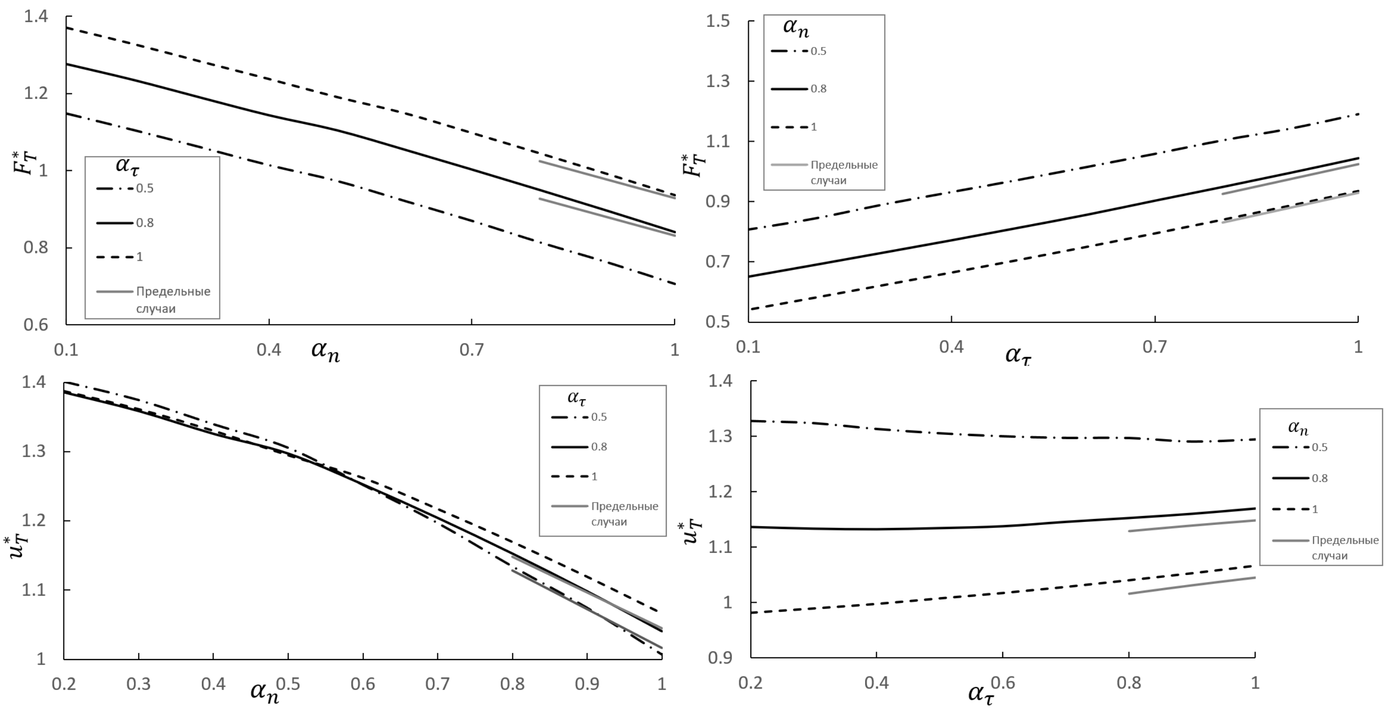

Рисунок 3.10 — Приведенные значения силы и скорости термофореза как функции аккомодационных параметров. Пунктирные линии соответствуют выражению (3.42).

любой аккомодации соответствует условию непротекания. Также отметим, что изменение аккомодационных свойств влияет как на величину касательной скорости газа, так и на характер её зависимости от расстояния до центра частицы. При анализе касательной составляющей вектора возмущения плотности теплового потока можно утверждать, что увеличение доли зеркально отраженных молекул влияет как на величину, так и на знак $q_\theta^{*\prime}$.

Расчет показывает, что неполная аккомодация энергии приводит к увеличению сил сопротивления и термофореза. Неполная аккомодация тангенциального импульса уменьшает обе силы, но в большей степени силу сопротивления. В результате термофоретическая скорость увеличивается.

3.4 Обсуждение результатов

При анализе результатов, соответствующих почти свободномолекулярному режиму, в первую очередь оценим диапазон применимости используемого приближения по парметру разреженности. Для этого было проведено сравнение результатов разработанной теории с результатами других авторов, полученными различными методами при полной аккомодации и параметре теп-

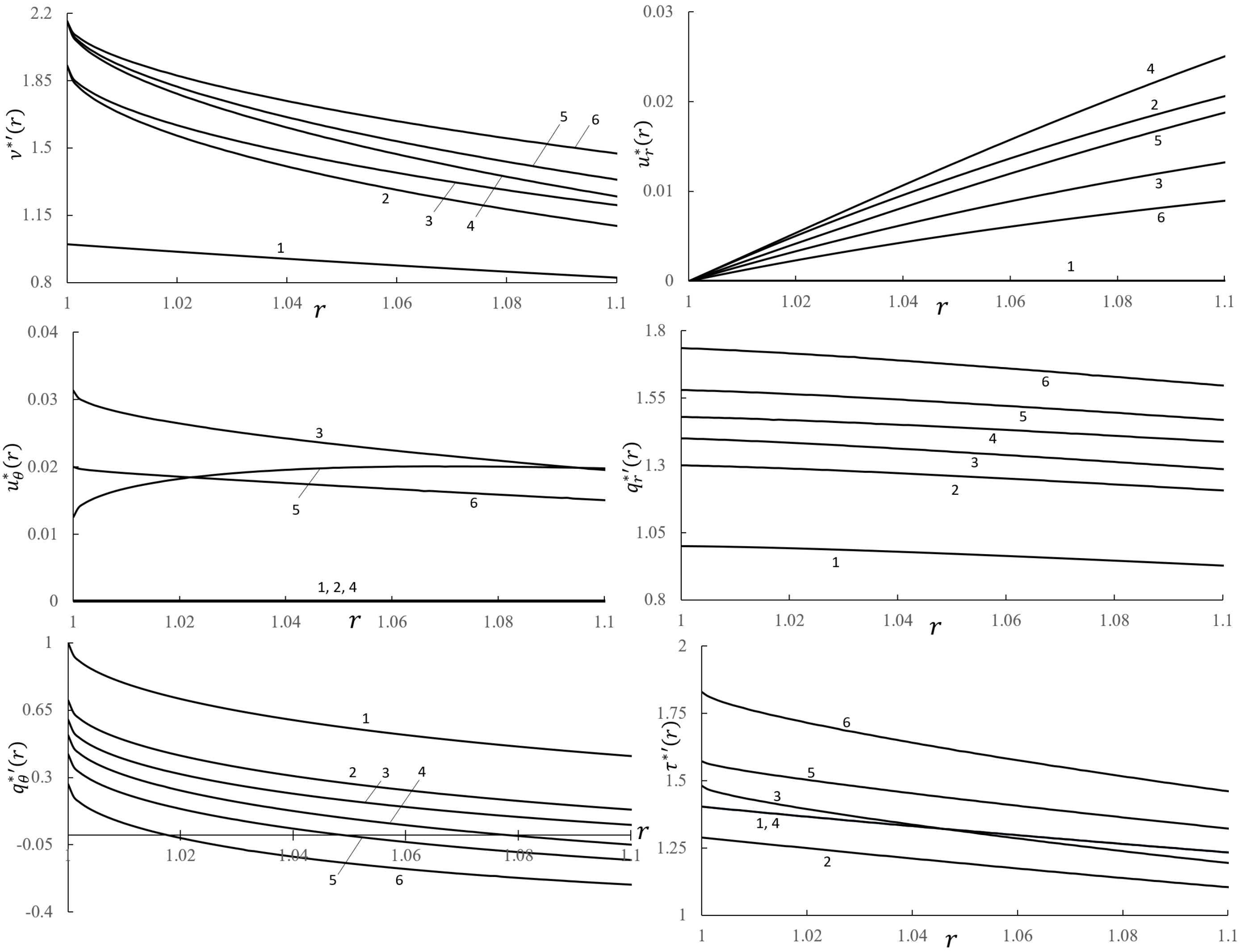

Рисунок 3.11 — Приведенные значения макроскопических величин для модели CL в зависимости от r: 1 – $\alpha_n = 1$, $\alpha_\tau = 1$; 2 – $\alpha_n = 0.5$, $\alpha_\tau = 1$; 3 – $\alpha_n = 0.5$, $\alpha_\tau = 0.5$; 4 – $\alpha_n = 0.2$, $\alpha_\tau = 1$; 5 – $\alpha_n = 0.2$, $\alpha_\tau = 0.5$; 6 – $\alpha_n = 0.2$, $\alpha_\tau = 0.2$.

лопроводности $\Lambda \simeq 100$, а именно: [62] из численного решения линеаризованного кинетического уравнения; [50] на основе интегрально–моментного метода; [27] с использованием S-модели интеграла столкновений и аппроксимации функции распределения в пространстве скоростей. Сравнительный анализ для значений термофоретической силы и скорости представлен в табл. 6.

δ	Дисс.		[37]		[50]		[63]		[29]	
	F_T^*	u_T^*	F_T^*	u_T^*	F_T^*	u_T^*	F_T^*	u_T^*	F_T^*	u_T^*
0.01	0.997	1.002			0.998	1.000			0.997	1.001
0.1	0.970	1.025	0.960	1.001	0.980	1.004	0.956	0.986	0.966	1.007
0.25	0.926	1.067	0.851	0.937	0.950	1.011				

Таблица 6 — Сравнение результатов из различных работ по силе и скорости термофореза.

δ	α_n	0.1		0.5		0.9	
	α_τ	[29]	Дисс.	[29]	Дисс.	[29]	Дисс.
0.01	0.5	0.928	0.890	0.894	0.858	0.863	0.828
	0.8	1.040	0.998	1.006	0.965	0.976	0.935
	0.9	1.077	1.033	1.044	1.001	1.013	0.971
	1	1.114	1.069	1.081	1.037	1.050	1.007
	α_n	0.1		0.5		0.9	
	α_τ	[29]	Дисс.	[29]	Дисс.	[29]	Дисс.
0.1	0.5	0.895	0.899	0.863	0.863	0.832	0.829
	0.8	1.003	1.006	0.971	0.970	0.939	0.937
	0.9	1.038	1.042	1.006	1.006	0.977	0.972
	1	1.074	1.078	1.042	1.042	1.013	1.008

Таблица 7 — Сравнение приведенной силы термофореза с результатами работы [29]
.

Максимальное расхождение результатов наблюдается для работы [62] при $\delta = 0.25$ и составляет 8.8% и 13.9% соответственно для силы и скорости термофореза. Вероятно, это связано с недостатком используемого в диссертации приближения, а также с высокой чувствительностью явления термофореза к выбору модели интеграла столкновений.

В качестве дополнительного критерия для оценки диапазона применимости приближения было проведено сравнение результатов для CL-модели [13] с результатами работы [29]. Сравнение значений термофоретической силы с результатами указанной работы представлено в табл. 7.

Максимальное расхождение результатов имеет место при $\delta = 0.1$ и не превышает 3.3%.

На рис. 3.12 представлено сравнение теории с экспериментальными результатами из работы [59] для частиц полистирола и диоктилфталата в воздухе. Измерения осуществлялись по методике электродинамической левитации частиц между нагретой и охлажденной плстинами в вакуумной камере. Параметр теплопроводности Λ равен 6.67 для частиц диоктилфталата и 5.88 для частиц полистирола. Авторы утверждают, что влияние столкновений молекул газа со стенками камеры становится существенным при $Kn > 10$ ($\delta < 0.09$), в связи с чем ими был введен коэффициент температурной аккомодации на поверхности пластин α_t в качестве поправочного множителя. Использование значения $\alpha_t = 1/3$ при корректировке экспериментальных данных позволяет получить свободномолекулярное плато при больших Kn. Отметим, что использованное авторами значение α_t существенно ниже ранее опубликованных для системы «воздух–медь» в работе [64]. Такое разногласие значений объясняется тем, что в эксперименте имело место сильное окисление и «загрязнение» медных пластин, вследствие чего значение коэффициента аккомодации снизилось. Вообще говоря, эффект «стесненности пространства» может быть снижен только увеличением размеров камеры и расстояния между пластинами и уменьшением размеров частиц.

Исходя из условия наилучшего согласия теории с экспериментом были подобраны значения аккомодационных параметров различных моделей ядра рассеяния. Они представлены в табл. 8.

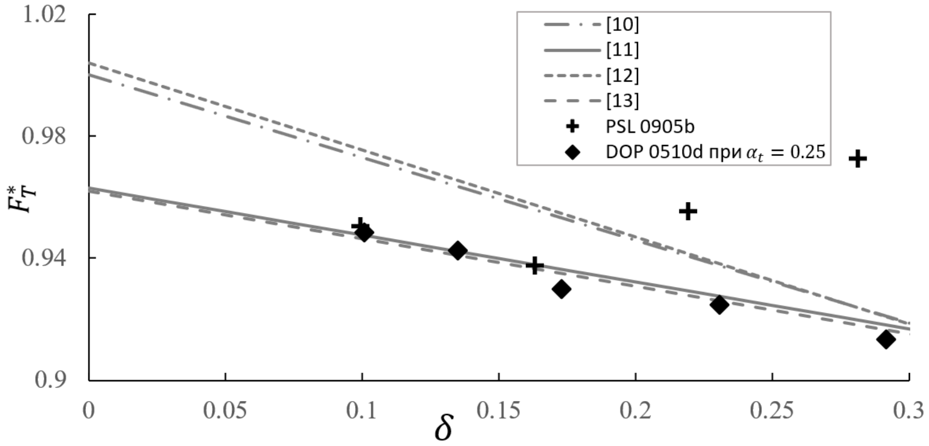

Рисунок 3.12 — Сравнение приведенной термофоретической силы для различных моделей с результатами работы [59].

Модель зеркально–диффузного отражения [10]	$\varepsilon = 1$
Модель Эпштейна [11]	$T_0/\theta_1 = 1.31, T_0/\theta_2 = 0.954, \varepsilon_\infty = 0.55$
Модель Бормана и соавторов [12]	$B = 0.1$
Модель CL [13]	$\alpha_n = 0.7, \alpha_\tau = 0.8$

Таблица 8 — Аккомодационные параметры для различных моделей

Итоги

В результате исследования получены выражения для силы и скорости термофореза, действующих на мелкую аэрозольную частицу при произвольном характере взаимодействия молекул газа с поверхностью частицы в условиях почти свободномолекулярного режима. Выражения (3.28) — (3.31) позволяют вычислить значения указанных величин для любой модели ядра рассеяния, как известной, так и той, которая будет разработанна в будущем.

Расчеты с использованием различных моделей ядра рассеяния показали качественное разногласие результатов по термофоретической силе. В частности, в случае $\delta = 0$ модель зеркально-диффузного отражения Максвелла с коэффициентом диффузного отражения ε, независящим от скорости молекул, показывает отсутствие зависимости термофоретической силы от этого коэффициента. Аналогичный результат следует при использовании модели Бормана и соавторов [12] в случае почти зеркального отражения. Однако при почти полностью диффузном рассеянии можно видеть, что увеличение доли зеркально отраженных молекул приводит к увеличению термофоретической силы. Модели Эпштейна [11] и Бормана [12] показывают немонотонную зависимость силы термофореза от коэффициента диффзного отражения $\varepsilon(\mathbf{v})$. Более того, при промежуточных значениях $\varepsilon(\mathbf{v})$ величина термофоретической силы превышает ее значение при полной аккомодации или полностью зеркальном отражении молекул. В двух указанных предельных случаях, значения силы термофореза совпадают. Причина зависимости термофоретческой силы от коэффициента диффузного отражения формально понятна. Однако мы не смогли предоставить адекватную физическую интерпретацию данному результату.

Использование различных моделей ядра рассеяния показывает разногласие результатов при расчете возмущения поля течения газа вблизи частицы. Модель зеркально–диффузного отражения Максвелла с коэффициентом ε, независящим от скорости, дает равенство нулю значений компонент макроскопической скорости газа на любом удалении от частицы и во всем диапазоне значений ε. Эти же величины для других использованных моделей немонотонным образом зависят от аккомодационных параметров моделей, а также от расстояния до центра частицы. Величина касательной составляющей вектора возмущения плотности теплового потока $q_{\theta}^{*\prime}$ при расчете с использованием модели CL при изменении аккомодации может менять знак.

Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными из работы [59] для частиц диоктилфталата и полистирола в воздухе позволило извлечь численные значения аккомодационных параметров разлличных моделей исходя из условия наилучшего их согласия. Такой метод определения аккомодационных свойств поверхности в будущем пожет быть источником достоверной информации о взаимодействии газа с поверхностью.

Глава 4. Фотофорез сферической частицы

4.1 Обзор современного состояния проблемы

На аэрозольную частицу в поле оптического излучения действует сила, величина которой на 3–4 порядка больше силы светового давления. Ф. Эренхафт, обнаруживший это явление, назвал его фотофорезом [65] и назвал движение частиц вдоль направления распространения излучения «положительным фотофорезом», а в противоположном направлении – «отрицательным фотофорезом». Вместе с тем, в его экспериментах не была обнаружена зависимость явления фотофореза от рода газа или параметра разреженности, в связи с чем он трактовал фотофорез как «электродинамический эффект второго порядка».

Как показали более поздние исследования явления фотофореза [66; 67], движение аэрозольных частиц обусловлено неоднородным нагревом за счет излучения и взаимодействием с газом. Молекулы, отраженные от более нагретой части поверхности частицы, при полной аккомодации имеют в среднем больший импульс, чем молекулы отраженные от менее нагретой части. В результате частица действует на газ силой, направленной в сторону более нагретой ее части. Следовательно, газ действует на частицу равной по величине противоположно направленной силой. Таким образом, фотофорез можно понимать как проявление радиометрического эффекта. На основе этого явления, в частности, действует радиометр Крукса [68; 69]. Вообще говоря, под радиометрическим эффектом понимается сила, действующая на тело со стороны окружающего газа при наличии неоднородности температуры (отсутствии теплового равновесия). Неоднородность температуры может быть создана различными методами [70; 71]. Так, для радиометра Крукса и аэрозольных частиц неоднородность температуры обусловлена поглощением внешнего излучения. Оптические свойства определяют направление вращения лопастей и движения аэрозольных частиц. В случае сильного поглощения излучения частицами их освещенная часть будет нагреваться сильнее, вследствие чего будет иметь место положительный фотофорез; в случае слабого поглощения, а также если размеры частиц сопоставимы с длиной волны излучения, сильнее нагреется теневая сторона, в результате чего возникнет отрицательный фотофорез.

Явление фотофореза представляет значительный интерес, поскольку оно обладает широкими возможностями в прецезионных аэрозольных технологиях [72], нанотехнологиях, очистке газов, методиках лабораторного захвата частиц [73; 74] и т.д. Помимо этого, явление фотофореза играет значительную роль в процессах движения атмосферных аэрозоей [75—78]. Так, при поглощении частицами сажи солнечного и отраженного с Земли инфракрасного излучения имеют место вертикальные перемещения аэрозолей высокой интесивности. Эффекты такого рода оказываеют влияние на радиационный баланс атмосферы [79]. Их необходимо учитывать при моделировании вертикального переноса аэрозолей в верхних слоях атмосферы.

Величина фотофоретической силы существенно зависит от оптических и теплофизических свойств частицы, которые определяют степень неоднородности ее температуры. Чем меньше фактор поглощения излучения и выше теплопроводность частицы, тем меньше неоднородность ее температуры и, следовательно, меньше фотофоретическая сила. Помимо этого, величина силы зависит от аккомодационных свойств молекул газа и поверхности частицы. При полной аккомодации неоднородный нагрев частицы полностью передается газу. При этом фотофоретическая сила максимальна. При отсутствии аккомодации сила равна нулю.

Зависимость силы от характера взаимодействия газ-частица в наибольшей степени проявляется в свободномолекулярном режиме. Это показывают экспериментальные данные [57; 80].

Подробный обзор теоретических результатов по фотофорезу в свободномолекулярном режиме, полученных до 1981 года, представлен в работе [81].

До настоящего времени целенаправленные теоретические исследования роли взаимодействия молекул с поверхностью в явлении фотофореза не проводились. Принималось, как правило, приближение полной аккомодации молекул газа на поверхности частицы. Исключение составляют две работы. В [82] с использованием максвелловской модели зеркально-диффузного отражения было получено:

$$F_z = -\frac{\pi}{3}\frac{r_0^3 p_0 \alpha_t \alpha_n I J_1}{\lambda_p \sqrt{\bar{T}_r T_0}}\,, \tag{4.1}$$

где r_0 – радиус частицы; p_0 и T_0 – давление и температура равновесного газа соответственно; $T_r = (1-\alpha_n)T_0 + \alpha_t T_s$; T_s – температура поверхности частицы; α_t и α_n – коэффициенты аккомодации энергии и импульса соответственно; I

– интенсивность падающего на частицу излучения; λ_p – теплопроводность частицы; J_1 – т. н. фактор асимметрии распределения температуры поверхности частицы, определяющий величину и знак фотофоретической силы. Показано, что с увеличением доли зеркально отраженных молекул величина силы уменьшается. При полностью зеркальном отражении она равна нулю.

В работе [83] функция распределения отраженных от частицы молекул аппроксимировалась в виде разложения в ряд в пространстве молекулярных скоростей. Коэффициенты разложения выражались через коэффициенты аккомодации тангенциального импульса и энергии. Установлено, что с уменьшением коэффициентов аккомодации фотофоретическая сила уменьшается.

Цель данной главы состоит в том, чтобы не моделируя функцию распределения отраженных молекул вычислить фотофоретическую силу в свободномолекулярном режиме при произвольном ядре рассеяния. Далее провести расчеты с использованием известных моделей ядра рассеяния.

4.2 Постановка задачи

На взвешенную в газе сферическую частицу радиуса r_0 падает плоская волна монохроматического неполяризованного излучения с длиной волны λ_w и интенсивностью $\mathbf{I}$.

Координатная ось z направлена вдоль распространения излучения и проходит через центр частицы. Начало сферической системы координат (r, θ, φ) совмещено с центром частицы. Полярный угол θ отсчитывается от направления оси z против часовой стрелки, как показано на рис. 4.1.

Температура и числовая плотность равновесного газа вдали от частицы равны соответственно T_0 и n_0, а его состояние описывается равновесной функцией распределения Максвелла

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT_0}\right), \qquad (4.2)$$

где m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, $\mathbf{v}$ — вектор скорости движения молекул.

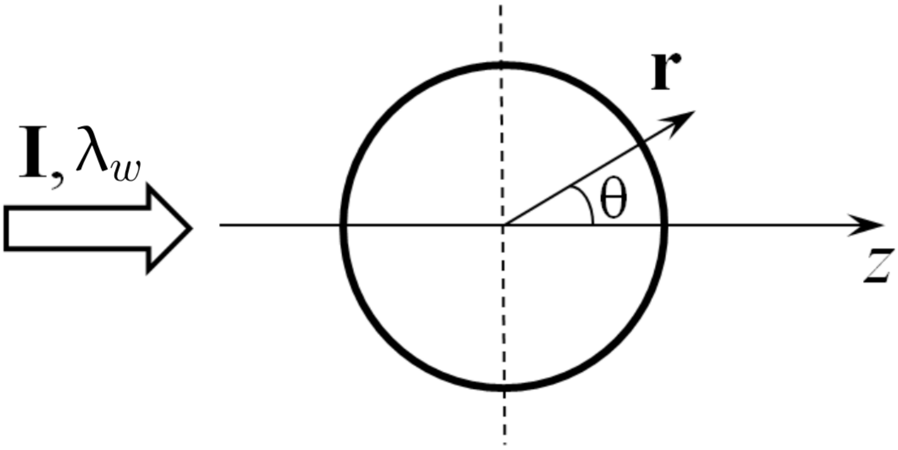

Рисунок 4.1 — Геометрия задачи о фотофорезе

Температура поглощающей излучение частицы $T_p(r,\theta)$ описывается стационарным уравнением Лапласа, включающем объемную плотность внутренних источников тепла $Q_V(r,\theta)$ [82]:

$$-\lambda_p \Delta T_p(r,\theta) = Q_V(r,\theta), \tag{4.3}$$

где λ_p — коэффициент теплопроводности частицы. Согласно теории Ми для произвольных значений параметра дифракции $\rho = 2\pi r_0/\lambda_w$ [84]

$$Q_V(r,\theta) = 2n\kappa k_0 |\mathbf{I}| B(r,\theta), \tag{4.4}$$

$$B(r,\theta) = \frac{|\mathbf{E}(r,\theta)|^2}{|\mathbf{E}_0|^2}, \qquad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_w}.$$

Здесь n — показатель преломления вещества частицы; κ — коэффициент поглощения; $\mathbf{E}(r,\theta)$ — локальная напряженность электрического поля внутри частицы; $\mathbf{E}_0$ — амплитуда напряженности электрического поля в падающей волне. В (4.4) учтено, что задача обладает осевой симметрией относительно направления падения неполяризованного монохроматического излучения [82].

Граничные условия к уравнению (4.3) учитывают ограниченность температуры в центре частицы и температуру ее поверхности

$$T_p(r = r_0,\theta) = T_s(\theta). \tag{4.5}$$

Температура $T_s(\theta)$ определится из условия непрерывности плотности радиального теплового потока в любой точке поверхности частицы $(r = r_0)$

$$-\lambda_p \frac{\partial T_p}{\partial r} = q_r. \tag{4.6}$$

Левая часть — плотность радиального потока тепла в частице на ее поверхности, правая — плотность радиальной составляющей потока тепла в газе в той же точке.

Численные оценки показывают, что использование макроскопической теории поглощения и распространения тепла внутри частицы, а также пренебрежение ее броуновским вращением для большинства веществ возможно для частиц с минимальным размером 10^{-6} см [2; 84].

Рассмотрим свободномолекулярный режим. В этом случае функция распределения налетающих на частицу молекул не возмущается за счет столкновений с отраженными молекулами. Распределение по скоростям налетающих молекул соответствует функции Максвелла вдали от частицы.

Функция распределения отраженных молекул зависит от состояния поверхности частицы и определяется следующим соотношением:

$$f^{+}(r_0,\theta,\mathbf{v}) = \int_{v_r'<0} K(\mathbf{v}' \to \mathbf{v},\mathbf{r}_0,T_s) f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \,. \tag{4.7}$$

В (4.7) нельзя воспользоваться принципом детального равновесия, поскольку состояния газа и частицы различны.

Полагаем, что температура поверхности частицы незначительно отличается от температуры газа

$$T_s(\theta) = T_0[1 + \tau_s(\theta)]\,, \qquad \tau_s(\theta) \ll 1\,. \tag{4.8}$$

Линейная постановка задачи оправдана в случае малых интенсивностей излучения либо в случае слабого поглощения.

Разложим ядро рассеяния в ряд Тейлора по малому параметру τ_s и ограничимся линейным членом разложения

$$K(\mathbf{v}' \to \mathbf{v},\mathbf{r}_0,T_s) = K(\mathbf{v}' \to \mathbf{v},\mathbf{r}_0,T_0) + \tau_s T_0 \left.\frac{dK}{dT_s}\right|_{T_s=T_0} . \tag{4.9}$$

В соответствии с принципом детального равновесия имеем

$$f_0(\mathbf{v}) = \int_{v_r'<0} K(\mathbf{v}' \to \mathbf{v},\mathbf{r}_0,T_0) f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \,. \tag{4.10}$$

Вычитая из (4.7) выражение (4.10), с учетом (4.9) получим

$$f^{+}(r_0,\theta,\mathbf{v}) = f_0 + \tau_s T_0 \int_{v_r'<0} \left.\frac{dK}{dT_s}\right|_{T_s=T_0} f_0(\mathbf{v}') d\mathbf{v}' \,. \tag{4.11}$$

Полную функцию распределения для налетающих на частицу и отраженных от нее молекул удобно представить с использованием функции знака в виде

$$f = \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{sign} v_r\right) f_0 + \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{sign} v_r\right) f^+ \,, \tag{4.12}$$

где

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Плотность теплового потока в газе на поверхности частицы (правая часть уравнения (4.6)) определяется из выражения (1.5).

Если угловую зависимость температуры частицы представить разложением в ряд по полиномам Лежандра, то общее решение уравнения теплопроводности (4.3) будет иметь вид [82]

$$T_p(x,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l + b_l x)\, x^l P_l(\cos\theta)\,, \quad x = \frac{r}{r_0}\,, \tag{4.13}$$

где a_l и b_l — неизвестные постоянные.

Подставим (4.13) в уравнение (4.3). Полученное выражением умножим на $x^m P_m(\cos\theta)$ и затем проинтегрируем по объему частицы. Используя условие ортогональности полиномов Лежандра, получим

$$b_l = -\frac{r_0}{\lambda_p} I J_l\,, \tag{4.14}$$

где

$$J_l = (2l+1) n\kappa\rho \int_0^{\pi} \sin\theta\;P_l(\cos\theta) d\theta \int_0^1 x^{l+2} B(x,\theta) dx\,. \tag{4.15}$$

Для определения постоянных a_l нужно подставить (4.13) в уравнение непрерывности радиального потока тепла (4.6)), полученное выражение умножить на $P_m(\cos\theta)$ и проинтегрировать по поверхности частицы. Учитывая ортогональность полиномов Лежандра, получим

$$a_l = \frac{l + 1 + \dfrac{p_0}{8}\bar{v}\left(\dfrac{r_0}{\lambda_p} + T_0\delta_{l0}\right)\widehat{\Psi}\left[c_r c^2\right]}{\dfrac{\lambda_p}{r_0} l + \dfrac{p_0}{8}\bar{v}\widehat{\Psi}\left[c_r c^2\right]} I J_l\,, \tag{4.16}$$

Здесь δ_{l0} — символ Кронекера; введен интегральный оператор, действующий на любую функцию молекулярных скоростей $g(\mathbf{v})$

$$\widehat{\Psi}[g(\mathbf{c})] = \frac{8}{\pi^{3/2}}\bar{v}^3 \int\limits_{c_r>0} g(\mathbf{c})d\mathbf{c} \int\limits_{c_r'<0} \frac{\partial K(T_s)}{\partial T_s}\Big|_{T_s=T_0} e^{-c'^2} d\mathbf{c}' \,, \tag{4.17}$$

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{v}}{\bar{v}}\,, \qquad \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{v}'}{\bar{v}}\,, \qquad \bar{v} = \left(\frac{2kT_0}{m}\right)^{1/2} .$$

Температура поверхности частицы определяется выражением (4.13) при $x = 1$.

Действующая на частицу фотофоретическая сила в направлении оси z определяется следующим образом:

$$F_z = -m \int_{(S)} dS \int v_z v_r f d\mathbf{v} \,. \tag{4.18}$$

В случае однородной поверхности частицы ядро рассеяния не зависит от угла θ. Кроме того, в свободномолекулярном режиме в случае неподвижной частицы напряжение трения отсутствует. Тогда получим

$$F_z = -\frac{\pi}{3} \frac{r_0^2 p_0 I J_1 \widehat{\Psi}\left[c_r^2\right]}{\dfrac{\lambda_p}{r_0} + \dfrac{p_0}{8}\bar{v}\widehat{\Psi}\left[c_r c^2\right]} \,. \tag{4.19}$$

Фактор J_1 характеризует угловую неоднородность источников тепла на поверхности частицы. Его вычисление представляет собой самостоятельную задачу, результаты решения которой представлены в [82; 85—87]. Показано, что величина J_1 не зависит от характера поляризации падающего излучения. В связи с этим задача о фотофорезе имеет осевую симметрию, что значительно упрощает ее решение. Аналитические результаты для J_1 получены только для прредельных значений параметра дифракции ρ для сильно и слабо поглощающих частиц.

4.3 Расчет фотофоретической силы для некоторых моделей ядра рассеяния

Результаты расчета фотофоретической силы, полученные с использованием различных известных моделей ядра рассеяния, представлены ниже.

Численные расчеты проводились для величины, представляющей собой отношение фотофоретической силы к ее значению при полной аккомодации. Эта величина зависит от определяющих параметров. Поэтому для количественной оценки использовалась конкретная система, представляющая собой стеклянную частицу с радиусом $r_0 = 1.4$ мкм и теплопроводностью $\lambda_p = 0.92$ В/(м · К), которая находится в гелии. Температура газа $T_0 = 300\ K$ и давление $p_0 = 10$ Па. В случаях, когда аналитические результаты привести невозможно, проводилось численное интегрирование с использованием программного пакета Wolfram Mathematica 12.0. Использовался адаптивный метод, детально описанный в работах [32] и [33], с точностью в пять значащих цифр.

Зеркально–диффузная модель Максвелла [10]

Для данной модели, представленной выражением (1.28), были получены аналитические выражения для любых значений коэффициента диффузного отражения:

$$F_z = -\frac{\pi}{3}\frac{r_0^2 p_0 \varepsilon I J_1}{\dfrac{\lambda_p}{r_0}T_0 + p_0\varepsilon\dfrac{\bar{v}}{\sqrt{\pi}}}\,. \tag{4.20}$$

Это совпадает с результатом работы [82] при полной аккомодации энергии.

Модель Бормана и соавторов [12]

В общем случае аналитические результаты для данной модели получить не удается. Однако можно рассмотреть предельные случаи по параметру B, а для промежуточных значений провести численный анализ.

При почти диффузном рассеянии ($B \ll 1$) получим следующие выражения:

$$F_z = \frac{1}{3}\frac{r_0^2 p_0 \sqrt{\pi}(\sqrt{\pi} - 4B) I J_1}{\dfrac{\lambda_p}{r_0}T_0 + p_0\bar{v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} - \dfrac{15}{16}B\right)}\,. \tag{4.21}$$

В случае почти зеркального отражения ($B \gg 1$) имеем:

$$F_z = 0\,. \tag{4.22}$$

Введем приведенную фотофоретическую силу:

$$F_z^* = \frac{F_z}{F_z^{fm}}, \qquad F_z^{fm} = -\frac{\pi}{3}\frac{r_0^2 p_0 I J_1}{\dfrac{\lambda_p}{r_0}T_0 + p_0\dfrac{\bar{v}}{\sqrt{\pi}}}. \tag{4.23}$$

Результаты численного расчета приведенной фотофоретической силы при промежуточных значениях параметра B представлены на рис. (4.2), а также в табл. 12 приложения.

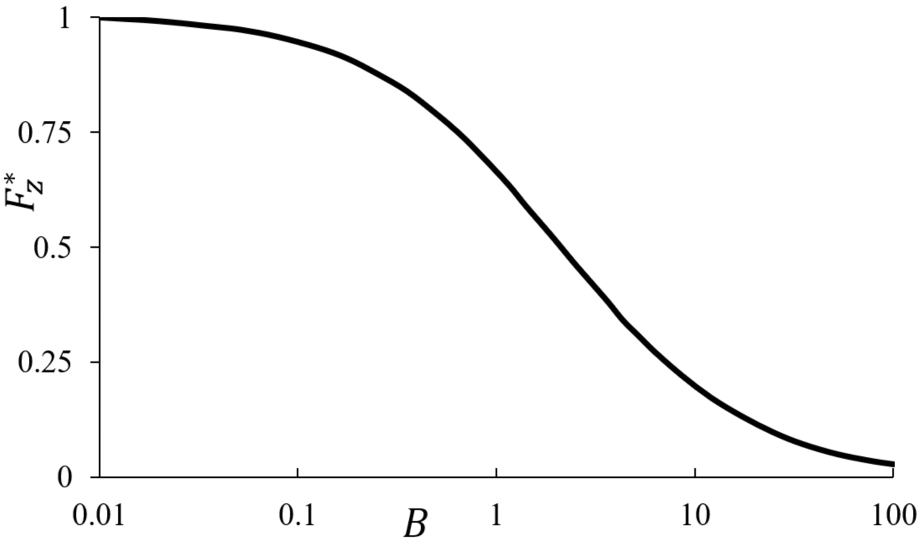

Рисунок 4.2 — Зависимость фотофоретической силы, приведенной к её значению при полной аккомодации, от параметра B.

Модель Эпштейна [11]

Использование модели Эпштейна приводит к следующему результату для фотофоретической силы:

$$F_z = -\frac{2}{3}\pi r_0^2 p_0 I J_1 \left\{ K_1(\theta_1) + \varepsilon_\infty \left[\Phi + \frac{1}{2} - K_1(\theta_2) \right] \right\} \times \tag{4.24}$$

$$\times \left\{ \frac{\lambda_p}{r_0} T_0 + p_0 \frac{\bar{v}}{\sqrt{\pi}} \left[K_2(\theta_1) + \varepsilon_\infty (\Phi + 1 - K_2(\theta_2)) \right] \right\}^{-1},$$

где

$$K_1(\theta_{1,2}) = \frac{2\Phi\,(1 + T_0/\theta_{1,2}) - 4T_0/\theta_{1,2} + 1}{2\,(1 + T_0/\theta_{1,2})^{7/2}}, \tag{4.25}$$

$$K_2(\theta_{1,2}) = \frac{\Phi\,(1 + T_0/\theta_{1,2}) - 2T_0/\theta_{1,2} + 1}{2\,(1 + T_0/\theta_{1,2})^{4}},$$

$$\Phi = \frac{1}{\chi} \left(\frac{2}{(1 + T_0/\theta_1)^3} \frac{T_0}{\theta_1} + \frac{2\varepsilon_\infty}{(1 + T_0/\theta_2)^3} \frac{T_0}{\theta_2} \right),$$

$$\chi = \frac{1}{(1 + T_0/\theta_1)^2} + \varepsilon_\infty \left(1 - \frac{1}{(1 + T_0/\theta_2)^2} \right).$$

Для промежуточных значений параметров $\theta_{1,2}$ был проведен численный расчет. Фотофоретическая сила, приведенная к её значению при полной аккомодации, как функция параметра θ_1/θ_2 для нескольких значений параметра θ_1/T_0 и $\varepsilon_\infty = 1$, представлена на рис. 4.3. Зависимость от ε_∞ при $\theta_1 = \theta_2 = T_0$, представлена на рис. 4.4.

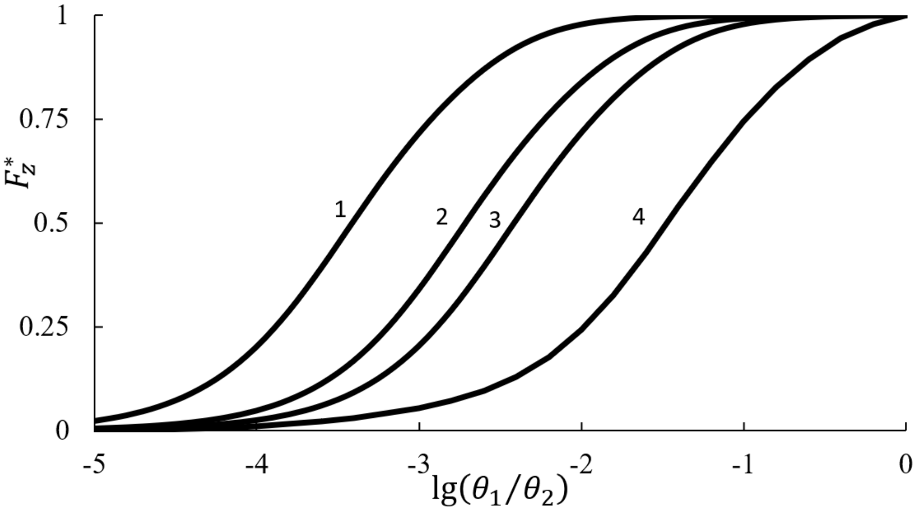

Рисунок 4.3 — Приведенная фотофоретическая сила для модели Эпштейна при θ_1/T_0: 1 – 0.001; 2 – 0.005; 3 – 0.01; 4 – 0.1.

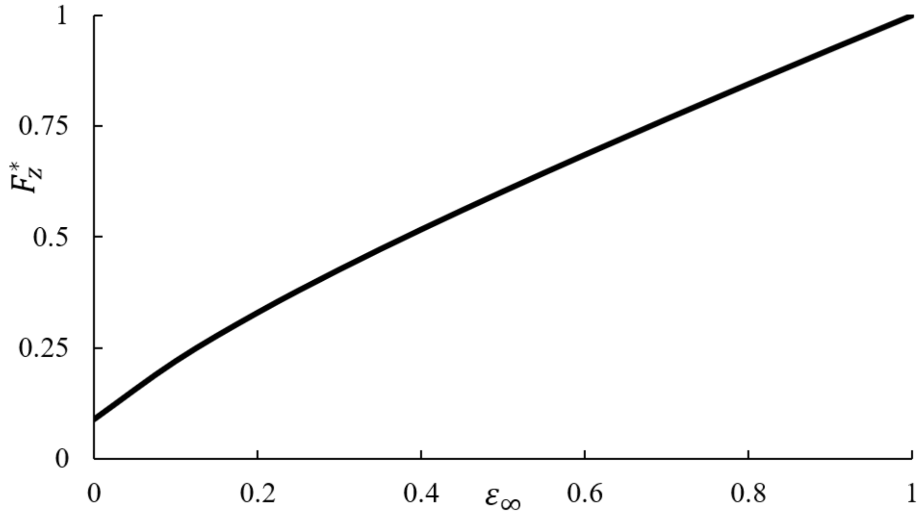

Рисунок 4.4 — Приведенная фотофоретическая сила для модели Эпштейна как функция ε_∞ при $\theta_1 = \theta_2 = T_0$.

CL-Модель [13]

С использованием данной модели для фотофоретической силы можно получить аналитические результаты при произвольных значениях аккомодационных параметров α_n и α_τ. В результате получим:

$$F_z = -\frac{\pi}{3}\frac{r_0^2 p_0 \alpha_n I J_1}{\frac{\lambda_p}{r_0}T_0 + p_0\frac{\bar{v}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}[\alpha_\tau(2-\alpha_\tau)+\alpha_n]}. \tag{4.26}$$

Зависимость силы от аккомодационного параметра α_n представлена на рис. 4.5. Варьирование коэффициента аккомодации тангенциального импульса α_τ практически не влияет на величину фотофоретической силы.

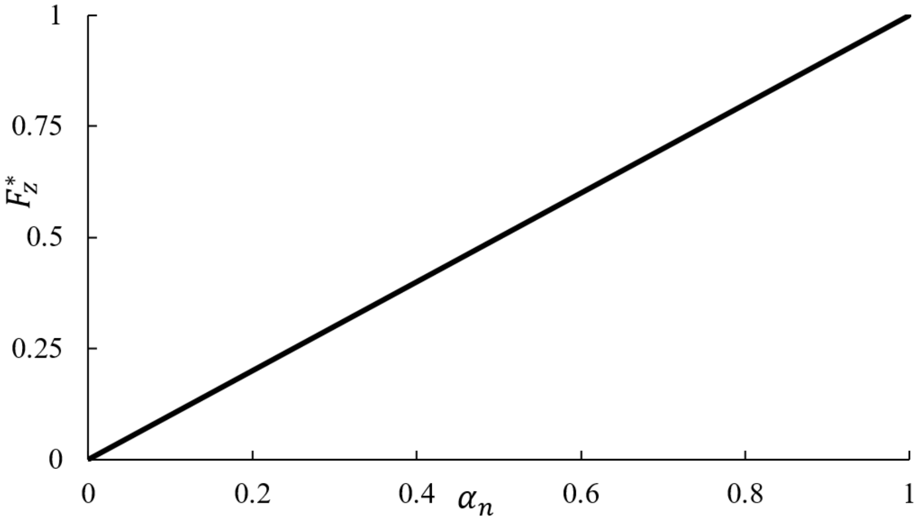

Рисунок 4.5 — Приведенная фотофоретическая сила для модели CL.

4.4 Обсуждение результатов

Расчеты силы, проведенные с использованием некоторых известных моделей ядра рассеяния, показали их качественное согласие. Величина фотофоретической силы максимальна при полной аккомодации, монотонно уменьшается при неполной аккомодации и в пределе отсутствия аккомодации равна нулю, поскольку газу не передается неоднородность температуры частицы.

Выражение (4.26), полученное с использованием CL-модели, формально содержит коэффициент аккомодации тангенциального импульса. Однако численные оценки показали, что этой зависимостью можно пренебречь даже для слаботеплопроводных частиц.

Существующие экспериментальные данные получены при числах Кнудсена $Kn \leqslant 10$, когда фотофоретическая сила зависит от Kn. Свободномолекулярный режим имеет место при $Kn \geqslant 100$. Это не позволило провести сравнение теории с экспериментом.

Итоги

Получено выражение для фотофоретической силы, действующей на мелкую аэрозольную частицу, для произвольного ядра рассеяния. Это позволит рассчитать силу для любой существующей модели ядра рассеяния или той, которая будет получена в будущем.

Показано, что в свободномолекулярном режиме величина фотофоретической силы определяется не непосредственно ядром рассеяния, а его производной по температуре поверхности частицы. Очевидно, при промежуточных и малых числах Кнудсена функция распределения налетающих на частицу молекул будет отличной от максвелловской за счет столкновений с отраженными молекулами. Данная функция будет включать параметры, связанные с неоднородностью температуры поверхности частицы. В результате действующая на частицу сила будет зависеть не только от производной по температуре, но и непосредственно от ядра рассеяния. Однако в линейном приближении это ядро будет функцией равновесной температуры газа, а не температуры частицы. Информацию о температуре частицы будет включать функция распределения налетающих молекул за счет столкновений с отраженными молекулами. Поэтому можно ожидать, что при промежуточном режиме и режиме со скольжением основной вклад в величину фотофоретической силы будет давать член, включающий производную ядра рассеяния по температуре поверхности частицы.

Глава 5. Диффузиофорез сферической частицы

5.1 Обзор современного состояния проблемы

Явление диффузиофореза состоит в том, что на аэрозольную частицу в неоднородной по концентрации газовой смеси действует сила, вызывающая движение. Данная сила обусловлена нескомпенсированным импульсом, передаваемым аэрозольной частице при столкновении с молекулами разного сорта. Явление диффузифореза широко используется при осаждении и сортировке высокодисперсных аэрозолей. Зная характер взаимодействия молекул газа с поверхностью аэрозольных частиц, появляется возможность для более точного предсказания осаждения аэрозолей в диффузионных фильтрах, а также в перспективе и влияния на эффективность данного процесса.

Зависимость силы и скорости диффузиофореза от взаимодействия газа с поверхностью для малых чисел Кнудсена проявляется только через константы диффузионного и вязкостного скольжения. Эти константы вычислены на основе решения кинетического уравнения, независимо от исследуемого физического процесса [88]. При $Kn \gg 1$ (свободномолекулярный режим), диффузиофоретическая сила определяется прямым подсчетам нескоменсированного импульса. В результате все параметры, характеризующие взаимодействие молекул газа с поверхностью частицы, будут напрямую входить в выржение для силы. Таким образом, роль взаимодействия газа с поверхностью наиболее выражена в свободномолекулярном режиме.

До недавнего времени в литературе не было представлено теоретических или экспериментальных исследований роли взаимодействия газа с поверхностью в явлении диффузиофореза. Можно отметить только две работы, в которых данная проблема кратко обсуждается и где были получены выражения для силы и скорости диффузиофореза в условиях свободномолекулярного режима.

В работе [47] была использована модель зеркально-диффузного отражения для бинарной газовой смеси:

$$F_d = -\frac{1}{6}\pi r_0^2 \left[(8+\pi\varepsilon_1)\bar{v}_1 + (8+\pi\varepsilon_2)\bar{v}_2\right] \frac{n^2}{\rho} m_1 m_2 D_{12} |\nabla x_\infty| \tag{5.1}$$

где r_0 — радиус частицы; m_i и ε_i — масса молекул и коэффициент диффузного отражения для i - компоненты газовой смеси соответственно; D_{12} — коэффициент взаимной диффузии; $|\nabla x_\infty|$ — внешний градиент концентрации;

$$\bar{v}_\alpha = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_\alpha}}$$

— средняя скорость теплового движения молекул сорта α. Было показано, что в случае одинакового взаимодействия молекул обеих сортов с поверхностью частицы, скорость диффузиофореза не зависит от коэффициента зеркально-диффузного отражения.

Изучение влияния характера взаимодействия молекул с поверхностью на скорость диффузиофореза на примере полного зеркального отражения и полного диффузного рассеяния. было проведено в работе [89]. Было показано, что полученные два результата незначительно отличаются друг от друга. Полученные аналитические выражения слишком громоздки для общего анализа. Анализ выражений осуществлялся авторами для случая аэрозольной частицы вблизи испаряющейся или растущей капли.

Теоретические исследования явления диффузиофореза проводились рядом авторов и позднее. Однако в большинстве существующих теоретических работ по изучению диффузиофореза влияние характера взаимодействия газа с поверхностью на величины силы и скорости диффузиофореза не являлось предметом детального исследования. Так, в случае свободномолекулярного режима обтекания осуществлялся прямой подсчет импульса, передаваемого молекулами газа аэрозольной частице [90; 91], в то время как для малых чисел Кнудсена решалось уравнение Стокса с граничными условиями скольжения [92; 93], либо использовались методы термодинамики необратимых процессов [94]. Немногочисленные теоретические исследования диффузиофореза, проведенные для любых чисел Кнудсена, содержат ряд экспериментально определяемых параметров, связанных с взаимодействием газа с поверхностью [95], или ограничиваются моделью диффузного рассеяния молекул с поверхности частицы [96].

Данная глава нацелена на вычисление силы и скорости диффузиофореза в бинарной газовой смеси для произвольного характера взаимодействия молекул газа с поверхностью (ядра рассеяния), а так же на расчет значений этих величин с использованием известных моделей ядра рассеяния.

5.2 Постановка задачи

Рассмотрим сферическую частицу с радиусом r_0, много меньшим средней длины свободного пробега молекул, помещенную в поле диффузии бинарной смеси газов. Постоянный градиент концентрации легкого компонента ∇x_∞ создается внешними источниками. Внешние силы не рассматриваются. Давление газа p и температура T в смеси однородны, а следовательно полная числовая плотность молекул смеси n также однородна.

Поместим начало координат в центр частицы, ось z сферической системы координат направим вдоль градиента концентрации ∇x_∞. Полярный угол θ отсчитываем от положительного направления оси z против часовой стрелки, как показано на рис. 5.1.

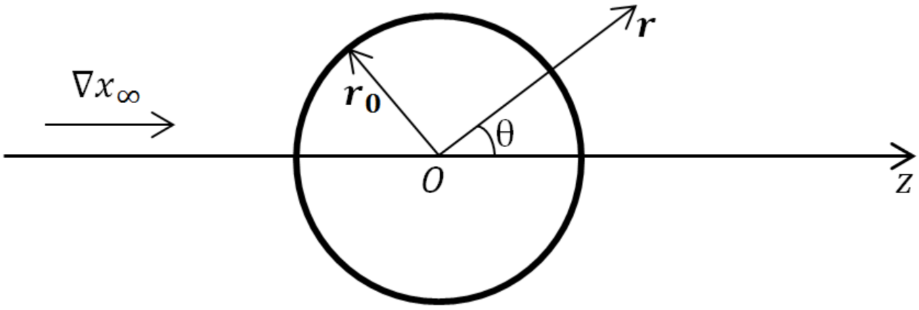

Рисунок 5.1 — Геометрия задачи о диффузиофорезе

Пусть x_1 – относительная концентрация первого компонента газовой смеси вдали от частицы в плоскости, перпендикулярной оси z и проходящей через центр частицы. Тогда при $(r \to \infty)$ концентрация первого компонента определяется как

$$x_\infty = x_1 + |\nabla x_\infty| r \cos\theta. \tag{5.2}$$

Запишем парциальные числовые плотности и относительные концентрации для обеих компонентов смеси следующим образом:

$$\begin{gathered} n_1 = n_{10}\left(1 + \frac{1}{x_1}|\nabla x_\infty| r\cos\theta\right), \quad n_2 = n_{20}\left(1 - \frac{1}{x_2}|\nabla x_\infty| r\cos\theta\right), \\ x_1 = \frac{n_{10}}{n}, \qquad x_2 = \frac{n_{20}}{n} = 1 - x_1, \qquad n = n_1 + n_2, \end{gathered} \tag{5.3}$$

где $n_{\alpha 0}$ – числовая плотность молекул сорта α при $z = 0$.

В условиях свободномолекулярного режима функция распределения налетающих молекул не возмущается за счет столкновений с отраженными, поскольку таких столкновений нет. Следовательно, она будет совпадать с функцией распределения на большом удалении от частицы. Предполагаем, что последняя соответствует первому приближению Чепмена – Энскога [5]:

$$f_\alpha^- = f_{\alpha 0}\left[1 - (-1)^\alpha \frac{1}{x_\alpha}|\nabla x_\infty| r_0 \cos\theta + \frac{m_\alpha}{kT} v_{\alpha z} v_0 \right. \tag{5.4}$$
$$\left. +(-1)^\alpha 2\frac{n^2}{\rho} m_1 m_2 v_{\alpha z} \frac{D_{12}}{\bar{v}_\alpha \rho_{\alpha 0}} |\nabla x_\infty| \right],$$
$$v_{\alpha r} < 0, \quad \rho_{\alpha 0} = n_{\alpha 0} m_\alpha, \quad \bar{v}_\alpha = \sqrt{\frac{2kT}{m_\alpha}}.$$

Здесь $v_{\alpha i}$ есть i-компонента вектора скорости молекул сорта α; m_α,$\rho_{\alpha 0}$ – масса и массовая плотность молекул сорта α соответственно; ρ – массовая плотность газовой смеси; D_{12} – коэффициент взаимной диффузии; k – постоянная Больцмана; $\mathbf{v}_0$ — среднемассовая скорость газовой смеси:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{\rho} \sum_\alpha m_\alpha \int \mathbf{v}_\alpha f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha. \tag{5.5}$$

Функция распределения Максвелла для молекул сорта α запишется как

$$f_{\alpha 0} = n_{\alpha 0} \left(\frac{m_\alpha}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2kT}\right). \tag{5.6}$$

Функция распределения отраженных молекул ($v_{\alpha r} > 0$) в общем случае определяется через функцию распределения налетающих следующим интегральным выражением [5]:

$$f_\alpha^+(r_0,\theta,\mathbf{v}_\alpha) = \int_{v'_{\alpha r}<0} K_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha \to \mathbf{v}_\alpha) f_\alpha^-(r_0,\theta,\mathbf{v}'_\alpha) d\mathbf{v}'_\alpha. \tag{5.7}$$

Поскольку рассматривается состояние, слабо отличающиеся от равновесного, функции распределения для молекул сорта α могут быть записаны как возмущения равновесной Максвелловской функции распределения:

$$f_\alpha^\pm = f_{\alpha 0}(1 + h_\alpha^\pm), \tag{5.8}$$

где $h_\alpha^\pm$ – функции возмущения.

Для налетающих на поверхность молекул функция h_α^- известна из 5.4. Полная функция распределения молекул сорта α может быть записана с использованием функции знака:

$$f_\alpha = f_{\alpha 0}\left(1 + \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} v_{\alpha r}) h_\alpha^+ + \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sign} v_{\alpha r}) h_\alpha^+\right), \tag{5.9}$$

где

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Согласно принципу детального равновесия для молекул сорта α имеем:

$$f_{\alpha 0} = \int_{v'_{\alpha r}<0} K_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha \to \mathbf{v}_\alpha) f_{\alpha 0}(\mathbf{v}'_\alpha) d\mathbf{v}'_\alpha. \tag{5.10}$$

Вычитая из (5.7) выражение (5.10) и принимая во внимание (5.8), получим:

$$f_{\alpha 0} h^+_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) = \int_{v'_{\alpha r}<0} K_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha \to \mathbf{v}_\alpha) f_{\alpha 0}(\mathbf{v}'_\alpha) h^-_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) d\mathbf{v}'_\alpha. \tag{5.11}$$

Учитывая осесимметричность задачи, запишем выражение для полной силы, действующей на аэрозольную частицу в бинарной газовой смеси в направлении оси z:

$$F_z = -2\pi r_0^2 \sum_{\alpha=1}^{2} m_\alpha \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int v_{\alpha r} v_{\alpha z} f_\alpha d\mathbf{v}_\alpha. \tag{5.12}$$

В результате расчета с использованием (5.4), (5.8), (5.9) и (5.12), получим, что полная сила F_z будет аддитивно включать диффузиофоретическую силу F_d, обусловленную градиентом концентрации, а также силу сопротивления F_D, вызванную набегающим потоком:

$$F_d = \frac{8}{3}\sqrt{\pi} r_0^2 \frac{n^2}{\rho} m_1 m_2 D_{12} \left[\bar{v}_2 (1 + R_2) - \bar{v}_1 (1 + R_1)\right] |\nabla x_\infty|, \tag{5.13}$$

$$F_D = \frac{16}{3}\sqrt{\pi} r_0^2 v_0 \left[\frac{p_{10}}{\bar{v}_1}(1 + R_1) + \frac{p_{20}}{\bar{v}_2}(1 + R_2)\right]. \tag{5.14}$$

Здесь $p_{\alpha 0} = n_{\alpha 0} kT$ – парциальное давление молекул сорта α при $z = 0$; R_α – аккомодационная функция, записываемая следующим образом:

$$R_\alpha = -\frac{1}{\pi}\left(c_{\alpha r}, \widehat{K}\left[c_{\alpha r} c'_{\alpha r} + 2 c_{\alpha\theta} c'_{\alpha\theta}\right]\right), \quad \mathbf{c}_\alpha = \frac{\mathbf{v}_\alpha}{\bar{v}_\alpha}; \tag{5.15}$$

$\mathbf{c}_\alpha$ – вектор безразмерной скорости молекул сорта α. Использованы интегральный оператор $\widehat{K}[\varphi(\mathbf{c}'_\alpha)]$

$$\widehat{K}[\varphi(\mathbf{c}'_\alpha)] = \bar{v}_\alpha^3 \int_{c'_{\alpha r}<0} K_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha \to \mathbf{v}_\alpha) \exp\left(-c'^2_\alpha\right) \varphi(\mathbf{c}'_\alpha) d\mathbf{c}'_\alpha \tag{5.16}$$

и скалярное произведение, определенное в §2.2.

Важно отметить, что аккомодационная функция R_α не зависит от масс молекул и полностью определяется моделью ядра рассеяния. Данная функция, а точнее соотношение между R_1 и R_2, полностью определяет роль взаимодействия молекул с поверхностью в явлении диффузиофореза.

Как показывают расчеты, в случае полной аккомодации молекул газа на поверхности частицы имеем $R_\alpha = \pi/8$. В противоположном предельном случае, т. е. при отсутствии аккомодации, $R_\alpha = 0$.

Уменьшение аккомодационных функций обеих компонентов приводит к уменьшению величины диффузионной силы и силы сопротивления. Максимальная величина уменьшения составляет около 40%, независимо от масс молекул.

Из выражения (5.13) видно, что при определенных значениях аккомодационных функций имеет место инверсия знака силы.

Введем критерий инверсии β:

$$\beta = \frac{1 + R_1}{1 + R_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}. \tag{5.17}$$

В случае $\beta = 1$ наблюдаем отсутствие силы диффузиофореза. Рассмотрим случай, когда первый компонент легкий ($m_1 < m_2$). Тогда в случае $\beta < 1$ сила будет направлена вдоль градиента его концентрации; Если $\beta > 1$, то сила направлена противоположно градиенту. При рассмотрении случая, когда первый компонент тяжелый ($m_2 < m_1$), если $\beta < 1$, то сила направлена против градиента концентрации легкого компонента, а при $\beta > 1$ совпадает с его направлением. Если молекулы разного сорта взаимодействуют с поверхностью частицы одинаковым образом ($R_1 = R_2$), то сила диффузиофореза всегда направлена против градиента концентрации легкого компонента.

Инверсия направления диффузионной силы определяется не только характером взаимодействия молекул с поверхностью, но и соотношением масс молекул разных сортов. Вот почему инверсия невозможна для любой пары газов. Чем меньше различаются массы, тем более вероятна инверсия. Существует предельное значение разницы масс молекул, для которого инверсия возможна. Эта величина может быть определена из (5.17), если рассмотреть в качестве примера, что молекулы второго компонента рассеиваются диффузно ($R_2 = \pi/8$), тогда как молекулы первого компонента отражаются зеркально ($R_1 = 0$). Тогда, при $\beta = 1$, имеем:

$$\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = \frac{\pi + 8}{8} \approx 1.393.$$

В случае большего различия масс молекул разного сорта инверсия знака диффузионной силы невозможна.

Чтобы получить выражение для диффузионной скорости v_d, примем во внимание, что в случае равномерного движения полная сила, действующая на частицу, равна нулю:

$$\mathbf{F}_D + \mathbf{F}_d = 0. \tag{5.18}$$

Отметим также, что скорость диффузиофореза частицы относительно центра масс газовой смеси есть $v_d = -v_0$. В результате получим:

$$v_d = -\frac{n}{\rho}\sqrt{m_1 m_2} D_{12} |\nabla x_\infty| \frac{\sqrt{m_2}(1 + R_1) - \sqrt{m_1}(1 + R_2)}{x_1\sqrt{m_1}(1 + R_1) + x_2\sqrt{m_2}(1 + R_2)}. \tag{5.19}$$

Из (5.19) следует, что для произвольного, но одинакового характера взаимодействия молекул разного сорта с поверхностью аэрозольной частицы ($R_1 = R_2$), скорость диффузиофореза не зависит от характера этого взаимодействия.

Перепишем формулу (5.19) относительно среднечисловой скорости молекул смеси. Из кинетической теории известно, что среднечисловая скорость газовой смеси u связана с гидродиномической скоростью v_0 следующим соотношением:

$$u = v_0 - \frac{n}{\rho}(m_2 - m_1) D_{12} |\nabla x_\infty|. \tag{5.20}$$

Отсюда скорость диффузиофореза, связанная со среднечисловой скоростью газовой смеси имеет вид:

$$u_d = -D_{12} |\nabla x_\infty| \frac{\sqrt{m_1}(1 + R_1) - \sqrt{m_2}(1 + R_2)}{x_1\sqrt{m_1}(1 + R_1) + x_2\sqrt{m_2}(1 + R_2)}. \tag{5.21}$$

В случае одинакового взаимодействия молекул разного сорта с поверхностью направление скорости u_d совпадает с направлением градиента концентрации легкого компонента. В случае различного характера взаимодействия для молекул разного сорта, формально возможна инверсия направления скорости. В точке инверсии должно быть выполнено следующее равенство:

$$\frac{\sqrt{m_1}(1 + R_1)}{\sqrt{m_2}(1 + R_2)} = 1.$$

Для выполнения данного равенства необходимо, чтобы аккомодация тяжелых молекул была меньше аккомодации легких. Данный случай не подтверждается имеющимися на сегодняшний день экспериментальными данными, в связи с чем инверсия направления скорости u_d представляется маловероятной.

Введем безразмерные величины диффузионной силы F_d^* и скорости v_d^* следующим образом:

$$F_d^* = -\frac{F_d \rho}{r_0^2 2n^2 m_1 m_2 D_{12} \bar{v}_2 |\nabla x_\infty|}, \quad v_d^* = -\frac{\rho v_d}{n\sqrt{m_1 m_2} D_{12} |\nabla x_\infty|}. \tag{5.22}$$

Зависимость приведенных значений F_d^* и u_d^* от аккомодационной функции R_1 в случае полной аккомодации второго компонента $(R_2 = \pi/8)$ для эквимолярной $(x_1 = x_2 = 0.5)$ пары газов с близкими массами (Ar/CO_2) и с сильно различающимися массами (He/Ar) представлена на рис. 5.2.

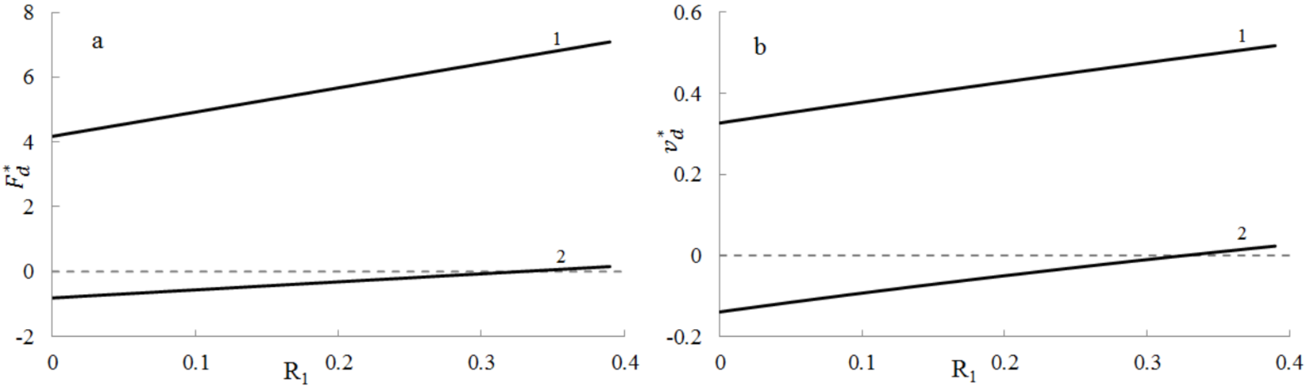

Рисунок 5.2 — Зависимость диффузионной силы (*a*) и скорости (*b*) от аккомодационной функции R_1 при $R_2 = \pi/8$: 1 – He/Ar, 2 – Ar/CO_2.

Таким образом, для смеси He/Ar в случае полной аккомодации тяжелого компонента уменьшение аккомодации легкого компонента приводит к уменьшению величин силы и скорости диффузиофореза. Для смеси Ar/CO_2 сила и скорость диффузиофореза меняет направление на противоположное при $R_1 = 0.327$.

5.3 Расчеты для некоторых моделей ядра рассеяния

Ниже представлены результаты расчета аккомодационной функции R_α для различных известных моделей ядра рассеяния. В случаях, когда аналитические результаты привести невозможно, проводилось численное интегрирование с использованием программного пакета Wolfram Mathematica 12.0. Использовался адаптивный метод, детально описанный в работах [32] и [33], с точностью в пять значащих цифр.

Зеркально–диффузная модель Максвелла [10]

Для данной модели, представленной выражением (1.28), был получен аналитический результат для R_α при любых значениях коэффициента диффузного отражения:

$$R_\alpha = \frac{\pi}{8}\varepsilon_\alpha. \tag{5.23}$$

В данном случае выражение для u_d, получаемое из (5.21), совпадает с выражением Вальдмана (5.1).

Модель Бормана и соавторов [12]

В общем случае аналитические результаты для данной модели получить не удается. Однако можно рассмотреть предельные случаи по параметру B, а для промежуточных значений провести численный анализ.

Так, для $B_\alpha \gg 1$ имеем:

$$R_\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2B_\alpha}. \tag{5.24}$$

В случае $B \ll 1$ получено:

$$R_\alpha = \frac{\pi}{8}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}B_\alpha\right]. \tag{5.25}$$

Результаты численного расчета аккомодационной функции R_α при промежуточных значениях параметра B_α представлены на рис. 5.3, а так же в табл. 13 приложения.

Модель Эпштейна [11]

Использование модели Эпштейна приводит к следующему результату для аккомодационной функции R_α:

$$R_\alpha = \frac{\pi}{8}\frac{\Phi_\alpha^2}{\chi_\alpha}, \tag{5.26}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha &= \frac{1}{\left(1 + T/\theta_{\alpha 1}\right)^{5/2}} + \varepsilon_{\alpha\infty}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + T/\theta_{\alpha 2}\right)^{5/2}}\right]; \\ \chi_\alpha &= \frac{1}{\left(1 + T/\theta_{\alpha 1}\right)^{2}} + \varepsilon_{\alpha\infty}\left[1 - \frac{1}{\left(1 + T/\theta_{\alpha 2}\right)^{2}}\right]. \end{aligned} \tag{5.27}$$

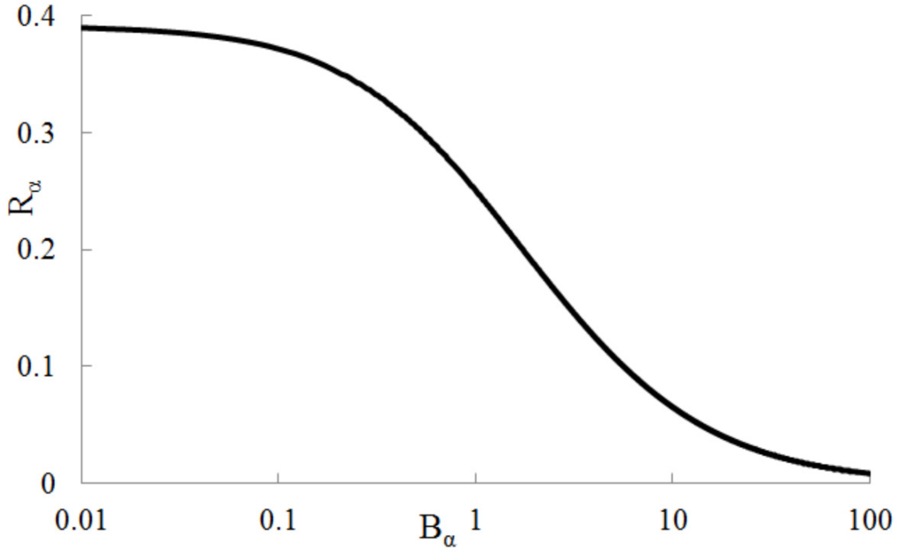

Рисунок 5.3 — Зависимость аккомодационной функции R_α от параметра B_α.

Результаты для аккомодационной функции R_α при промежуточных значениях параметров модели и $\varepsilon_{\alpha\infty} = 1$ представлены на рис. 5.4. Значения R_α могут быть извлечены из эксперимента; в дальнейшем на их основе можно восстановить все параметры, входящие в выражение (5.27)

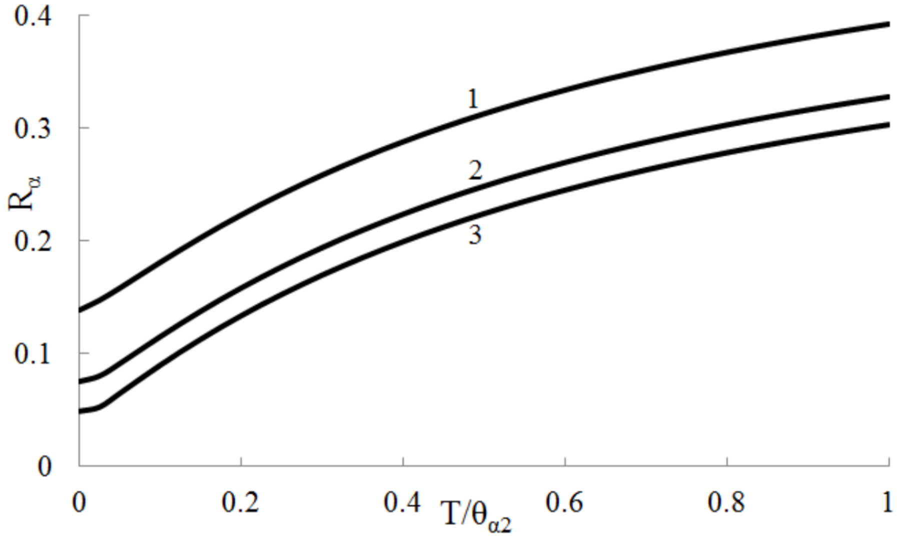

Рисунок 5.4 — Зависимость R_α от аккомодационных параметров: 1 – $T/\theta_{\alpha 1} = 1$; 2 – $T/\theta_{\alpha 1} = 2$; 3 – $T/\theta_{\alpha 1} = 3$.

CL-Модель [13]

Для получения аналитического результата предположим почти полную аккомодацию молекул:

$$(1 - \alpha_{\alpha\tau}) \ll 1\,, \qquad (1 - \alpha_{\alpha n}) \ll 1\,. \tag{5.28}$$

В рамках данного приближения получим:

$$R_\alpha = -\frac{1}{32}\left[16(1-\alpha_{\alpha\tau}) - \pi(5-\alpha_{\alpha n})\right] \tag{5.29}$$

Для промежуточных значений параметров модели был проведен численный расчет. Результаты для аккомодационной функции R_α представлены на рис. 5.5 и в табл. 14 приложения.

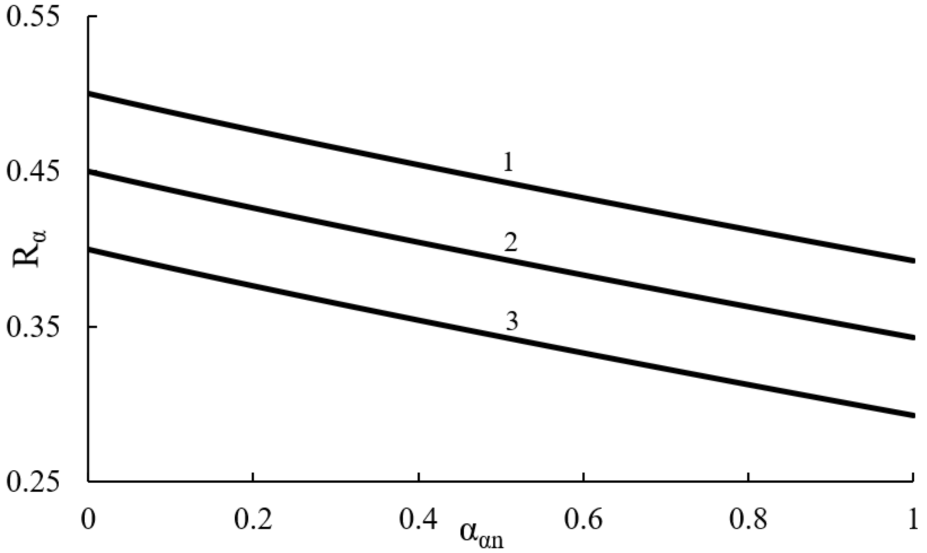

Рисунок 5.5 — Зависимость R_α $\alpha_{\alpha n}$ при различных значениях $\alpha_{\alpha\tau}$: 1 – $\alpha_{\alpha\tau} = 1$; 2 – $\alpha_{\alpha\tau} = 0.9$; 3 – $\alpha_{\alpha\tau} = 0.8$;

Показано, что уменьшение аккомодации тангенциального импульса приводит к монотонному увеличению R_α. Увеличение аккомодации энергии движения по нормали монотонно уменьшает R_α. Отметим, что при определенных значениях аккомодационных параметров функция R_α может превышать ее значение при полностью диффузном рассеянии молекул. Максимальное превышение достигается при $\alpha_{\alpha n} = 0$ и $\alpha_{\alpha\tau} = 1$ и составляет 27%. Однако, на сегодняшний день не существует экспериментальных данных, показывающих такое значительное различие между аккомодационными параметрами, поэтому этот результат маловероятен в реальных ситуациях.

5.4 Обсуждение результатов

Представляет интерес несколько экспериментальных работ по диффузионной скорости, проведенных для промежуточных и малых чисел Кнудсена различными методами. В работе [97] были получены результаты измерения скорости капель силиконового масла M300 в поле диффузии водяного пара через неподвижный азот. В работе [98] использовались сферические монодисперсные стандартизированные частицы полистирола (PSL) в поле диффузии водяного пара через неподвижный воздух. В указанных работах измерения проводились по методике, аналогичной эксперименту Милликена [30]. Работы [99] и [100; 101] были посвящены измерению скорости диффузиофореза частиц в поле диффузии водяного пара через ламинарный поток воздуха на основе струйной методики. Использовались капли вазелинового масла, а также карнаубского воска и парафина соответственно.

В работах [95] и [96] представлены теоретические исследования диффузиофореза при произвольных числах Кнудсена. В первой работе использовалась модель «запыленного газа» [102], во второй интегрально-моментным методом решалось кинетическое уравнение. В обеих работах показано, что при промежуточных значениях числа Кнудсена ($Kn > 0.1$) скорость диффузиофореза слабо зависит от числа Кнудсена. Такая зависимость становится существенной при $Kn < 0.1$, когда диффузионное скольжение играет главную роль [103; 104]. Данный вывод позволяет нам провести сравнение разработанной теории с результатами отмеченных выше экспериментальных работ.

На рис. 5.6 представлено сравнение теории с экспериментальными данными для приведенной диффузионной скорости $u_d^* = u_d/u_{d0}$, где

$$u_{d0} = -D_{12}|\nabla x_\infty| \frac{\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2}}{x_1\sqrt{m_1} + x_2\sqrt{m_2}}$$

— значение u_d (5.21) при полной аккомодации.

Значительное увеличение приведенной скорости при $Kn < 0.5$ в экспериментах с использованием струйного метода, вероятно, обусловлено особенностями самого метода. Данный метод не позволяет разделить диффузионный и конвективный перенос частиц при малых числах Кнудсена. Детальный анализ струйного метода представлен в работе [105]. Автором приводится пять замечаний касательно данного метода, но основании которых он делает следующий вывод: «Из всего вышесказанного следует, что значения ошибочны, хотя причина данного расхождения не может быть установлена без специальных измерений.»

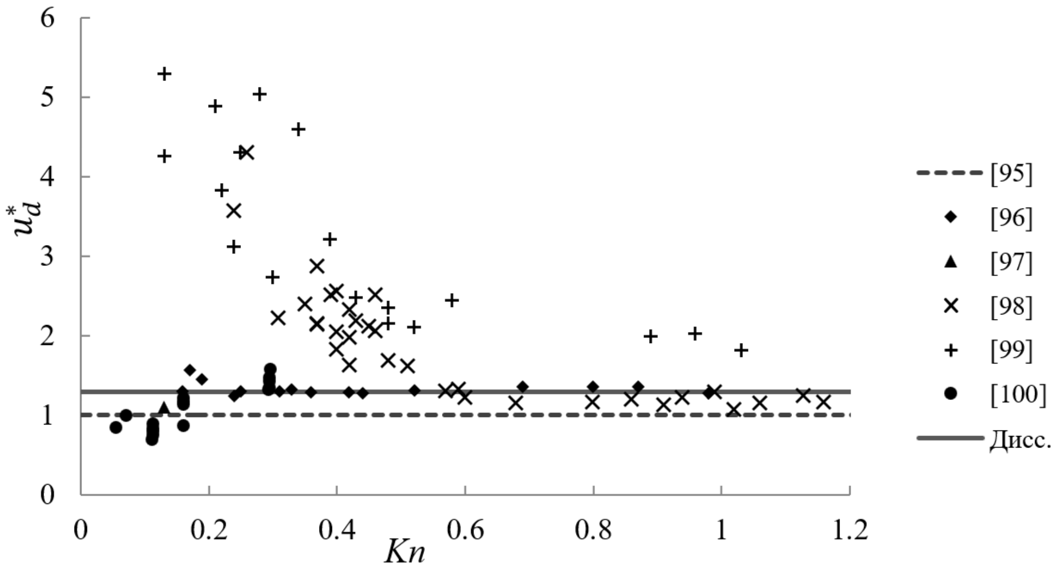

Рисунок 5.6 — Сравнение теории с экспериментальными данными.

Значения аккомодационных параметров для всех обсужденных моделей ядра рассеяния, подобранные из условия наилучшего согласия теории с экспериментом [97] представлены ниже. Среднее значение скорости в данной работе $u_d^* = 1.31$.

Модель зеркально-диффузного отражения: $\varepsilon_1 = 0.42$; $\varepsilon_2 = 0.77$.

Модель Бормана и соавторов: $B_1 = 14.0$; $B_2 = 0.5$.

Модель Эпштейна: $T/\theta_{11} = 1.30$; $T/\theta_{12} = 0.36$; $T/\theta_{21} = 1.17$; $T/\theta_{22} = 0.85$; $\varepsilon_{\infty 1} = 0.74$; $\varepsilon_{\infty 2} = 1.0$.

CL – модель: $\alpha_{1n} = 0.63$; $\alpha_{2n} = 0.89$; $\alpha_{1\tau} = 0.29$; $\alpha_{2\tau} = 0.86$.

Итоги

Получены выражения для силы диффузиофореза, силы сопротивления и скорости диффузиофореза сферической аэрозольной частицы в бинарной газовой смеси при любом характере взаимодействия молекул газа с ее поверхностью в условиях свободномолекулярного режима. Общие формулы (5.13) и (5.14) позволяют вычислить физические величины для любой модели ядра рассеяния.

Показано, что для газовых смесей с близкими молярными массами компонентов, характер взаимодействия газа с поверхностью влияет как на величину, так и на знак силы и скорости диффузиофореза.

Расчеты силы и скорости диффузиофореза с использованием различных моделей ядра рассеяния показал качественное согласие для всех полученных результатов. Сравнение теоретических результатов с экспериментальными данными позволило извлечь аккомодационные параметры всех моделей исходя из условия наилучшего согласия теории с экспериментом. Таким образом, явление диффузиофореза может быть источником достоверной информации о взаимодействии газовых смесей с поверхностью частицы.

Заключение

Разработаны физико-математические модели силы сопротивления, силы и скорости термофореза аэрозольной частицы в почти свободномолекулярном режиме, фотофоретической и диффузионной сил в свободномолекулярном режиме при произвольном ядре рассеяния. На основе аналитических и численных расчетов с использованием известных моделей ядра рассеяния получены зависимости сил и скоростей движения частицы от аккомодационных параметров этих моделей.

1. Использованные модели ядра рассеяния, за исключением максвелловской, показали зависимость термофоретической силы в свободномолекулярном режиме от аккомодационных свойств частицы и газа.
2. В свободномолекулярном режиме величина фотофоретической силы определяется температурной неоднородностью ядра рассеяния. С использованием CL-модели получено, что величина этой силы слабо зависит от коэффициента аккомодации тангенциального импульса.
3. В неоднородной по концентрации бинарной смеси газов с близкими молярными массами аккомодация молекул на поверхности частицы влияет как на величину, так и на направление силы и скорости диффузиофореза. Получен количественный критерий инверсии знака диффузионной силы.
4. Для произвольного, но одинакового взаимодействия молекул разного сорта с поверхностью частицы, скорость диффузиофореза не зависит от характера этого взаимодействия в свободномолекулярном режиме.
5. Все использованные модели ядра рассеяния количественно описывают экспериментальные данные по силе сопротивления, а также скорости диффузиофореза. В случае термофореза это удалось сделать только для модели ядра рассеяния Эпштейна и CL-модели. Варьирование аккомодационных параметров моделей Максвелла и Бормана только увеличивает количественное расхождение теории с экспериментом.
6. Разработанная теория сил, действующих на аэрозольную частицу, и скоростей ее движения при сравнении с экспериментом позволяет оценить эффективность той или иной модели ядра рассеяния и является

источником достоверной информации о значениях аккомодационных параметров этой модели.

Перспективы дальнейшей разработки темы

Подводя итог, отметим два основных направления развития представленного исследования. Первое связано с разработкой теории движения аэрозольной частицы в неоднородном газе для более широкого диапазона значений числа Кнудсена при произвольном ядре рассеяния. Второе направление связано с разработкой моделей движения аэрозольной частицы в ограниченном неоднородном газе с целью проведения более полного сравнения теории с имеющимися экспериментальными данными.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант №19-31-90019/19).

Автор выражает огромную благодарность за плодотворное сотрудничество своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Черняку Владимиру Григорьевичу.

Список литературы

1. *Hidy, G. M.* The dynamics of aerocolloidal systems / G. M. Hidy, J. R. Brock. — Oxford : Pergamon Press, 1970. — 379 p.
2. *Фукс, Н. А.* Механика аэрозолей. / Н. А. Фукс. — М : Изд-во АН СССР, 1955. — 352 с.
3. *Шахов, Е. М.* О приближенных кинетических уравнениях в теории разреженных газов / Е. М. Шахов // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1968. — Т. 1. — С. 156—161.
4. *Коган, М. Н.* Динамика разреженного газа: Кинетическая теория / М. Н. Коган. — М. : Наука, 1967. — 440 с.
5. *Черняк, В. Г.* Кинетика разреженного газа: Учебное пособие / В. Г. Черняк. — СПб : Изд-во «Лань», 2018. — 540 с.
6. *Шидловский, В. П.* Введение в динамику разреженного газа / В. П. Шидловский. — М : Наука, 1965. — 220 с.
7. *Марчук, Г. И.* Методы расчета ядерных реакторов / Г. И. Марчук. — М. : Госатомиздат, 1961. — 667 с.
8. *Черчиньяни, К.* Теория и приложения уравнения Больцмана / К. Черчиньяни. — М. : Мир, 1978. — 496 с.
9. *Черчиньяни, К.* Математические методы в кинетической теории газов / К. Черчиньяни. — М. : Мир, 1973. — 248 с.
10. *Niven, W. D.* The scientific papers of James Clerk Maxwell / W. D. Niven. — New York : Dover Pub., 1965. — 656 p.
11. *Epstein, M.* A model of the wall boundary conditions in kinetic theory / M. Epstein // AIAA J. — 1967. — Vol. 5, no. 10. — P. 1797—1800.
12. *Borman, V. D.* Theory of nonequilibrium phenomena at a gas-solid interface / V. D. Borman, S. Y. Krylov, A. V. Prosyanov // JETP. — 1988. — Vol. 67. — P. 2110—2121.
13. *Cercignani, C.* Kinetic models for gas-surface interactions / C. Cercignani, M. Lampis // Transp. Theor. Stat. Phys. — 1971. — Vol. 1, no. 2. — P. 101—114.

14. *Stokes, G. G.* On the effect of internal friction of fluids on the motion of pendulums / G. G. Stokes // Trans. Cambridge Philos. Soc. — 1851. — Vol. 9. — P. 8—106.

15. *Basset, A. B.* A treatise on hydrodynamics / A. B. Basset. — Cambridge : Deighton, Bell, co., 1888. — 368 p.

16. *Cunningham, E.* On the velocity of steady fall of spherical particles through fluid medium / E. Cunningham // Proc. Roy. Soc. A. — 1910. — Vol. 83, no. 563. — P. 8—106.

17. *Loyalka, S. K.* Approximate Method in the Kinetic Theory / S. K. Loyalka // Phys. Fluids. — 1971. — Vol. 14, no. 11. — P. 2291—2294.

18. *Sone, Y.* Forces on a spherical particle in a slightly rarefied gas / Y. Sone, K. Aoki // Rarefied gas dynamics, ed. J. L. Potter. — New York : Academic Press, 1977. — P. 417—433.

19. *Sone, Y.* Slightly rarefied gas flow over a specularly reflecting body / Y. Sone, K. Aoki // Phys. Fluids. — 1977. — Vol. 20, no. 4. — P. 571—576.

20. *Aoki, K.* Slightly rarefied gas flow over a body with small accommodating coefficient / K. Aoki, T. Inamuro, Y. Onishi // J. Phys. Soc. Japan. — 1979. — Vol. 47, no. 2. — P. 663—671.

21. *Vestner, H.* Generalised hydrodynamics of thermal transpiration, thermal force, and friction force / H. Vestner, L. Waldmann // Physica. — 1977. — Vol. 86 A, no. 2. — P. 303—336.

22. *Epstein, P.* On the resistance experienced by spheres in their motion through gases / P. Epstein // Phys. Rev. — 1924. — Vol. 23. — P. 710—733.

23. *Wang Chang, C. S.* Transport phenomena in very dilute gases, II / C. S. Wang Chang. — Michigan : University of Michigan Engineering Research, 1950, Report CM. — 654 p.

24. *Mason, E. A.* Motion of small suspended particles in nonuniform gases / E. A. Mason, S. Chapman // J. Chem. Phys. — 1964. — Vol. 36, no. 3. — P. 627—632.

25. *Дерягин, Б. В.* Теория термофореза больших твердых аэрозольных частиц / Б. В. Дерягин, С. П. Баканов // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 147, № 1. – С. 139–142.

26. *Баканов*, *С. П.* Термофорез в газах / С. П. Баканов, Б. В. Дерягин, В. И. Ролдугин // Усп. физ. наук. — 1962. — Т. 129, № 2. — С. 255—278.
27. *Береснев*, *С. А.* Термофорез сферической аэрозольной частицы при произвольных числах Кнудсена. Обсуждение результатов. / С. А. Береснев, В. Г. Черняк, Г. А. Фомягин // ТВТ. — 1990. — Т. 24, № 3. — С. 549—557.
28. *Vilisova*, *E. A.* Accommodative dependence of thermophoresis in gases in the Knudsen regime / E. A. Vilisova, V. G. Chernyak // Atmos. Ocean. Opt. — 2015. — Vol. 28, no. 3. — P. 236—239.
29. *Kalempa*, *D.* Drag and thermophoresis on a sphere in a rerefied gas basedon the Cercignani–Lampis model of gas–surface interaction / D. Kalempa, F. Sharipov // J. Fluid Mech. — 2020. — Vol. 900, A37.
30. *Millikan*, *R. A.* The isolation of an ion, a precision measurement of its charge, and the correction of Stokes' law / R. A. Millikan // Phys. Rev. — 1911. — Vol. 32, no. 4. — P. 349—397.
31. *Millikan*, *R. A.* The general law of fall of a small spherical body through a gas, and its bearing upon the nature of molecular reflection from surfaces / R. A. Millikan // Phys. Rev. — 1923. — Vol. 22, no. 1. — P. 1—23.
32. *Malcolm*, *M. A.* Local versus Global Strategies for Adaptive Quadrature / M. A. Malcolm, R. B. Simpson // ACN Trans. Math. Softw. — 1975. — Vol. 1, no. 2. — P. 129—146.
33. *Krommer*, *A. R.* Computational Integration / A. R. Krommer, C. W. Ueberhuber. — Phil. : SIAM Pub., 1998. — 465 p.
34. Experimental Characterization of the Thermal Conductivity and Microstructure of Opacifier-Fiber-Aerogel Composite / Z. Hu [et al.] // MOLEFW. — 2018. — Vol. 23, no. 9. — P. 2198.
35. *Cercignani*, *C.* Flow of a Rarefied Gas past an Axisymmetric Body. II. Case of a Sphere. / C. Cercignani, C. D. Pagani, P. Bassanini // Phys. Fluids. — 1968. — Vol. 11, no. 7. — P. 1399—1403.
36. *Lea*, *K. C.* Motion of a sphere in a rarefied gas. / K. C. Lea, S. K. Loyalka // Phys. Fluids. — 1980. — Vol. 25, no. 9. — P. 1550—1557.
37. *Loyalka*, *S. K.* Motion of a sphere in a gas: Numerical solution of the linearized Boltzmann equation. / S. K. Loyalka // Phys. Fluids. — 1992. — Vol. 4, no. 5. — P. 1049—1056.

38. *Liu, V. C.* Sphere drag in flow of almost–free molecules. Phys. Fluids / V. C. Liu, S. C. Pang, H. Jew // Phys. Fluids. — 1965. — Vol. 8, no. 5. — P. 788—796.

39. *Willis, D. P.* Sphere drag at high Knudsen number and low Mach number. / D. P. Willis // Phys. Fluids. — 1966. — Vol. 9, no. 12. — P. 2522—2524.

40. *Allen, M. D.* Re-evaluation of Millikan's oil drop data for the motion of small particles in air. / M. D. Allen, O. G. Raabe // J. Aerosol Sci. — 1982. — Vol. 13, no. 6. — P. 537—547.

41. *Tindall, J.* Scientific Adresses / J. Tindall. — New Haven, Conn. : C.C. Chatfield & Co., 1870. — 81 p.

42. *Фукс, Н. А.* Высокодисперсные аэрозоли/Итоги науки. Серия химия. Физ. химия. / Н. А. Фукс, А. Г. Сутугин. – М : Изд-во ВНИИТИ, 1969. – 84 с.

43. *Brock, J. R.* The kinetics of ultrafine particles / J. R. Brock // Aerosol Microphysics 1. Particle Interaction/3Ed. W. H. Marlow. — Berlin : Springer-Verlag, 1980. — P. 15—59.

44. *Talbot, L.* Thermophoresis – a review. / L. Talbot // Rarefied gas dynamics, ed. S. Finher, v.74. — New York : AIAA, v. 1, 1981. — P. 467.

45. *Young, J. B.* Thermophoresis of a Spherical Particle: Reassessment, Clarification, and New Analysis. / J. B. Young // Aerosol Sci. Technol. — 2011. — Vol. 45. — P. 927—948.

46. *Springer, G. S.* Thermal force on particle in the transition regime. / G. S. Springer // J. Colloid Iterface Sci. — 1970. — Vol. 34, no. 2. — P. 215—220.

47. *Waldmann, L.* Über die Kraft eines inhoraogenen Gases auf kleine suspendierte Kugeln. / L. Waldmann // Z. Naturforschg B. — 1959. — Vol. 14a. — P. 589—599.

48. *Баканов, С. П.* О теории термопреципитации высокодисперсных аэрозольных систем. / С. П. Баканов, Б. В. Дерягин // Коллоид. Ж. – 1959. – Т. 21, № 4. – С. 377–384.

49. *Brock, J. R.* The thermal force in the transition region. / J. R. Brock // J. Colloid Interface Sci. — 1967. — Vol. 23, no. 3. — P. 448—452.

50. *Ивченко, И. Н.* О термофорезе аэрозольных частиц в почти свободномолекулярном режиме / И. Н. Ивченко, Ю. И. Яламов // Изв. АН СССР, МЖГ. — 1970. — Т. 3. — С. 3—7.
51. *Береснев, С. А.* Термофорез сферической аэрозольной частицы при произвольных числах Кнудсена. Постановка задачи и метод решения / С. А. Береснев, В. Г. Черняк // ТВТ. — 1986. — Т. 24, № 2. — С. 313—321.
52. *Береснев, С. А.* Термофорез сферической аэрозольной частицы при произвольных числах Кнудсена. Обсуждение результатов / С. А. Береснев, В. Г. Черняк // ТВТ. — 1986. — Т. 24, № 3. — С. 549—557.
53. *Saxton, R. L.* Thermal Force on an Aerosol Particle in a Temperature Gradient. / R. L. Saxton, W. E. Ranz // J. Appl. Phys. — 1952. — Vol. 23. — P. 917—923.
54. *Schmitt, K. H.* Untersuchungen an Schwebstoffteilchen im Temperaturfield. / K. H. Schmitt // Z. Naturforsch. — 1959. — Vol. 14a. — P. 870—881.
55. *Schadt, C. F.* Thermal Forces on Aerosol Particles. / C. F. Schadt, R. D. Cadle // J. Phys Chem. — 1961. — Vol. 65. — P. 1689—1694.
56. *Jacobsen, S.* The Thermal Force on Spherical Sodium Chloride Aerosols. / S. Jacobsen, J. R. Brock // J. Colloid Sci. — 1965. — Vol. 20. — P. 544—554.
57. *Tong, N. T.* Experiments on Photophoresis and Thermophoresis. / N. T. Tong // J. Colloid Interface Sci. — 1975. — Vol. 51. — P. 143—151.
58. *Davis, L. A.* Thermal Force on a Sphere. / L. A. Davis, T. W. Adair // J. Chem. Phys. — 1975. — Vol. 62. — P. 2278—2285.
59. *Li, W.* Measurement of the Thermophoretic Force by Electrodynamic Levitation: Microspheres in Air. / W. Li, E. J. Davis // J. Aerosol Sci. — 1995. — Vol. 26. — P. 1063—1083.
60. *Li, W.* The Effects of Gas and Particle Properties on Thermophoresis. / W. Li, E. J. Davis // J. Aerosol Sci. — 1995. — Vol. 26. — P. 1085—1099.
61. *Gallis, M. A.* A generalised approximation for the Thermophoretic Force on a Free-Molecular Particle. / M. A. Gallis, D. J. Rader, J. R. Torczynski // Aerosol Sci. Technol. — 2004. — Vol. 38. — P. 692—706.

62. *Loyalka, S. K.* Thermophoretic force on a single particle–i. numerical solution of the linearized boltzmann equation / S. K. Loyalka // J. Aerosol Sci. — 1992. — Vol. 23, no. 3. — P. 291—300.

63. *Beresnev, S. A.* Thermophoresis of a spherical particle in a rarefied gas: Numerical analysis based on the model kinetic equations. / S. A. Beresnev, V. G. Chernyak // Phys. Fluids. — 1995. — Vol. 7. — P. 1743—1756.

64. *Saxena, S. C.* McGraw-Hill/Cindas Data Series on Material Properties, Volume II-I (Edited by Y. S. Touloukian and C. Y. Ho) / S. C. Saxena, R. K. Joshi. — NY : McGraw-Hill, 1981. — P. 548.

65. *Ehrenhaft, F.* Die Photophores / F. Ehrenhaft // Ann. Phys. — 1918. — Vol. 56. — P. 81—132.

66. *Rubinowicz, A.* Radiometerkrafte und Ehrenhaftsche Photophorese / A. Rubinowicz // Annalen der Physik. — 1920. — Vol. 62, no. 6. — P. 691—715.

67. *Hettner, G.* Newere experimentelie und theoretishe Untersuchungen uber die Radiometerkraft / G. Hettner // Ergebnisse der exakten Naturwssenshaften. — 1928. — Vol. 7. — P. 209—234.

68. *Дэшман, С.* Научные основы вакуумной техники / С. Дэшман. – М. : Мир, 1971. – 716 с.

69. *Яккель, Р.* Получение и измерение вакуума / Р. Яккель. – М. : ИЛ, 1952. – 343 с.

70. *Brock, J. R.* On radiometerforce / J. R. Brock // J. Colloid Interface Sci. — 1967. — Vol. 25, no. 4. — P. 564—567.

71. *Rosenblatt, P.* Motion of a particle In a temperature gradient: Thermal repulsion as a radiometer phenomenon / P. Rosenblatt, V. K. La Mer // Phys. Rev. — 1946. — Vol. 70, no. 5/6. — P. 385—395.

72. *Morse, T. F.* Laser modification of thermophoretic deposition / T. F. Morse, J. W. Cipolla // J. Colloid Interface Sci. — 1984. — Vol. 97, no. 1. — P. 137—148.

73. *Lewittes, M.* Radiometric levitation of micron sized spheres / M. Lewittes, S. Arnold, G. Oster // Appl. Phys. Letters. — 1982. — Vol. 40, no. 6. — P. 455—457.

74. *Davis, E. J.* A history of single aerosol particle levitation / E. J. Davis // Aerosol Sci. and Techol. — 1997. — Vol. 26, no. 3. — P. 212—254.

75. *Rohatchek, H.* Photophoretic forces on stratospheric and mesospheric aerosols / H. Rohatchek // J. Aerosol Sci. — 1983. — Vol. 14, no. 3. — P. 217—218.

76. *Rohatchek, H.* Levitation of mesospheric and stratospheric aerosol by gravito-photophoresis / H. Rohatchek // J. Aerosol Sci. — 1996. — Vol. 27, no. 3. — P. 467—475.

77. *Hidy, G. M.* Photophoresis and the descent of particles into lower stratosphere / G. M. Hidy, J. R. Brock // J. Geophys. Res. — 1967. — Vol. 72, no. 2. — P. 455—460.

78. *Orr G.Jr.and Keng, E. Y. H.* Photophoretic effect in the stratosphere / E. Y. H. Orr G.Jr.and Keng // J. Atmos. Sci. — 19864. — Vol. 21, no. 9. — P. 475—478.

79. *Кондратьев, В. Я.* Радиационное возмущающее действие, обусловленное аэрозолем / В. Я. Кондратьев // ОАО. – 2003. – Т. 16, № 1. – С. 5–18.

80. *Ковалев, Ф. Д.* Экспериментальное исследование фотофореза в газах : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.04.14 / Ф. Д. Ковалев. – Екатеринбург: УрГУ, 2003. – 133 с.

81. *Kerker, M.* Photophoretic Force on Aerosol Particles in the Free-Molecule Regime / M. Kerker, D. D. Cooke // J. Opt. Soc, Amer. — 1982. — Vol. 72, no. 9. — P. 1267—1272.

82. *Яламов, Ю. И.* Теория движения мелкой аэрозольной частицы в поле оптического излучения / Ю. И. Яламов, В. Б. Кутуков, Е. Р. Щукин // ИФЖ. – 1976. – Т. 30, № 6. – С. 996–1002.

83. *Chernyak, V. G.* Photophoresis of aerosol particles / V. G. Chernyak, S. A. Beresnev // J. Aerosol Sci. — 1993. — Vol. 24, no. 7. — P. 857—866.

84. *Bohren, C. F.* Absorption and Scattering of Light by Small Particles / C. F. Bohren, D. R. Huffman. — NY : Wiley, 1983. — 544 p.

85. *Arnold, S.* Size dependence of the photophoretic force / S. Arnold, M. Lewittes // J. Appl. Phys. — 1982. — Vol. 53, no. 7. — P. 5314—5319.

86. *Arnold, S.* Influence of surface-mode-enchances local fields on photophoresis / S. Arnold, A. B. Pluchino, K. M. Leung // Phys. Rev. A. — 1984. — Vol. 29, no. 2. — P. 654—660.

87. *Yalamov, Y. I.* Theory of the photophoretic motion of the large-size volatile aerosol particle / Y. I. Yalamov, V. B. Kutukov, E. R. Schukin // J. Colloid Interface Sci. — 1976. — Vol. 57, no. 3. — P. 564—571.

88. *Loyalka, S. K.* Momentum and Temperature Slip Coefficients with Arbitrary Accommodation at the Surface / S. K. Loyalka // J. Chem. Phys. — 1968. — Vol. 48, no. 12. — P. 5432—5436.

89. *Bakanov, S. P.* The motion of a small particle in a non-uniform gas mixture / S. P. Bakanov, P. V. Dejaguin // Discuss. Faraday Soc. — 1960. — Vol. 30. — P. 130—138.

90. *Дерягин, Б. В.* Теория движения малых аэрозольных частиц в поле диффузии / Б. В. Дерягин, С. П. Баканов // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 117, № 6. – С. 959–962.

91. *Schmitt, K. H.* Untersuchungen an Schwebstoffteilchen in diffundierenden Gasen. / K. H. Schmitt, L. Waldmann // Z. Naturforsch. — 1960. — Vol. 15a. — P. 843—851.

92. *Яламов, Ю. И.* К теории диффузиофореза крупных нелетучих аэрозольных частиц / Ю. И. Яламов, Б. А. Обухов // ЖТФ. – 1972. – Т. 42, № 5. – С. 1064–1068.

93. *Brock, J. R.* Forces on aerosols in gas mixture. / J. R. Brock // J. Colloid Interface Sci. — 1963. — Vol. 18, no. 6. — P. 489—501.

94. *Bakanov, S. P.* Diffusiophoresis in gases / S. P. Bakanov, V. I. Roldugin // Aerosol Sci. Technol. — 1987. — Vol. 7, no. 3. — P. 249—255.

95. *Annis, B. K.* Theory of diffusiophoresis of spherical aerosol particles and of drag in a gas mixture. / B. K. Annis, A. P. Malinauskas // J. Aerosol Sci. — 1973. — Vol. 4, no. 4. — P. 271—281.

96. *Черняк, В. Г.* Диффузиофорез аэрозольной частицы в бинарной газовой смеси. / В. Г. Черняк, С. А. Стариков, С. А. Береснев // ПМТФ. – 2001. – Т. 42, № 3. – С. 72–83.

97. *Schmitt, K. H.* Untersuchungen an Schwebstoffteilchen in diffundierendem Wasserdampf. / K. H. Schmitt // Z. Naturforsch. — 1961. — Vol. 16a. — P. 144—149.

98. *Kousaka, Y.* Experiments on diffusiophoresis of aerosol particles at low Knudsen numbers. / Y. Kousaka, Y. Endo // J. Aerosol Sci. — 1993. — Vol. 24, no. 5. — P. 611—617.

99. *Derjaguin, B. V.* Diffusiophoresis of large aerosol particles. / B. V. Derjaguin, Y. I. Yalamov, A. I. Storozhilova // J. Colloid Interface Sci. — 1966. — Vol. 22, no. 2. — P. 117—125.

100. *Prodi, F.* Measurements of diffusiophoretic velocities of aerosol particles in the transition region. / F. Prodi, G. Santachiara, C. Cornetti // J. Aerosol Sci. — 2002. — Vol. 33, no. 1. — P. 181—188.

101. Measurements of phoretic velocities of aerosol particles in microgravity conditions. / F. Prodi [et al.] // Atmos. Res. — 2006. — Vol. 82, no. 1/2. — P. 183—189.

102. *Мейсон, Э.* Перенос в пористых средах: модель запыленного гаа / Э. Мейсон, А. Малинаускас. – М : Мир, 1986. – 200 с.

103. *Ivchenko, I. N.* Boundary slip phenomena in a binary gas mixture / I. N. Ivchenko, S. K. Loyalka, R. V. Tompson // Z. angew. Math. Phys. — 2002. — Vol. 53, no. 1. — P. 58—72.

104. *Lang, H.* Diffusion slip velocity: theory and experiment / H. Lang, S. K. Loyalka // Z. Naturforsch. — 1972. — Vol. 27a, no. 8. — P. 1307—1319.

105. *Fuchs, N. A.* Thermophoresis of aerosol particles at small Knudsen numbers: theory and experiment / N. A. Fuchs // J. Aerosol Sci. — 1982. — Vol. 13, no. 4. — P. 327—330.

Список рисунков

Список таблиц

Приложение А

Численные значения сил

Таблица 9 — Значения приведенных сил сопротивления и термофореза для модели Бормана и соавторов [12].

$\delta \rightarrow$	0.01		0.05		0.1		0.25	
B	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*
0.01	0.9940	1.0014	0.9764	0.9900	0.9544	0.9757	0.8883	0.9329
0.02	0.9924	1.0054	0.9746	0.9939	0.9524	0.9795	0.8857	0.9364
0.03	0.9908	1.0092	0.9729	0.9976	0.9505	0.9831	0.8833	0.9397
0.05	0.9877	1.0159	0.9695	1.0042	0.9468	0.9896	0.8786	0.9458
0.1	0.9801	1.0295	0.9613	1.0177	0.9378	1.0028	0.8674	0.9584
0.2	0.9661	1.0469	0.9463	1.0350	0.9215	1.0201	0.8473	0.9755
0.3	0.9534	1.0563	0.9329	1.0446	0.9071	1.0300	0.8300	0.9862
0.4	0.9421	1.0612	0.9208	1.0499	0.8943	1.0357	0.8148	0.9932
0.5	0.9318	1.0635	0.9100	1.0525	0.8828	1.0389	0.8013	0.9978
1	0.8923	1.0600	0.8689	1.0511	0.8395	1.0401	0.7516	1.0069
2	0.8461	1.0437	0.8211	1.0379	0.7900	1.0307	0.6964	1.0090
5	0.7896	1.0202	0.7633	1.0185	0.7305	1.0164	0.6320	1.0101
10	0.7583	1.0093	0.7315	1.0099	0.6980	1.0106	0.5975	1.0128
20	0.7377	1.0041	0.7107	1.0061	0.6768	1.0087	0.5753	1.0163
40	0.7255	1.0020	0.6983	1.0048	0.6643	1.0084	0.5623	1.0191
60	0.7210	1.0015	0.6938	1.0046	0.6597	1.0085	0.5575	1.0204
100	0.7172	1.0011	0.6900	1.0045	0.6558	1.0088	0.5535	1.0215

Таблица 10 — Приведенные силы сопротивления и термофореза для модели Эпштейна [11]

ε_∞	1																							
$T_0/\theta_1 \rightarrow$	1												3						5					
$\delta \rightarrow$	0				0.1				0.25				0		0.1		0.25		0		0.1		0.25	
T_0/θ_2	F_D^*		F_T^*		F_D^*		F_T^*		F_D^*		F_T^*		F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*
0	0.7533		0.8773		0.6862		0.8734		0.5855		0.8677		0.7224	0.9770	0.6522	0.9810	0.5468	0.9870	0.7193	0.9924	0.6486	0.9956	0.5425	1.0003
0.05	0.7879		0.9228		0.7231		0.9139		0.6258		0.9006		0.7567	1.0345	0.6890	1.0334	0.5873	1.0318	0.7552	1.0671	0.6870	1.0682	0.5847	1.0699
0.1	0.8187		0.9698		0.7556		0.9580		0.6611		0.9403		0.7887	1.0975	0.7229	1.0946	0.6240	1.0901	0.7879	1.1355	0.7216	1.1355	0.6220	1.1355
0.15	0.8451		1.0067		0.7835		0.9927		0.6912		0.9718		0.8159	1.1433	0.7516	1.1386	0.6551	1.1316	0.8154	1.1827	0.7506	1.1812	0.6533	1.1790
0.2	0.8676		1.0331		0.8073		1.0174		0.7168		0.9937		0.8390	1.1743	0.7759	1.1680	0.6813	1.1586	0.8385	1.2139	0.7750	1.2108	0.6797	1.2063
0.25	0.8869		1.0508		0.8276		1.0335		0.7387		1.0075		0.8585	1.1941	0.7966	1.1863	0.7036	1.1746	0.8581	1.2334	0.7956	1.2288	0.7019	1.2219
0.3	0.9034	ПА	1.0616	ПА	0.8450	ПА	1.0429	ПА	0.7574	ПА	1.0149	ПА	0.8752	1.2058	0.8142	1.1966	0.7226	1.1827	0.8748	1.2446	0.8132	1.2385	0.7209	1.2293
0.35	0.9176		1.0672		0.8600		1.0473		0.7735		1.0174		0.8895	1.2115	0.8293	1.2009	0.7389	1.1851	0.8891	1.2496	0.8283	1.2422	0.7372	1.2309
0.4	0.9299	0.9675	1.0689	1.0781	0.8729	0.9144	1.0479	1.0542	0.7875	0.8348	1.0165	1.0183	0.9019	1.2128	0.8423	1.2010	0.7529	1.1834	0.9014	1.2504	0.8413	1.2416	0.7512	1.2284
0.45	0.9406	0.9702	1.0678	1.0716	0.8842	0.9171	1.0458	1.0473	0.7996	0.8375	1.0129	1.0109	0.9125	1.2111	0.8536	1.1981	0.7651	1.1788	0.9120	1.2480	0.8526	1.2380	0.7634	1.2231
0.5	0.9499	0.9729	1.0646	1.0651	0.8940	0.9198	1.0418	1.0404	0.8101	0.8402	1.0076	1.0035	0.9218	1.2071	0.8634	1.1931	0.7757	1.1722	0.9213	1.2434	0.8624	1.2323	0.7740	1.2158
0.55	0.9581	0.9756	1.0600	1.0586	0.9026	0.9225	1.0364	1.0335	0.8194	0.8429	1.0010	0.9960	0.9299	1.2016	0.8720	1.1867	0.7850	1.1643	0.9294	1.2373	0.8709	1.2253	0.7832	1.2072
0.6	0.9652	0.9784	1.0544	1.0521	0.9101	0.9253	1.0300	1.0267	0.8275	0.8456	0.9935	0.9886	0.9371	1.1950	0.8795	1.1792	0.7932	1.1556	0.9364	1.2303	0.8784	1.2173	0.7913	1.1978
0.65	0.9715	0.9811	1.0481	1.0456	0.9168	0.9280	1.0231	1.0198	0.8347	0.8483	0.9855	0.9811	0.9433	1.1878	0.8861	1.1712	0.8004	1.1464	0.9427	1.2225	0.8850	1.2087	0.7985	1.1879
0.7	0.9771	0.9838	1.0414	1.0391	0.9227	0.9307	1.0157	1.0129	0.8411	0.8510	0.9773	0.9737	0.9489	1.1802	0.8920	1.1628	0.8067	1.1369	0.9482	1.2145	0.8908	1.1998	0.8048	1.1779
0.75	0.9821	0.9865	1.0344	1.0325	0.9280	0.9334	1.0082	1.0060	0.8467	0.8537	0.9689	0.9662	0.9538	1.1723	0.8972	1.1543	0.8124	1.1273	0.9530	1.2062	0.8960	1.1908	0.8104	1.1678
0.8	0.9865	0.9892	1.0274	1.0260	0.9326	0.9361	1.0007	0.9991	0.8518	0.8564	0.9606	0.9588	0.9581	1.1645	0.9018	1.1458	0.8174	1.1178	0.9574	1.1980	0.9006	1.1819	0.8154	1.1578
0.85	0.9904	0.9919	1.0203	1.0195	0.9368	0.9388	0.9931	0.9922	0.8563	0.8591	0.9524	0.9513	0.9620	1.1566	0.9060	1.1374	0.8219	1.1085	0.9612	1.1898	0.9047	1.1731	0.8199	1.1480
0.9	0.9940	0.9946	1.0134	1.0130	0.9405	0.9415	0.9858	0.9854	0.8603	0.8618	0.9443	0.9439	0.9655	1.1489	0.9097	1.1291	0.8259	1.0994	0.9647	1.1817	0.9084	1.1644	0.8239	1.1385
0.95	0.9971	0.9973	1.0066	1.0065	0.9439	0.9442	0.9786	0.9785	0.8640	0.8645	0.9365	0.9364	0.9686	1.1414	0.9130	1.1211	0.8295	1.0906	0.9678	1.1739	0.9117	1.1561	0.8275	1.1293
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9469	0.9469	0.9716	0.9716	0.8673	0.8673	0.9289	0.9290	0.9714	1.1341	0.9160	1.1133	0.8328	1.0821	0.9705	1.1663	0.9146	1.1480	0.8307	1.1204

ε_∞	0.5																							
$T_0/\theta_1 \rightarrow$	1						3						5											
$\delta \rightarrow$	0		0.1		0.25		0		0.1		0.25		0				0.1				0.25			
T_0/θ_2	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*		F_T^*		F_D^*		F_T^*		F_D^*		F_T^*	
0	0.7533	0.8773	0.6862	0.8745	0.5855	0.8703	0.7224	0.9770	0.6522	0.9835	0.5468	0.9932	0.7193	0.7180	0.9924	1.0000	0.6486	0.6470	1.0002	1.0047	0.5425	0.5405	1.0119	1.0118
0.05	0.7702	0.8956	0.7042	0.8898	0.6053	0.8810	0.7384	0.9962	0.6694	0.9984	0.5660	1.0016	0.7360	0.7401	1.0211	1.0614	0.6666	0.6703	1.0252	1.0651	0.5626	0.5656	1.0312	1.0708

Продолжение таблицы 10

0.1	0.7850	0.9133	0.7200	0.9055	0.6225	0.8938	0.7536	1.0224	0.6857	1.0227	0.5838	1.0233	0.7519	0.7621	1.0530	1.1227	0.6836	0.6936	1.0559	1.1255	0.5810	0.5907	1.0602	1.1298
0.15	0.7977	0.9274	0.7335	0.9182	0.6372	0.9043	0.7669	1.0429	0.6998	1.0421	0.5991	1.0409	0.7655	0.7841	1.0761	1.1841	0.6980	0.7168	1.0781	1.1860	0.5966	0.6158	1.0811	1.1888
0.2	0.8087	0.9376	0.7451	0.9273	0.6498	0.9117	0.7782	1.0574	0.7118	1.0557	0.6122	1.0531	0.7770	0.8061	1.0917	1.2454	0.7102	0.7401	1.0929	1.2464	0.6099	0.6409	1.0946	1.2478
0.25	0.8181	0.9445	0.7551	0.9332	0.6606	0.9162	0.7878	1.0671	0.7220	1.0645	0.6233	1.0607	0.7868	0.8282	1.1017	1.3068	0.7205	0.7633	1.1021	1.3068	0.6211	0.6661	1.1027	1.3068
0.3	0.8261	0.9486	0.7637	0.9365	0.6699	0.9184	0.7961	1.0729	0.7308	1.0697	0.6329	1.0648	0.7952	0.8502	1.1075	1.3682	0.7294	0.7866	1.1073	1.3672	0.6307	0.6912	1.1068	1.3657
0.35	0.8331	0.9506	0.7711	0.9378	0.6780	0.9187	0.8033	1.0760	0.7384	1.0720	0.6411	1.0661	0.8023	ЗО	1.1104	ЗО	0.7370	ЗО	1.1094	ЗО	0.6390	ЗО	1.1080	ЗО
0.4	0.8392	0.9510	0.7775	0.9376	0.6850	0.9176	0.8094	1.0769	0.7450	1.0724	0.6483	1.0656	0.8085		1.1111		0.7435		1.1095		0.6461		1.1071	
0.45	0.8445	0.9502	0.7831	0.9363	0.6911	0.9155	0.8148	1.0764	0.7506	1.0713	0.6545	1.0636	0.8138		1.1102		0.7492		1.1080		0.6523		1.1048	
0.5	0.8491	0.9486	0.7880	0.9342	0.6964	0.9127	0.8194	1.0748	0.7556	1.0691	0.6599	1.0607	0.8185		1.1082		0.7542		1.1055		0.6577		1.1015	
0.55	0.8532	0.9463	0.7924	0.9315	0.7011	0.9094	0.8235	1.0724	0.7599	1.0663	0.6646	1.0571	0.8225		1.1054		0.7585		1.1022		0.6624		1.0974	
0.6	0.8567	0.9436	0.7962	0.9284	0.7053	0.9057	0.8271	1.0695	0.7638	1.0629	0.6688	1.0531	0.8261		1.1021		0.7623		1.0985		0.6666		1.0930	
0.65	0.8599	0.9407	0.7995	0.9251	0.7089	0.9018	0.8302	1.0662	0.7671	1.0592	0.6725	1.0488	0.8292		1.0985		0.7656		1.0944		0.6702		1.0883	
0.7	0.8627	0.9375	0.8025	0.9216	0.7122	0.8978	0.8330	1.0627	0.7701	1.0553	0.6757	1.0443	0.8320		1.0947		0.7686		1.0902		0.6735		1.0834	
0.75	0.8652	0.9343	0.8051	0.9181	0.7151	0.8938	0.8355	1.0591	0.7728	1.0514	0.6786	1.0398	0.8344		1.0908		0.7712		1.0859		0.6764		1.0785	
0.8	0.8674	0.9310	0.8075	0.9145	0.7177	0.8898	0.8377	1.0554	0.7751	1.0474	0.6812	1.0353	0.8366		1.0868		0.7735		1.0816		0.6789		1.0737	
0.85	0.8694	0.9277	0.8096	0.9110	0.7200	0.8859	0.8397	1.0518	0.7772	1.0434	0.6835	1.0309	0.8386		1.0829		0.7756		1.0773		0.6812		1.0689	
0.9	0.8712	0.9245	0.8115	0.9075	0.7221	0.8821	0.8414	1.0482	0.7791	1.0395	0.6856	1.0265	0.8403		1.0791		0.7775		1.0731		0.6833		1.0642	
0.95	0.8728	0.9214	0.8132	0.9042	0.7239	0.8783	0.8430	1.0447	0.7808	1.0357	0.6875	1.0223	0.8419		1.0753		0.7792		1.0691		0.6851		1.0597	
1	0.8742	0.9183	0.8148	0.9009	0.7256	0.8747	0.8444	1.0413	0.7823	1.0321	0.6892	1.0182	0.8433		1.0716		0.7807		1.0651		0.6868		1.0554	
ε_∞	1																							
$T_0/\theta_2 \rightarrow$	1												0.5						0.2					
$\delta \rightarrow$	0				0.1				0.25				0		0.1		0.25		0		0.1		0.25	
T_0/θ_1	F_D^*		F_T^*		F_D^*		F_T^*		F_D^*		F_T^*		F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9469	0.9469	0.9716	0.9716	0.8673	0.8673	0.9289	0.9290	0.9499	1.0646	0.8940	1.0418	0.8101	1.0076	0.8676	1.0331	0.8073	1.0174	0.7168	0.9937
1.2	0.9911	0.9892	1.0245	1.0260	0.9375	0.9361	0.9975	0.9991	0.8570	0.8564	0.9569	0.9588	0.9410	1.0900	0.8845	1.0687	0.7998	1.0369	0.8586	1.0575	0.7976	1.0434	0.7062	1.0223
1.4	0.9851	0.9784	1.0458	1.0521	0.9310	0.9253	1.0199	1.0267	0.8499	0.8456	0.9810	0.9886	0.9351	1.1122	0.8781	1.0922	0.7927	1.0624	0.8526	1.0789	0.7911	1.0663	0.6988	1.0473
1.6	0.9809	0.9675	1.0639	1.0781	0.9265	0.9144	1.0390	1.0542	0.8449	0.8348	1.0016	1.0183	0.9310	1.1312	0.8737	1.1125	0.7877	1.0843	0.8483	1.0975	0.7865	1.0861	0.6937	1.0689
1.8	0.9780	0.9567	1.0793	1.1041	0.9233	0.9036	1.0552	1.0817	0.8414	0.8240	1.0191	1.0481	0.9281	1.1476	0.8705	1.1298	0.7841	1.1031	0.8454	1.1136	0.7832	1.1032	0.6900	1.0876
2	0.9759	0.9459	1.0923	1.1302	0.9210	0.8928	1.0690	1.1093	0.8388	0.8131	1.0340	1.0779	0.9260	1.1615	0.8682	1.1446	0.7815	1.1192	0.8433	1.1275	0.7809	1.1180	0.6873	1.1037
2.2	0.9744	0.9351	1.1034	1.1562	0.9193	0.8820	1.0807	1.1368	0.8368	0.8023	1.0467	1.1077	0.9246	1.1735	0.8666	1.1573	0.7796	1.1330	0.8418	1.1396	0.7792	1.1308	0.6853	1.1178
2.4	0.9732	0.9242	1.1129	1.1822	0.9181	0.8711	1.0908	1.1643	0.8354	0.7915	1.0576	1.1375	0.9235	1.1838	0.8654	1.1682	0.7782	1.1449	0.8407	1.1500	0.7780	1.1420	0.6839	1.1300
2.6	0.9724	0.9134	1.1210	1.2083	0.9172	0.8603	1.0994	1.1919	0.8343	0.7807	1.0669	1.1673	0.9228	1.1927	0.8645	1.1777	0.7772	1.1553	0.8399	1.1592	0.7771	1.1518	0.6828	1.1408
2.8	0.9718	0.9026	1.1280	1.2343	0.9165	0.8495	1.1069	1.2194	0.8334	0.7698	1.0751	1.1971	0.9222	1.2004	0.8639	1.1859	0.7764	1.1643	0.8394	1.1672	0.7764	1.1604	0.6820	1.1502
3	0.9714	0.8918	1.1341	1.2603	0.9160	0.8387	1.1133	1.2469	0.8328	0.7590	1.0821	1.2269	0.9218	1.2071	0.8634	1.1931	0.7757	1.1722	0.8390	1.1743	0.7759	1.1680	0.6813	1.1586
3.2	0.9711	ПА	1.1394	ПА	0.9156	ПА	1.1190	ПА	0.8323	ПА	1.0883	ПА	0.9216	1.2130	0.8630	1.1994	0.7753	1.1792	0.8387	1.1805	0.7756	1.1747	0.6809	1.1660
3.4	0.9709		1.1440		0.9153		1.1239		0.8319		1.0938		0.9214	1.2181	0.8628	1.2050	0.7749	1.1853	0.8385	1.1860	0.7753	1.1807	0.6805	1.1726

Продолжение таблицы 10

3.6	0.9707		1.1481		0.9151		1.1283		0.8316		1.0986		0.9213	1.2227	0.8626	1.2099	0.7747	1.1907	0.8384	1.1910	0.7751	1.1860	0.6803	1.1785
3.8	0.9706		1.1517		0.9149		1.1321		0.8314		1.1028		0.9212	1.2267	0.8625	1.2143	0.7744	1.1955	0.8383	1.1954	0.7750	1.1907	0.6801	1.1837
4	0.9705		1.1549		0.9148		1.1356		0.8312		1.1066		0.9212	1.2303	0.8624	1.2181	0.7743	1.1999	0.8383	1.1993	0.7750	1.1950	0.6799	1.1885
4.2	0.9705		1.1577		0.9147		1.1386		0.8310		1.1100		0.9212	1.2335	0.8624	1.2216	0.7742	1.2037	0.8383	1.2028	0.7749	1.1988	0.6798	1.1928
4.4	0.9705		1.1602		0.9147		1.1413		0.8309		1.1130		0.9212	1.2364	0.8623	1.2247	0.7741	1.2072	0.8384	1.2060	0.7749	1.2023	0.6797	1.1966
4.6	0.9705		1.1625		0.9146		1.1438		0.8308		1.1157		0.9212	1.2390	0.8623	1.2275	0.7740	1.2103	0.8384	1.2089	0.7749	1.2054	0.6797	1.2002
4.8	0.9705		1.1645		0.9146		1.1460		0.8308		1.1182		0.9212	1.2413	0.8623	1.2301	0.7740	1.2132	0.8385	1.2115	0.7749	1.2082	0.6797	1.2034
5	0.9705		1.1663		0.9146		1.1480		0.8307		1.1204		0.9213	1.2434	0.8624	1.2323	0.7740	1.2158	0.8385	1.2139	0.7750	1.2108	0.6797	1.2063
ε_∞	0.5																							
$T_0/\theta_2 \rightarrow$	1						0.8						0.5						0.2					
$\delta \rightarrow$	0		0.1		0.25		0		0.1		0.25		0		0.1		0.25		0		0.1		0.25	
T_0/θ_1	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*
1	0.8742	0.9183	0.8148	0.9009	0.7256	0.8747	0.8674	0.9310	0.8075	0.9145	0.7177	0.8898	0.8491	0.9486	0.7880	0.9342	0.6964	0.9127	0.8087	0.9376	0.7451	0.9273	0.6498	0.9117
1.2	0.8652	0.9409	0.8051	0.9250	0.7149	0.9011	0.8584	0.9537	0.7978	0.9387	0.7070	0.9163	0.8401	0.9712	0.7783	0.9585	0.6857	0.9393	0.7995	0.9592	0.7353	0.9505	0.6389	0.9375
1.4	0.8590	0.9603	0.7984	0.9456	0.7075	0.9236	0.8522	0.9732	0.7911	0.9596	0.6996	0.9391	0.8339	0.9908	0.7716	0.9794	0.6782	0.9623	0.7933	0.9777	0.7285	0.9704	0.6313	0.9593
1.6	0.8546	0.9768	0.7937	0.9632	0.7023	0.9428	0.8479	0.9899	0.7864	0.9773	0.6943	0.9584	0.8295	1.0076	0.7669	0.9973	0.6730	0.9818	0.7888	0.9935	0.7236	0.9872	0.6259	0.9778
1.8	0.8516	0.9908	0.7903	0.9781	0.6985	0.9591	0.8448	1.0041	0.7831	0.9924	0.6905	0.9749	0.8265	1.0220	0.7635	1.0126	0.6691	0.9985	0.7856	1.0070	0.7201	1.0016	0.6219	0.9936
2	0.8493	1.0027	0.7879	0.9908	0.6957	0.9729	0.8425	1.0161	0.7806	1.0053	0.6877	0.9890	0.8242	1.0342	0.7611	1.0257	0.6663	1.0129	0.7833	1.0185	0.7176	1.0140	0.6190	1.0072
2.2	0.8477	1.0129	0.7861	1.0017	0.6936	0.9848	0.8409	1.0265	0.7788	1.0163	0.6856	1.0011	0.8226	1.0448	0.7593	1.0370	0.6642	1.0252	0.7816	1.0285	0.7157	1.0247	0.6168	1.0189
2.4	0.8465	1.0216	0.7847	1.0110	0.6920	0.9950	0.8397	1.0353	0.7775	1.0258	0.6840	1.0115	0.8214	1.0539	0.7579	1.0467	0.6627	1.0360	0.7803	1.0372	0.7143	1.0340	0.6151	1.0292
2.6	0.8456	1.0291	0.7837	1.0190	0.6908	1.0038	0.8388	1.0430	0.7764	1.0340	0.6828	1.0205	0.8205	1.0618	0.7569	1.0552	0.6615	1.0453	0.7794	1.0448	0.7132	1.0421	0.6139	1.0381
2.8	0.8449	1.0356	0.7829	1.0260	0.6899	1.0115	0.8382	1.0496	0.7757	1.0411	0.6819	1.0284	0.8199	1.0687	0.7562	1.0626	0.6606	1.0535	0.7787	1.0515	0.7124	1.0493	0.6129	1.0461
3	0.8444	1.0413	0.7823	1.0321	0.6892	1.0182	0.8377	1.0554	0.7751	1.0474	0.6812	1.0353	0.8194	1.0748	0.7556	1.0691	0.6599	1.0607	0.7782	1.0574	0.7118	1.0557	0.6122	1.0531
3.2	0.8441	1.0462	0.7819	1.0374	0.6886	1.0241	0.8374	1.0605	0.7747	1.0528	0.6807	1.0414	0.8191	1.0801	0.7552	1.0749	0.6593	1.0671	0.7778	1.0627	0.7113	1.0614	0.6116	1.0594
3.4	0.8438	1.0505	0.7815	1.0421	0.6882	1.0294	0.8371	1.0650	0.7744	1.0577	0.6802	1.0467	0.8188	1.0848	0.7549	1.0800	0.6589	1.0727	0.7775	1.0674	0.7110	1.0665	0.6111	1.0650
3.6	0.8436	1.0543	0.7813	1.0462	0.6878	1.0340	0.8369	1.0689	0.7741	1.0619	0.6799	1.0515	0.8187	1.0890	0.7546	1.0845	0.6586	1.0778	0.7773	1.0716	0.7107	1.0710	0.6108	1.0701
3.8	0.8435	1.0577	0.7811	1.0499	0.6876	1.0381	0.8368	1.0724	0.7739	1.0657	0.6796	1.0558	0.8185	1.0927	0.7545	1.0885	0.6583	1.0823	0.7772	1.0754	0.7105	1.0751	0.6105	1.0747
4	0.8434	1.0607	0.7810	1.0532	0.6873	1.0418	0.8367	1.0755	0.7738	1.0691	0.6794	1.0596	0.8185	1.0960	0.7543	1.0921	0.6581	1.0863	0.7771	1.0788	0.7104	1.0788	0.6103	1.0788
4.2	0.8433	1.0634	0.7809	1.0561	0.6872	1.0451	0.8366	1.0783	0.7737	1.0722	0.6793	1.0630	0.8184	1.0990	0.7543	1.0954	0.6580	1.0900	0.7770	1.0819	0.7103	1.0822	0.6102	1.0826
4.4	0.8433	1.0658	0.7808	1.0587	0.6870	1.0480	0.8366	1.0808	0.7736	1.0749	0.6792	1.0661	0.8184	1.1016	0.7542	1.0983	0.6579	1.0933	0.7770	1.0847	0.7102	1.0852	0.6101	1.0860
4.6	0.8433	1.0680	0.7807	1.0611	0.6869	1.0507	0.8366	1.0830	0.7736	1.0773	0.6791	1.0688	0.8184	1.1040	0.7542	1.1009	0.6578	1.0963	0.7770	1.0873	0.7102	1.0880	0.6100	1.0891
4.8	0.8433	1.0699	0.7807	1.0632	0.6869	1.0532	0.8366	1.0850	0.7736	1.0796	0.6790	1.0714	0.8184	1.1062	0.7542	1.1033	0.6577	1.0990	0.7770	1.0896	0.7102	1.0906	0.6099	1.0920
5	0.8433	1.0716	0.7807	1.0651	0.6868	1.0554	0.8366	1.0868	0.7735	1.0816	0.6789	1.0737	0.8185	1.1082	0.7542	1.1055	0.6577	1.1015	0.7770	1.0917	0.7102	1.0929	0.6099	1.0946

Продолжение таблицы 10

ε_∞	0.1																							
$T_0/\theta_2 \to$	1						0.5						0.1											
$\delta \to$	0		0.1		0.25		0		0.1		0.25		0				0.1				0.25			
T_0/θ_1	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*	F_T^*	F_D^*		F_T^*		F_D^*		F_T^*		F_D^*		F_T^*	
1	0.7763	0.8755	0.7108	0.8688	0.6127	0.8588	0.7714	0.8821	0.7056	0.8762	0.6069	0.8675	0.7594	0.7268	0.8819	1.0245	0.6927	0.6563	0.8781	1.0289	0.5927	0.5506	0.8724	1.0354
1.2	0.7672	0.8963	0.7010	0.8913	0.6017	0.8839	0.7624	0.9029	0.6958	0.8988	0.5959	0.8927	0.7505	0.7268	0.9032	1.0245	0.6830	0.6563	0.9013	1.0289	0.5818	0.5506	0.8985	1.0354
1.4	0.7609	0.9132	0.6941	0.9096	0.5940	0.9043	0.7560	0.9198	0.6889	0.9171	0.5882	0.9130	0.7443	0.7268	0.9202	1.0245	0.6762	0.6563	0.9199	1.0289	0.5742	0.5506	0.9194	1.0354
1.6	0.7564	0.9270	0.6892	0.9245	0.5885	0.9207	0.7515	0.9335	0.6840	0.9318	0.5826	0.9294	0.7398	0.7268	0.9339	1.0245	0.6713	0.6563	0.9347	1.0289	0.5687	0.5506	0.9360	1.0354
1.8	0.7530	0.9383	0.6855	0.9366	0.5843	0.9341	0.7482	0.9446	0.6803	0.9439	0.5785	0.9427	0.7365	0.7268	0.9448	1.0245	0.6677	0.6563	0.9466	1.0289	0.5645	0.5506	0.9492	1.0354
2	0.7505	0.9476	0.6828	0.9466	0.5812	0.9451	0.7457	0.9538	0.6776	0.9537	0.5754	0.9537	0.7340	0.7268	0.9536	1.0245	0.6650	0.6563	0.9561	1.0289	0.5614	0.5506	0.9599	1.0354
2.2	0.7486	0.9553	0.6807	0.9549	0.5788	0.9543	0.7438	0.9614	0.6755	0.9620	0.5730	0.9627	0.7321	0.7268	0.9607	1.0245	0.6629	0.6563	0.9638	1.0289	0.5590	0.5506	0.9685	1.0354
2.4	0.7472	0.9619	0.6791	0.9619	0.5770	0.9620	0.7423	0.9679	0.6738	0.9689	0.5711	0.9704	0.7306	0.7268	0.9666	1.0245	0.6612	0.6563	0.9702	1.0289	0.5571	0.5506	0.9757	1.0354
2.6	0.7461	0.9674	0.6779	0.9679	0.5755	0.9686	0.7412	0.9733	0.6726	0.9747	0.5697	0.9768	0.7294	0.7268	0.9715	1.0245	0.6599	0.6563	0.9755	1.0289	0.5556	0.5506	0.9815	1.0354
2.8	0.7452	0.9722	0.6769	0.9730	0.5744	0.9743	0.7403	0.9780	0.6716	0.9798	0.5685	0.9824	0.7285	0.7268	0.9755	1.0245	0.6588	0.6563	0.9799	1.0289	0.5543	0.5506	0.9865	1.0354
3	0.7445	0.9763	0.6761	0.9775	0.5735	0.9792	0.7396	0.9821	0.6708	0.9842	0.5676	0.9873	0.7277	0.7268	0.9790	1.0245	0.6580	0.6563	0.9837	1.0289	0.5534	0.5506	0.9907	1.0354
3.2	0.7439	0.9799	0.6755	0.9814	0.5727	0.9835	0.7390	0.9856	0.6701	0.9880	0.5668	0.9915	0.7271	0.7268	0.9820	1.0245	0.6573	0.6563	0.9869	1.0289	0.5525	0.5506	0.9942	1.0354
3.4	0.7435	0.9831	0.6750	0.9848	0.5721	0.9873	0.7386	0.9888	0.6696	0.9914	0.5662	0.9953	0.7266	0.7268	0.9845	1.0245	0.6567	0.6563	0.9896	1.0289	0.5519	0.5506	0.9973	1.0354
3.6	0.7431	0.9859	0.6746	0.9878	0.5717	0.9907	0.7382	0.9916	0.6692	0.9944	0.5657	0.9986	0.7262	0.7268	0.9868	1.0245	0.6562	0.6563	0.9920	1.0289	0.5513	0.5506	1.0000	1.0354
3.8	0.7429	0.9884	0.6742	0.9905	0.5713	0.9937	0.7379	0.9941	0.6689	0.9971	0.5653	1.0016	0.7258	0.7268	0.9887	1.0245	0.6558	0.6563	0.9942	1.0289	0.5508	0.5506	1.0023	1.0354
4	0.7427	0.9906	0.6740	0.9930	0.5709	0.9964	0.7377	0.9963	0.6686	0.9995	0.5650	1.0043	0.7255	0.7268	0.9904	1.0245	0.6555	0.6563	0.9960	1.0289	0.5505	0.5506	1.0044	1.0354
4.2	0.7425	0.9926	0.6738	0.9951	0.5707	0.9989	0.7375	0.9983	0.6684	1.0017	0.5647	1.0067	0.7253	0.7268	0.9920	1.0245	0.6552	0.6563	0.9977	1.0289	0.5501	0.5506	1.0062	1.0354
4.4	0.7423	0.9944	0.6736	0.9971	0.5705	1.0011	0.7374	1.0001	0.6682	1.0037	0.5645	1.0090	0.7251	0.7268	0.9934	1.0245	0.6550	0.6563	0.9992	1.0289	0.5498	0.5506	1.0079	1.0354
4.6	0.7422	0.9961	0.6735	0.9989	0.5703	1.0032	0.7372	1.0018	0.6681	1.0055	0.5643	1.0110	0.7249	0.7268	0.9946	1.0245	0.6548	0.6563	1.0005	1.0289	0.5496	0.5506	1.0094	1.0354
4.8	0.7422	0.9976	0.6734	1.0005	0.5701	1.0050	0.7372	1.0033	0.6680	1.0071	0.5642	1.0129	0.7248	0.7268	0.9957	1.0245	0.6546	0.6563	1.0017	1.0289	0.5494	0.5506	1.0107	1.0354
5	0.7421	0.9989	0.6733	1.0020	0.5700	1.0067	0.7371	1.0047	0.6679	1.0086	0.5640	1.0146	0.7246	0.7268	0.9968	1.0245	0.6545	0.6563	1.0029	1.0289	0.5492	0.5506	1.0120	1.0354
														30		30		30		30		30		30

Таблица 11 — Приведенные силы сопротивления и термофореза для модели CL [13].

δ↓	$F_T^*(\alpha_n)$										$F_D^*(\alpha_n)$									
	$\alpha_\tau \rightarrow$ α_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	$\alpha_\tau \rightarrow$ α_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.01	0.2	1.0092	1.0576	1.1072	1.1568	1.2055	1.2572	1.3070	1.3568	1.4067	0.2	0.7682	0.8039	0.8405	0.8773	0.9122	0.9483	0.9840	1.0202	1.0557
	0.3	0.9631	1.0127	1.0622	1.1118	1.1615	1.2102	1.2600	1.3099	1.3598	0.3	0.7604	0.7963	0.8319	0.8686	0.9041	0.9398	0.9757	1.0116	1.0474
	0.4	0.9231	0.9727	1.0223	1.0649	1.1146	1.1633	1.2131	1.2630	1.3129	0.4	0.7522	0.7881	0.8243	0.8600	0.8962	0.9321	0.9680	1.0038	1.0397
	0.5	0.8671	0.9237	0.9733	1.0230	1.0727	1.1224	1.1722	1.2144	1.2640	0.5	0.7446	0.7804	0.8165	0.8523	0.8884	0.9244	0.9602	0.9960	1.0319
	0.6	0.8221	0.8717	0.9215	0.9712	1.0209	1.0707	1.1205	1.1704	1.2203	0.6	0.7369	0.7732	0.8088	0.8453	0.8809	0.9168	0.9526	0.9885	1.0243
	0.7	0.7644	0.8186	0.8682	0.9179	0.9676	1.0173	1.0672	1.1170	1.1670	0.7	0.7297	0.7655	0.8014	0.8373	0.8734	0.9094	0.9451	0.9810	1.0168
	0.8	0.7117	0.7613	0.8106	0.8606	0.9103	0.9624	1.0123	1.0621	1.1121	0.8	0.7222	0.7584	0.7942	0.8301	0.8660	0.9019	0.9378	0.9737	1.0095
	0.9	0.6574	0.7070	0.7567	0.8065	0.8562	0.9059	0.9558	1.0056	1.0556	0.9	0.7149	0.7510	0.7870	0.8227	0.8587	0.8947	0.9305	0.9665	1.0023
	1	0.5993	0.6490	0.6987	0.7484	0.7981	0.8479	0.8977	0.9476	0.9976	1	0.7079	0.7439	0.7799	0.8156	0.8517	0.8876	0.9235	0.9594	0.9952
	$F_T^*(\alpha_n)$										$F_D^*(\alpha_n)$									
	$\alpha_\tau \rightarrow$ α_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	$\alpha_\tau \rightarrow$ α_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.05	0.2	1.0058	1.0522	1.1002	1.1481	1.1955	1.2460	1.2949	1.3442	1.3937	0.2	0.7531	0.7891	0.8257	0.8624	0.8973	0.9331	0.9685	1.0043	1.0394
	0.3	0.9596	1.0073	1.0551	1.1032	1.1515	1.1991	1.2481	1.2974	1.3470	0.3	0.7439	0.7800	0.8156	0.8524	0.8877	0.9232	0.9589	0.9945	1.0299
	0.4	0.9196	0.9674	1.0153	1.0565	1.1049	1.1526	1.2015	1.2508	1.3005	0.4	0.7348	0.7709	0.8072	0.8429	0.8790	0.9147	0.9504	0.9861	1.0216
	0.5	0.8636	0.9184	0.9666	1.0148	1.0633	1.1120	1.1610	1.2027	1.2520	0.5	0.7267	0.7626	0.7988	0.8346	0.8706	0.9065	0.9422	0.9778	1.0134
	0.6	0.8187	0.8666	0.9149	0.9631	1.0118	1.0606	1.1096	1.1590	1.2087	0.6	0.7186	0.7550	0.7908	0.8272	0.8628	0.8985	0.9343	0.9699	1.0055
	0.7	0.7610	0.8136	0.8618	0.9101	0.9587	1.0075	1.0566	1.1060	1.1557	0.7	0.7111	0.7471	0.7832	0.8191	0.8551	0.8910	0.9266	0.9623	0.9979
	0.8	0.7086	0.7567	0.8045	0.8532	0.9018	0.9530	1.0022	1.0515	1.1012	0.8	0.7035	0.7398	0.7758	0.8117	0.8475	0.8834	0.9192	0.9548	0.9905
	0.9	0.6545	0.7027	0.7510	0.7996	0.8482	0.8970	0.9462	0.9956	1.0453	0.9	0.6961	0.7324	0.7685	0.8043	0.8402	0.8761	0.9118	0.9476	0.9833
	1	0.5967	0.6450	0.6934	0.7419	0.7906	0.8395	0.8887	0.9381	0.9878	1	0.6891	0.7252	0.7614	0.7971	0.8332	0.8690	0.9047	0.9405	0.9762
	$F_T^*(\alpha_n)$										$F_D^*(\alpha_n)$									
	$\alpha_\tau \rightarrow$ α_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	$\alpha_\tau \rightarrow$ α_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.1	0.2	1.0016	1.0455	1.0913	1.1373	1.1830	1.2321	1.2798	1.3284	1.3774	0.2	0.7343	0.7706	0.8073	0.8439	0.8785	0.9140	0.9490	0.9844	1.0189
	0.3	0.9553	1.0006	1.0463	1.0924	1.1390	1.1853	1.2332	1.2818	1.3310	0.3	0.7232	0.7596	0.7953	0.8321	0.8672	0.9025	0.9379	0.9731	1.0081
	0.4	0.9153	0.9608	1.0066	1.0460	1.0928	1.1391	1.1870	1.2356	1.2849	0.4	0.7130	0.7494	0.7858	0.8214	0.8574	0.8930	0.9284	0.9638	0.9989
	0.5	0.8591	0.9118	0.9583	1.0047	1.0517	1.0991	1.1471	1.1880	1.2370	0.5	0.7043	0.7404	0.7767	0.8124	0.8484	0.8842	0.9196	0.9549	0.9902
	0.6	0.8144	0.8602	0.9065	0.9531	1.0004	1.0480	1.0961	1.1448	1.1941	0.6	0.6957	0.7323	0.7682	0.8047	0.8402	0.8758	0.9114	0.9467	0.9821
	0.7	0.7568	0.8075	0.8538	0.9004	0.9475	0.9951	1.0435	1.0922	1.1416	0.7	0.6879	0.7241	0.7603	0.7963	0.8323	0.8680	0.9034	0.9388	0.9742
	0.8	0.7047	0.7509	0.7969	0.8440	0.8912	0.9412	0.9895	1.0383	1.0876	0.8	0.6801	0.7166	0.7528	0.7887	0.8245	0.8602	0.8958	0.9313	0.9667
	0.9	0.6510	0.6974	0.7439	0.7909	0.8382	0.8859	0.9342	0.9830	1.0324	0.9	0.6726	0.7092	0.7454	0.7812	0.8171	0.8530	0.8884	0.9240	0.9594
	1	0.5935	0.6401	0.6868	0.7339	0.7813	0.8291	0.8774	0.9263	0.9756	1	0.6655	0.7019	0.7382	0.7740	0.8100	0.8457	0.8813	0.9169	0.9523
	$F_T^*(\alpha_n)$										$F_D^*(\alpha_n)$									
	$\alpha_\tau \rightarrow$ α_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	$\alpha_\tau \rightarrow$ α_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.15	0.2	0.9974	1.0387	1.0825	1.1264	1.1705	1.2181	1.2646	1.3126	1.3611	0.2	0.7154	0.7520	0.7888	0.8254	0.8598	0.8949	0.9296	0.9645	0.9985
	0.3	0.9509	0.9939	1.0374	1.0816	1.1264	1.1714	1.2183	1.2662	1.3150	0.3	0.7026	0.7393	0.7749	0.8117	0.8467	0.8817	0.9168	0.9517	0.9862
	0.4	0.9109	0.9541	0.9979	1.0354	1.0807	1.1257	1.1725	1.2204	1.2694	0.4	0.6912	0.7279	0.7644	0.8000	0.8359	0.8713	0.9065	0.9416	0.9763
	0.5	0.8547	0.9052	0.9499	0.9945	1.0400	1.0861	1.1331	1.1734	1.2220	0.5	0.6818	0.7182	0.7546	0.7903	0.8263	0.8618	0.8971	0.9321	0.9671
	0.6	0.8101	0.8538	0.8982	0.9430	0.9891	1.0353	1.0825	1.1306	1.1796	0.6	0.6728	0.7096	0.7457	0.7821	0.8175	0.8530	0.8885	0.9235	0.9586
	0.7	0.7526	0.8013	0.8458	0.8907	0.9364	0.9828	1.0303	1.0784	1.1275	0.7	0.6647	0.7011	0.7375	0.7735	0.8094	0.8451	0.8802	0.9154	0.9505
	0.8	0.7008	0.7450	0.7894	0.8348	0.8806	0.9295	0.9769	1.0250	1.0741	0.8	0.6566	0.6934	0.7298	0.7657	0.8014	0.8371	0.8724	0.9078	0.9429
	0.9	0.6474	0.6920	0.7369	0.7823	0.8283	0.8748	0.9222	0.9704	1.0195	0.9	0.6490	0.6859	0.7224	0.7581	0.7939	0.8298	0.8650	0.9004	0.9356
	1	0.5902	0.6351	0.6802	0.7258	0.7719	0.8186	0.8661	0.9144	0.9634	1	0.6420	0.6786	0.7151	0.7508	0.7869	0.8225	0.8578	0.8933	0.9285
	$F_T^*(\alpha_n)$										$F_D^*(\alpha_n)$									
	$\alpha_\tau \rightarrow$ α_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1	$\alpha_\tau \rightarrow$ α_n	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0.25	0.2	0.9890	1.0252	1.0648	1.1047	1.1454	1.1902	1.2344	1.2810	1.3285	0.2	0.6776	0.7150	0.7520	0.7884	0.8224	0.8568	0.8908	0.9247	0.9576
	0.3	0.9422	0.9805	1.0197	1.0600	1.1014	1.1437	1.1885	1.2349	1.2830	0.3	0.6613	0.6985	0.7342	0.7711	0.8057	0.8402	0.8748	0.9089	0.9425
	0.4	0.9022	0.9409	0.9806	1.0144	1.0565	1.0988	1.1436	1.1901	1.2383	0.4	0.6477	0.6849	0.7216	0.7572	0.7928	0.8279	0.8626	0.8971	0.9310
	0.5	0.8459	0.8920	0.9331	0.9741	1.0167	1.0601	1.1052	1.1441	1.1920	0.5	0.6369	0.6737	0.7104	0.7461	0.7819	0.8171	0.8520	0.8864	0.9208
	0.6	0.8014	0.8410	0.8816	0.9229	0.9663	1.0101	1.0554	1.1022	1.1505	0.6	0.6270	0.6642	0.7006	0.7370	0.7723	0.8074	0.8426	0.8772	0.9117
	0.7	0.7443	0.7890	0.8298	0.8714	0.9141	0.9581	1.0040	1.0509	1.0993	0.7	0.6182	0.6551	0.6918	0.7279	0.7637	0.7991	0.8339	0.8686	0.9032
	0.8	0.6930	0.7334	0.7742	0.8164	0.8594	0.9059	0.9516	0.9985	1.0469	0.8	0.6098	0.6471	0.6837	0.7197	0.7553	0.7908	0.8257	0.8608	0.8952
	0.9	0.6403	0.6813	0.7227	0.7650	0.8083	0.8526	0.8982	0.9452	0.9937	0.9	0.6020	0.6394	0.6762	0.7119	0.7476	0.7835	0.8181	0.8531	0.8879
	1	0.5837	0.6252	0.6670	0.7096	0.7531	0.7977	0.8434	0.8906	0.9391	1	0.5948	0.6321	0.6688	0.7045	0.7406	0.7760	0.8110	0.8461	0.8808

Таблица 12 — Приведенная фотофоретическая сила для модели Бормана и соавторов [12].

B	F_z^*	B	F_z^*	B	F_z^*	B	F_z^*
0	1.0020	0.80	0.7046	20.00	0.1153	60.00	0.0442
0.01	0.9954	0.90	0.6759	22.00	0.1073	62.00	0.0415
0.02	0.9885	1	0.6614	24.00	0.0985	64.00	0.0430
0.03	0.9804	1.50	0.5717	26.00	0.0920	66.00	0.0407
0.04	0.9768	2	0.5180	28.00	0.0874	68.00	0.0396
0.05	0.9721	2.50	0.4601	30.00	0.0805	70.00	0.0385
0.06	0.9672	3	0.4311	32.00	0.0787	72.00	0.0376
0.07	0.9611	3.50	0.3737	34.00	0.0741	74.00	0.0366
0.08	0.9548	4	0.3546	36.00	0.0703	76.00	0.0357
0.09	0.9483	4.50	0.3345	38.00	0.0674	78.00	0.0349
0.10	0.9458	5	0.3135	40.00	0.0651	80.00	0.0341
0.20	0.8967	6	0.2788	42.00	0.0594	82.00	0.0333
0.25	0.8748	7	0.2524	44.00	0.0581	84.00	0.0326
0.30	0.8572	8	0.2308	46.00	0.0573	86.00	0.0319
0.35	0.8392	9	0.2131	48.00	0.0529	88.00	0.0312
0.40	0.8227	10	0.1965	50.00	0.0527	90.00	0.0306
0.45	0.8002	12.00	0.1726	52.00	0.0490	92.00	0.0299
0.50	0.7874	14.00	0.1532	54.00	0.0494	96.00	0.0288
0.60	0.7581	16.00	0.1366	56.00	0.0461	98.00	0.0282
0.70	0.7332	18.00	0.1270	58.00	0.0471	100.00	0.0277

Таблица 13 — Значения аккомодационной функции R_α для модели Бормана и соавторов [12].

B_α	R_α	B_α	R_α	B_α	R_α
0	0.39273	1	0.25092	5	0.10881
0.05	0.38499	1.2	0.23459	6.5	0.090515
0.1	0.37153	1.4	0.2204	8	0.077635
0.15	0.36168	1.6	0.20792	9.5	0.068045
0.2	0.35233	1.8	0.1969	11	0.060613
0.25	0.34345	2	0.18706	12.5	0.054676
0.3	0.33503	2.2	0.17822	14	0.04982
0.35	0.32702	2.4	0.17023	15.5	0.045771
0.4	0.31941	2.6	0.16297	17	0.042342
0.45	0.31217	2.8	0.15634	18.5	0.039399
0.5	0.30528	3	0.15025	20	0.036844
0.55	0.2987	3.2	0.14465	30	0.025779
0.6	0.29243	3.4	0.13947	40	0.019861
0.65	0.28643	3.6	0.13467	50	0.016167
0.7	0.2807	3.8	0.13021	60	0.013638
0.75	0.27521	4	0.12604	70	0.011797
0.8	0.26995	4.2	0.12215	80	0.010396
0.85	0.2649	4.4	1.19E-01	90	0.009293
0.9	0.26005	4.6	0.11507	100	0.008403
0.95	0.2554	4.8	0.11185	110	0.00767

Таблица 14 — Значения аккомодационной функции R_α для модели CL [13]

$\alpha_n \rightarrow$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
α_τ										
0.1	0.0382	0.0265	0.0152	0.0043	-0.0064	-0.0169	-0.0272	-0.0373	-0.0474	-0.0573
0.2	0.0882	0.0765	0.0652	0.0543	0.0440	0.0331	0.0228	0.0126	0.0026	-0.0073
0.3	0.1381	0.1264	0.1152	0.1043	0.0936	0.0831	0.0728	0.0626	0.0526	0.0427
0.4	0.1881	0.1765	0.1653	0.1543	0.1436	0.1331	0.1228	0.1126	0.1026	0.0927
0.5	0.2381	0.2265	0.2152	0.2043	0.1936	0.1831	0.1728	0.1626	0.1526	0.1427
0.6	0.2881	0.2765	0.2668	0.2543	0.2436	0.2331	0.2228	0.2126	0.2026	0.1927
0.7	0.3381	0.3265	0.3152	0.3043	0.2936	0.2831	0.2728	0.2626	0.2526	0.2427
0.8	0.3881	0.3765	0.3652	0.3543	0.3436	0.3331	0.3228	0.3126	0.3026	0.2927
0.9	0.4382	0.4265	0.4152	0.4043	0.3936	0.3831	0.3728	0.3626	0.3526	0.3427
1	0.4882	0.4765	0.4652	0.4543	0.4436	0.4331	0.4228	0.4126	0.4026	0.3927