

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»
Институт естественных наук и математики
Кафедра вычислительной математики и компьютерных наук

На правах рукописи

Горбова Татьяна Владимировна

Численные методы исследования дробных моделей популяционной
динамики

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Солодушкин С.И.

Екатеринбург – 2022

Содержание

Введение	4
1 Численные методы решения диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе	19
1.1 Мотивировка задачи	19
1.2 Неявный разностный метод	21
1.3 Элементы общей теории нелинейных разностных схем с наследственностью	24
1.4 Вложение неявного метода в общую нелинейную схему	28
1.5 Устойчивость	29
1.6 Порядок невязки метода и теорема сходимости	32
1.7 Численные эксперименты	36
1.8 Аналог метода Кранка-Николсон	36
1.9 Порядок сходимости аналога метода Кранка-Николсон	38
1.10 Численные эксперименты	40
2 Разностные схемы для дробного по пространству уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе	44
2.1 Мотивировка проблемы	44
2.2 Постановка задачи	46
2.3 Разностная схема	47

2.4	Разрешимость метода	49
2.5	Вложение разностного метода в общую нелинейную схему и устойчивость	50
2.6	Порядок невязки и порядок сходимости	51
2.7	Численные эксперименты	54
3	Численный алгоритм для дробного по времени уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе	57
3.1	Мотивировка и постановка задачи	57
3.2	Разностный метод	59
3.3	Анализ погрешности	61
3.4	Приближенное решение нелинейной разностной схемы	68
3.5	Численные эксперименты	69
4	Программный комплекс для численного исследования моде- лей популяционной динамики	71
4.1	Используемые технологии	72
4.2	Состав программного комплекса и его функциональные воз- можности	72
4.3	Примеры работы программного комплекса	74
5	Численные эксперименты для моделей популяционной дина- мики	77
	Заключение	87
	Литература	90

Введение

Актуальность темы и степень ее разработанности. Математические модели теории популяции отличаются большим разнообразием. В современных моделях присутствуют такие эффекты, как зависимость исследуемого числа численности популяции от времени и пространства, следовательно, динамика описывается уравнениями в частных производных; эффект зависимости от предыстории процесса, следовательно, модели могут иметь запаздывания различных видов, причем зависимости, как правило, нелинейные. В последнее время исследуются модели, в которых присутствуют дробные производные, кроме того, оператор дифференцирования может быть нелинейным.

Первые популяционные модели (Мальтуса, Верхлюста) описывались обыкновенными дифференциальными уравнениями. Одной из первых моделей, содержащих эффект запаздывания была модель Хатчисона [63]

$$\dot{x}(t) = r\left(1 - \frac{x(t - \tau)}{K}\right),$$

в которой был объяснен эффект периодичности решений, наблюдаемый при $r\tau > \pi/2$. В дальнейшем были рассмотрены многие модели, содержащие запаздывания более общего вида [3, 56], такие уравнения получили названия функционально-дифференциальные [25].

Модели, описываемые уравнениями в частных производных с нелинейностью, были рассмотрены в [7] и [50], эти уравнения в дальнейшем получили названия Колмогорова-Петровского-Пискунова (КПП) или уравнения Фише-

ра

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta u(1 - u),$$

которые имеют специальное решение в виде бегущей волны. Уравнение КПП с запаздыванием исследовалось в [1].

В последние годы появилось много моделей с использованием дробных производных. Среди них отметим работу [103], в которой рассматривалось уравнение

$$\frac{\partial^\alpha p(x, y, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial y^2} + g(x, y, t, p), \quad (1)$$

t, x, y — независимые переменные, имеющие смысл времени и пространственных координат соответственно, $p = p(x, y, t)$ — искомая функция, имеющая смысл плотности популяции, $g(x, y, t, p)$ — функция неоднородности, $\phi(p)$ — численность популяции, $0 < \alpha < 1$. Эта модель (будем называть ее по имени первого автора моделью Srivastava) наряду с дробными производными имеет нелинейность в операторе дифференцирования, что наделяет систему существенными особенностями.

Так как аналитическими методами сложные модели удается полностью исследовать крайне редко, на первый план выходит необходимость эффективных численных методов.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений с эффектом запаздывания численные алгоритмы решения разработаны достаточно полно, см. монографии [6, 26, 33] и библиографические ссылки в них. Для уравнений в частных производных самым эффективным остается разностный подход [19], в частности, для уравнений в частных производных с эффектом запаздывания разностные методы описаны в [11]. Литература по численным методам решения уравнений с дробными производными достаточно обширна и все время пополняется, отметим статьи [27, 30, 60, 73, 74, 78, 86, 95] и монографию [72].

В тоже время, численные алгоритмы для решения уравнений вида (1) с

нелинейностью в операторе дифференцирования в настоящее время не разработаны. Тем более отсутствуют численные алгоритмы для уравнений с нелинейностью в операторе дифференцирования и эффектом запаздывания. В исследованиях диссертационной работы предполагается восполнить этот пробел.

Цели и задачи диссертационной работы. Работа направлена на развитие и обоснование методов математического моделирования дробных моделей популяционной динамики с нелинейностью в операторе дифференцирования и с наличием эффекта запаздывания общего вида. Целью работы является разработка и обоснование сходимости сеточных численных методов решения дробных диффузионных уравнений с нелинейностью в операторе дифференцирования и с эффектом запаздывания общего вида. К задачам работы относятся:

1. Разработать алгоритмы численного решения диффузионного уравнения с нелинейностью в операторе дифференцирования и с функциональной наследственностью и исследовать порядки их сходимости.

2. Разработать алгоритмы численного решения уравнения с дробной нелинейной по пространству производной и исследовать порядки их сходимости.

3. Разработать алгоритмы численного решения диффузионного уравнения с дробной нелинейной по времени производной и функциональной наследственностью, исследовать порядки их сходимости.

4. Для указанных выше задач провести численные эксперименты на тестовых примерах.

5. Разработать программный комплекс, реализующий разработанные алгоритмы и провести численные эксперименты на тестовых задачах.

6. Провести численные эксперименты на модельных примерах теории популяционной динамики.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе разработан неявный численный метод; при этом нелинейные системы алгебраических уравнений, возникающие на каждом временном слое, решаются методом Ньютона. Для предложенного метода исследована устойчивость и определен порядок сходимости.

Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе разработан численный метод, являющийся аналогом метода Кранка-Николсон, для данного метода исследована устойчивость и определен порядок сходимости.

Для дробного по пространственной переменной уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе разработан неявный численный метод, метод исследован на устойчивость и сходимость.

Для модели популяционной динамики дробного по времени порядка с запаздыванием общего вида разработан неявный численный метод, для которого исследована устойчивость и определен порядок сходимости.

Все полученные в работе результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость работы. Теоретическая значимость работы состоит в разработке и исследовании численных алгоритмов для новых классов задач, возникающих в популяционной динамике, а именно, для уравнений диффузионного типа с нелинейностью в операторе дифференцирования и эффектом наследственности; для уравнений диффузионного типа с нелинейностью в операторе дифференцирования и дробной пространственной производной; для уравнений диффузионного типа с нелинейностью в операторе дифференцирования и эффектом наследственности и дробной временной производной.

Практическая значимость работы состоит в возможном применении ре-

зультатов работы для исследования с помощью компьютерных экспериментов сложных моделей популяционной динамики. Возможно также применение разработанных численных алгоритмов в моделировании других явлений, описываемых подобными математическими моделями, например, в газовой динамике.

Методология и методы исследования. В основе исследования лежат понятия и методы общей теории численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, см., например, соответственно, книги Э.Хайер, С.Нерсетт, Г.Ваннер [23] и А.А.Самарского [19]. Так как объектом численного решения являются различные типы дифференциальных уравнений дробного порядка, то в исследованиях используются понятия теории дробного исчисления и дробных уравнений, см. книги [18, 45, 66, 98]. Однако, исследуемые эффекты наследственности потребовали для построения и исследования разрабатываемых численных методов использовать также понятия и методологию численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений [6, 10], особенно теоремы сходимости в общей схеме систем с наследственностью, в форме, приспособленной для уравнений с частными производными [11, 13]. Для исследования дробных по пространству уравнений с нелинейным оператором дифференцирования, кроме того, используются аппроксимации дробных производных из [86]. Для доказательств сходимости сконструированных методов решения дробных по времени уравнений используется аппарат дробных дискретных неравенств Гронуолла [60, 73, 74].

Положения, выносимые на защиту:

- разработанные и обоснованные разностные методы для решения диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе. Доказательство устойчивости этих методов и определение порядка их сходимости;

- разработанный и обоснованный неявный разностный метод для решения уравнения дробного порядка по пространственной переменной с нелинейностью в дифференциальном операторе;
- разработанные и обоснованные численные методы для решения уравнения дробного порядка по времени с запаздыванием общего вида, возникающего в модели популяционной динамики;
- разработанные комплексы программ для численного решения начально-краевых задач с нелинейностью в дифференциальном операторе.

Достоверность результатов. Достоверность полученных в работе результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами и проведенными компьютерными экспериментами на тестовых примерах.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на параграфы (разделы). Разделы нумеруются двойными индексами, первый индекс — номер главы, второй индекс — номер параграфа. Формулы нумеруются двойными индексами: первый индекс — номер главы, второй индекс — номер формулы в главе, нумерация примеров, таблиц и рисунков также двойная. Нумерация формул введения одинарная. Нумерация утверждений сквозная по всему тексту, нумерация утверждений введения повторяет нумерацию соответствующих утверждений основного текста. Библиография содержит 128 наименований. Общий объем работы составляет 104 страницы машинописного текста.

Краткое содержание работы.

В главе 1 конструируются и исследуются численные алгоритмы решения начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с нелинейностью в операторе дифференцирования и с эффектом наследственности. В разделе 1.1 приводится мотивировка задачи и краткий обзор

источников. Далее проводится постановка задачи для уравнения

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial x^2} + g(x, t, p_t(x, \cdot)). \quad (2)$$

Предполагая однозначную обратимость $\phi(p)$ на интересующей нас области, сделаем замену $u = \phi(p)$, $p = \omega(u)$, тогда (2) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \omega(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u_t(x, \cdot)), \quad u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s \leq 0\}. \quad (3)$$

Соответствующим образом изменятся начальные и граничные условия. Делаются предположения относительно существования и единственности решения $u(x, t)$ этой задачи и его достаточной гладкости. Также предполагается липшицевость функционала f по третьему аргументу и выполнение условия гладкости функции $\omega(u)$ и условия

$$0 < \hat{\omega} \leq \omega'(u) \quad (4)$$

в интересующей нас области.

В разделе 1.2 проводится дискретизация задачи. Разобьем отрезок изменения пространственной переменной $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$, введя точки $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$, и разобьем отрезок изменения временной переменной $[-\tau, T]$ на части с шагом $\Delta = T/M$ (без ограничения общности $\tau/\Delta = m$ — целое), введя точки $t_j = j\Delta$, $j = -m, \dots, M$. Приближения функций $u(x_i, t_j)$ в узлах сетки будем обозначать через u_j^i . При всяком фиксированном $i = 0, \dots, N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j , $j = 0, \dots, M$: $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j-m \leq k \leq j\}$. Вводится понятие интерполяции и экстраполяции дискретной предыстории. В дальнейшем в этой главе используется кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением.

Для $j = 0, 1, \dots, M - 1$, рассматривается нелинейная неявная разностная схема

$$\frac{\omega(u_{j+1}^i) - \omega(u_j^i)}{\Delta} = \frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N - 1, \\ u_{j+1}^0 = \mu_0(t_{j+1}), \quad u_{j+1}^N = \mu_1(t_{j+1}), \quad (5)$$

с начальными условиями $u_j^i = \phi(\varphi(x_i, t_j))$, $i = 0, \dots, N$, $j = -m, \dots, 0$. Здесь $u_j^i(\cdot)$ — результат интерполяции с экстраполяцией.

Для решения (5) на каждом временном слое j применяется метод Ньютона

$$\omega(u_{j+1}^i[k]) + \omega'(u_{j+1}^i[k])(u_{j+1}^i[k+1] - u_{j+1}^i[k]) - \Delta \frac{u_{j+1}^{i-1}[k+1] - 2u_{j+1}^i[k+1] + u_{j+1}^{i+1}[k+1]}{h^2} = \omega(u_j^i) + \Delta f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot)), \quad (6)$$

Система (6) представляет собой трехдиагональную систему линейных уравнений с диагональным преобладанием и может быть эффективно решена с помощью алгоритма прогонки. Далее проводится обоснование сходимости предложенного метода.

В разделе 1.3. приводятся элементы общей теории нелинейных разностных схем с наследственностью, являющейся обобщением на нелинейный случай схемы [11]. Также рассматривается общая теория аппроксимационных разностных схем систем с наследственностью. Доказываются теоремы о порядках сходимости в этих аксиоматических схемах.

В следующем разделе производится вложение метода (6) в эту общую схему.

В разделе 1.5 проверяется устойчивость метода (6), необходимая для применения общих теорем о порядках сходимости.

В разделе 1.6 вводятся невязка неявного нелинейного метода (5) и невязка аппроксимационного метода (6). Изучается их порядок малости относительно шагов дискретизации и числа итераций. В результате вложения, факта устойчивости и определения порядков невязки получается утверждение.

Теорема 5. *Неявный аппроксимационный метод (6) сходится и имеет порядок сходимости $\Delta + h^2 + \lambda^{2K}$, $0 < \lambda < 1$. λ — число, определяемое параметрами метода.*

В разделе 1.7 приводятся результаты численных экспериментов на тестовом примере с нелинейностью в дифференциальном операторе и с наличием

распределенного запаздывания, имеющем известное точное решение. Результаты экспериментов подтверждают теоретические выводы о сходимости метода.

В разделе 1.8 для той же задачи рассматривается более точный относительно шага по времени метод, являющийся аналогом метода Кранка-Николсон

$$\frac{\omega(u_{j+1}^i) - \omega(u_j^i)}{\Delta} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} \right) + \quad (7)$$

$$+ f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, u_{t_j + \frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N - 1.$$

Будем решать (7) при каждом фиксированном j методом Ньютона

$$\omega(u_{j+1}^i[k]) + \omega'(u_{j+1}^i[k])(u_{j+1}^i[k+1] - u_{j+1}^i[k]) -$$

$$- a^2 \Delta \frac{u_{j+1}^{i-1}[k+1] - 2u_{j+1}^i[k+1] + u_{j+1}^{i+1}[k+1]}{2h^2} =$$

$$= a^2 \Delta \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{2h^2} + \omega(u_j^i) + \Delta f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, u_{t_j + \frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)), \quad (8)$$

В разделе 1.9 аналог метода Кранка-Николсон (7) вкладывается в нелинейную разностную схему раздела 1.3, доказывается устойчивость метода, исследуется порядок невязки метода (7) и аппроксимационного метода (8), в результате получается следующий результат

Теорема 7. *Метод (8) сходится и имеет порядок сходимости $\Delta^2 + h^2 + \lambda^{2K}$, $0 < \lambda < 1$.*

В разделе 1.10 описаны численные эксперименты на тестовых примерах, имеющих известные точные решения. Эти эксперименты показали сходимость метода (8) и его преимущества перед методом (6). При этом сравнивались не только зависимости максимальной величины погрешности от шагов дискретизации, но и вычислительный порядок сходимости. В случае аналога метода Кранка-Николсон (8) вычислительный порядок погрешности по временному шагу Δ оказался близок к 2, что согласуется с утверждением теоремы 7.

В главе 2 конструируются и исследуются численные алгоритмы решения начально-краевой задачи для дробного по пространственной координате уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе. Для простоты в этой главе рассматриваются уравнения без запаздывания и зависимости в неоднородности от искомой функции.

В разделе 2.1 приводится мотивировка задачи и краткий обзор источников. Далее проводится постановка начально-краевой задачи для уравнения

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha \phi(p(x, t))}{\partial x^\alpha} + f(x, t), \quad (9)$$

Левосторонняя дробная производная определяется в смысле Римана–Лиувилля

$$\frac{\partial^\alpha F(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{F(\xi)}{(x - \xi)^{\alpha - n + 1}} d\xi,$$

где n — целое, такое, что $n - 1 < \alpha \leq n$, а также предположим, что $F(x) = 0$ для $x \leq 0$. Далее будем рассматривать случай $1 < \alpha \leq 2$.

Предполагая однозначную обратимость функции $\phi(p)$ в рассматриваемой области, сделаем подстановку $u = \phi(p)$, $p = \omega(u)$, тогда (9) примет вид

$$\frac{\partial \omega(u(x, t))}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} + f(x, t), \quad (10)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

Делаются предположения относительно существования и единственности решения $u(x, t)$ этой задачи и его достаточной гладкости. Также предполагается выполнение условия гладкости функции $\omega(u)$ и условия (4).

В разделе 2.3 проводится дискретизация задачи и строится разностная схема. Для аппроксимации левосторонней дробной производной в узлах будем использовать сдвинутые формулы Грюнвальда

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_j)}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha, s} u(x_{i+1-s}, t_j), \quad 1 \leq i \leq N - 1,$$

где нормализованные веса Грюнвальда определяются следующим образом $g_{\alpha, 0} = 1$ и

$$g_{\alpha, s} = (-1)^s \frac{\alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha - s + 1)}{s!}, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

В результате получается нелинейная неявная разностная схема (аналог схемы Кранка-Никольсон)

$$\frac{\omega(u_{j+1}^i) - \omega(u_j^i)}{\Delta} = \frac{1}{2h^\alpha} \left(\sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u_{j+1}^{i+1-s} + \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u_j^{i+1-s} \right) + f_{j+1/2}^i, \quad (11)$$

для $i = 1, \dots, N - 1,$
и $u_{j+1}^0 = \mu_0(t_{j+1}), u_{j+1}^N = \mu_1(t_{j+1})$

Здесь $f_{j+1/2}^i = f(x_i, t_j + \Delta/2)$.

Для каждого фиксированного j система (11) является нелинейной системой уравнений относительно u_{j+1}^i , $i = 1, \dots, N - 1$. Для решения (11) на каждом временном слое j применим вариант метода Ньютона

$$\begin{aligned} \omega(u_{j+1}^i[k]) + \omega'(u_{j+1}^i[k])(u_{j+1}^i[k+1] - u_{j+1}^i[k]) - \omega(u_j^i) = \\ = \frac{\Delta}{2h^\alpha} \left(\sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u_{j+1}^{i+1-s} + \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u_j^{i+1-s} \right) + \Delta f_{j+1/2}^i. \end{aligned} \quad (12)$$

В разделе 2.4 исследуется разрешимость системы (12), следуя идеям работы [86].

В разделе 2.5 производится вложение исследуемого метода в общую схему, изложенную в разделе 1.3. Также проверяется устойчивость метода (12).

В разделе 2.6 вводятся понятия невязки нелинейного метода (11) и невязки аппроксимационного метода (12) и исследуются их порядки малости относительно шагов дискретизации и числа итераций в (12). Выводится следующий результат

Теорема 10. *Метод (12) сходится и имеет порядок сходимости $\Delta^2 + h + \lambda^{2K}$, $0 < \lambda < 1$.*

В разделе 2.7 приводятся результаты численных экспериментов на тестовых примерах.

В главе 3 конструируются и исследуются численные алгоритмы решения начально-краевой задачи для дробного по времени уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе и с наличием эффекта запаздывания.

Задача для дробного по времени уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе была в базовой модели популяционной динамики [103].

В разделе 3.1 приводятся источники техники конструирования численных алгоритмов и доказательства теоремы сходимости. Техника доказательства сходимости основана на дробном дискретном неравенстве Гронуолла и значительно отличается от используемой в предыдущих главах.

Приводится постановка задачи. Рассматривается уравнение вида

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (13)$$

$0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq X$ — независимые переменные, $u(x, t)$ — искомая функция, $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), \tau \leq s < 0\}$ — предыстория искомой функции к моменту t , $\tau > 0$ — величина запаздывания. Дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, определяется формулой

$$\frac{d^\alpha F(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{F'(\xi)}{(t - \xi)^\alpha} d\xi, \quad t > 0.$$

Заданы граничные и начальные условия

$$u(0, t) = u_0(t), \quad u(X, t) = u_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (14)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x, t), \quad 0 \leq x \leq X, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (15)$$

Предполагается, что решение этой задачи существует и единственно, а также делаются предположения достаточной гладкости решения $u(x, t)$ и функции $\phi(u)$, липшецевости функционала f по двум последним аргументам и выполнения условия (4).

В разделе 3.2 проводится дискретизация задачи и строится разностная схема. Как и в предыдущих главах, приближения функций $u(x_i, t_j)$ в узлах сетки обозначим u_j^i .

Заменим производную Капуто на разностный оператор

$$D_\Delta^\alpha u_m^i = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{j=1}^m a_{m-j} (u_j^i - u_{j-1}^i) \quad (16)$$

$a_i = (i + 1)^{1-\alpha} - i^{1-\alpha}$. Эта аппроксимация, называемая L_1 -аппроксимацией дробной производной [72], имеет порядок малости по Δ , равный $2 - \alpha$. Заменим вторую производную по x разностным оператором

$$\delta_x^2 \phi(u_m^i) = \frac{\phi(u_m^{i-1}) - 2\phi(u_m^i) + \phi(u_m^{i+1}))}{h^2},$$

который при сделанных предположениях имеет порядок малости по h , равный 2. Для $m = 1, 2, \dots, M$, рассмотрим нелинейную неявную разностную схему

$$D_\Delta^\alpha u_m^i = \delta_x^2 \phi(u_m^i) + f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_{m-1}^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad (17)$$

$u_m^0 = u_0(t_m)$, $u_m^N = u_1(t_m)$, с начальными условиями $u_m^i = \varphi(x_i, t_m)$, $i = 0, \dots, N$, $m = -M_0, \dots, 0$, где $u_{m-1}^i(\cdot)$ является результатом кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением.

В разделе 3.3 проводится анализ погрешности метода. Вводятся понятия погрешности ε_m^i , невязки без интерполяции и невязки с интерполяцией метода (17). Доказывается, что при сделанных в этой главе предположениях невязка без интерполяции и невязка с интерполяцией имеют порядок $\Delta + h^2$. Указывается также метод с кусочно-линейной интерполяцией, невязка которого имеет порядок $\Delta^{2-\alpha} + h^2$.

Далее приводятся утверждения и понятия, необходимые для доказательства теоремы сходимости, главное из которых — вариант дробного дискретного неравенства Гронуолла [73]. Приводится дополнительное предположение

Условие 3.1. Пусть выполняется

$$\sum_{i=1}^{N-1} (-h \delta_x^2 \varepsilon_m^i) \delta_x^2 (\phi(u(x_i, t_m)) - \phi(u_m^i)) \leq \sum_{i=1}^{N-1} (-h) (\delta_x^2 \varepsilon_m^i)^2.$$

Также приводятся достаточные условия его выполнения.

При сделанных предположениях доказывается утверждение

Теорема 11. *Погрешность метода (17) имеет первый порядок малости по Δ и второй по h .*

В разделе 3.4 описывается алгоритм приближенного решения нелинейной системы (17).

Предполагая однозначную обратимость $\phi(u)$ на интересующей нас области, сделаем замену $z = \phi(u)$, $u = \omega(z)$, соответственно $z_m^i = \phi(u_m^i)$, тогда (17) для каждого $m = 1, \dots, M$ запишется в виде

$$\begin{aligned} D_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_m^i) &= \delta_x^2 u_m^i + f(x_i, t_m, \omega(z_{m-1}^i), \omega(u_{m-1}^i)(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ z_m^0 &= \phi(u_0(t_m)), \quad z_m^N = \phi(u_1(t_m)), \end{aligned} \quad (18)$$

с начальными условиями $z_0^i = \phi(\varphi(x_i))$, $i = 0, \dots, N$.

Для решения этой системы на каждом временном слое m применим метод Ньютона. Обозначим приближение z_m^i на k итерации через $z_m^i[k]$, возьмем $z_m^i[0] = z_{m-1}^i$, получаем на каждой итерации линейную систему

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \omega'(z_m^i[k]) z_m^i[k+1] - \delta_x^2 z_m^i[k+1] &= \\ &= \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (\omega'(z_m^i[k]) z_m^i[k] - \omega(z_m^i[k])) + \\ &+ \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \omega(z_{m-1}^i) - \tilde{D}_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_{m-1}^i) + f(x_i, t_m, \omega(z_{m-1}^i), \omega(u_{m-1}^i)(\cdot)). \end{aligned} \quad (19)$$

Система (19) представляет собой трехдиагональную систему линейных уравнений и может быть решена методом прогонки.

В разделе 3.5 приводятся результаты численных экспериментов на тестовых примерах.

Глава 4 посвящена описанию программных комплексов, позволяющих проводить компьютерные эксперименты для численного исследования моделей популяционной динамики. Было разработано четыре программных комплекса, соответствующие исследуемым алгоритмам.

В главе 5 приведены результаты численных экспериментов для тестовых моделей непосредственно и для моделей популяционной динамики.

В заключении приводятся основные результаты проделанной работы, указываются возможные направления дальнейших исследований.

Апробация работы. Основные результаты работы обсуждались на семинарах кафедры вычислительной математики и компьютерных наук Института естественных наук и математики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, а также представлялись на следующих конференциях:

49-ой и 52-ой Всероссийских с международным участием школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2018 и 2021);

49-ой и 52-ой Всероссийских с международным участием школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений», (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2018 и 2021);

7th International Conference on Finite Difference Methods. Theory and Applications. FDM 2018, (Lozenetz, Bulgaria, 2018);

IV международной научной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики (Нальчик, 2018);

International Conference on Differential and Difference Equations and Applications. ICDDEA 2019, (Lisbon, Portugal, 2019);

X Всероссийской конференции с международным участием «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященной памяти академика А.Ф.Сидорова и 100-летию Уральского федерального университета, (Абрау-Дюрсо, 2020).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [121]- [128]. Работы [121]- [126] опубликованы в изданиях, индексируемых в международных базах Scopus или WoS, из них 2 работы [122], [126] опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК. В работах [121] — [125] В.Г.Пименову и С.И.Солодушкину принадлежат постановки задач и общие схемы их исследований, а Т.В.Горбовой детальная разработка алгоритмов, их тестирование и обоснование устойчивости и сходимости.

Глава 1

Численные методы решения диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе

1.1 Мотивировка задачи

Во многих математических моделях, в частности, динамики популяций, ценообразования опционов, химической кинетики, газовой динамики и других используются уравнения в частных производных с нелинейностью в операторе дифференцирования, смотри, например, [31, 103] и ссылки в них. К тому же модели могут быть осложнены эффектами запаздывания, дробными производными, многомерностью пространственных переменных. В данной работе мы сосредоточимся на основной сложности — нелинейности оператора дифференцирования. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial x^2} + g(x, t, p_t(x, \cdot)), \quad (1.1)$$

где $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq X$, — независимые переменные, $p(x, t)$ — искомая функция, $p_t(x, \cdot) = \{p(x, t + s), -\tau \leq s \leq 0\}$ — наследственность (история) искомой функции к моменту t .

Заданы краевые условия $p(0, t) = p_0(t)$, $p(X, t) = p_1(t)$, $0 \leq t \leq T$, начальные условия $p(x, s) = \varphi(x, s)$, $0 \leq x \leq X$, $-\tau \leq s \leq 0$.

Существуют различные подходы к построению разностных схем для нелинейных уравнений в частных производных. Наиболее простой — рассмотрение явных схем, которые, как правило, являются условно устойчивыми, что накладывает жесткие ограничения на шаги по времени. При этом основное внимание при построении разностной схемы уделяется монотонности численного решения или его неотрицательности [31].

Для нелинейных уравнений специального вида применяются методы, учитывающие специфику уравнений. Так, например, для уравнения Бюргера применяются преобразование Хопфа–Коула, сводя исходное уравнение к уравнению теплопроводности, решение которого можно искать в виде ряда Фурье [70]. К сожалению, для уравнений произвольного вида найти подходящее преобразование удается редко.

В работе [103] рассматриваются математические модели теории популяции, основной проблемой является нелинейность в операторе дифференцирования, отсутствует эффект запаздывания, но присутствуют другие эффекты: многомерность по состоянию, наличие дробной производной по времени см. (1), которые мы пока не рассматриваем. В этой работе, как и в большинстве подобных работ, не рассматриваются численные методы, а делается попытка нахождения точного решения в виде ряда. Однако, аналитическое решение в подобных задачах удается найти лишь в исключительных случаях, поэтому разработка, обоснование устойчивости и сходимости, а также программная

реализация численных алгоритмов представляется весьма актуальной задачей. При разработке разностных схем проблема состоит в том, что применение явной схемы приводит, как показал вычислительный эксперимент, к неустойчивости; т. е. даже условную устойчивость, вообще говоря, нельзя гарантировать, накладывая ограничения на шаги дискретизации по времени или пространству. А непосредственное применение неявной схемы к уравнению (1.1) приводит к необходимости решать нелинейные системы большой размерности.

Линейные уравнения с частными производными с эффектом запаздывания ранее изучались в различных аспектах [113]. Хорошо развиты численные алгоритмы их решения: метод прямых, конечно-разностные, конечно-элементные, псевдоспектральные методы и другие, смотри, например, [36, 68].

В данной работе применяется прием, изложенный в [19]. Этот прием состоит в переводе с помощью замены переменных нелинейности в операторе дифференцирования по пространственной переменной в оператор дифференцирования по времени. Далее строится неявная разностная схема, возникающая нелинейная система решается методом Ньютона. Эффект наследственности в данной работе учитывается с помощью методики [11, 13]. Основным результатом состоит в доказательстве устойчивости и сходимости построенного алгоритма. Для этого разработана нелинейная модификация общей разностной схемы систем с наследственностью [10, 12, 14, 104].

1.2 Неявный разностный метод

Предполагая однозначную обратимость $\phi(p)$ на интересующей нас области, сделаем замену $u = \phi(p)$, $p = \omega(u)$, тогда (1.1) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \omega(u)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u_t(x, \cdot)), \quad u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s \leq 0\}. \quad (1.2)$$

Соответствующим образом изменятся начальные и граничные условия:

$$u(0, t) = \phi(p_0(t)) = \mu_0(t), \quad u(X, t) = \phi(p_1(t)) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

$$u(x, s) = \phi(\varphi(x, s)), \quad 0 \leq x \leq X, \quad -\tau \leq s \leq 0. \quad (1.4)$$

Будем предполагать, что задача (1.2) — (1.4) имеет и притом единственное решение $u(x, t)$, причем дважды непрерывно дифференцируемое по t и четырежды непрерывно дифференцируемо по x . Также будем предполагать, что функционал $f(x, t, u_t(x, \cdot))$ липшицев по последнему аргументу на множестве непрерывных функций, т.е. найдется такая константа L_f , что для всех $x \in [0, X]$, $t \in [0, T]$ и любых непрерывных на $[-\tau, 0]$ функции $u^1(\cdot)$ и $u^2(\cdot)$ выполняется

$$|f(x, t, u^1(\cdot)) - f(x, t, u^2(\cdot))| \leq L_f \max_{s \in [-\tau, 0]} |u^1(t + s) - u^2(t + s)|. \quad (1.5)$$

Относительно функции $\omega(u)$ будем предполагать, что она дважды непрерывно дифференцируема в своей области определения и ее первая производная равномерно положительна

$$0 < \hat{\omega} \leq \omega'(u). \quad (1.6)$$

Разобьем отрезок изменения пространственной переменной $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$, введя точки $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$, и разобьем отрезок изменения временной переменной $[-\tau, T]$ на части с шагом $\Delta = T/M$ (без ограничения общности $\tau/\Delta = m$ целое), введя точки $t_j = j\Delta$, $j = -m, \dots, M$.

Приближения функций $u(x_i, t_j)$ в узлах сетки будем обозначать через u_j^i . При всяком фиксированном $i = 0, \dots, N$ введем дискретную предысторию к моменту t_j , $j = 0, \dots, M$: $\{u_k^i\}_j = \{u_k^i, j - m \leq k \leq j\}$. Оператором интерполяции (с экстраполяцией) дискретной предыстории назовем отображение I , ставящее в соответствие дискретной предыстории $\{u_k^i\}_j$ функцию $u_j^i(\cdot)$, определенную на $[t_j - \tau, t_j + \Delta]$. В дальнейшем будем использовать [6] кусочно-линейную интерполяцию

$$u_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta} ((t_k - t_j - s)u_{k-1}^i + (t_j + s - t_{k-1})u_k^i), \quad t_{k-1} \leq t_j + s \leq t_k$$

с экстраполяцией продолжением

$$u_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}((-s)u_{j-1}^i + (\Delta + s)u_j^i), \quad t_j \leq t_j + s \leq t_{j+1}.$$

Для $j = 0, 1, \dots, M-1$, рассмотрим нелинейную неявную разностную схему

$$\begin{aligned} \frac{\omega(u_{j+1}^i) - \omega(u_j^i)}{\Delta} &= \frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ u_{j+1}^0 &= \mu_0(t_{j+1}), \quad u_{j+1}^N = \mu_1(t_{j+1}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

с начальными условиями $u_j^i = \phi(\varphi(x_i, t_j))$, $i = 0, \dots, N$, $j = -m, \dots, 0$.

Здесь и в дальнейшем в этом разделе $u_j^i(\cdot)$ обозначает

$$u_j^i(\cdot) = (u_j^i)_{t_{j+1}}(\cdot) = \{u_j^i(t_{j+1} + s), -\tau \leq s \leq 0\}.$$

При каждом фиксированном j (1.7) является системой нелинейных относительно u_{j+1}^i , $i = 1, \dots, N-1$, уравнений, поиск ее точного решения затруднителен. Для решения (1.7) на каждом временном слое j применяется метод Ньютона [19], стр. 444–454,

$$\begin{aligned} \omega(u_{j+1}^i[k]) + \omega'(u_{j+1}^i[k])(u_{j+1}^i[k+1] - u_{j+1}^i[k]) - \\ - \Delta \frac{u_{j+1}^{i-1}[k+1] - 2u_{j+1}^i[k+1] + u_{j+1}^{i+1}[k+1]}{h^2} &= \omega(u_j^i) + \Delta f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot)), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где k — номер итерации, $k = 0, 1, \dots$, а $u_{j+1}^i[k]$ — k -е приближение по методу Ньютона к u_{j+1}^i , $i = 1, \dots, N-1$. Отметим, что в (1.8) при поиске $u_{j+1}^i[k+1]$ используется u_j^i — не точное решение (1.7) на j слое, которое, вообще говоря, неизвестно, а его приближение в методе Ньютона, полученное на предыдущем временном слое.

Система (1.8) представляет собой трехдиагональную систему линейных уравнений. Так как из (1.6) следуют условия диагонального преобладания, то система (1.8) может быть эффективно решена с помощью алгоритма прогонки.

Отметим, что при выполнении условия (1.6), метод (1.8) может быть переписан в виде

$$\begin{aligned} u_{j+1}^i[k+1] - \Delta \frac{u_{j+1}^{i-1}[k+1] - 2u_{j+1}^i[k+1] + u_{j+1}^{i+1}[k+1]}{\omega'(u_{j+1}^i[k])h^2} = \\ = u_{j+1}^i[k] + \frac{\omega(u_j^i) - \omega(u_{j+1}^i[k]) + \Delta f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot))}{\omega'(u_{j+1}^i[k])}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

1.3 Элементы общей теории нелинейных разностных схем с наследственностью

Мы будем вкладывать предполагаемый метод в общую схему, предложенную ранее в [10, 13] для линейных разностных задач с наследственностью.

Пусть дан $[-\tau, T]$, разобьем его на части с шагом $\Delta = T/M$, введя точки $t_j = t_0 + j\Delta$, $j = -m, \dots, M$. Без ограничения общности считаем, что $\tau/\Delta = m$ — целое.

Дискретной моделью назовем всякую сеточную функцию $y_j = y(t_j) \in Y$, $j = -m, \dots, M$, где Y — q -мерное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_Y$. Будем предполагать, что размерность q пространства Y зависит от числа $h > 0$.

Для $j \geq 0$ предысторией дискретной модели к моменту t_j назовем множество $\{y_i\}_j = \{y_i \in Y, i = j - m, \dots, j\}$.

Пусть V — линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_V$ (интерполяционное пространство). Оператором интерполяции дискретной предыстории модели назовем отображение $I: I(\{y_i\}_j) = v \in V$.

Будем считать, что оператор интерполяции удовлетворяет условию липшицевости, если найдется такая константа L_I , что для всех предысторий дискретной модели $\{y_i^1\}_j$ и $\{y_i^2\}_j$ выполняется

$$\|v^1 - v^2\|_V \leq L_I \max_{j-m \leq i \leq j} \|y_i^1 - y_i^2\|_Y.$$

Стартовыми значениями модели назовем

$$y(t_i) = y_i, \quad i = -m, \dots, 0$$

Формулой продвижения модели на шаг назовем алгоритм

$$y_{j+1} = S(y_j) + \Delta \Phi(I(\{y_i\}_j)), \quad (1.10)$$

где нелинейный оператор перехода $S(y_j) = S(y_j, t_j, \Delta, h)$ липшицев по первому аргументу с константой Липшица $L_S = L_S(\Delta, h)$; функция продвижения на шаг $\Phi(v) = \Phi(v, t_j, \Delta, h)$ — нелинейное отображение из V в Y , липшицевое по первому аргументу с константой Липшица L_Φ .

Функцией точных значений назовем отображение:

$$Z(t_j, \Delta, h) = z_j \in Y, \quad j = -m, \dots, M.$$

Знание функции точных значений эквивалентно знанию точного решения исходной задачи в узлах. В дальнейшем для простоты будем предполагать, что стартовые значения совпадают с начальным значением функции точных значений: $y_i = z_i, \quad i = -m, \dots, 0$.

Будем говорить, что метод (1.10) сходится, если существуют константа C и функция $q(\Delta, h), \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0, h \rightarrow 0} q(\Delta, h) = 0$, такие, что

$$\|z_j - y_j\|_Y \leq Cq(\Delta, h)$$

для всех $j = 0, \dots, M$. Функция $q(\Delta, h)$ определяет порядок сходимости.

Порядок сходимости зависит от погрешности аппроксимации, стартовой погрешности (в нашем случае она отсутствует) и свойств устойчивости метода. Погрешностью аппроксимации (невязкой) назовем сеточную функцию

$$d_j = (z_{j+1} - S(z_j))/\Delta - \Phi(I(\{z_i\}_j), \quad j = 0, \dots, M - 1. \quad (1.11)$$

Отметим, что для систем с наследственностью имеется два вида невязки всякого метода: невязка с интерполяцией и невязка без интерполяции [11, 13]. В (1.11) определена невязка с интерполяцией.

Будем говорить, что метод (1.10) имеет порядок погрешности аппроксимации $q(\Delta, h)$, если $\|d_j\|_Y \leq Cq(\Delta, h)$ для всех $j = 1, \dots, M$.

Назовем метод (1.10) устойчивым, если $L_S = L_S(\Delta, h) \leq 1$.

Теорема 1 (Теорема сходимости в общей нелинейной схеме). *Пусть метод (1.10) устойчив, пусть погрешность аппроксимации имеет порядок $q(\Delta, h)$ и $\lim_{\Delta, h \rightarrow 0} q(\Delta, h) = 0$, тогда метод сходится с порядком $q(\Delta, h)$.*

Доказательство. Обозначим норму погрешности $\delta_j = \|z_j - y_j\|_Y$, $j = 0, \dots, M$, тогда для $j = 0, \dots, M - 1$ имеем, используя липшицовость функций S , Φ и I :

$$\begin{aligned} \delta_{j+1} &= \|S(z_j) + \Delta\Phi(I(\{z_i\}_j)) + \Delta d_j - S(y_j) - \Delta\Phi(I(\{y_i\}_j))\|_Y \leq \\ &\leq L_S\delta_j + \Delta L_\Phi L_I \max_{j-m \leq i \leq j} \delta_i + \Delta \|d_j\|_Y. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Обозначим через $\hat{\delta}_j$ максимальную предысторию погрешности: $\hat{\delta}_j = \max_{j-m \leq i \leq j} \delta_i$, тогда из (1.12) получаем

$$\hat{\delta}_{j+1} \leq L_S\hat{\delta}_j + \Delta L_\Phi L_I \hat{\delta}_j + \Delta \|d_j\|_Y.$$

Используя условие устойчивости, отсюда получаем

$$\hat{\delta}_{j+1} \leq (1 + \Delta L_\Phi L_I)\hat{\delta}_j + \Delta \|d_j\|_Y.$$

Из этой оценки, стандартными методами выводится оценка

$$\hat{\delta}_j \leq \hat{\delta}_0 \exp(TL_\Phi L_I) + \|d_j\|_Y \frac{\exp(TL_\Phi L_I)}{L_\Phi L_I},$$

справедливая для всех $j = 0, \dots, M$. Отсюда вытекает заключение теоремы. \square

Приведение нелинейной разностной схемы к явному виду (1.10) зачастую оказывается сложной задачей. Особенно сложна проверка условия устойчивости. Рассмотрим аппроксимацию этой схемы в виде итерационного процесса

$$y_{j+1}[k] = S_k(y_{j+1}[k-1]) + \Delta\Phi_k(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i[K]\}_j)), \quad k = 1, \dots, K. \quad (1.13)$$

В качестве начального приближения этого итерационного процесса можно взять

$$y_{j+1}[0] = y_j[K],$$

(число K фиксировано), тогда итерационный процесс (1.13) приводится к виду

$$y_{j+1}[K] = \hat{S}_K(y_j[K]) + \Delta \hat{\Phi}_K(I(\{y_i[K]\}_j)). \quad (1.14)$$

Определения, введенные выше для общей нелинейной схемы (1.10), очевидным образом трансформируются для аппроксимационной схемы (1.14).

Будем говорить, что метод (1.14) сходится, если существуют константа C и функция $q(\Delta, h, K)$,

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0, h \rightarrow 0, K \rightarrow \infty} q(\Delta, h, K) = 0,$$

такие, что

$$\| z_j - y_j[K] \|_Y \leq Cq(\Delta, h, K)$$

для всех $j = 0, \dots, M$.

Назовем метод (1.14) устойчивым, если для констант Липшица операторов \hat{S}_K выполняются оценки

$$L_{\hat{S}_K} = L_{\hat{S}_K}(\Delta, h, K) \leq 1. \quad (1.15)$$

Аналогичным образом определяется погрешность аппроксимации метода (1.14).

Справедлива теорема, которая доказывается также, как предыдущая.

Теорема 2 (Теорема сходимости в аппроксимационной схеме). *Пусть метод (1.14) устойчив, функции $\hat{\Phi}_K$ и I Липшицевы, погрешность аппроксимации имеет порядок $q(\Delta, h, K)$, $\lim_{\Delta \rightarrow 0, h \rightarrow 0, K \rightarrow \infty} q(\Delta, h, K) = 0$, тогда метод сходится с порядком $q(\Delta, h, K)$.*

1.4 Вложение неявного метода в общую нелинейную схему

Произведем вложение метода (1.8) в схему, описанную в предыдущем разделе. Без ограничения общности будем рассматривать однородные граничные условия (1.3)

$$u(0, t) = 0, \quad u(X, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Обозначим $y_j = (u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{N-1})^T \in Y$, здесь Y — векторное пространство размерности $N - 1$, T — знак транспонирования.

В пространстве Y введем оператор A

$$Au_j^i = -\frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2},$$

а также векторные функции $\omega(y_j)$ как вектор с компонентами $\omega(u_j^i)$ и $f_j(I(\{y_i\}_j))$ как вектор с компонентами $f(x_i, t_{j+1}, I(\{y_i\}_j))$ тогда систему (1.7) можно переписать в виде уравнения

$$\omega(y_{j+1}) + \Delta Ay_{j+1} = \omega(y_j) + \Delta f_j(I(\{y_i\}_j)). \quad (1.16)$$

Аналогичным образом обозначим $y_j[k] = (u_j^1[k], u_j^2[k], \dots, u_j^{N-1}[k])^T \in Y$, через $\omega'(y_j)$ обозначим матрицу, на главной диагонали в i -й строке стоят элементы $\omega'(u_j^i)$, а все другие элементы нулевые. Тогда итерационный процесс (1.8) с числом итераций K может быть записан в виде

$$(\omega'(y_{j+1}[k-1]) + \Delta A)y_{j+1}[k] = \omega'(y_{j+1}[k-1])y_{j+1}[k-1] + \omega(y_j[K]) - \omega(y_{j+1}[k-1]) + \Delta f_j(I(\{y_i\}_j[K])), \quad k = 1, \dots, K, \quad (1.17)$$

$$y_{j+1}[0] = y_j[K]. \quad (1.18)$$

Итерационный процесс (1.9) также может быть записан в векторной форме

$$(E + \Delta \tilde{A})y_{j+1}[k] = y_{j+1}[k-1] + \Delta \tilde{F}(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i\}_j[K])), \quad (1.19)$$

$$\tilde{A}u_{j+1}^i[k-1] = -\frac{u_{j+1}^{i-1}[k-1] - 2u_{j+1}^i[k-1] + u_{j+1}^{i+1}[k-1]}{\omega'(u_{j+1}^i[k-1])h^2},$$

$\tilde{F}(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i\}_j[K]))$ — вектор с компонентами

$$\frac{1}{\omega'(u_{j+1}^i[k])} \left(\frac{\omega(u_j^i) - \omega(u_{j+1}^i[k])}{\Delta} + f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot)) \right). \quad (1.20)$$

Так как матрица $E + \Delta\tilde{A}$ положительно определенная, то (1.19) может быть переписан в явной форме (1.13), где

$$S_k(y_{j+1}[k-1]) = (E + \Delta\tilde{A})^{-1}, \quad \Phi_k(y_{j+1}[k-1]) = (E + \Delta\tilde{A})^{-1} \tilde{F}(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i\}_j[K])). \quad (1.21)$$

Перепишем систему (1.7) (или уравнение (1.16)) в виде

$$F(y_{j+1}) = \omega(y_{j+1}) + \Delta A y_{j+1} - B = 0, \quad B = \omega(y_j) + \Delta f_j(I(\{y_i\}_j)). \quad (1.22)$$

Тогда метод Ньютона (1.8) (или (1.17)) можно записать в виде

$$y_{j+1}[k+1] = y_{j+1}[k] - S^{-1}(y_{j+1}[k])F(y_{j+1}[k]),$$

$$S(y_{j+1}[k]) = (\omega'(y_{j+1}[k]) + \Delta A) = F'(y_{j+1}[k]), \quad k = 0, \dots, K-1.$$

Обозначим

$$\Psi(y) = y - S^{-1}(y)F(y), \quad (1.23)$$

тогда (1.14) можно записать в форме

$$y_{j+1}[K] = S_K(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_{j+1}[0]))) + \Delta \Phi_K(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_{j+1}[0]))), I(\{y_i[K]\}_j)). \quad (1.24)$$

Учитывая (1.18), метод (1.24) можно также записать в виде

$$y_{j+1}[K] = S_K(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_j[K]))) + \Delta \Phi_K(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_j[K]))), I(\{y_i[K]\}_j)) \quad (1.25)$$

Вложение в схему (1.14) произведено. Теперь нужно проверить условие устойчивости, показать Липшицевость $\hat{\Phi}_K$ и определить порядок невязки.

1.5 Устойчивость

Проверим, что при определенных условиях оператор $\Psi(y)$ из (1.23) является сжимающим, откуда вытекает условие устойчивости в аппроксимационной

схеме. В качестве нормы в пространстве Y здесь и в дальнейшем будем брать евклидову.

Пусть y и $y + \varepsilon$ — два вектора из окрестности D_r , радиуса r , с центром в корне уравнения (1.22). Тогда

$$\begin{aligned} \Psi(y + \varepsilon) - \Psi(y) &= y + \varepsilon - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y + \varepsilon) - y + S^{-1}(y)F(y) = \\ &= \varepsilon - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y + \varepsilon) + S^{-1}(y + \varepsilon)F(y) - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y) + S^{-1}(y)F(y) = \\ &= \{\varepsilon - S^{-1}(y + \varepsilon)(F(y + \varepsilon) - F(y))\} + \{S^{-1}(y)F(y) - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y)\}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Потребуем, чтобы каждая фигурная скобка в (1.26) оценивалась по норме величиной меньшей, чем $\frac{q}{2}\|\varepsilon\|$, $q < 1$, тогда оператор $\Psi(y)$ будет сжимающим.

Так как

$$S(y) = F'(y), \quad S'(y) = F''(y),$$

где $F''(y)$ — диагональная матрица, на диагонали которой стоят элементы $\omega''(y^i)$, то

$$F(y + \varepsilon) - F(y) = S(y + \varepsilon)\varepsilon - \frac{1}{2}F''(\vartheta_{11})\varepsilon^2,$$

где вектор ϑ_{11} лежит на отрезке прямой, соединяющей вектора y и $y + \varepsilon$, ε^2 — вектор с координатами $(\varepsilon^i)^2$. Отсюда, в силу равномерной ограниченности $\omega''(y^i)$,

$$|\omega''(u)| \leq 2C_1,$$

получаем соотношение

$$\|\{\varepsilon - S^{-1}(y + \varepsilon)(F(y + \varepsilon) - F(y))\}\| \leq C_1\|\varepsilon\|^2.$$

Потребуем выполнение условия

$$C_1\|\varepsilon\| < \frac{q}{2}, \quad (1.27)$$

что можно обеспечить за счет уменьшения r , например, если потребовать $\|\varepsilon\| < q^{\frac{r}{2}}$, то условие (1.27) обеспечится условием

$$C_1 r < 1. \quad (1.28)$$

Тогда

$$\|\{\varepsilon - S^{-1}(y + \varepsilon)(F(y + \varepsilon) - F(y))\}\| \leq \frac{q}{2}\|\varepsilon\|.$$

Оценим вторую фигурную скобку в (1.26).

$$\begin{aligned} \{S^{-1}(y)F(y) - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y)\} &= S^{-1}(y)(S(y + \varepsilon) - S(y))S^{-1}(y + \varepsilon)F(y) = \\ &= S^{-1}(y)S'(\vartheta_{12})S^{-1}(y + \varepsilon)F(y)\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.29)$$

В силу условия (1.6) выполняется

$$\|S^{-1}(y)\| \leq C_2, \quad \|S^{-1}(y + \varepsilon)\| \leq C_2, \quad (1.30)$$

также будем использовать оценку

$$\|S'(\vartheta_{12})\| \leq C_3. \quad (1.31)$$

Оценим величину $F(y)$, если в качестве начального приближения метода Ньютона брать значения на предыдущем слое $y = y_{j+1}[0] = y_j[K]$, тогда из (1.22) вытекает

$$F(y) = \Delta A y_j[K] - \Delta f_j(y_j[K]).$$

Отсюда следует

$$\|F(y)\| \leq \Delta C_4. \quad (1.32)$$

Из (1.29) — (1.32) сделаем ограничение на шаг

$$\Delta C_2^2 C_3 C_4 < \frac{q}{2}, \quad (1.33)$$

тогда

$$\|\{S^{-1}(y)F(y) - S^{-1}(y + \varepsilon)F(y)\}\| \leq \frac{q}{2}\|\varepsilon\|.$$

Отметим, что условие (1.28) также можно переписать в виде ограничения на малость шага Δ , подобно (1.33).

Таким образом, доказана

Лемма 1. Если выполняются условия (1.28), (1.33), то оператор $\Psi(y)$ из (1.23) является сжимающим.

Следствие. При указанных условиях метод (1.8) сходится к точному решению (1.7) и имеет место оценка

$$\|y_{j+1}[K] - y_{j+1}\| \leq q^K \|y_{j+1}[0] - y_{j+1}\|. \quad (1.34)$$

Также отсюда вытекает

Теорема 3 (Теорема о устойчивости в аппроксимационной схеме). Если выполняются условия (1.28), (1.33), то неявный аппроксимационный метод (1.8), записанный в форме (1.14), устойчив в смысле определения (1.15).

Доказательство. Из определения оператора (1.21) при любом k , в частности $k = K$ следует, что евклидова норма матрицы $S_K(y_{j+1}[K - 1]) \leq 1$. Так как оператор $\Psi(y)$ является сжимающим, то из (1.25) вытекает условие устойчивости (1.15) в аппроксимационной схеме. \square

Замечание. Оператор $\hat{\Phi}_K$, определенный согласно (1.14), (1.25) Липшицев.

Доказательство. В самом деле, оператор $\tilde{F}(y_{j+1}[k - 1], I(\{y_i\}_j[K]))$, определенный согласно (1.20), Липшицев. Отсюда следует Липшицевость оператора $\hat{\Phi}_K$. \square

1.6 Порядок невязки метода и теорема сходимости

Исследуем невязку метода (1.8), записанного в форме (1.14). Сначала рассмотрим метод (1.7).

Невязкой без интерполяции метода (1.7) назовем сеточную функцию

$$\psi_j^i = \frac{\omega(u(x_i, t_{j+1})) - \omega(u(x_i, t_j))}{\Delta} + Au(x_i, t_{j+1}) - f(x_i, t_{j+1}, u_{t_{j+1}}(x_i, \cdot)),$$

где $i = 1, \dots, N - 1$, $j = 0, \dots, M - 1$.

Лемма 2. Если точное решение $u(x, t)$ уравнения (1.2) дважды непрерывно дифференцируемо по t и четырежды непрерывно дифференцируемо по x , функция $\omega(u)$ дважды непрерывно дифференцируема в ограниченной области, содержащей значения решения $u(x, t)$, то найдется такая постоянная C_5 , что

$$|\psi_j^i| \leq C_5(\Delta + h^2), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, M - 1. \quad (1.35)$$

Доказательство. Разложим величины, входящие в определение ψ_j^i в окрестности точки (x_i, t_{j+1}) :

$$\begin{aligned} \psi_j^i = \frac{1}{\Delta} & (\omega(u(x_i, t_{j+1})) - [\omega(u(x_i, t_{j+1})) - \omega'(u(x_i, t_{j+1}))u'_t(x_i, t_{j+1})\Delta + \omega''(\theta_1)\frac{\Delta^2}{2}]) + \\ & + Au(x_i, t_{j+1}) - f(x_i, t_{j+1}, u_{t_{j+1}}(x_i, \cdot)). \end{aligned}$$

В силу того, что $u(x, t)$ является точным решением уравнения (1.2), а

$$-Au(x_i, t_{j+1}) = \frac{\partial^2 u(x_i, t_{j+1})}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u(\theta_6, t_{j+1})}{\partial x^4} \frac{h^4}{12},$$

из сделанных предположений вытекает (1.35). \square

Невязкой с интерполяцией метода (1.7) назовем сеточную функцию

$$\hat{\psi}_j^i = \frac{\omega(u(x_i, t_{j+1})) - \omega(u(x_i, t_j))}{\Delta} + Au(x_i, t_{j+1}) - f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot)), \quad (1.36)$$

где $u_j^i(\cdot) = I(\{u(x_i, t_k)\}_j)$ — результат кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением дискретной предыстории точного решения.

Лемма 3. В условиях леммы 2 найдется такая постоянная C_6 , что

$$|\hat{\psi}_j^i| \leq C_6(\Delta + h^2), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, M - 1.$$

Доказательство. Невязка с интерполяцией и невязка без интерполяции связаны соотношением

$$\hat{\psi}_j^i = \psi_j^i + f(x_i, t_{j+1}, u_{t_{j+1}}(x_i, \cdot)) - f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot)), \quad (1.37)$$

Из условия липшицевости функционала f по последнему аргументу (1.5) следует

$$|f(x_i, t_{j+1}, u_{t_{j+1}}(x_i, \cdot)) - f(x_i, t_{j+1}, u_j^i(\cdot))| \leq L_f \max_{s \in [-\tau, 0]} |u(x_i, t_{j+1} + s) - u_j^i(t_{j+1} + s)|. \quad (1.38)$$

Так как кусочно-линейная интерполяция имеет второй порядок погрешности по Δ на точном решении [6, с.97] и экстраполяция продолжением линейного многочлена также имеет второй порядок погрешности по Δ на точном решении [6, с.102], то найдется такая константа \hat{C} , что выполняется

$$\max_{s \in [-\tau, 0]} |u(x_i, t_{j+1} + s) - u_j^i(t_{j+1} + s)| \leq \hat{C} \Delta^2. \quad (1.39)$$

Из (1.37), леммы 2 и оценок (1.38), (1.39) вытекает утверждение леммы. \square

Исследуем, как изменится решение уравнения (1.7) при изменении параметров уравнения.

Наряду с уравнением вида (1.7), записанным в форме (1.22), рассмотрим уравнение вида

$$\bar{F}(\bar{y}_{j+1}) = \omega(\bar{y}_{j+1}) + \Delta A \bar{y}_{j+1} - \bar{B} = 0, \quad \bar{B} = \omega(\bar{y}_j) + \Delta f_j(I(\{\bar{y}_l\}_j)), \quad (1.40)$$

где

$$\|\bar{y}_k - y_l\| \leq \delta, \quad l = 1, \dots, j.$$

Лемма 4. *Справедлива оценка*

$$\|\bar{y}_{j+1} - y_{j+1}\| \leq C_7 \delta. \quad (1.41)$$

Доказательство. Вычтем из уравнения (1.40) уравнение (1.22), получим

$$\omega(\bar{y}_{j+1}) + \Delta A \bar{y}_{j+1} - \omega(y_{j+1}) - \Delta A y_{j+1} = \omega(\bar{y}_j) + \Delta f_j(I(\{\bar{y}_l\}_j)) - \omega(y_j) - \Delta f_j(I(\{y_l\}_j)).$$

Распишем данное уравнение для координаты i :

$$\omega(\bar{y}_{j+1}^i) - \omega(y_{j+1}^i) + \Delta A(\bar{y}_{j+1}^i - y_{j+1}^i) = \omega(\bar{y}_j^i) - \omega(y_j^i) + \Delta f_j(I(\{\bar{y}_l^i\}_j)) - \Delta f_j(I(\{y_l^i\}_j)).$$

Воспользуемся формулой конечных приращений для первых двух слагаемых в левой и правой частях этого равенства:

$$(\omega'(\theta) + \Delta A)(\bar{y}_{j+1}^i - y_{j+1}^i) = \omega'(\theta_1)(\bar{y}_j^i - y_j^i) + \Delta f_j(I(\{\bar{y}_l^i\}_j)) - \Delta f_j(I(\{y_l^i\}_j)).$$

В силу условия (1.6), свойств оператора A и липшицевости операторов f_j и I найдется такая постоянная C_7 , что выполняется неравенство (1.41). \square

Теорема 4 (Теорема о порядке невязки в аппроксимационной схеме). *Если выполняются условия (1.6), (1.28), (1.33), то неявный аппроксимационный метод (1.8), записанный в форме (1.14), имеет порядок невязки $\Delta + h^2 + \lambda^{2K}$, $0 < \lambda < 1$. λ — число, определяемое параметрами метода.*

Доказательство. Перепишем уравнение (1.36) в виде

$$\omega(u(x_i, t_{j+1})) + \Delta Au(x_i, t_{j+1}) = \omega(u(x_i, t_j)) + \Delta f(x_i, t_{j+1}, I(\{u(x_i, t_k)\}_j)) + \Delta \hat{\psi}_j^i.$$

В силу лемм 3 и 4 выполняется оценка

$$|u(x_i, t_{j+1}) - u_{j+1}^i| \leq C_6 C_7 \Delta (\Delta + h^2).$$

В силу (1.34) отсюда вытекает

$$|u(x_i, t_{j+1}[K]) - u_{j+1}^i[K]| \leq C_6 C_7 \Delta (\Delta + h^2 + \lambda^{2K}), \quad 0 < \lambda < 1,$$

а отсюда вытекает заключение теоремы. \square

Из теорем 2, 3, 4 вытекает теорема сходимости.

Теорема 5 (Теорема о порядке сходимости неявного метода). *Неявный аппроксимационный метод (1.8), записанный в форме (1.14) или (1.25), сходится и имеет порядок $\Delta + h^2 + \lambda^{2K}$, $0 < \lambda < 1$. λ — число, определяемое параметрами метода.*

Табл. 1.1: Максимальная абсолютная погрешность в зависимости от шага по времени и по пространству

No	1	2	3	4	5	7	8	9
N	32	32	32	32	8	8	8	8
M	32	64	128	256	16	32	64	128
diff	0.4150	0.1034	0.0274	0.0096	1.4828	0.4793	0.1613	0.0867

1.7 Численные эксперименты

Пример 1.1. На области $x \in (0, \pi)$, $t \in (0, 4\pi)$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial e^u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0.5 e^{\sin x \cos t} \int_{-\pi}^0 u(x, t+s) ds + u, \quad (1.42)$$

с начальными и граничными условиями

$$u(x, s) = \sin x \cos s, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad -\pi \leq s \leq 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Начально-краевая задача (1.42) имеет точное решение $u(x, t) = \sin x \cos t$.

Точность метода Ньютона выбрана $\epsilon = 10^{-5}$. Для приближенного вычисления определенных интегралов в функционале распределенного запаздывания используется метод трапеций.

В таблице 1.1 приведены нормы разности точного и сеточного решений, где $diff = \max_{i,j} |u_j^i - u(x_i, t_j)|$. Здесь N и M — число отрезков разбиения по пространству и времени соответственно.

1.8 Аналог метода Кранка-Николсон

В этом разделе для той же задачи, что и в предыдущих разделах, рассматривается более точный относительно шага по времени метод, являющийся аналогом метода Кранка-Николсон.

Для решения задачи (1.2) – (1.4) рассмотрим метод при $j = 0, 1, \dots, M-1$,

$$\begin{aligned} \frac{\omega(u_{j+1}^i) - \omega(u_j^i)}{\Delta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} \right) + \\ &+ f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, u_{t_j + \frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (1.43) \\ u_{j+1}^0 &= \mu_0(t_{j+1}), \quad u_{j+1}^N = \mu_1(t_{j+1}), \end{aligned}$$

с начальными условиями $u_j^i = \phi(\varphi(x_i, t_j))$, $i = 0, \dots, N$, $j = -m, \dots, 0$.
Здесь, как и раньше, применяется кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением. На каждом временном слое j (1.43) является системой нелинейных уравнений относительно u_{j+1}^i , $i = 1, \dots, N-1$.

Будем решать (1.43) при каждом фиксированном j методом Ньютона

$$\begin{aligned} \omega(u_{j+1}^i[k]) + \omega'(u_{j+1}^i[k])(u_{j+1}^i[k+1] - u_{j+1}^i[k]) - \\ - \Delta \frac{u_{j+1}^{i-1}[k+1] - 2u_{j+1}^i[k+1] + u_{j+1}^{i+1}[k+1]}{2h^2} = \\ = \Delta \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{2h^2} + \omega(u_j^i) + \Delta f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, u_{t_j + \frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)), \quad (1.44) \end{aligned}$$

где k – номер итерации, $k = 0, 1, \dots$, и $u_{j+1}^i[k]$ это k -е приближение по методу Ньютона величины u_{j+1}^i , $i = 1, \dots, N-1$. Заметим, что для того, чтобы найти $u_{j+1}^i[k+1]$ в (1.44) используется u_j^i , которое представляет собой не точное решение, а приближение, которое найдено на j -м временном слое с помощью метода Ньютона.

Система (1.44) является линейной системой с трехдиагональной матрицей. Условие (1.6) влечет диагональное преобладание, поэтому (1.44) может быть эффективно решена методом прогонки.

Заметим, что если условие (1.6) выполнено, метод (1.44) может быть пе-

реписан в виде

$$\begin{aligned}
u_{j+1}^i[k+1] - \Delta \frac{u_{j+1}^{i-1}[k+1] - 2u_{j+1}^i[k+1] + u_{j+1}^{i+1}[k+1]}{\omega'(u_{j+1}^i[k])2h^2} = \\
= u_{j+1}^i[k] + \frac{1}{\omega'(u_{j+1}^i[k])} \left(\Delta \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{2h^2} + \right. \\
\left. + \omega(u_j^i) - \omega(u_{j+1}^i[k]) + \Delta f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, u_{t_j + \frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)) \right). \quad (1.45)
\end{aligned}$$

1.9 Порядок сходимости аналога метода Кранка-Николсон

Вложим метод (1.44) в общую разностную схему, описанную в разделе 1.3. Без ограничения общности будем рассматривать однородные граничные условия

$$u(0, t) = 0, \quad u(X, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Обозначим $y_j = (u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{N-1})^T \in Y$, где Y — векторное пространство размерности $N - 1$.

На пространстве Y введем оператор A следующим образом

$$Aw_j^i = -\frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2}.$$

Определим векторные функции $\omega(y_j)$ и $f_j(I(\{y_i\}_j))$ как вектора с компонентами $\omega(u_j^i)$ и $f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, v_{t_j + \frac{\Delta}{2}}^i(\cdot))$ соответственно, и перепишем систему (1.43) в виде

$$\omega(y_{j+1}) + \frac{\Delta}{2}Ay_{j+1} = \omega(y_j) + \frac{\Delta}{2}Ay_j + \Delta f_j(I(\{y_i\}_j)). \quad (1.46)$$

Действуя таким же образом, как в неявном методе, обозначим

$$y_j[k] = (u_j^1[k], u_j^2[k], \dots, u_j^{N-1}[k])^T \in Y,$$

также обозначим через $\omega'(y_j)$ диагональную матрицу с элементами $\omega'(u_j^i)$ на главной диагонали в i -й строке. В этих обозначениях итерационный процесс

(1.44) с числом итераций K может быть представлен следующим образом

$$\begin{aligned} & (\omega'(y_{j+1}[k-1]) + \frac{\Delta}{2}A)y_{j+1}[k] = \omega'(y_{j+1}[k-1])y_{j+1}[k-1] + \\ & + \omega(y_j[K]) - \omega(y_{j+1}[k-1]) + \frac{\Delta}{2}Ay_j[K] + \Delta f_j(I(\{y_i[K]\}_j)), \quad k = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$y_{j+1}[0] = y_j[K]. \quad (1.48)$$

Этот итерационный процесс может быть записан в векторной форме

$$(E + \Delta\tilde{A})y_{j+1}[k] = y_{j+1}[k-1] + \Delta\tilde{F}(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i\}_j[K])), \quad (1.49)$$

где

$$\tilde{A}u_{j+1}^i[k] = -\frac{u_{j+1}^{i-1}[k] - 2u_{j+1}^i[k] + u_{j+1}^{i+1}[k]}{2\omega'(u_{j+1}^i[k-1])h^2},$$

и $\tilde{F}(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i\}_j[K]))$ — вектор с компонентами

$$\frac{1}{\omega'(u_{j+1}^i[k-1])} \left(\frac{\omega(u_j^i[K]) - \omega(u_{j+1}^i[k-1])}{\Delta} + \frac{1}{2}Au_j^i[K] + f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, u_{t_j + \frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)) \right).$$

Так как матрица $E + \Delta\tilde{A}$ невырожденная, метод (1.49) может быть переписан в явной форме (1.13), где

$$S_k(y_{j+1}[k-1]) = (E + \Delta\tilde{A})^{-1}, \quad \Phi_k(y_{j+1}[k-1]) = (E + \Delta\tilde{A})^{-1}\tilde{F}(y_{j+1}[k-1], I(\{y_i[K]\}_j)).$$

Перепишем систему (1.43) (или уравнение (1.46)) в виде

$$F(y_{j+1}) = \omega(y_{j+1}) + \frac{\Delta}{2}Ay_{j+1} - B = 0, \quad B = \omega(y_j) + \frac{\Delta}{2}Ay_j + \Delta f_j(I(\{y_i\}_j)). \quad (1.50)$$

Тогда метод Ньютона (1.44) (или (1.47)) может быть записан в форме

$$\begin{aligned} y_{j+1}[k+1] &= y_{j+1}[k] - S^{-1}(y_{j+1}[k])F(y_{j+1}[k]), \\ S(y_{j+1}[k]) &= (\omega'(y_{j+1}[k]) + \frac{\Delta}{2}A)^{-1} = F'(y_{j+1}[k]), \quad k = 0, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Обозначим $\Psi(y) = y - S^{-1}(y)F(y)$; можно проверить, как в неявном методе, что для малых Δ оператор Ψ является сжимающим.

Тогда метод (1.14) примет вид

$$y_{j+1}[K] = S_K(\Psi(\Psi(\cdots \Psi(y_{j+1}[0]))) + \Delta \Phi_K(\Psi(\Psi(\cdots \Psi(y_{j+1}[0]))), I(\{y_i[K]\}_j)), \quad (1.52)$$

откуда следует устойчивость метода. Учитывая (1.48), метод (1.52) может быть представлен в виде

$$y_{j+1}[K] = S_K(\Psi(\Psi(\cdots \Psi(y_j[K]))) + \Delta \Phi_K(\Psi(\Psi(\cdots \Psi(y_j[K]))), I(\{y_i[K]\}_j)) \quad (1.53)$$

Анализируя порядок невязки (с учетом порядка интерполяции) и скорость сходимости метода Ньютона, получаем утверждение

Теорема 6 (Теорема о порядке невязки аналога метода Кранка-Николсон). *Невязка метода (1.44), записанного в форме (1.14), имеет порядок $\Delta^2 + h^2 + \lambda^{2^K}$, $0 < \lambda < 1$.*

Из теорем 2, 6 и устойчивости метода вытекает следующая теорема

Теорема 7 (Теорема о порядке сходимости аналога метода Кранка-Николсон). *Метод (1.44) записанный в форме (1.14) или (1.53), сходится и имеет порядок сходимости $\Delta^2 + h^2 + \lambda^{2^K}$, $0 < \lambda < 1$. λ — число, определяемое параметрами метода.*

1.10 Численные эксперименты

Неявный метод имеет первый порядок сходимости относительно шага по времени, для увеличения скорости сходимости был разработан аналог метода Кранка-Николсон. В этом разделе приведено сравнение этих методов по результатам численных экспериментов на тестовых примерах.

Пример 1.2. На области $x \in (0, 10)$, $t \in (0, 10)$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u^2}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t \int_{-4}^0 u(x, t + s) ds + 16t^2 - \frac{64}{3}t - 2, \quad (1.54)$$

с начальными и краевыми условиями

$$u(x, s) = x^2 + s^2, \quad 0 \leq x \leq 10, \quad -4 \leq s \leq 0,$$

$$u(0, t) = t^2, \quad u(10, t) = 100 + t^2, \quad 0 \leq t \leq 10.$$

Задача (1.54) имеет точное решение $u(x, t) = x^2 + t^2$.

Для всех численных экспериментов с этим тестовым уравнением точность метода Ньютона принята равной $\epsilon = 10^{-7}$. Для вычисления функционала, содержащего член с распределенным запаздыванием, мы использовали составное правило трапеций и линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением.

Поскольку аппроксимация второй производной по пространству в этом примере является точной, ее можно рассматривать как идеальный тест для оценки вычислительного порядка сходимости по времени. Отметим, что, несмотря на то, что u квадратично зависят от t , аппроксимация производной по времени не является точной из-за нелинейной функции ω в дифференциальном операторе.

Абсолютные ошибки и вычислительные порядки сходимости указаны в таблице 1.2. Абсолютные ошибки для заданных h и Δ определяются как

$$diff = diff(h, \Delta) = \max_{i,j} |u_j^i - u(x_i, t_j)|.$$

Вычислительный порядок сходимости по времени был определен следующим образом

$$COC_{\Delta} = \log_2 \left(\frac{diff(h, 2\Delta)}{diff(h, \Delta)} \right).$$

Таблица 1.2 разделена на два блока: численные результаты с методом (1.44) представлены в левой части, а с методом из (1.8) — в правой. Для тестирования обоих методов были выбраны разные наборы сеток из-за их совершенно разных числовых свойств; для метода из (1.8) сетки намного плотнее.

Как ясно видно из таблицы 1.2, нелинейный метод Кранка-Николсон (1.44) намного лучше, чем неявный метод (1.8). А именно, даже на сетке с 16

Табл. 1.2: Абсолютная погрешность и вычислительный порядок сходимости методов (1.44) и (1.8). Параметр N — число сегментов по пространству, взят равный 32.

method (1.44)			method (1.8)		
M	$diff_{\Delta,h}$	COC_{Δ}	M	$diff_{\Delta,h}$	COC_{Δ}
16	1.0759×10^{-1}	-	128	2.4909	-
32	2.2941×10^{-2}	2.2296	256	1.3735	0.8588
64	5.1102×10^{-3}	2.1664	512	5.0035×10^{-1}	1.4568
128	1.2088×10^{-3}	2.0799	1204	2.1921×10^{-1}	1.1906
256	2.9277×10^{-4}	2.0456	2048	1.5633×10^{-1}	0.4877

сегментами только метод (1.44) дает лучшие результаты, чем неявный метод (1.8) на сетке с 2048 сегментами.

Численные оценки вычислительного порядка сходимости метода (1.44) очень близки к теоретическим. Напротив, метод (1.8) демонстрирует уменьшение вычислительного порядка сходимости до 0,4877 при увеличении количества узлов с 1025 до 2049, что, по-видимому, связано с возрастающим влиянием ошибок округления.

Расчеты проводились в облачной платформе Google Colaboratory с использованием языка программирования Python 3.7.

В серии из 50 экспериментов было оценено, что среднее время, необходимое для нахождения численного решения на сетке с $N = 32, M = 2048$ методом (1.8), составляет 133.73 ± 0.41 сек., \pm означает среднее стандартное отклонение. Чтобы найти решение с еще меньшей ошибкой, используя метод (1.44), достаточно построить менее плотную сетку $N = 32, M = 16$; среднее время резко уменьшается до $0,0372 \pm 0,0019$ сек. Обратим внимание, что ушло 2.336 ± 0.006 сек. чтобы найти численное решение с абсолютной ошибкой 2.9277×10^{-4} на сетке $N = 32, M = 256$, используя метод (1.44).

Пример 1.3. Рассмотрим сравнение методов (1.44) и (1.8) на задаче из примера 1.1. Абсолютные ошибки $diff$ и вычислительные порядки сходимости

Табл. 1.3: Абсолютная погрешность метода (1.44) для задачи примера 1.3.

No	1	2	3	4	5	6	7	8
N	8	8	8	8	32	32	32	32
M	16	32	64	128	32	64	128	256
diff	1.4828	0.4793	0.1613	0.0867	0.4150	0.1034	0.0274	0.0096

сти методов указаны в таблице 1.3. Порядковый номер эксперимента указан в первой строке. Количество сегментов по отношению к пространству и времени, N и M , указано в строках 2 и 3 соответственно.

Сравнивая данные из таблиц 1.1 и 1.3, видим несомненное преимущество метода (1.44) над методом (1.8).

Глава 2

Разностные схемы для дробного по пространству уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе

2.1 Мотивировка проблемы

Дробные дифференциальные уравнения нашли интересные приложения во многих областях естествознания и техники, включая теорию вязкоупругости, теорию термоупругости, финансовые проблемы, динамику самоподобных белков и популяционную динамику, см. работы [82, 98, 103] и множество ссылок в них. Поскольку многие естественные процессы нелинейны, мы вынуждены рассматривать дробно-дифференциальные уравнения в частных производных с нелинейностью в операторах дифференцирования. С точки зрения вычислительной математики эти уравнения - исключительно сложный, увлекательный и малоизученный объект.

Явное решение таких уравнений может быть найдено только в исключительных случаях, поэтому разработка, обоснование и программная реализа-

ция численных методов для этих уравнений представляет большой интерес.

Численные методы для уравнений с частными производными и дробными производными, в которых нелинейность может быть задействована в неоднородной функции, но не в дифференциальных операторах, были разработаны и изучены в последние десятилетия. Ниже мы рассмотрим некоторые подходы к их численному решению.

Существует два основных типа дробных уравнений [98]: с дробными производными по времени, где в основном используется определение Капуто, и с дробными производными по пространственным координатам, где используются определения Римана - Лиувилля и Рисса. В данной главе мы рассматриваем только второй тип.

В [106] подход, основанный на классическом методе Кранка-Николсон, был использован для решения начально-краевых дробных диффузионных уравнений. Были проверены устойчивость, согласованность и сходимость сконструированного метода. Было показано, что дробный аналог метода Кранка - Николсон, основанный на сдвинутой формуле Грюнвальда, абсолютно устойчив. Метод экстраполяции Ричардсона был использован для увеличения порядка сходимости по пространству до второго.

Неявные разностные схемы для дробных дифференциальных уравнений в частных производных с запаздыванием были построены в [15, 95]. Авторы использовали сдвинутые формулы Грюнвальда - Летникова для аппроксимации дробных производных по пространственным переменным и L1-алгоритм аппроксимации дробных производных по времени. Эта методика взята за основу в данной главе.

Энергосохраняющая конечно-разностная схема с дробно-центрированными разностями представлена в [82].

В то же время численные методы для уравнений в частных производных с нелинейностью по операторам дифференцирования до сих пор не изуча-

лись. В [103], как и в большинстве аналогичных работ, численные методы не рассматриваются, но делаются попытки найти точное решение в виде ряда.

Разработка разностных схем для дифференциальных уравнений в частных производных с нелинейностью по операторам дифференцирования связана с рядом трудностей. Численные эксперименты показали, что явные схемы приводят к неустойчивости. С другой стороны, прямое применение неявной схемы приводит к необходимости решать нелинейные системы большой размерности. Для решения этих систем применяется метод Ньютона с предварительным переводом нелинейности в левую часть системы, эта методика такая же, как в предыдущей главе, где рассматривались уравнения с производными целого порядка. Для простоты в этой главе рассматриваются уравнения без запаздывания и зависимости в неоднородности от искомой функции, однако все результаты остаются справедливыми и для этих случаев.

2.2 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение следующего вида

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha \phi(p(x, t))}{\partial x^\alpha} + f(x, t), \quad (2.1)$$

где t и x являются независимыми переменными, $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq X$, и $p(x, t)$ является искомой функцией, ϕ — заданная нелинейная функция. Левосторонняя дробная производная определяется в смысле Римана–Лиувилля

$$\frac{\partial^\alpha F(x)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_0^x \frac{F(\xi)}{(x - \xi)^{\alpha - n + 1}} d\xi,$$

где n — целое, такое, что $n - 1 < \alpha \leq n$, а также предположим, что $F(x) = 0$ для $x \leq 0$. Далее будем рассматривать случай $1 < \alpha \leq 2$.

Начальные и граничные условия задаются следующим образом

$$p(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq X, \quad (2.2)$$

$$p(0, t) = p_0(t), \quad p(X, t) = p_1(t); \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.3)$$

Отметим, что $\alpha = 2$ представляет собой классическое уравнение диффузии. Случай $1 < \alpha \leq 2$ моделирует сверхдиффузионный поток, в котором облако диффундирующих частиц распространяется с большей скоростью, чем предсказывает классическая модель диффузии, и $\alpha = 1$ соответствует классическому адвективному потоку.

Предполагая однозначную обратимость функции $\phi(p)$ в рассматриваемой области, сделаем подстановку $u = \phi(p)$, $p = \omega(u)$, тогда (2.1) трансформируется в форму

$$\frac{\partial \omega(u(x, t))}{\partial t} = \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} + f(x, t), \quad (2.4)$$

а начальные и граничные условия могут быть записаны в виде:

$$u(x, 0) = \phi(\varphi(x)), \quad 0 \leq x \leq X, \quad (2.5)$$

$$u(0, t) = \phi(p_0(t)) = \mu_0(t), \quad u(X, t) = \phi(p_1(t)) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.6)$$

Будем предполагать, что задача (2.4) — (2.6) имеет единственное решение, понимаемое в классическом смысле, и это это решение имеет непрерывные производные по пространственной переменной x до четвертого порядка и непрерывные производные по временной переменной t до второго порядка. Также предположим, что функция ω дважды непрерывно дифференцируема в своей области определения и ее первая производная равномерно положительна

$$0 < \hat{\omega} \leq \omega'(u). \quad (2.7)$$

2.3 Разностная схема

Рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[0, X]$ на части с шагом $h = X/N$ и определим точки $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$. Также разобьем временной отрезок $[0, T]$ на M частей с шагом $\Delta = T/M$ и определим точки $t_j = j\Delta$, $j = 0, \dots, M$.

Будем обозначать через u_j^i приближения значений функции $u(x_i, t_j)$, $i = 0, 1, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$, в соответствующих узлах.

Для аппроксимации левосторонней дробной производной в узлах будем использовать сдвинутые формулы Грюнвальда [86]

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i, t_j)}{\partial x^\alpha} \approx \frac{1}{h^\alpha} \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u(x_{i+1-s}, t_j), \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

где нормализованные веса Грюнвальда определяются следующим образом $g_{\alpha,0} = 1$ и

$$g_{\alpha,s} = (-1)^s \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-s+1)}{s!}, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

Рассмотрим нелинейную неявную разностную схему (аналог схемы Кранка-Николсон), $j = 0, 1, \dots, M-1$,

$$\frac{\omega(u_{j+1}^i) - \omega(u_j^i)}{\Delta} = \frac{1}{2h^\alpha} \left(\sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u_{j+1}^{i+1-s} + \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u_j^{i+1-s} \right) + f_{j+1/2}^i, \quad (2.8)$$

для $i = 1, \dots, N-1$,

$$\text{и } u_{j+1}^0 = \mu_0(t_{j+1}), \quad u_{j+1}^N = \mu_1(t_{j+1})$$

с начальными условиями $u_j^i = \phi(\varphi(x_i))$, $i = 0, \dots, N$. Для краткости будем обозначать $f_{j+1/2}^i$ значения функции $f(x_i, t_j + \Delta/2)$.

Для каждого фиксированного j система (2.8) является нелинейной системой уравнений относительно u_{j+1}^i , $i = 1, \dots, N-1$. Для решения (2.8) на каждом временном слое j применим вариант метода Ньютона [18],

$$\begin{aligned} \omega(u_{j+1}^i[k]) + \omega'(u_{j+1}^i[k])(u_{j+1}^i[k+1] - u_{j+1}^i[k]) - \omega(u_j^i) = \\ = \frac{\Delta}{2h^\alpha} \left(\sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u_{j+1}^{i+1-s} + \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u_j^{i+1-s} \right) + \Delta f_{j+1/2}^i, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где k является номером итерации, $k = 0, 1, \dots$, и $u_{j+1}^i[k]$ обозначает k -е приближение по методу Ньютона величины u_{j+1}^i , $i = 1, \dots, N-1$. Отметим, что когда находим $u_{j+1}^i[k+1]$ в (2.9), используется u_j^i , которое представляет собой не точное решение системы, а приближение точного решения, которое получается на j -м временном слое методом Ньютона.

2.4 Разрешимость метода

Обозначим $y_j = (u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{N-1})^T \in Y$, где Y — векторное пространство размерности $N - 1$ и T — знак транспонирования.

Рассмотрим матрицу A , элементы которой $A_{i,j}$ определены следующим образом

$$A_{i,j} = \begin{cases} \eta g_{\alpha, i-j+1} & \text{for } j \leq i - 1 \\ \eta g_{\alpha, 1} & \text{for } j = i \\ \eta g_{\alpha, 0} & \text{for } j = i + 1 \\ 0 & \text{for } j > i + 1 \end{cases},$$

где $\eta = \frac{1}{2h^\alpha}$. Определим также вектор-функции $\omega(y_j)$ и f_j как вектора с компонентами $\omega(u_j^i)$ и $f(x_i, t_j)$ соответственно, тогда система (2.8) может быть представлена в следующей форме

$$\omega(y_{j+1}) - \Delta A y_{j+1} = \Delta A y_j + \omega(y_j) + \Delta f_{j+1/2}. \quad (2.10)$$

Подобным образом обозначим $y_j[k] = (u_j^1[k], u_j^2[k], \dots, u_j^{N-1}[k])^T \in Y$, и также обозначим через $\omega'(y_j)$ диагональную матрицу с элементами $\omega'(u_j^i)$ на главной диагонали в i строке.

Лемма 5 ([86]). *Матрица $\omega'(y_{j+1}[k]) - \Delta A$ является положительно определенной.*

В соответствии с этой леммой, линейная система, которая должна решаться на каждой итерации (1.8), является однозначно разрешимой для каждого k , и тогда итерационный процесс (2.9) с числом итераций K на каждом временном слое может быть записан в виде

$$y_{j+1}[k+1] = (\omega'(y_{j+1}[k]) - \Delta A)^{-1} \times \\ \times \left(\omega(y_j[K]) + \Delta A y_j[K] + \omega'(y_{j+1}[k]) y_{j+1}[k] - \omega(y_{j+1}[k]) \right) + \quad (2.11)$$

$$+ \Delta (\omega'(y_{j+1}[k]) - \Delta A)^{-1} f_{j+1/2}, \quad k = 0, \dots, K - 1,$$

$$y_{j+1}[0] = y_j[K]. \quad (2.12)$$

Каждая итерация предполагает необходимость вычисления значения нелинейных (по отношению к $y_{j+1}[k]$) операторов и решения линейных (по отношению к $y_{j+1}[k+1]$) систем. Так как $\omega'(y_{j+1}[k]) - \Delta A$ является почти треугольной матрицей, возможно применение для ее обращения специальных алгоритмов. Следовательно, итерационный алгоритм не требует больших вычислительных затрат.

2.5 Вложение разностного метода в общую нелинейную схему и устойчивость

Для того, чтобы исследовать сходимость разностной схемы (2.8), дополненной итерационным методом (2.11)–(2.12), посмотрим на них с точки зрения функционального анализа и теории операторных уравнений. Для этого используем соответствующие результаты о сходимости нелинейных разностных схем в общем виде, см. раздел 1.3. Вложим метод (2.8), (2.11)–(2.12) в эту общую схему.

Перепишем систему (2.8) (или уравнение (2.10)) в виде

$$F(y_{j+1}) = \omega(y_{j+1}) - \Delta A y_{j+1} - \Delta A y_j - \omega(y_j) - \Delta f_{j+1/2} = 0. \quad (2.13)$$

Тогда метод Ньютона (2.9) (или (2.11)) может быть записан в виде

$$\begin{aligned} y_{j+1}[k+1] &= y_{j+1}[k] - F'^{-1}(y_{j+1}[k])F(y_{j+1}[k]), \\ F'(y_{j+1}[k]) &= \omega'(y_{j+1}[k]) - \Delta A, \quad k = 0, \dots, K-1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Обозначим

$$\Psi(y) = y - F'^{-1}(y)F(y). \quad (2.15)$$

Метод (1.14) может быть записан в виде

$$y_{j+1}[K] = \tilde{S}(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_{j+1}[0]))) + \Delta \tilde{\Phi}(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_{j+1}[0])))). \quad (2.16)$$

Принимая во внимание (2.12), метод (2.16) также может быть записан в виде

$$y_{j+1}[K] = \tilde{S}(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_j[K]))) + \Delta \tilde{\Phi}(\Psi(\Psi(\dots \Psi(y_{j+1}[0])))), \quad (2.17)$$

что совпадает с формой (1.14), если взять $\hat{S}_K(\cdot) = \tilde{S}(\Psi(\Psi(\dots \Psi(\cdot))))$ и $\hat{\Phi}_K(\cdot) = \tilde{\Phi}(\Psi(\Psi(\dots \Psi(\cdot))))$.

Вложение метода в общую схему проведено.

Устойчивость метода проверяется точно также, как в разделе 1.5. А именно, теми же выкладками проверяется теорема

Теорема 8 (Теорема об устойчивости метода для дробного по пространству уравнения). *Если условия (1.28), (1.33) выполняются, тогда неявный метод (2.9), записанный в форме (1.14) устойчив в смысле определения (1.15).*

Замечание. *Оператор $\hat{\Phi}_K$, определенный согласно (1.14), (2.17) Липшицев.*

2.6 Порядок невязки и порядок сходимости

Изучим невязку метода (2.9), который представлен в форме (1.14). Сначала рассмотрим метод (2.8).

Невязкой метода (2.8) назовем сеточную функцию

$$\psi_j^i = \frac{\omega(u(x_i, t_{j+1})) - \omega(u(x_i, t_j))}{\Delta} - Au(x_i, t_j) - Au(x_i, t_{j+1}) - f_{j+1/2}, \quad (2.18)$$

где $i = 1, \dots, N - 1$, $j = 0, \dots, M - 1$.

Лемма 6. *Пусть точное решение $u(x, t)$ начально-граничной задачи (2.4)–(2.6) дважды непрерывно дифференцируемо по t , и четырежды непрерывно дифференцируемо по x и пусть дробные производные $\partial^\alpha u(x, t)/\partial x^\alpha$ дважды непрерывно дифференцируемы по t . Также пусть функция $\omega(u)$ дважды непрерывно дифференцируема в ограниченной области, содержащей решение $u(x, t)$. Тогда существует такая константа C_5 , что*

$$|\psi_j^i| \leq C_5(\Delta^2 + h), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, M - 1. \quad (2.19)$$

Доказательство. Используя тейлоровские разложения решения $u(x_i, t)$ по t в окрестности точки $(x_i, t_{j+1/2})$, получаем

$$\begin{aligned}
\psi_j^i &= \frac{1}{\Delta} \left(\omega(u(x_i, t_{j+1/2})) + \frac{\Delta}{2} \omega'(u(x_i, t_{j+1/2})) u'_t(x_i, t_{j+1/2}) + \right. \\
&+ \frac{\Delta^2}{8} (\omega''(u(x_i, t_{j+1/2})) u'(x_i, t_{j+1/2}) + \omega'(u(x_i, t_{j+1/2})) u''(x_i, t_{j+1/2})) - \\
&\quad \left. - \left[\omega(u(x_i, t_{j+1/2})) - \frac{\Delta}{2} \omega'(u(x_i, t_{j+1/2})) u'_t(x_i, t_{j+1/2}) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\Delta^2}{8} (\omega''(u(x_i, t_{j+1/2})) u'(x_i, t_{j+1/2}) + \omega'(u(x_i, t_{j+1/2})) u''(x_i, t_{j+1/2})) + O(\Delta^3) \right] \right) - \\
&\quad - Au(x_i, t_j) - Au(x_i, t_{j+1}) - f(x_i, t_{j+1/2}) = \\
&= \frac{\partial \omega(u(x_i, t_{j+1/2}))}{\partial t} + O(\Delta^2) - Au(x_i, t_j) - Au(x_i, t_{j+1}) - f_{j+1/2}.
\end{aligned}$$

В соответствии с [86]

$$Au(x_i, t_j) = \frac{\partial^\alpha u(x_i, t_j)}{\partial x^\alpha} + O(h).$$

Раскладывая дробные частные производные в ряд по t в окрестности точки $(x_i, t_{j+1/2})$, получаем (2.19). \square

Теперь изучим, как изменяется решение уравнения (2.8) при изменении параметров уравнения. Для этого вместе с уравнением вида (2.8), записанным в форме (2.13), мы рассматриваем уравнение вида

$$\bar{F}(\bar{y}_{j+1}) = \omega(\bar{y}_{j+1}) - \Delta A \bar{y}_{j+1} - \Delta A \bar{y}_j - \omega(\bar{y}_j) - \Delta f_{j+1/2} = 0, \quad (2.20)$$

где $\|\bar{y}_j - y_j\| \leq \delta$.

Лемма 7. *Имеет место следующая оценка*

$$\|\bar{y}_{j+1} - y_{j+1}\| \leq C_7 \delta. \quad (2.21)$$

Доказательство. подставим в соотношение (2.13) соотношение (2.20) и получим

$$\omega(\bar{y}_{j+1}) - \Delta A \bar{y}_{j+1} - \Delta A \bar{y}_j - \omega(y_{j+1}) - \Delta A y_{j+1} - \Delta A y_j = \omega(\bar{y}_j) - \omega(y_j).$$

Для i -й координаты это соотношение выглядит как

$$\omega(\bar{y}_{j+1}^i) - \Delta A \bar{y}_{j+1}^i - \Delta A \bar{y}_j^i - \omega(y_{j+1}^i) - \Delta A y_{j+1}^i - \Delta A y_j^i = \omega(\bar{y}_j^i) - \omega(y_j^i).$$

Используя формулу конечных приращений, получаем:

$$(\omega'(\theta) - \Delta A)(\bar{y}_{j+1}^i - y_{j+1}^i) = (\omega'(\theta_1) - \Delta A)(\bar{y}_j^i - y_j^i).$$

Из условия (2.7) свойств оператора A вытекает, что найдется константа C_7 , такая, что выполняется неравенство (2.21). \square

Теорема 9 (Теорема о порядке невязки метода для дробного по пространству уравнения). *Если условия (1.28), (1.33) выполняются, тогда неявный аппроксимационный метод (2.9), представленный в форме (1.14), имеет невязку порядка $\Delta^2 + h + \lambda^{2K}$, где $0 < \lambda < 1$. λ — число, определяемое параметрами метода.*

Доказательство. Перепишем выражение (2.18) в следующем виде

$$\omega(u(x_i, t_{j+1})) - \Delta A u(x_i, t_{j+1}) = \omega(u(x_i, t_j)) + \Delta A u(x_i, t_j) + \Delta f_{j+1/2} + \Delta \hat{\psi}_j^i,$$

Используя леммы 6, 7, получаем следующую оценку

$$|u(x_i, t_{j+1}) - u_{j+1}^i| \leq C_6 C_7 \Delta (\Delta^2 + h).$$

В соответствии с (1.34) отсюда следует

$$|u(x_i, t_{j+1}[K]) - u_{j+1}^i[K]| \leq C_6 C_7 \Delta (\Delta^2 + h + \lambda^{2K}), \quad 0 < \lambda < 1,$$

откуда следует заключение теоремы. \square

Из теорем 2, 8 и 9 вытекает основное утверждение

Теорема 10 (Теорема о порядке сходимости метода для дробного по пространству уравнения). *Метод (2.9) сходится и имеет порядок $\Delta^2 + h + \lambda^{2K}$, $0 < \lambda < 1$. λ — число, определяемое параметрами метода.*

2.7 Численные эксперименты

Рассмотрим два конкретных примера. А именно, в уравнении (2.4) возьмем $\omega(u) = \exp(u)$ в одном примере и $\omega(u) = u + u^3$ в другом примере.

Пример 2.1.

Рассмотрим начально-граничную задачу

$$\frac{\partial e^u}{\partial t} = \frac{\partial^{1.5} u}{\partial x^{1.5}} - e^{x^2 \cos t} x^2 \sin t - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \cos t \quad (2.22)$$

в области $x \in (0, 1)$, $t \in (0, 4\pi)$. Начальные и граничные условия определены следующим образом

$$u(x, 0) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Задача (2.22) имеет точное решение $u(x, t) = x^2 \cos t$.

Пример 2.2.

Рассмотрим начально-граничную задачу

$$\frac{\partial(u + u^3)}{\partial t} = \frac{\partial^{1.5} u}{\partial x^{1.5}} - (x^2 + 3x^6 \cos^2 t) \sin t - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \cos t \quad (2.23)$$

в области $x \in (0, 1)$, $t \in (0, 4\pi)$. Начальные и граничные условия определены следующим образом

$$u(x, 0) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = \cos t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Задача (2.23) имеет точное решение $u(x, t) = x^2 \cos t$.

В обоих примерах точность метода Ньютона была выбрана равной $\epsilon = 10^{-5}$. Алгоритм был реализован с использованием Python 3.7, все вычисления производились с двойной точностью.

Результаты численных примеров 2.1 и 2.2 представлены в таблице 2.1. Третий и пятый столбцы показывают максимум абсолютной величины разности между точным и численным решениями $diff_{\Delta, h} = \max_{i, j} |u_j^i - u(x_i, t_j)|$,

Табл. 2.1: Абсолютные погрешности и отношение погрешностей для примеров 2.1 и 2.2

Δ	h	пример 2		пример 3	
		$diff_{\Delta,h}$	Error rate	$diff_{\Delta,h}$	Error rate
$\pi/10$	1×2^{-2}	2.0207×10^{-2}	-	1.9947×10^{-2}	-
	1×2^{-3}	8.7812×10^{-3}	2.3012	8.8478×10^{-3}	2.2545
	1×2^{-4}	3.1322×10^{-3}	2.8035	3.1593×10^{-3}	2.8005
	1×2^{-5}	2.8955×10^{-3}	1.0817	3.2744×10^{-3}	0.9647
	1×2^{-6}	4.3512×10^{-3}	0.6654	4.6792×10^{-3}	0.6998
$\pi/20$	1×2^{-2}	2.3837×10^{-2}	-	2.3213×10^{-2}	-
	1×2^{-3}	1.2582×10^{-2}	1.8946	1.2282×10^{-2}	1.8901
	1×2^{-4}	6.0080×10^{-3}	2.0942	5.8997×10^{-3}	2.0818
	1×2^{-5}	2.4774×10^{-3}	2.4251	2.5062×10^{-3}	2.3540
	1×2^{-6}	7.8381×10^{-4}	3.1607	8.1704×10^{-4}	3.0675
$\pi/40$	1×2^{-2}	2.4683×10^{-2}	-	2.4027×10^{-2}	-
	1×2^{-3}	1.3501×10^{-2}	1.8282	1.3149×10^{-2}	1.8272
	1×2^{-4}	6.9687×10^{-3}	1.9374	6.7958×10^{-3}	1.9349
	1×2^{-5}	3.4219×10^{-3}	2.0365	3.3455×10^{-3}	2.0314
	1×2^{-6}	1.5745×10^{-3}	2.1732	1.5529×10^{-3}	2.1543

$i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M$, где N и M — числа точек разбиения отрезков по пространству и времени. Четвертый и шестой столбцы показывают коэффициент уменьшения ошибки при уточнении пространственной сетки.

В серии экспериментов с $\Delta = \pi/40$ ошибка, связанная с дискретизацией по времени, мала по сравнению с ошибкой, связанной с дискретизацией координат; анализ поведения ошибки выявляет первую сходимость по пространственным переменным, т.е. когда шаг становится вдвое меньше, ошибка также становится почти в два раза меньше.

Анализ данных таблицы показывает, что только последовательное уменьшение шагов дает уменьшение ошибки. Действительно, в серии экспериментов с $\Delta = \pi/10$ уменьшение h вдвое не приводит к соответствующему умень-

шению ошибки, поскольку полная ошибка в основном вызвана дискретизацией по времени.

Предлагаемая разностная схема устойчива при любом соотношении шагов; однако из-за некорректности численного дифференцирования уменьшение h делает приближения $\partial^\alpha u / \partial^\alpha x$ в (2.4) более чувствительными к компьютерной ошибке округления, что приводит к увеличению погрешности. Уменьшение Δ , согласованное с h , является своеобразным регуляризатором, который предотвращает рост и накопление ошибок. Эксперименты с $\Delta = \pi/10$ иллюстрируют этот факт.

Глава 3

Численный алгоритм для дробного по времени уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе

3.1 Мотивировка и постановка задачи

В этой главе, в отличие от предыдущего, рассматривается уравнение с дробной производной по времени, а не по пространству. Именно такое уравнение было предложено в модели [103]. Кроме того, в уравнение введем запаздывание общего вида.

В данной главе рассматривается одномерное по пространству уравнение подобное уравнению (1), но с эффектом запаздывания общего вида. В силу сложности объекта, основным приемом при решении таких уравнений являются сеточные методы. Сеточные методы активно применяются в последнее время для различных классов уравнений с дробными производными [39,53,67,

75, 93, 97]. Наличие нелинейности в операторе дифференцирования приводит к необходимости решать на каждом шаге по времени системы нелинейных уравнений. Особую трудность вызывают обоснование устойчивости и сходимости нелинейных сеточных методов для дробных по времени уравнений с порядком производной от 0 до 1, где техника вложения в общую нелинейную разностную схему систем с наследственностью, использованная в главах 1 и 2, неприменима. В работе предлагается численный алгоритм решения данной задачи, сходящийся при выполнении некоторого условия. Несмотря на сложность проверки этого условия, оно выполняется для некоторых задач популяционной динамики [103], в которых нелинейность квадратичная. При доказательстве сходимости используется техника, основанная на использовании дробного дискретного неравенства Гронуолла [60, 73, 74], а также техника исследования численных алгоритмов с эффектом запаздывания [10]. Для реализации нелинейной разностной схемы используется прием, изложенный в [18], состоящий в переводе нелинейности в производную по времени с последующим применением метода Ньютона. Основным результатом этой главы состоит в доказательстве теоремы сходимости при определенных условиях.

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 \phi(u)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)), \quad (3.1)$$

$0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq X$ — независимые переменные, $u(x, t)$ — искомая функция, $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), \tau \leq s < 0\}$ — предыстория искомой функции к моменту t , $\tau > 0$ — величина запаздывания. Дробная производная Капуто порядка α , $0 < \alpha < 1$, определяется формулой

$$\frac{d^\alpha F(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{F'(\xi)}{(t - \xi)^\alpha} d\xi, \quad t > 0.$$

Введем граничные и начальные условия

$$u(0, t) = u_0(t), \quad u(X, t) = u_1(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x, t), \quad 0 \leq x \leq X, \quad -\tau \leq t \leq 0. \quad (3.3)$$

Будем предполагать, что задача (3.1) — (3.3) имеет и притом единственное решение $u(t, x)$, причем оно дважды непрерывно дифференцируемое по t и четырежды непрерывно дифференцируемо по x . Также будем предполагать, что функционал $f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot))$ Липшицев по двум последним аргументам в следующем смысле. Найдутся такие константы L_1 и L_2 , что для всех $x \in [0, X]$, $t \in [0, T]$, для любых вещественных чисел u^1, u^2 и любых кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода функции $u^1(\cdot)$ и $u^2(\cdot)$ выполняется

$$|f(x, t, u^1, u^1(\cdot)) - f(x, t, u^1, u^2(\cdot))| \leq L_1 |u^1 - u^2| + L_2 \max_{s \in [-\tau, 0)} |u^1(t + s) - u^2(t + s)|. \quad (3.4)$$

Относительно функции $\omega(u)$ будем предполагать, что она дважды непрерывно дифференцируема в своей области определения и выполняется условие

$$\omega'(u) \geq \hat{\omega} > 0. \quad (3.5)$$

3.2 Разностный метод

Разобьем отрезок пространственной переменной $[0, X]$ с шагом $h = X/N$, введя точки $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N$. Отрезок $[0, T]$ разобьем с шагом $\Delta = \frac{T}{M}$. Без ограничения общности будем считать, что $\frac{\tau}{\Delta} = M_0 \in \mathbb{N}$. Пусть $t_j = j\Delta$, $j = -M_0, \dots, M$.

Приближения функций $u(x_i, t_j)$ в узлах сетки обозначим u_j^i .

Заменим производную Капуто на разностный оператор

$$D_{\Delta}^{\alpha} u_m^i = \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{j=1}^m a_{m-j} (u_j^i - u_{j-1}^i) \quad (3.6)$$

$$a_i = (i + 1)^{1-\alpha} - i^{1-\alpha}.$$

Если точное решение задачи (3.1) — (3.3) $u(x, t)$ четырежды непрерывно дифференцируемо по x и функция $\phi(u)$ дважды непрерывно дифференцируема, тогда (см., например, [72, с.48], или ссылки в [73]) метод вычисления

дробной производной (3.6) имеет порядок $2 - \alpha$

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t_m)}{\partial t^\alpha} = D_\Delta^\alpha u(x, t_m) + G_m, \quad |G_m| \leq C\Delta^{2-\alpha}. \quad (3.7)$$

Этот результат называется L_1 -аппроксимацией дробной производной.

Заменим вторую производную по x разностным оператором

$$\delta_x^2 \phi(u_m^i) = \frac{\phi(u_m^{i-1}) - 2\phi(u_m^i) + \phi(u_m^{i+1}))}{h^2}. \quad (3.8)$$

Если точное решение задачи (3.1) — (3.3) $u(x, t)$ четырежды непрерывно дифференцируемо по x и функция $\phi(u)$ дважды непрерывно дифференцируема, тогда

$$\frac{\partial^2 \phi(u(x_i, t_m))}{\partial x^2} = \delta_x^2 \phi(u(x_i, t_m)) + R_m^i, \quad |R_m^i| \leq Ch^2, \quad (3.9)$$

где C — независимая переменная.

Будем использовать кусочно-постоянную интерполяцию

$$u_m^i(t_m + s) = u_{k-1}^i, \quad t_{k-1} \leq t_m + s \leq t_k \quad (3.10)$$

с экстраполяцией продолжением

$$u_m^i(t_m + s) = u_{m-1}^i, \quad t_m \leq t_m + s \leq t_{m+1}. \quad (3.11)$$

Если точное решение непрерывно дифференцируемо по t , то этот оператор интерполяции-экстраполяции имеет первый порядок [6, с.95, 103]

Для более точного метода будем использовать кусочно-линейную интерполяцию

$$u_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}((t_k - t_j - s)u_{k-1}^i + (t_j + s - t_{k-1})u_k^i), \quad t_{k-1} \leq t_j + s \leq t_k \quad (3.12)$$

с экстраполяцией продолжением

$$u_j^i(t_j + s) = \frac{1}{\Delta}((-s)u_{j-1}^i + (\Delta + s)u_j^i), \quad t_j \leq t_j + s \leq t_{j+1}. \quad (3.13)$$

Этот оператор интерполяции-экстраполяции имеет второй порядок [6], если точное решение дважды непрерывно дифференцируемо по t .

Для $m = 1, 2, \dots, M$, рассмотрим нелинейную неявную разностную схему

$$D_{\Delta}^{\alpha} u_m^i = \delta_x^2 \phi(u_m^i) + f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_{m-1}^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.14)$$

$u_m^0 = u_0(t_m)$, $u_m^N = u_1(t_m)$, с начальными условиями $u_m^i = \varphi(x_i, t_m)$, $i = 0, \dots, N$, $m = -M_0, \dots, 0$, где $u_{m-1}^i(\cdot)$ является результатом кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением (3.10)–(3.11).

Здесь и в дальнейшем в этом разделе $u_{m-1}^i(\cdot)$ обозначает

$$u_{m-1}^i(\cdot) = (u_{m-1}^i)_{t_m}(\cdot) = \{u_{m-1}^i(t_m + s), -\tau \leq s \leq 0\}.$$

Замечание. *Более точный вариант неявной разностной схемы*

$$D_{\Delta}^{\alpha} u_m^i = \delta_x^2 \phi(u_m^i) + f(x_i, t_m, 2u_{m-1}^i - u_{m-2}^i, u_{m-1}^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (3.15)$$

где $u_{m-1}^i(\cdot)$ – результат кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением (3.12) – (3.13).

3.3 Анализ погрешности

В предположении однозначной разрешимости метода (3.14) проведем анализ его погрешности.

Погрешностью метода (3.14) называется разность $\varepsilon_m^i = u(x_i, t_m) - u_m^i$. Будем говорить что погрешность имеет порядок $\Delta^p + h^q$, если существует константа C такая что для любого $i = 1, \dots, N-1$, $m = 1, \dots, M$ выполненное неравенство $|\varepsilon_m^i| \leq C(\Delta^p + h^q)$.

Невязкой (без интерполяции) метода (3.14) назовем сеточную функцию

$$\psi_m^i = D_{\Delta}^{\alpha} u(x_i, t_m) - \delta_x^2 \phi(u(x_i, t_m)) - f(x_i, t_m, u(x_i, t_m), u_{t_m}(x_i, \cdot)), \quad (3.16)$$

$$i = 1, \dots, N-1, \quad m = 1, \dots, M.$$

Лемма 8 (Порядок невязки без интерполяции). *Если функция $\phi(u)$ дважды непрерывно дифференцируема, точное решение задачи (3.1) – (3.3) $u(x, t)$*

дважды непрерывно дифференцируемо по t , и четырежды непрерывно дифференцируемо по x , то невязка (без интерполяции) метода (3.14) имеет порядок малости временному шагу равный $2 - \alpha$ и второй по пространственному шагу, т.е. найдется постоянная C , такая, что для всех $i = 1, \dots, N - 1$, $m = 1, \dots, M$

$$|\psi_m^i| \leq C(\Delta^{2-\alpha} + h^2). \quad (3.17)$$

Доказательство. Из определения невязки без интерполяции (3.16), а также соотношений (3.7) и (3.9) вытекает

$$\psi_m^i = \frac{\partial^\alpha u(x, t_m)}{\partial t^\alpha} - G_m - \frac{\partial^2 \phi(u(x_i, t_m))}{\partial x^2} + R_m^i - f(x_i, t_m, u(x_i, t_m), u_{t_m}(x_i, \cdot)), \quad (3.18)$$

$$|G_m| \leq C_1 \Delta^{2-\alpha}, \quad |R_m^i| \leq C_2 h^2.$$

Так как $u(x_i, t_m)$ — точное решение уравнения (3.1) в узле (x_i, t_m) , то отсюда вытекает заключение леммы. □

Невязкой с интерполяцией метода (3.14) назовем сеточную функцию

$$\hat{\psi}_m^i = D_\Delta^\alpha u(x_i, t_m) - \delta_x^2 \phi(u(x_i, t_m)) - f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), u_{m-1}^i(\cdot)), \quad (3.19)$$

где $u_{m-1}^i(\cdot) = I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})$ — результат кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением дискретной предыстории точного решения.

Лемма 9. *Если функция $\phi(u)$ дважды непрерывно дифференцируема, точное решение задачи (3.1)–(3.3) $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируемо по t , и четырежды непрерывно дифференцируемо по x , то невязка с интерполяцией) метода (3.14) имеет первый порядок малости по Δ и второй по h .*

Доказательство. Невязка с интерполяцией и невязка без интерполяции связаны соотношением

$$\hat{\psi}_m^i = \psi_m^i + f(x_i, t_m, u(x_i, t_m), u_{t_m}(x_i, \cdot)) - f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), u_{m-1}^i(\cdot)), \quad (3.20)$$

Из условия липшицевости функционала f по двум последним аргументам (3.4) следует

$$\begin{aligned} & |f(x_i, t_m, u(x_i, t_m), u_{t_m}(x_i, \cdot)) - f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), u_{m-1}^i(\cdot))| \leq \quad (3.21) \\ & \leq L_1(u(x_i, t_m) - u(x_i, t_{m-1})) + L_2 \max_{s \in [-\tau, s]} |u(x_i, t_m + s) - u_{m-1}^i(t_m + s)|. \end{aligned}$$

В силу непрерывной дифференцируемости точного решения по t выполняется

$$|u(x_i, t_m) - u(x_i, t_{m-1})| \leq \tilde{C}\Delta. \quad (3.22)$$

Так как кусочно-постоянная интерполяция имеет первый порядок малости по Δ на точном решении [6, с.95] и экстраполяция продолжением постоянной также имеет первый порядок малости по Δ на точном решении [6, с.102], то найдется такая константа \hat{C} , что выполняется

$$\max_{s \in [-\tau, 0]} |u(x_i, t_m + s) - u_{m-1}^i(t_m + s)| \leq \hat{C}\Delta. \quad (3.23)$$

Из (3.20), леммы 8 и оценок (3.21), (3.22), (3.23) вытекает утверждение леммы.

□

Приведем вариант дискретного дробного неравенства Гронуолла.

Лемма 10 ([73]). Пусть имеются неотрицательные последовательности w_k и g_k удовлетворяющие

$$D_{\Delta}^{\alpha} w_k \leq \lambda_1 w_k + \lambda_2 w_{k-1} + g_k, \quad \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0,$$

тогда

$$w_k \leq 2 \left(w_0 + \frac{(t_k)^{\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha)} \max_{0 \leq j \leq k} g_j \right) E_{\alpha}(2\lambda(t_k)^{\alpha}),$$

где $\lambda = \lambda_1 + \frac{\lambda_2}{a_0 - a_1}$, $a_0 - a_1 = 2 - 2^{1-\alpha}$, $E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$ — функция Миттаг-Леффлера.

Лемма 11 (Формула суммирования по частям). Пусть $u = (0, u^1, u^2, \dots, u^{N-1}, 0)$, $v = (0, v^1, v^2, \dots, v^{N-1}, 0)$, обозначим $\delta_x u^{i+1/2} = \frac{u^{i+1} - u^i}{h}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{N-1} \delta_x^2 u^i v^i = - \sum_{i=0}^{N-1} \delta_x u^{i+1/2} \delta_x v^{i+1/2}$$

Утверждение леммы проверяется непосредственно по определению.

Приведем также несколько норм, которые будут использоваться в доказательстве теоремы сходимости.

Для $u = (0, u^1, u^2, \dots, u^{N-1}, 0)$, $v = (0, v^1, v^2, \dots, v^{N-1}, 0)$, введем скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle = h \sum_{i=0}^{N-1} \delta_x u^{i+\frac{1}{2}} \delta_x v^{i+\frac{1}{2}},$$

послойную разностную норму

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$$

и послойную энергетическую норму

$$\langle u, v \rangle_h = h \sum_{i=0}^{N-1} u^i v^i, \quad \|u\|_h^2 = \langle u, u \rangle_h.$$

Введем также послойную максимум-норму

$$\|u\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N-1} |u^i|$$

Отметим связь норм [20, 74]

$$\|u\|_\infty^2 \leq \frac{X}{4} \|u\|^2, \quad (3.24)$$

$$\|u\|_h^2 \leq \frac{X^2}{6} \|u\|^2. \quad (3.25)$$

Сформулируем одно условие, при котором выполняется сходимость метода. Предварительно заметим, что если функция ϕ непрерывно дифференцируема, то по формуле конечных приращений $\phi(u(x_i, t_m)) - \phi(u_m^i) = \phi'(v_m^i) \varepsilon_m^i$.

Условие 3.1. Пусть выполняется

$$\sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) \delta_x^2 (\phi(u(x_i, t_m)) - \phi(u_m^i)) \leq \sum_{i=1}^{N-1} (-h) (\delta_x^2 \varepsilon_m^i)^2. \quad (3.26)$$

Заметим, что если функция ϕ непрерывно дифференцируема, то по формуле конечных приращений $\phi(u(x_i, t_m)) - \phi(u_m^i) = \phi'(\vartheta_m^i) \varepsilon_m^i$, где ϑ_m^i точка между $u(x_i, t_m)$ и u_m^i . Тогда условие (3.26) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) \delta_x^2 (\phi'(\vartheta_m^i) \varepsilon_m^i) \leq \sum_{i=1}^{N-1} (-h) (\delta_x^2 \varepsilon_m^i)^2. \quad (3.27)$$

Если в окрестности точного решения $u(x_i, t_m)$ выполняется

Условие 3.2.

$$\phi'(u) \geq 1, \quad (3.28)$$

то Условие 3.1 заведомо выполняется.

Теорема 11. *Предположим, что выполняются условия Леммы 8 и Условие 3.1, тогда погрешность метода (3.14) имеет первый порядок малости по Δ и второй по h .*

Доказательство. Из (3.14) и (3.19) получаем

$$\begin{aligned} D_{\Delta}^{\alpha} \varepsilon_m^i &= \delta_x^2 (\phi(u_m^i) - \phi(u(x_i, t_m))) + f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})) - \\ &\quad - f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_j^i(\cdot)) + \hat{\psi}_m^i. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Умножим обе части этого равенства на $-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i$ и просуммируем по i от 1 до $N - 1$:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^{N-1} h\delta_x^2 \varepsilon_m^i D_{\Delta}^{\alpha} \varepsilon_m^i &= \sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) \delta_x^2 (\phi'(\vartheta_m^i) \varepsilon_m^i) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) (f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})) - f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_j^i(\cdot))) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} (-h\delta_x^2 \varepsilon_m^i) \hat{\psi}_m^i. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Оценим снизу левую часть уравнения (3.30) с помощью определения (3.6) и формулы суммирования по частям

$$\begin{aligned}
- \sum_{i=1}^{N-1} h \delta_x^2 \varepsilon_m^i D_{\Delta}^{\alpha} \varepsilon_m^i &= \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=1}^{N-1} (-h) \delta_x^2 \varepsilon_m^i (\varepsilon_m^i - \sum_{j=1}^{m-1} (a_{m-j-1} - a_{m-j}) \varepsilon_j^i - \\
&\quad - a_{m-1} \varepsilon_0^i) = \frac{h}{\Delta^{\alpha} \Gamma(2-\alpha)} \sum_{i=0}^{N-1} (\delta_x \varepsilon_m^{i+1/2}) (\delta_x \varepsilon_m^{i+1/2} - \\
&\quad - \sum_{j=1}^{m-1} (a_{m-j-1} - a_{m-j}) \delta_x \varepsilon_j^{i+1/2} - a_{m-1} \delta_x \varepsilon_0^{i+1/2}) = \\
&= \frac{1}{\Delta^{\alpha} \Gamma(2-\alpha)} \left(\langle \varepsilon_m, \varepsilon_m \rangle - \sum_{j=1}^{m-1} (a_{m-j-1} - a_{m-j}) \langle \varepsilon_m, \varepsilon_j \rangle - a_{m-1} \langle \varepsilon_m, \varepsilon_0 \rangle \right) \geq \\
&\geq \frac{1}{\Delta^{\alpha} \Gamma(2-\alpha)} \left(\|\varepsilon_m\|^2 - \sum_{j=1}^{m-1} (a_{m-j-1} - a_{m-j}) \frac{\|\varepsilon_m\|^2 + \|\varepsilon_j\|^2}{2} - \right. \\
&\quad \left. - a_{m-1} \frac{\|\varepsilon_m\|^2 + \|\varepsilon_0\|^2}{2} \right) = \frac{1}{2} D_{\Delta} \|\varepsilon_m\|^2.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Здесь ε_m — послойный вектор погрешности

$$\varepsilon_m = (0, \varepsilon_m^1, \varepsilon_m^2, \dots, \varepsilon_m^{N-1}, 0).$$

Применим неравенство Коши-Шварца для оценки последних двух слагаемых в правой части соотношения (3.30), и, воспользовавшись Липшицевостью функции f по третьему и четвертому аргументам, определением оператора кусочно-постоянной интерполяции и Леммой 9, получаем

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N-1} (-h \delta_x^2 \varepsilon_m^i) (f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})) - f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_j^i(\cdot))) + \\
+ \sum_{i=1}^{N-1} (-h \delta_x^2 \varepsilon_m^i) \hat{\psi}_m^i \leq h \sum_{i=1}^{N-1} (\delta_x^2 \varepsilon_m^i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} h |\hat{\psi}_m^i|^2 + \\
+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} h |f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})) - f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_j^i(\cdot))|^2 \leq
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
&\leq h \sum_{i=1}^{N-1} (\delta_x^2 \varepsilon_m^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} h L_f^2 \max_{m-1-M_0 \leq k \leq m-1} (\varepsilon_k^i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} h C^2 (\Delta + h^2)^2 \leq \\
&\leq \|\delta_x^2 \varepsilon_m\|_h^2 + 2L_f^2 \max_{m-1-M_0 \leq k \leq m-1} \|\varepsilon_k\|_h^2 + C^2 X (\Delta + h^2)^2.
\end{aligned}$$

Обозначим через $\|\{\varepsilon_k\}_m\|_h$ максимальную норму предыстории погрешности:

$$\|\{\varepsilon_k\}_m\|_h = \max_{m-M_0 \leq k \leq m} \|\varepsilon_k\|_h,$$

тогда полученную оценку можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N-1} (-h \delta_x^2 \varepsilon_m^i) (f(x_i, t_m, u(x_i, t_{m-1}), I(\{u(x_i, t_k)\}_{m-1})) - f(x_i, t_m, u_{m-1}^i, u_j^i(\cdot))) + \\
&\quad (3.33) \\
&+ \sum_{i=1}^{N-1} (-h \delta_x^2 \varepsilon_m^i) \hat{\psi}_m^i \leq \|\delta_x^2 \varepsilon_m\|_h^2 + 2L_f^2 \|\{\varepsilon_k\}_{m-1}\|_h^2 + C^2 X (\Delta + h^2)^2.
\end{aligned}$$

Оценим первое слагаемое в правой части соотношения (3.30) с помощью соотношения (3.26).

Если выполняется соотношение (3.26), то из (3.30), (3.31) и (3.32), а также связи норм (3.25) получаем

$$D_\Delta \|\varepsilon_m\|^2 \leq \frac{2L_f^2 X^2}{3} \|\{\varepsilon_k\}_{m-1}\|_h^2 + 2C^2 X (\Delta + h^2)^2. \quad (3.34)$$

Применим лемму 10 (дробное дискретное неравенство Гронуолла), получим

$$\|\varepsilon_m\|^2 \leq 4 \frac{(t_m)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} E_\alpha(2\lambda(t_m)^\alpha) C^2 X (\Delta + h^2)^2, \quad \lambda = \frac{2L_f^2 X^2}{3(2-2^{1-\alpha})}. \quad (3.35)$$

Используя связь норм (3.24), получаем утверждение теоремы. \square

Аналогичным образом доказывается следующая теорема.

Теорема 12. *Предположим, что выполняются условия Леммы 8 и Условие 3.1, тогда погрешность метода (3.15) имеет порядок $\Delta^{2-\alpha} + h^2$.*

3.4 Приближенное решение нелинейной разностной схемы

Разностная схема (3.14) на каждом временном шаге представляет собой нелинейную систему большой размерности, поэтому непосредственное нахождение ее решения весьма затруднительно. Изложим методику ее решения с помощью применения метода Ньютона, предварительно переведя нелинейность в левую часть, этот прием описан в [18].

Предполагая однозначную обратимость $\phi(u)$ на интересующей нас области, сделаем замену $z = \phi(u)$, $u = \omega(z)$, соответственно $z_m^i = \phi(u_m^i)$, тогда (3.14) для каждого $m = 1, \dots, M$ запишется в виде

$$\begin{aligned} D_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_m^i) &= \delta_x^2 u_m^i + f(x_i, t_m, \omega(z_{m-1}^i), \omega(u_{m-1}^i)(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ z_m^0 &= \phi(u_0(t_m)), \quad z_m^N = \phi(u_1(t_m)), \end{aligned} \quad (3.36)$$

с начальными условиями $z_0^i = \phi(\varphi(x_i))$, $i = 0, \dots, N$.

Перепишем эту систему, явно выделив в левой части уравнения слагаемые, содержащие неизвестные величины. Обозначим

$$\begin{aligned} D_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_m^i) &= \hat{D}_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_m^i) + \tilde{D}_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_{m-1}^i) = \\ &= \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (\omega(z_m^i) - \omega(z_{m-1}^i)) + \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=1}^{m-1} a_{m-j} (\omega(z_j^i) - \omega(z_{j-1}^i)), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \omega(z_m^i) - \delta_x^2 z_m^i &= \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \omega(z_{m-1}^i) - \tilde{D}_{\Delta}^{\alpha} \omega(z_{m-1}^i) + \\ &+ f(x_i, t_m, \omega(z_{m-1}^i), \omega(u_{m-1}^i)(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \\ z_m^0 &= \phi(u_0(t_m)), \quad z_m^N = \phi(u_1(t_m)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

При каждом фиксированном m (3.37), также как и (3.14) является системой нелинейных относительно u_m^i , $i = 1, \dots, N-1$, уравнений, поиск ее точного решения затруднителен, однако ее структура позволяет эффективно использовать численные методы решения нелинейных уравнений.

Для решения (3.37) на каждом временном слое m применим метод Ньютона. Обозначим приближение z_m^i на k итерации через $z_m^i[k]$, возьмем $z_m^i[0] = z_{m-1}^i$, тогда

$$\omega(z_m^i[k+1]) = \omega(z_m^i[k]) + \omega'(z_m^i[k+1])(z_m^i[k+1] - z_m^i[k])$$

и получаем на каждой итерации линейную систему

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \omega'(z_m^i[k]) z_m^i[k+1] - \delta_x^2 z_m^i[k+1] &= \\ &= \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (\omega'(z_m^i[k]) z_m^i[k] - \omega(z_m^i[k])) + \\ + \frac{\Delta^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \omega(z_{m-1}^i) - \tilde{D}_\Delta^\alpha \omega(z_{m-1}^i) + f(x_i, t_m, \omega(z_{m-1}^i), \omega(u_{m-1}^i)(\cdot)). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Система (3.38) представляет собой трехдиагональную систему линейных уравнений и может быть решена методом прогонки, если для всех допустимых z выполняется условие

$$\omega'(z) > 0. \quad (3.39)$$

3.5 Численные эксперименты

Пример 3.1.

В области $x \in (1, 2)$, $t \in (0.0256, 1.0256)$ рассмотрим нелинейную начально-краевую задачу с распределенным запаздыванием

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} &= \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2-\alpha} - \frac{t_0^2 (t-t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right) x^2 \\ &+ \int_{-\tau}^0 u(x, t+s) ds + x^2 (-\tau t^2 + \tau^2 t - \tau^3/3), \end{aligned} \quad (3.40)$$

где порядок производной Капуто $\alpha = 0.5$, начальное время $t_0 = 0.0256$.

Величина запаздывания $\tau = 0.5$. Начальные и граничные условия устанавливаются следующим образом:

$$u(1, t) = t^2, \quad u(2, t) = 4t^2, \quad u(x, t_0) = u(x, 0.0256) = 0.0256^2 x^2.$$

Задача (3.40) имеет точное решение $u(x, t) = x^2 t^2$. В таблице 3.1 приведены результаты численных экспериментов с разным числом точек разбиения по времени и пространству. На рисунке 3.1 можно увидеть абсолютную погрешность решения уравнения, полученного методом (3.14), (3.38).

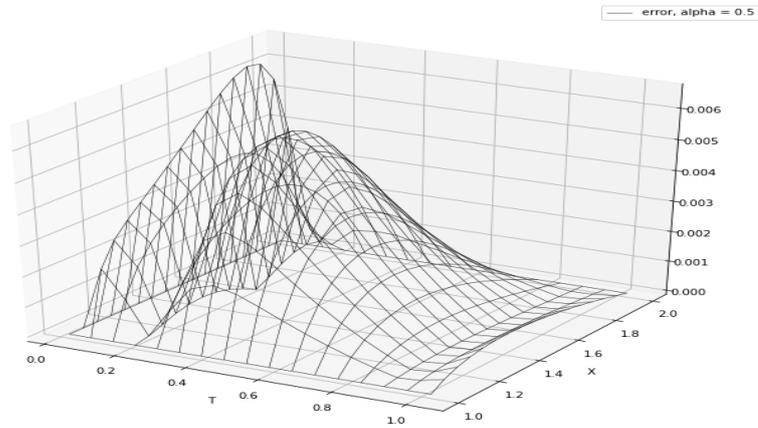


Рис. 3.1: Абсолютная погрешность решения уравнения (3.40) при количестве шагов по x – 16, по t – 16

N	M	Error
4	4	0.057222
4	8	0.013424
4	16	0.006258
8	8	0.013126
8	16	0.006539
16	16	0.006628

Таблица 3.1: Норма разностей точного и приближенного решений уравнения (3.40) при разных шагах дискретизации

Эксперименты показывают уменьшение погрешности метода при увеличении количества шагов.

Глава 4

Программный комплекс для численного исследования моделей популяционной динамики

Разработанные методы численного решения дифференциальных уравнений реализованы на языке программирования Python 3.7 и включены в расширяемый комплекс программ «Исследование дробных моделей популяционной динамики». Комплекс прошел процедуру государственной регистрации программы для ЭВМ, получено соответствующее свидетельство. Программный комплекс предназначен для специалистов в области математического моделирования, анализа популяционных моделей. Тип ЭВМ: ПК с браузером поддерживающим сервис Google Colab или персональный компьютер с системой Jupyter Notebook Python; ОС: Windows 10 и выше, Linux, MacOS.

Вычислительные эксперименты, в которых использовался комплекс, описаны в главе 5; эксперименты, упомянутые в главах 1-3, проводились с помощью различных версий комплекса.

Данная глава посвящена используемым в комплексе технологиям, описываются их основные функциональные возможности и компоненты, рассматриваются примеры работы программного комплекса.

4.1 Используемые технологии

Программный комплекс реализован в виде модульной программы на языке Python, где «модули» представлены в виде `ipynb`-файлов - документов, которые хранятся в текстовом формате JSON. Они включают в себя входные и выходные данные вычислений, непосредственно исполняемый код, изображения и пояснительный текст.

Для визуализации графики используется библиотека Matplotlib версии 2.1.1.

Межплатформенная совместимость Программный комплекс разрабатывался с использованием облачной платформы Google Colaboratory (Colab) позволяющей использовать для анализа и визуализации данных библиотеки Python. Данная платформа была выбрана поскольку код непосредственно исполняется на облачных серверах Google, что позволяет использовать аппаратное обеспечение Google, в том числе графические процессоры и TPU, независимо от мощности машины на которой запускается код. Это позволило проводить эксперименты с большим количеством итераций. Кроме того для отладки использовалась среда Jupyter Notebook позволяющая запускать части кода и выполнять их в произвольном порядке, что существенно ускорило время работы комплекса при изменении некоторых вводных параметров.

4.2 Состав программного комплекса и его функциональные возможности

В состав разработанного программного комплекса входят четыре независимых модуля для исследования разработанных численных методов решения дифференциальных уравнений с нелинейностью в дифференциальном операторе. В них реализованы и визуализированы алгоритмы соответствующих методов:

1. Неявного разностного метода для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе описанного в главе 1.2 модуль **1NFD**.
2. Аналога метода Кранка-Николсон для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе описанного в главе 1.8 модуль **2KNFD**.
3. Неявного разностного метода для дробного по пространственной переменной уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе описанного в главе 2.3 модуль **3FSFD**.
4. Неявного разностного метода для дробного по времени уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе описанного в главе 3.2 модуль **4FTFD**.

Для решения задач методами, описанными в главах 2–3, возникла необходимость использовать библиотеку `scipy.special` в которой описана положительная гамма-функция. Входными данными являются:

1. Порядок дробной производной.
2. Вид функции неоднородности.
3. Правая и левая границы области определения краевой задачи, заданные по времени и по пространству.
4. Количество шагов метода по пространственной переменной.
5. Количество шагов метода по времени.

Поскольку разработанный программный комплекс является универсальным для уравнений одного вида, а функция неоднородности зависит от искомой функции, при запуске программы необходимо указывать какую функцию неоднородности из заданного набора мы хотим использовать сейчас. В результате работы программы пользователь получит следующую информацию:

1. Максимальная норма разностей точного и приближенного решений уравнений.
2. График функции абсолютной разницы между точным и численным решениями.
3. Время затраченное на исполнение файла.

Дополнительно для оценки можно вывести графики точного и приближенного решений. Результаты численных экспериментов могут быть сохранены в различных форматах, в том числе может быть произведена выгрузка в Microsoft Excel или LaTeX.

4.3 Примеры работы программного комплекса

Продемонстрируем работу программного комплекса на примере 3.1 из главы 3.

В области $x \in (1, 2)$, $t \in (0.0256, 1.0256)$ рассмотрим нелинейную начально-краевую задачу с распределенным запаздыванием

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3 - \alpha)} t^{2-\alpha} - \frac{t_0^2 (t - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \right) x^2 \\ + \int_{-\tau}^0 u(x, t + s) ds + x^2 (-\tau t^2 + \tau^2 t - \tau^3/3). \end{aligned} \quad (4.1)$$

порядок производной Капуто $\alpha = 0.5$, начальное время $t_0 = 0.0256$. Величина запаздывания $\tau = 0.5$. Начальные и граничные условия устанавливаются следующим образом:

$$u(1, t) = t^2, \quad u(2, t) = 4t^2, \quad u(x, t_0) = u(x, 0.0256) = 0.0256^2 x^2.$$

Задача (4.1) имеет точное решение $u(x, t) = x^2 t^2$.

Для решения этой задачи используем разностный метод для дробного по времени уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе. Откроем файл **4FTFD.ipynb**.

Из предложенных вариантов выберем функцию неоднородности:

```
res = (gamma(3) / gamma(3 - alpha) * t**(2 - alpha) - tInit**2 /  
(t - tInit)**alpha/gamma(1-alpha)) * x**2 - 12 * t**4 * x**2 + uDelay +  
x**2 * (-tau * t**2 + tau**2 * t - tau**3/3)
```

Зададим порядок производной:

```
alpha = 0.5
```

Укажем правую и левую границы области определения краевой задачи заданные по времени и по пространству:

```
xLeft = 1
```

```
xRight = 2
```

```
tInit = 0.0256
```

```
tFinal = 1.0256
```

Зададим количество шагов метода по времени и пространству:

```
numberOfSegm_x = 32
```

```
numberOfSegm_t = 16
```

По умолчанию выбрана точность метода $\epsilon = 10^{-7}$, но этот параметр также можно изменить. Запускаем программу.

По завершению работы программы пользователь видит максимум абсолютной ошибки:

```
0.0066622311711010095
```

и график функции

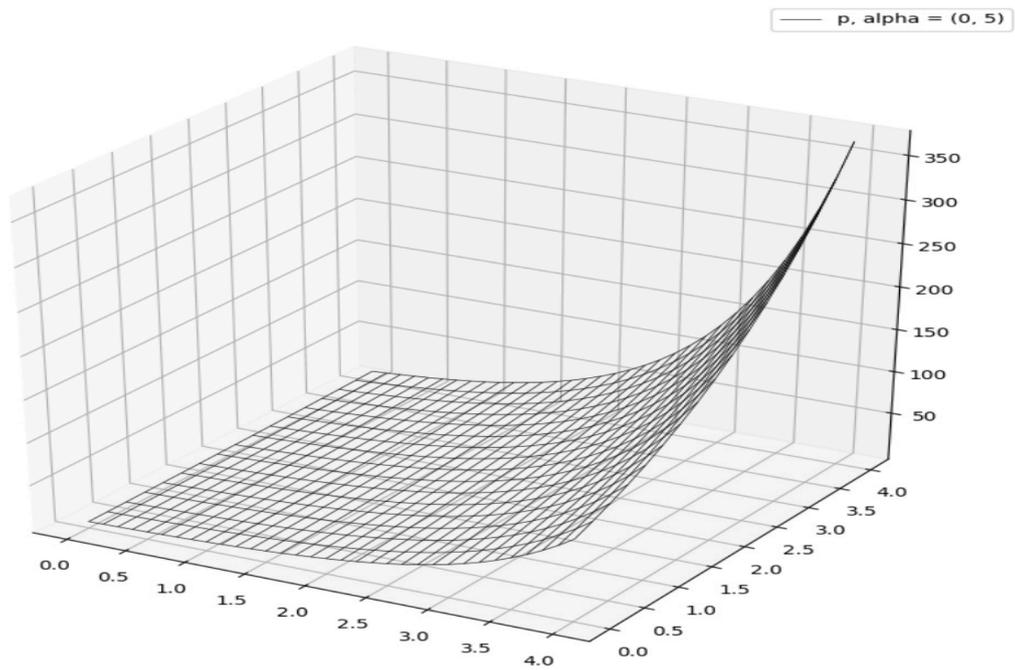


Рис. 4.1: График функции $p(x, t)$.

Глава 5

Численные эксперименты для моделей популяционной динамики

Классическим уравнением популяционной динамики является уравнение Колмогорова–Петровского–Пискунова [7] (уравнение Фишера)

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + p(1 - p), \quad (5.1)$$

использованное Фишером для описания пространственного распределения выгодных аллелей. Здесь $p(x, t)$ — плотность распределения числа особей, обладающих выгодным аллелем, $t > 0$ — временная переменная, $x \in (-\infty, \infty)$ — пространственная.

Также уравнение Фишера используется в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, в физике плазмы и задачах теории фазовых переходов. В частности, позволяет моделировать, массоперенос в двухкомпонентной неподвижной смеси при наличии объемной химической реакции квазипервого порядка. Функция неоднородности (кинетическая функция) $f(p) = p(1 - p)$ моделирует автокаталитическое цепное превращение в теории горения [16].

В [7] ставится начальная задача и показывается, что решение имеет форму бегущей волны. Уравнение (5.1) исследовано и с граничными условиями на

отрезке $[a, b]$, в частности показано, что для любых классических граничных условий (например, для условий Неймана: $\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=a} = \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=b} = 0$) задача имеет только один аттрактор — однородное состояние равновесия $p(x, t) \equiv 1$. Все остальные состояния равновесия неустойчивы.

Разработанные в главах 1 – 3 численные методы позволяют исследовать уравнение (5.1) как частный случай, когда запаздывание отсутствует, производная имеет целый порядок и функция, присутствующая в операторе дифференцирования является линейной.

Пример 5.1

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + p(1 - p)$$

с начальными условиями

$$p(x, 0) = e^{-20(0.5-x)^2} \sin \pi x, \quad x \in [0, 1]$$

и однородными граничными условиями

$$p(0, t) = p(1, t) = 0, \quad t \in [0, T] = [0, 1].$$

Профиль начального условия отражает тот факт, что концентрация особей наибольшая в центре обитания популяции и снижается к краям. Вид граничных условий на границе области обитания (например, острова или болота) особи существовать не способны.

В разработанном программном комплексе укажем левую и правую границы пространственно переменной, зададим границы временного отрезка:

xLeft = 0

xRight = 1

tInit = 0

tFinal = 1

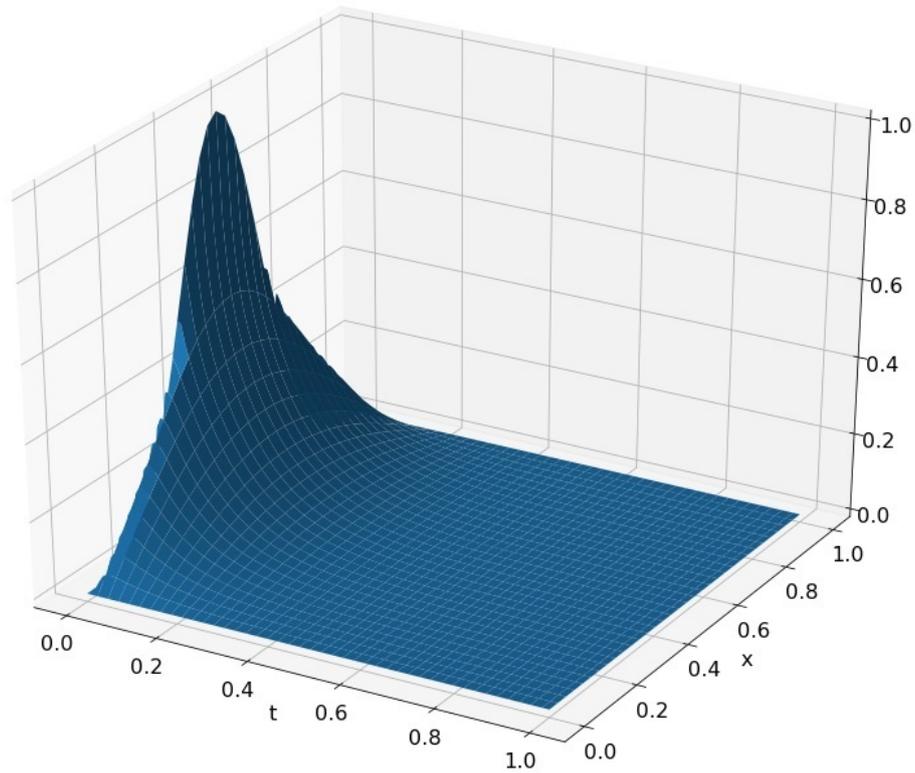


Рис. 5.1: График решения $p(x, t)$ для уравнения КПП.

Для построения равномерной сетки зададим число отрезков разбиения по пространству и по времени:

```
numberOfSegm_x = 32
numberOfSegm_t = 128
```

Запускаем программу.

На первом временном слое решение имеет следующий профиль, см. рис. 5.2.

На четвертом временном слое функция $p(x, t)$ становится выпуклой вверх и остается таковой при всех $t \in [t_4, T]$. Именно, на последнем временном слое решение имеет следующий профиль, см. рис. 5.3.

Задача демонстрирует существование аттрактора $p(x, t) \equiv 0$. Такие популяции обречены на вымирание.

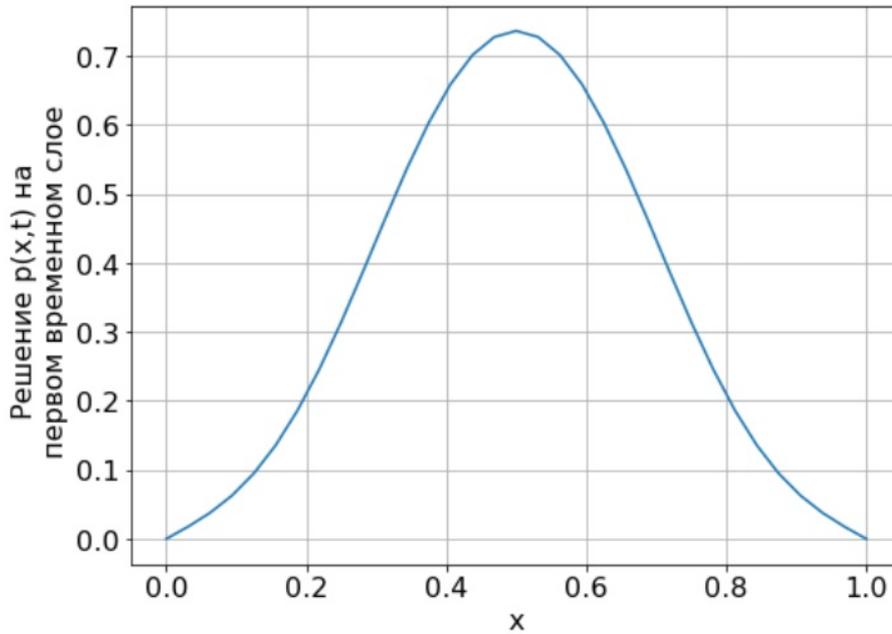


Рис. 5.2: График решения $p(x, t)$ на первом временном слое для уравнения КПП.

Пример 5.2

Введем запаздывание в модель. Именно, рассмотрим начально краевую задачу

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + p(1 - p) + \lambda \int_{-\tau}^0 p(x, t + s) ds$$

с начальными условиями

$$p(x, s) = \sin \pi x, \quad x \in [0, 1] \times [-\tau, 0]$$

и однородными граничными условиями

$$p(0, t) = p(1, t) = 0, \quad t \in [0, T] = [0, 5].$$

Параметр $\tau > 0$ — величина запаздывания, параметр λ характеризует силу влияния запаздывания.

При $\tau = 1$ и $0 \leq \lambda \leq 9.8$ наблюдаем следующую качественную картину: при каждом фиксированном t решение $p(x, t)$ выпуклое вверх, т. е. его вторая производная по x отрицательна. Решение монотонно убывает по t . Задача демонстрирует существование аттрактора $p(x, t) \equiv 0$, см. рис. 5.4. Такие популяции обречены на вымирание.

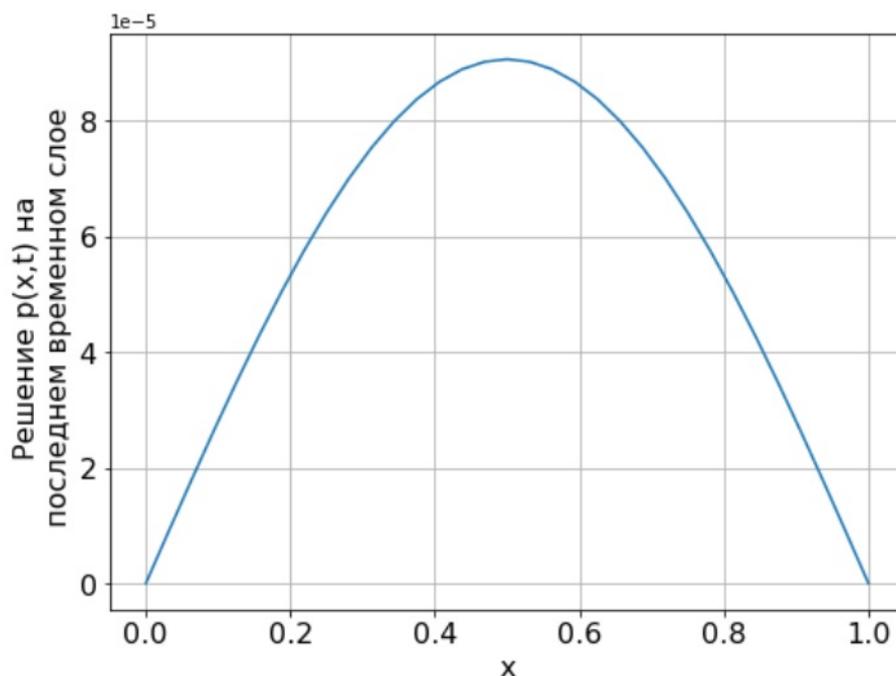


Рис. 5.3: График решения $p(x, t)$ на последнем временном слое для уравнения КПП.

Однако, при увеличении параметра λ появляется неустойчивое стационарное решение, далее при $\lambda \geq 10$ решение монотонно возрастает по t . Решение остается выпуклое вверх, см. рис 5.5. С содержательной точки зрения это может быть интерпретировано следующим образом: наибольшая концентрация особей наблюдается в центре ареала обитания, а к периферии концентрация особей на единицу пространства снижается до нуля.

Данный факт хорошо известен в биологии. В центре ареала условия обитания близки к оптимальным, поэтому вид может занимать разнообразные места обитания. Всюду он будет конкурентоспособным. На границах ареала вид может занимать только те места обитания, которые наиболее благоприятны для его жизнедеятельности, так как на него действует комплекс неблагоприятных климатических и биотических факторов. Его выживаемость и конкурентоспособность на пределе ареала очень низкая. Например, распространение на север косули не происходит из-за глубины снежного покрова в зимние месяцы.

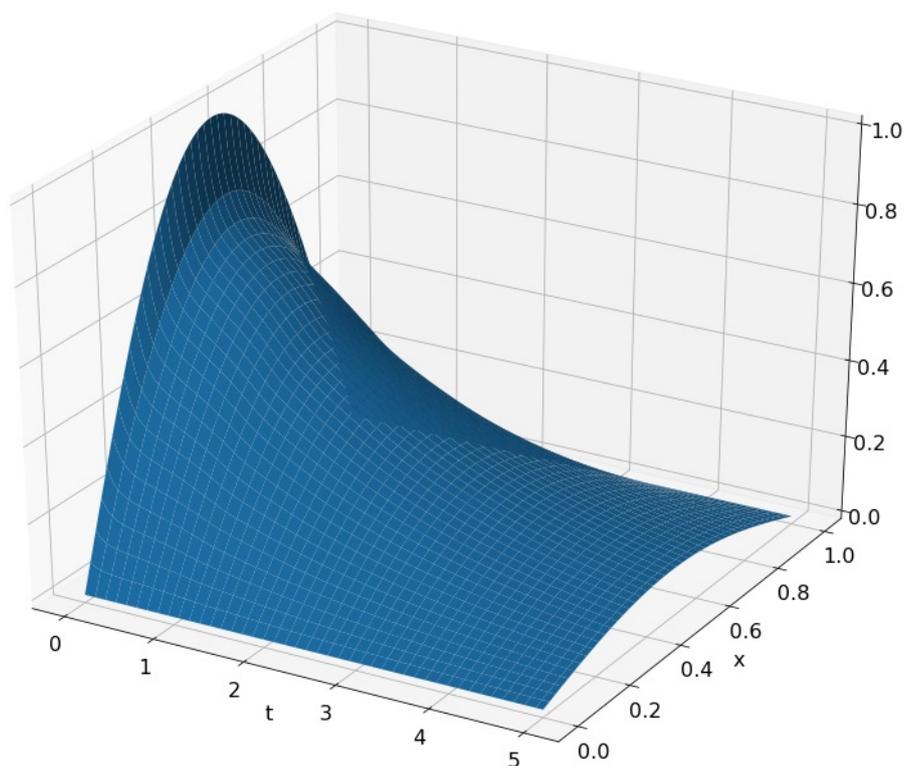


Рис. 5.4: График решения $p(x, t)$ при $\lambda = 7$ и $\tau = 1$.

Пример 5.3

Мотивацией к рассмотрению нелинейных операторов дифференцирования по пространству является следующий факт, имеющий место в популяционной динамике [57].

Перемещения, как правило, совершаются либо взрослыми животными, которых гонят взрослые захватчики, либо молодыми животными, только достигшими зрелости, покидающими свою родительскую территорию, чтобы обосноваться на собственной территории для размножения. В обоих случаях обосновано считать, что особи будут направляться на близлежащую свободную территорию. Следовательно, в модели движение происходит почти исключительно против градиента плотности населения и будет тем более быстрым, чем выше плотности населения.

Данная постановка приводит к следующему уравнению

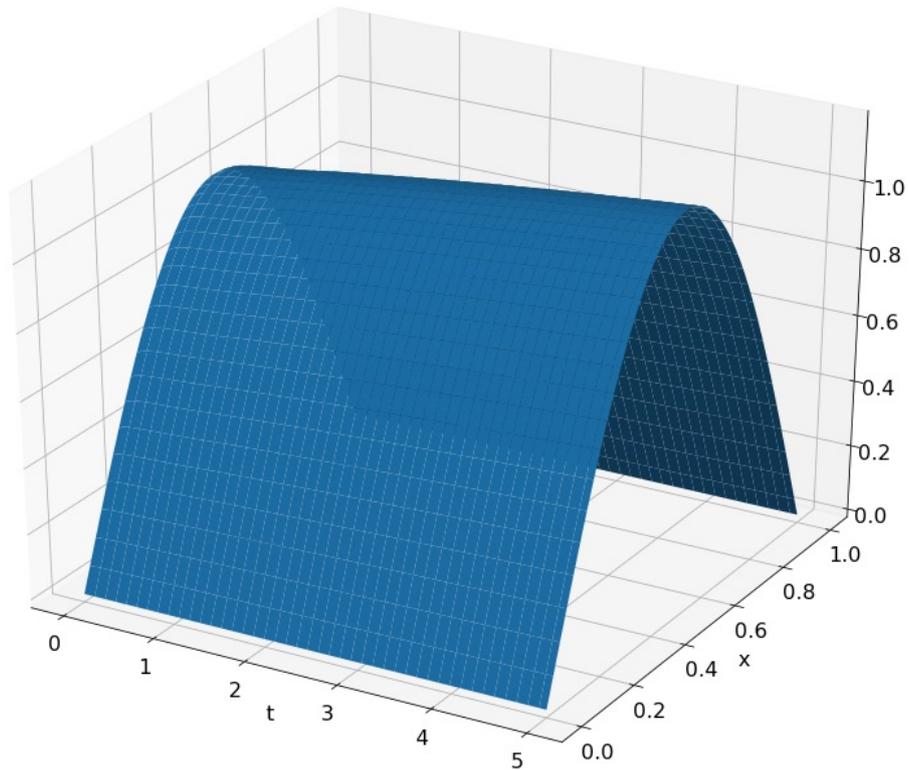


Рис. 5.5: График решения $p(x, t)$ при $\lambda = 10$ и $\tau = 1$.

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi(p)(x, t)}{\partial x^2} + p(1 - p)$$

с начальными условиями

$$p(x, s) = \sin \pi x, \quad x \in [0, 1] \times [-\tau, 0]$$

и однородными граничными условиями

$$p(0, t) = p(1, t) = 0, \quad t \in [0, T] = [0, 5].$$

Функция нелинейности $\phi(p) = p^2$.

Наличие нелинейности вида p^2 в операторе дифференцирования не меняет характер решения, см. рис. 5.6. В данной задаче это может быть объяснено следующим образом. Диффузионную составляющую можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial^2 p^2(x, t)}{\partial x^2} = 2 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + 2p \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

где вторая производная по пространству входит со множителем равным плотности населения. В самом центре ареала диффузия (т. е. разбегание к краям ареала) особей максимальная, а к краям ареала она снижается. Однако и для рассмотренных примеров 5.1. и 5.2 имел место тот же эффект. Здесь он получил некоторое усиление за счет множителя u .

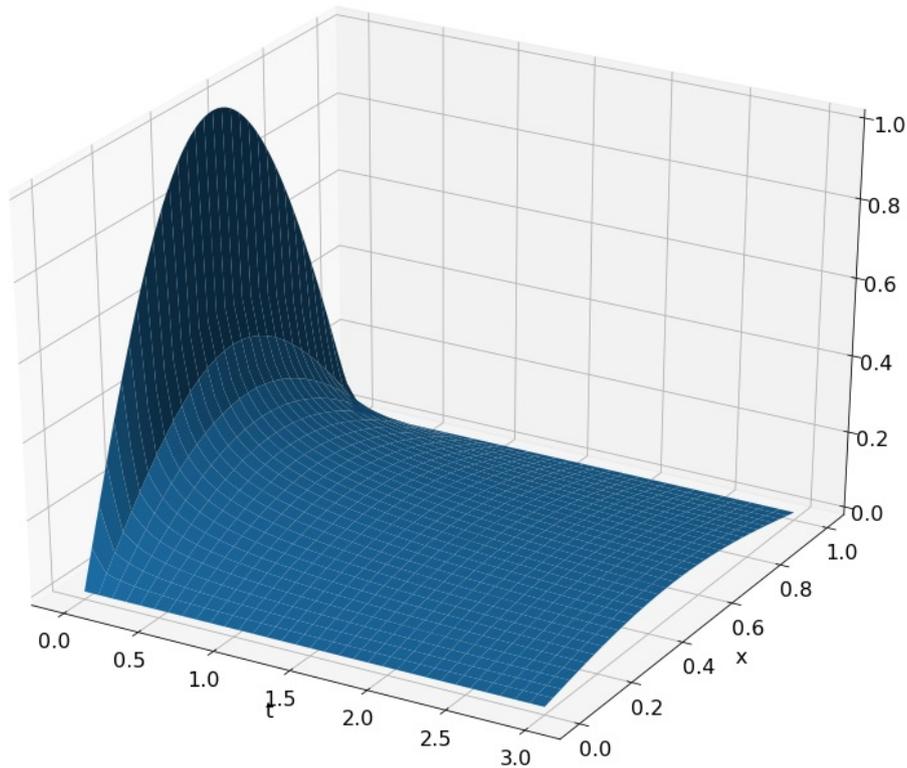


Рис. 5.6: График решения $p(x, t)$ при $\phi = p^2$.

Пример 5.4

Рассмотрим модельный пример, являющийся частным случаем обобщенной дробной модели популяции с запаздыванием [103]

$$\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial x^2} + p(1 - \lambda p), \quad (5.2)$$

где α — порядок производной, ϕ — заданная нелинейная функция, λ — числовой параметр.

При $\alpha = 1$, $\phi(u) = u$ уравнение (5.2) является аналогом уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова с запаздыванием или уравнение Хатчинсона с диффузией.

В [103] для $\alpha \in [0, 1]$ и $\phi(u) = u^2$ сформулирована начальная задача на бесконечном промежутке с условием

$$p(x, 0) = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x\right)$$

и было найдено точное решение $p = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x\right) E_\alpha(t^\alpha)$, где $E_\alpha(t^\alpha)$ — функция Миттаг-Леффлера, $E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1 + k\alpha)}$. Однако, для краевых задач численный метод в [103] не описан.

Поставим начально-краевую задачу, определив начальные условия

$$p(x, 0) = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x\right), \quad x \in [0, 1],$$

и граничные условия

$$p(0, t) = E_\alpha(t^\alpha), \quad p(1, t) = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) E_\alpha(t^\alpha), \quad t \in [0, 2].$$

Положим $\alpha = 0.5$, применив метод (3.14) и получим приближенное решение в узлах равномерной сетки. В табл. 5.1. приведены параметры сетки и норма разности точного и приближенного решений.

Пример 5.5

Введем запаздывание в уравнение, рассмотренное в примере 5.4.

$$\frac{\partial^\alpha p}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 \phi(p)}{\partial x^2} + p(1 - \lambda p) + a \int_{-\tau}^0 p(x, t + s) ds, \quad (5.3)$$

Таблица 5.1: Оценка погрешности приближенных решений уравнения (5.2) при различных шагах дискретизации, M — число отрезков разбиения по времени, N — число отрезков разбиения по пространству.

N	M	Error
4	4	0.087213
4	8	0.022815
4	16	0.012639
8	8	0.018816
8	16	0.008974
16	32	0.008182

где τ — величина запаздывания, a — числовой параметр, и поставим начально-краевую задачу, определив начальные условия

$$p(x, s) = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}x\right) E_\alpha(s^\alpha), \quad x \in [0, 1], \quad s \in [-\frac{1}{2}, 0],$$

и граничные условия

$$p(0, t) = E_\alpha(t^\alpha), \quad p(1, t) = \exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\right) E_\alpha(t^\alpha), \quad t \in [0, 2].$$

Применив метод (3.14), получим приближенное решение.

Таблица 5.1 иллюстрирует тот факт, что максимальная величина абсолютной погрешности убывает при увеличении числа разбиений по времени и пространству, что согласуется с теоретическим материалом.

Заключение

Для важного с практической точки зрения класса моделей популяционной динамики, содержащих уравнение диффузионного типа, осложненное эффектами дробных производных, нелинейности в операторах дифференцирования и запаздывания общего вида в диссертационной работе получены следующие основные результаты:

- Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе разработан, протестирован и исследован на устойчивость и порядок сходимости неявный численный метод в сочетании с методом Ньютона для решения возникающей системы нелинейных уравнений;
- Для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе разработан, протестирован и исследован на устойчивость и порядок сходимости аналог метода Кранка-Николсон;
- Для дробного по пространственной переменной уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе разработан, протестирован и исследован на устойчивость и порядок сходимости аналог метода Кранка-Николсон в сочетании с методом Ньютона для решения возникающей системы нелинейных уравнений;
- Для дробного по времени уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе и с эффектом запаздывания разработан, протестирован

и исследован на устойчивость и порядок сходимости неявный численный метод в сочетании с методом Ньютона для решения возникающей системы нелинейных уравнений.

Рекомендации и дальнейшие перспективы разработки темы

Одним из возможных направлений для продолжения исследований может послужить разработка более точных численных методов для решения всех задач, рассмотренных в диссертации. Так для диффузионного уравнения с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе возможна разработка и исследование аналога компактной схемы, имеющей четвертый порядок малости по пространственному шагу. Для дробного по пространственной переменной уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе можно рассмотреть уравнения с эффектом наследственности. Для этого класса задач возможна разработка численных методов второго порядка по шагу времени. Для дробного по времени уравнения с нелинейностью в дифференциальном операторе и с эффектом запаздывания возможно перенести на этот класс уравнений метод А.А.Алиханова порядка $3 - \alpha$ по шагу времени. Эти, более точные методы, могут быть оформлены в виде комплекса программ, предназначенные для решения соответствующих задач в теории популяций и аналогичных задач в других науках, например, в газовой динамике.

Интересным направлением является повышение точности разностных схем с использованием экстраполяции по Ричардсону. При достаточной гладкости решения начально-краевой задачи ошибка метода допускает разложение в ряд по степеням некоторого малого параметра, которым является, например, шаг сетки. Это открывает возможность составить линейную комбинацию решений, найденных при разных шагах, таким образом, что главные члены в разложении погрешностей сократятся и точность метода повысится.

Эти более точные методы могут быть оформлены в виде комплекса про-

грамм, предназначенные для решения соответствующих задач в теории популяций и аналогичных задач в других науках, например, в газовой динамике.

Другое возможное направление исследований связано с задачами двух пространственных переменных. Именно такие задачи рассматривались в базовой популяционной модели Srivastava, так как особи, как правило, распространяются по поверхности. В диссертации рассмотрен случай одной пространственной переменной, этот случай можно рассматривать как случай центральной пространственной симметрии. Двумерные по пространству задачи очень актуальны и в настоящее время исследования в этом направлении интенсивно проводятся рядом авторов. Однако численные методы для таких задач с эффектом нелинейности в операторе дифференцирования не разработаны и могут послужить предметом дальнейших исследований.

Литература

- [1] С.В. Алешин, С.Д. Глызин, С.А. Кащенко. Уравнение Колмогорова–Пискунова–Петровского с запаздыванием // Модел. и анализ информ. систем., 2015, т. 22, № 2, с. 304–321.
- [2] А.А. Алиханов. Устойчивость и сходимости разностных схем для краевых задач уравнения диффузии дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016, т. 56, №. 4, с. 572–586.
- [3] В.Г. Бабский, А.Д. Мышкис. Математические модели в биологии, связанные с учетом последствия // Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. М. Мир. 1983. С. 383–394.
- [4] А.К. Баззаев, М.Х. Шхануков-Лафишев. Локально-одномерные схемы для уравнения диффузии с дробной производной по времени в области произвольной формы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2016, т. 56, №. 1, с. 113–123.
- [5] З. Камонт, К. Кропельница. Неявные разностные методы для эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычис. математики. 2011, т. 14, №. 4, с. 361–379.
- [6] А.В. Ким, В.Г. Пименов. i -Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Москва-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2004.

- [7] А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов. Исследование уравнения диффузии, соединенной с нарастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1:6, 1037.
- [8] А.М. Нахушев. Уравнения математической биологии. Москва: Высшая школа, 1995.
- [9] Е.А. Омельченко, М.В. Плеханова, П.Н. Давыдов. Численное решение линеаризованной системы уравнений фазового поля с запаздыванием // Вестник ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. 2013. Т.5, № 2. С. 45–52.
- [10] В.Г. Пименов. Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 105–114.
- [11] В.Г. Пименов. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2014.
- [12] В.Г. Пименов, А.В. Лекомцев. Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, №1, С. 102–118, перевод A.V. Lekomtsev, V.G. Pimenov, Convergence of the Alternating Direction Methods for the Numerical Solution of a Heat Conduction Equation with Delay, Proc. Steklov Inst. Math., 272. Suppl. 1, 101–118, 2011.
- [13] В.Г. Пименов, А.Б. Ложников. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1, С. 178–189, перевод V.G. Pimenov and A. B. Lozhnikov, Difference Schemes for the Numerical Solution of the Heat Conduction

Equation with Aftereffect, Proc. Steklov Inst. Math., vol. 275, no. S1, pp. 137-148, 2011.

- [14] В.Г. Пименов, Е.Е. Таширова. Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью // Труды ИММ УрО РАН, 2012, Т. 18, № 2, С. 222–231. перевод V.G. Pimenov, E.E. Tashirova, Numerical methods for solving a hereditary equation of hyperbolic type. Proc. Steklov Inst. Math., vol. 281. Suppl. 1, pp. 126–136, 2013.
- [15] В.Г.Пименов, А.С.Хенди. Неявный численный метод решения дробного уравнения адвекции-диффузии с запаздыванием // Труды ИММ УрО РАН Т. 22, № 2. С. 218–227, 2016.
- [16] Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — С. 11. — 432 с.
- [17] А.В. Псху. Уравнения в частных производных дробного порядка. Москва: Наука, 2005.
- [18] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987, перевод S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Boca Raton, CRC Press, 1993.
- [19] А.А. Самарский. Теория разностных схем. 3-е изд. М.: Наука, 1989.
- [20] А.А. Самарский, В.Б. Андреев. Конечно-разностные методы для эллиптических уравнений. Москва: Наука, 1976.
- [21] С.И. Солодушкин. Разностная схема для численного решения уравнения переноса с последствием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. №. 10. С. 77–82.

- [22] Ф.И. Тауркенова, М.Х. Шхануков-Лафишев. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006, т. 46, № 10, с. 1871–1881.
- [23] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М. : Мир, 1990.
- [24] Э. Хайрер, Г. Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М. : Мир, 1999.
- [25] Дж. Хейл. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1984.
- [26] Д. Холл, Д. Уатт. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1979.
- [27] М.Х. Шхануков. О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной // Доклады АН, 1996, т. 348, № 6, с. 746–748.
- [28] В.Е. Федоров, В.М. Гордиевских, М.В. Плеханова. Уравнения в банаховых пространствах с обобщенным оператором дробной производной // Дифференц. уравнения, 2015, т. 51, № 10, с. 1360–1368, перевод V.E. Fedorov, D. M. Gordievskikh and M. V. Plekhanova. Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative // Differential equations. 2015, vol. 51, no. 10, pp. 1360–1368.
- [29] A.A. Alikhanov. Boundary value problems for the diffusion equation of the variable order in differential and difference settings. Applied Mathematics and Computation, vol. 219, 3938–3946, 2012.
- [30] A.A. Alikhanov, A new difference scheme for the time fractional diffusion equation, J. Comput. Phys., vol. 280, pp. 424–438, 2015.

- [31] A.J. Arenas, G. Gonzalez-Parra, B. M. Carabalo. A nonstandard finite difference scheme for a nonlinear Black–Scholes equation. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 57, pp. 1663–1670, 2013.
- [32] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J.J. Trujillo, *Fractional Calculus Models and Numerical Methods*, in: *Series on Complexity Non linearity and Chaos*, World Scientific, Boston, 2012.
- [33] A. Bellen and M. Zennaro, *Numerical methods for delay differential equations*. Oxford university press, 2003.
- [34] S. Bhalekar, Dynamical analysis of fractional order Ucar prototype delayed system, *Signal, Image Video Process.*, vol. 6, no. 3, pp. 513-519, 2012.
- [35] S. Bhalekar and V. Daftardar-Gejji, Fractional ordered Liu system with time-delay, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 15, no. 8, pp. 2178-2191, 2010.
- [36] A.H. Bhrawy, M.A. Abdelkawy, F. Mallawi. An accurate Chebyshev pseudospectral scheme for multi-dimensional parabolic problems with time delays, *Bound Value Probl.*, vol. 103, pp. 1–20, 2015.
- [37] A.H. Bhrawy and M.A. Zaky, Numerical algorithm for the variable-order Caputo fractional functional differential equation, *Nonlinear Dyn.*, vol. 85, no. 3, pp. 1815-1823, 2016.
- [38] L. Chang, G.-Q. Sun, Z. Wang, and Z. Jin, Rich dynamics in a spatial predator-prey model with delay, *Appl. Math. Comput.*, vol. 256, pp. 540-550, 2015.
- [39] H. Chen, M. Stynes. Error Analysis of a Second-Order Method on Fitted Meshes for a Time-Fractional Diffusion Problem, *Journal of Scientific Computing*, vol. 79, no. 1, pp. 624–647, 2019.

- [40] R.V. Culshaw, S. Ruan, and G. Web, A mathematical model of cell-to-cell spread of HIV-1 that includes a time delay, *J. Math. Biol.*, vol. 46, pp. 425–444, 2003.
- [41] W. Czernous and Z. Kamont, Implicit difference methods for parabolic functional differential problems of the Neumann type, *Nonlinear Oscil.*, vol. 11, no. 3, pp. 345-364, 2008.
- [42] V. Daftardar-Gejji, Y. Sukale, and S. Bhalekar, Solving fractional delay differential equations: A new approach, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 18, no. 2, pp. 400-418, 2015.
- [43] V. Daftardar-Gejji, Y. Sukale, and S. Bhalekar, A new predictor-corrector method for fractional differential equations, *Appl. Math. Comput.*, vol. 244, pp. 158-182, 2014.
- [44] M. Dehghan and R. Salehi. Solution of a nonlinear time-delay model in biology via semi-analytical approaches, *Computer Physics Communications*, vol. 181, pp. 1255–1265, 2010.
- [45] K. Diethelm, *The Analysis of Fractional differential equations*. Berlin: Springer, 2010.
- [46] K. Diethelm and N.J. Ford, Analysis of fractional differential equations, *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 265, no. 2, pp. 229-248, 2002.
- [47] Y.B. Ding and H. C. Ye, A fractional-order differential equation model of HIV infection of $CD4^+$ T-cells, *Math. Comput. Model.*, vol. 50, no. 3-4, pp. 386-392, 2009.
- [48] R. Du, W. R. Cao, and Z. Z. Sun, A compact difference scheme for the fractional diffusion-wave equation, *Appl. Math. Model.*, vol. 34, pp. 2998–3007, 2010.

- [49] S. Dubey and M. Sharma, Solutions to fractional functional differential equations with nonlocal conditions, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 17, no. 3, pp. 655–673, 2014.
- [50] R.A. Fisher. The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics*, vol. 7, pp. 353–369, 1937
- [51] U. Forys, Biological delay systems and the mikhaïlov criterion of stability, *J. Biol. Syst.*, vol. 12, no. 1, pp. 45-60, 2004.
- [52] A.C. Fowler, Asymptotic methods for delay equations, *J. Eng. Math.*, vol. 53, no. 3-4, pp. 271-290, 2005.
- [53] Gao G., Alikhanov A.A., Sun Z. The temporal second order difference schemes based on the interpolation approximation for solving the time multi-term and distributed-order fractional sub-diffusion equations, *Journal of Scientific Computing*, vol. 73, no. 1, pp. 93–121, 2017.
- [54] P. Garcia, M.A. Castro, J.A. Martin, and A.Sirvent, Convergence of two implicit numerical schemes for diffusion mathematical models with delay, *Math. Comput. Model.*, vol. 52, no. 7-8, pp. 1279–1287, 2010.
- [55] M. Ghasemi, M. Fardi, and R. Khoshsiar Ghaziani, Numerical solution of nonlinear delay differential equations of fractional order in reproducing kernel Hilbert space, *Appl. Math. Comput.*, vol. 268, pp. 815-831, 2015.
- [56] K.Gopalsamy. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Kluwer Academic Pub. Dordrecht. 1992.
- [57] Gurney WSC, Nisbet RM. The regulation of inhomogenous populations. *J Theor Biol* 1975;52:441e57.
- [58] Z. Hao, K. Fan, W. Cao, and Z. Sun, A finite difference scheme for semi linear space-fractional diffusion equations with time delay, *Appl. Math. Comput.*, vol. 275, pp. 238–254, 2016.

- [59] A.S. Hendy, J.E. Macias-Diaz. A novel discrete Gronwall inequality in the analysis of difference schemes for time-fractional multi-delayed diffusion equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 73, pp. 110–119, 2019.
- [60] A.S. Hendy, V.G. Pimenov, J.E. Macias-Dias. Convergence and stability estimates in difference setting for time-fractional parabolic equations with functional delay, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 36, no. 1, pp. 118–132, 2020.
- [61] A.S. Hendy, M.A. Zaky. Global consistency analysis of L1-Galerkin spectral schemes for coupled nonlinear space-time fractional Schrodinger equations, *Applied Numerical Mathematics*, vol. 156, pp. 276–302, 2020.
- [62] F. Hofling and T. Franosch, Anomalous transport in the crowded world of biological cells, *Reports Prog. Phys.*, vol. 76, pp. 46602, 2013.
- [63] G.E. Hutchinson. Circular causal systems in ecology, *Annals of the New York Academy Sciences*, vol. 50, pp. 221–246, 1948.
- [64] Z. Jackiewicz, H. Liu, B. Li, and Y. Kuang, Numerical simulations of traveling wave solutions in a drift paradox inspired diffusive delay population model, *Math. Comput. Simul.*, vol. 96, pp. 95–103, 2014.
- [65] I. Karatay, N. Kale, and S.R. Bayramoglu, A new difference scheme for time fractional heat equations based on Crank-Nicholson method, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 16, pp. 893–910, 2013.
- [66] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam, Elsevier, 2006
- [67] N. Kopteva. Error analysis for time-fractional semilinear parabolic equations using upper and lower solutions, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 58, pp. 2212–2234, 2020.

- [68] K. Kropielnicka, Convergence of Implicit Difference Methods for Parabolic Functional Differential Equations. *Int. Journal of Mat. Analysis*, vol. 1, no. 6, 257–277, 2007.
- [69] V. Lakshmikantham, Theory of fractional functional differential equations, *Nonlinear Anal.*, vol. 69, no. 10, pp. 3337–3343, 2008.
- [70] S. Kutluay, A.R. Bahadir, A. Ozdez. Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol., 103, pp. 251–261, 1999.
- [71] A. Lekomtsev, V., Pimenov, Convergence of the scheme with weights for the numerical solution of a heat conduction equation with delay for the case of variable coefficient of heat conductivity, *Appl. Math. Comput.*, vol. 256, pp. 83–93, 2015.
- [72] C.P. Li, F.H. Zeng. *Numerical Methods for Fractional Calculus*. Boca Raton, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2015.
- [73] D. Li, H. Liao, W. Sun, J. Wang and J. Zhang. Analysis of L1-Galerkin FEMs for Time-Fractional Nonlinear Parabolic Problems, *Commun. Comput. Phys.*, vol. 24, no. 1, pp. 86–103, 2018.
- [74] L. Li, B. Zhou, X. Chen, Z. Wang. Convergence and stability of compact finite difference method for nonlinear time fractional reaction-diffusion equations with delay, *Appl. Math. and Comput.*, vol. 337, pp. 144–152, 2018.
- [75] H. Liao, D. Li, J. Zhang. Sharp error estimate of the nonuniform L1 formula for linear reaction-subdiffusion equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 56, no. 2, pp. 1112–1133, 2018.
- [76] H.L. Liao, W. McLean, J. Zhang. A Discrete Gronwall Inequality with Applications to Numerical Schemes for Subdiffusion Problems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 57, no. 1, pp. 218–237, 2019.

- [77] F. Liu, I. Turner, V. Anh, Q. Yang, and K. Burrage, A numerical method for the fractional Fitzhugh-Nagumo monodomain model, *Math. Soc.*, vol. 54, pp. 608-629, 2012.
- [78] F. Liu, P. Zhuang, V. Anh, I. Turner, K. Burrage, Stability and convergence of the difference methods for the space–time fractional advection–diffusion equation. *Appl. Math. Comput.*, vol. 191, pp. 12–20, 2007.
- [79] F. Liu, P. Zhuang, K. Burrage, Numerical methods and analysis for a class of fractional advection–dispersion models. *Computers and Mathematics with Applications*. vol. 64, 2990–3007, 2012.
- [80] F. Liu, P. Zhuang, I. Turner, V. Anh, and K. Burrage, A semi-alternating direction method for a 2-D fractional FitzHugh-Nagumo monodomain model on an approximate irregular domain, *J. Comput. Phys.*, vol. 293, pp. 252-263, 2015.
- [81] P.P. Liu, Periodic solutions in an epidemic model with diffusion and delay, *Appl. Math. Comput.*, vol. 265, pp. 275–291, 2015.
- [82] J.E. Macias-Diaz, A.S. Hendy, R.H. De Staelen, A pseudo energy-invariant method for relativistic wave equations with Riesz space-fractional derivatives, *Computer Physics Communications*, vol. 224, pp. 98–107.
- [83] R.L. Magin, *Fractional Calculus in Bioengineering*, Begell House Publishers, 2006.
- [84] R.L. Magin, Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 59, no. 5, pp. 1586-1593, 2010.
- [85] M.M. Meerschaert and C. Tadjeran, Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations, *J. Comput. Appl. Math.* vol. 172, no. 1, pp. 65-77, 2004.

- [86] M.M. Meerschaert and C. Tadjeran, Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations, *Appl. Numer. Math.*, vol. 56, no. 1, pp. 80-90, 2006.
- [87] K. Miller, B. Ross. *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. New York, Wiley, 1993.
- [88] B. P. Moghaddam and Z. S. Mostaghim, A numerical method based on finite difference for solving fractional delay differential equations, *J. Taibah Univ. Sci.*, vol. 7, no. 3, pp. 120-127, 2013.
- [89] M. L. Morgado, N. J. Ford, and P. M. Lima, Analysis and numerical methods for fractional differential equations with delay, *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 252, 159-168, 2013.
- [90] B. Parsa Moghaddam and Z. Salamat Mostaghim, A novel matrix approach to fractional finite difference for solving models based on nonlinear fractional delay differential equations, *Ain Shams Eng. J.*, vol. 5, no. 2, pp. 585-594, 2014.
- [91] S.G. Oldham, J. Spanier, *The fractional calculus*. New York, Acad. Press, 1974.
- [92] Z. Ouyang, Existence and uniqueness of the solutions for a class of nonlinear fractional order partial differential equations with delay, *Comput. Math. with Appl.*, vol. 61, no. 4, pp. 860-870, 2011.
- [93] M. Stynes, E. O’Riordan, J. Gracia. Error analysis of a finite difference method on graded meshes for a time-fractional diffusion equation // *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 55. no. 2, pp. 1057–1079, 2017.
- [94] V.G. Pimenov, A.S. Hendy, R.H. De Staelen. On a class of non-linear delay distributed order fractional diffusion equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 318, pp. 433–443, 2017.

- [95] V.G. Pimenov, A.S. Hendy. A fractional analog of Crank-Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay, *Ural Mathematical Journal*, vol 2, No 1, pp. 48–57, 2016.
- [96] V.G. Pimenov, A.B. Lozhnikov, Numerical methods for evolutionary equations with delay and software package PDDE, Springer, *Theoretical Computer Science and General Issues, NAA 2012*, vol. 8236, pp. 437–444, 2013.
- [97] L. Plociniczak. Numerical method for the time-fractional porous medium equation, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 57, no. 2, pp. 638–656, 2019.
- [98] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, San Diego, Acad. Press, 1999.
- [99] D. V. V Ramana Reddy, a. Sen, and G. L. L. Johnston, Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation, *Phys. D Nonlinear Phenom.*, vol. 129, no. 1-2, pp. 15-34, 1999.
- [100] J. Ren and Z.Z. Sun, Maximum norm error analysis of difference schemes for fractional diffusion equations, *Appl. Math. Comput.*, vol. 256, pp. 299–314, 2015.
- [101] F. A. Rihan, *Computational Methods for Delay Parabolic and Time-Fractional Partial Differential Equations*, *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, vol. 26, no. 6, pp. 1557–1571, 2009.
- [102] E. Schumacher. *Ordinary and Fractional Diffusion in Simple Biological Models*. Louvain-la-Neuve, 2010.
- [103] V.K. Srivastava, S. Kumar, M.K. Awasthi, B. Kumar Singh. Two-dimensional time fractional-order biological population model and its analytical solution. *Egypt. J. Basic Appl. Sci.*, vol. 1, pp. 71–76, 2014.

- [104] S.I. Solodushkin, I.F. Yumanova, R.H. De Staelen. First order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 289, pp. 322–330, 2015.
- [105] Y. Su, J. Wei, and J. Shi, Hopf bifurcations in a reaction-diffusion population model with delay effect, *J. Differ. Equations*, vol. 247, pp. 1156-1184, 2009.
- [106] H. Tadjeran, C. Meerschaert, and M. Scheffler, A second-order accurate numerical approximation for the fractional diffusion equation, *J. Comput. Phys.*, vol. 56, no. 1, pp. 65-77, 2006.
- [107] L. Tavernini, Finite Difference Approximations for a Class of Semilinear Volterra Evolution Problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 14., no. 5, 931–949, 1977.
- [108] J. A. Tenreiro MacHado, Time-delay and fractional derivatives, *Adv. Differ. Equations*, vol. 2011, 2011.
- [109] J. Tumwiine, S. Luckhaus, J.Y.T. Mugisha, and L.S. Luboobi, An age-structured mathematical model for the within host dynamics of malaria and the immune system, *J. Math. Model Algor.*, vol. 7, pp. 79–97, 2008.
- [110] P.J. Van Der Houwen, B.P. Sommeijer, C.T.H. Baker, On the stability of predictor-corrector methods for parabolic equations with delay. *IMA J. Numer. Anal.* vol. 6, pp. 1–23, 1986.
- [111] Z. Wang, X. Huang, and J. Zhou, A numerical method for delayed fractional-order differential equations: Based on G-L definition, *Appl. Math. Inf. Sci.*, vol. 7, no. 2 L, pp. 525-529, 2013.
- [112] H. Wang, K. Wang, and T. Sircar, A direct $O(N \log^2 N)$ finite difference method for fractional diffusion equations, *J. Comput. Phys.*, vol. 229, no. 21, pp. 8095-8104, 2010.

- [113] J. Wu, Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations, New York, Springer-Verlag, 1996.
- [114] Y. Yan and C. Kou, Stability analysis of a fractional differential model of HIV infection of $CD4^+$ T-cells with time delay, Math. Comput. Simul., vol. 82, pp. 1572–1585, 2012.
- [115] B. Zhang and Y. Zhou, Qualitative Analysis of Delay Partial Difference Equations. New York, Hindawi Publishing Corporation, 2007.
- [116] Q. Zhang and C. Zhang, A new linearized compact multisplitting scheme for the nonlinear convection-reaction-diffusion equations with delay, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat., vol. 18, pp. 3278-3288, 2013.
- [117] Q. Zhang, M. Ran, and D. Xu, Analysis of the compact difference scheme for the semilinear fractional partial differential equation with time delay, Appl. Anal., vol. 2016, pp. 1-18, 2016.
- [118] Z.B. Zhang and Z.Z. Sun, A Crank-Nicolson scheme for a class of delay nonlinear parabolic differential equations, J. Numer. Methods Comput. Appl., vol. 31, pp. 131-140, 2010.
- [119] Z.B. Zhang and Z.Z. Sun, A linearized compact difference scheme for a class of nonlinear delay partial differential equations, Appl. Math. Model., vol. 37, pp. 742-752, 2013.
- [120] B. Zubik-Kowal, The method of lines for parabolic differential-functional equations, IMA J. Numer. Anal., vol. 17, pp. 103–123, 1997.

Публикации автора

- [121] Gorbova T.V., Pimenov V.G., Solodushkin S.I. Difference Schemes for the Nonlinear Equations in Partial Derivatives with Heredity // Lecture Notes in Computer Science, 2019, V. 11386, P. 258-265.

- [122] Горбова Т.В., Пименов В.Г., Солодушкин С.И. Численное решение уравнений в частных производных с наследственностью и нелинейностью в дифференциальном операторе // Сибирские Электронные Математические Известия. 2019. Т.16. С. 1587-1599.
- [123] Gorbova T.V., Pimenov V.G., Solodushkin S.I. Crank-Nicolson Numerical Algorithm for Nonlinear Partial Differential Equation with Heredity and Its Program Implementation // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2020, V. 318, P. 33-43.
- [124] Tatiana Gorbova, Vladimir Pimenov, Svyatoslav Solodushkin. Difference Scheme for Partial Differential Equations of Fractional Order with a Nonlinear Differentiation Operator // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2020, V. 333, P. 689-703.
- [125] Tatiana Gorbova, Svyatoslav Solodushkin. Nonlinear difference scheme for fractional equation with functional delay // AIP Conference Proceedings, 2020, V. 2312, 050007.
- [126] Т.В. Горбова. Численный алгоритм для модели популяционной динамики // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета, Ижевск, 2021, Т. 57. С. 1–13.
- [127] Горбова Т.В., Солодушкин С.И. Разностная схема для нелинейных уравнений в частных производных с запаздыванием // Тезисы Международной (49-й Всероссийской) конференции «Современные проблемы математики и её приложений», Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2018. С. 130.
- [128] Пименов В.Г., Солодушкин С.И., Горбова Т.В. Нелинейные разностные схемы с памятью // Материалы IV Международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики», Нальчик: Эльбрус, 2018. С. 207.