

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого  
Президента России Б.Н. Ельцина»  
Уральский энергетический институт  
Кафедра электротехники

На правах рукописи

Смольянов Иван Александрович

**Численное моделирование неустойчивых течений  
жидкости под воздействием магнитного поля**

Специальность 2. 4. 4. Электротехнология и электрофизика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, доцент  
Сарапулов Сергей Федорович

Екатеринбург — 2022

## Оглавление

Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. Явления магнитной гидродинамики и обзор литературы</b>	<b>11</b>
1.1 Возникновение уравнения магнитной гидродинамики . . . . .	11
1.2 Обзор основных проблем в МГД . . . . .	17
1.2.1 Металлургия . . . . .	17
1.2.2 Кристаллизация и отливка . . . . .	18
1.2.3 Измерительная техника в жидких веществах . . . . .	20
1.2.4 Обзор проблем в МГД–насосах . . . . .	22
1.3 Неустойчивые состояния потока жидкости . . . . .	25
1.4 О теории подобия и безразмерных числах в расчетах МГД . . . . .	30
1.5 МГД неустойчивость . . . . .	32
1.6 Выводы по главе . . . . .	37
<b>Глава 2. Разработка численного инструмента для расчета магнитогидродинамических задач</b>	<b>38</b>
2.1 Современные подходы к исследованию потоков жидкости . . . . .	38
2.1.1 Экспериментальные подходы . . . . .	38
2.1.2 Аналитические модели . . . . .	39
2.1.3 Гибридные модели . . . . .	40
2.1.4 Численное моделирование . . . . .	41
2.1.5 Бессеточные модели . . . . .	43
2.2 Разработка алгоритмов расчета . . . . .	43
2.2.1 Гидродинамическая часть модели. OpenFOAM . . . . .	46
2.2.2 Магнитная часть модели. Elmer . . . . .	48
2.2.3 Разработка библиотеки для управления настройками модели в открытых программах . . . . .	50
2.3 Численная верификация . . . . .	52
2.4 Экспериментальная верификация . . . . .	63
2.5 Влияние размера сетки и модели турбулентности на результаты расчетов . . . . .	67
2.6 Выводы по главе . . . . .	75

<b>Глава 3. Исследование механизмов неустойчивых течений и влияние турбулентных течений на характеристики насосов</b>	<b>77</b>
3.1 Оценка влияния магнитных эффектов и идеализации математических моделей на поведение потока	77
3.1.1 Постановка задачи	77
3.1.2 Обсуждение результатов	79
3.2 Влияние турбулентных течений и неустойчивых состояний жидкости на расходно–напорную характеристику	87
3.2.1 Постановка задачи	87
3.2.2 Обсуждение результатов	88
3.3 Исследование влияния ширины канала на поведение потока	94
3.3.1 Постановка задачи	95
3.3.2 Обсуждение результатов	96
3.4 Выводы по главе	101
<b>Глава 4. Исследование термогравитационных эффектов на устойчивость потока жидкости</b>	<b>103</b>
4.1 Процедура расчета естественной конвекции	103
4.2 Верификация	105
4.3 Влияние неравномерного температурного поля на поведение потока	109
4.3.1 Описание задачи	109
4.3.2 Обсуждение результатов	110
4.4 Представление дополнительных возможностей разрабатываемого кода	117
4.4.1 Плавка металла под воздействием магнитного поля	117
4.4.2 Кристаллизация металла под воздействием магнитного поля	117
4.4.3 Учет свободной поверхности при электромагнитном перемешивании	119
4.4.4 Учет свободной поверхности при кристаллизации жидкого металла	120

4.4.5	Моделирование процесса кристаллизации двухкомпонентных сплавов под воздействием магнитного поля . . . . .	120
4.5	Выводы по главе . . . . .	122
	<b>Заключение . . . . .</b>	<b>124</b>
	<b>Словарь терминов и список сокращений . . . . .</b>	<b>128</b>
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>129</b>

## Введение

**Актуальность темы.** Принцип механического воздействия на жидкие металлы используется в металлургической и ядерной промышленности, в разработках измерительной техники, ядерном синтезе и многих других приложениях. Ключевыми задачами в металлургии являются транспортировка металла, плавка, кристаллизация, перемешивание металлов. Эти процедуры влияют на качество изготавливаемого металла, например, перемешивание металла в процессе кристаллизации позволяет получать измельчение зерна металла, гомогенизацию распределение примесей и повышение прочности конечного изделия.

Современные сплавы и сверхчистые металлы являются важными ключевыми элементами многих технических продуктов. Запуск новых типов реакторов требует модернизации охлаждающих систем, в которые необходимо встраивать бесконтактные насосы, способные создавать большое давление при высоком расходе перекачиваемого металла. Современные технологические процессы предполагают высокую точность управления параметрами жидких металлов, что ставит новые вызовы перед измерительной техникой. Эти задачи не всегда могут быть решены с помощью стандартных инженерных подходов, основанных только на эмпирических знаниях и/или теории электромагнетизма и электротехники. Такие подходы слабо учитывают влияние турбулентных потоков в расчетах, а их влияние играет важную роль во многих современных технологиях. Линейная и нелинейная теории устойчивости не позволяют с достаточной точностью предсказывать переход потока от ламинарного режима к турбулентному. Теоретически переход плоскопараллельного потока должен наступать при числе Рейнольдса больше 5772, но эксперимент показал, что турбулентность возникает при числе Рейнольдса 1000. Проведение эксперимента осложняется агрессивностью металла, его непрозрачностью и высокими температурами. Поэтому возникает необходимость в разработках численных моделей, которые способны с достаточной точностью прогнозировать поведение подобных систем. Решение этих практических задач требует фундаментального изучения механизмов неустойчивости потоков жидкости.

**Степень разработанности темы.** Вопросами исследования процессов в электропроводящей жидкости под воздействием внешних магнитных полей занимаются научные коллективы под руководством Кириллова И.Р. (НИИЭФА), Тимофеева В.Н. и Хацаюка М.Ю. (СФУ), Фрик ПГ. и Колиснеченко И.В. (ИМСС УрО РАН), Baake E. (Leibniz University Hannover), Jakovičs A. (University of Latvia), Krasnov D. (Technische Universität Ilmenau), Zikanov O. (University of Michigan-Dearborn).

**Целью** данной работы является изучение механизмов возникновения турбулентных потоков в проводящей немагнитной жидкости под воздействием бегущего магнитного поля и исследование влияния неустойчивых режимов на основные характеристики магнитогидродинамических насосов. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать алгоритмы расчета связанных задач магнитного, гидродинамического и температурного полей для потоков жидкости в каналах.
2. Верифицировать разработанные алгоритмы с помощью тестовых задач и экспериментальных данных и выработать рекомендации для настройки численных моделей.
3. Разработать инструмент для автоматизации процедур настройки численных моделей в программах с открытой лицензией.
4. Оценить влияние электромагнитных явлений на поведение потока проводящей жидкости в прямоугольных каналах.
5. Исследовать влияние турбулентных течений в индукционных насосах на расходно-напорную характеристику.
6. Разработать карту состояний потока жидкости в прямоугольных каналах под действием бегущего магнитного поля.
7. Рассмотреть влияние термогравитационной конвекции на поведение потоков жидкости в прямоугольных каналах под действием бегущего магнитного поля.

**Научная новизна:**

1. Впервые разработаны алгоритмы для расчета численных моделей в программах с открытой лицензией OpenFOAM, Elmer и при помощи библиотеки EOF-library для обмена данными между ними. Уникальность этих алгоритмов заключается в реализованной

- возможности изменять условия запуска расчета электромагнитной задачи в математической модели, а не в самом алгоритме.
2. Разработана библиотека на языке Python для автоматизации настройки моделей в численных программах с открытым кодом OpenFoam и Elmer.
  3. Реализована уникальная математическая модель для расчета задач магнитной гидродинамики с возможностью исключать из расчетов электромагнитные эффекты. На основе этой модели впервые проведены численные исследования по оценке поперечного и продольного краевых эффектов по отдельности друг от друга на поведение потока.
  4. Выведен безразмерный критерий с учетом аспектного соотношения ширины и высоты прямоугольного канала для анализа устойчивости состояний потоков жидкости в нем. На основе этого критерия было показано, что увеличение ширины канала ослабляет влияние электромагнитных эффектов в областях между активной и краевыми зонами.
  5. Проведен анализ влияния неустойчивых режимов на расходно–напорную характеристику линейного индукционного насоса в диапазоне чисел Гартмана от 0 до 8000, Стюарта от 0 до 100, Рейнольдса от 100 до 55 000, магнитного числа Рейнольдса от  $4\pi 10^{-7}$  до 10.
  6. Проведена классификация пространственных структур вихрей, образующихся в связи с воздействием бегущего магнитного поля на поток жидкости в прямоугольном канале. На основании этой классификации построена карта возникновения вихревых течений в диапазоне магнитного числа Рейнольдса от  $4\pi 10^{-7}$  до 10 и числа Гартмана от 100 до 2000.
  7. Впервые проведена оценка влияния термогравитационных эффектов и учета джоулева тепла на потоки проводящей жидкости в прямоугольном канале под действием бегущего магнитного поля. Эти исследования выполнены при значениях числа Гартмана 100, гидродинамического числа Рейнольдса  $10^4$ , магнитного числа Рейнольдса 10 и числа Стюарта 10.

**Теоретическая и практическая значимость.** Понимание возникновения, протекания и подавления неустойчивых состояний потоков жидкости

позволит приблизиться к решению задачи разработки прототипов конструкций индукционных насосов, работающих выше 8 бар при расходе жидкости от 3 м<sup>3</sup>/с. Проведенный сравнительный анализ влияния краевых эффектов на поведение потока позволил понять, какие особенности необходимо учитывать в математических моделях для инженерной практики. Разработанные карты состояний потока жидкости позволяют избежать нежелательных режимов работы магнитогидродинамических устройств без проведения дополнительных исследований и расчетов. Результаты влияния аспектного соотношения ширины и высоты канала на пространственную структуру вихрей позволяют упростить процедуру выбора типа конструкции индукционного насоса в процессе проектирования. Результаты влияния термогравитационных эффектов наглядно показывают в каких условиях необходимо учитывать температурные режимы. Предлагаемые подходы могут быть применены для решения большого спектра практических задач.

Алгоритмы для расчета численных моделей могут быть использованы как в инженерной практике, так и в научных исследованиях. Разработанные в диссертационной работе рекомендации по настройке численных моделей для расчета задач течения проводящей жидкости под воздействием магнитного поля позволяют снизить требования к вычислительной технике. Выработанные критерии для оценки масштаба сетки позволят будущим исследователям разрабатывать оптимальные численные модели с точки зрения вычислительных ресурсов персонального компьютера. Разработанная библиотека «PyRunOF» позволяет проводить параметрические исследования, автоматизировать процедуры обработки результатов и настройки модели, что существенно сокращает время на осуществление рутинных процедур.

**Методология и методы исследования.** Расчет магнитных полей проводился с помощью метода конечных элементов, реализованного в программе с открытым кодом Elmer и использованием гармонической « $A - \varphi$ » формулировки. Расчет полей давления и скорости производился с помощью метода конечных объемов, который в большей степени подходит для численного решения уравнений Навье-Стокса, используя специализированную программу с открытой лицензией для гидродинамических расчетов OpenFOAM. Температурные поля и фазовые состояния вещества, связанные с потоками жидкости, рассчитывались в OpenFOAM, а расчеты температурных режимов в магнитной системе (катушки, магнитопровод и т. д.) производились в Elmer.



Обмен данными между ними реализован с помощью связки EOF-library с использованием параллельного интерфейса передачи сообщений (MPI).

Для упрощения работы с этими программами была написана библиотека «PyRunOF» на языке Python для настройки моделей, запуска их на расчет, проведения параметрических исследований, автоматизированного создания сеток модели, обработки результатов и ряда других опций.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Верифицированные численные модели, разработанные на основе методов конечных элементов и объемов для расчета связанных задач гидродинамики, магнитного и температурного полей с возможностью учета фазового перехода.
2. Алгоритмы для расчета связанных задач в открытых пакетах с возможностью автоматической настройки модели с помощью дополнительного кода-обертки.
3. Полученные закономерности влияния магнитных краевых эффектов на устойчивость потока жидкости и возникающих из-за них гидродинамических явлений.
4. Соотношения, описывающие устойчивость потока жидкости в прямоугольных каналах в зависимости от чисел подобия.
5. Результаты влияния неустойчивых режимов работы МГД насосов на основные их характеристики.
6. Количественная оценка влияния тепловых явлений на поведение потока жидкости в безразмерной постановке задачи для прямоугольного канала.

**Достоверность** результатов проведенных исследований подтверждается сравнением результатов расчета, полученных различными методами с данными экспериментов и результатами других авторов.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на:

1. IEEE Conference of Russia Young Researches in Electrical and Electronic Engineering, СПбГЭТУ «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, 2017, 2018, 2019, 2020.
2. XXII Зимняя школа по механике сплошных сред, ИМСС УРО РАН, г. Пермь, 2021
3. XIX International UIE Congress on Evolution and New Trends in Electrothermal Processes, Пльзень, Чехия, 2021.

4. X International Conference Electromagnetic processing of materials, Рига, Латвия, 2021.
5. Четвертая Российская конференция по магнитной гидродинамике (РИМГД-21), ИМСС УРО РАН, Пермь, 2021.
6. International Symposium on Heating by Electromagnetic Source (HSE-19), Padua, Italy.
7. XXI Международная научная конференция «Проблемы управления и моделирования в сложных системах», Самара, 2019.
8. Международная конференция «Актуальные проблемы электромеханики и электротехнологий», Екатеринбург, 2017, 2020.
9. Всероссийская конференция «Наука. Технология. Инновации», Новосибирск, 2018.
10. VI Международный семинар «European Seminar on Computing», Пльзень, Чехия, 2018.
11. Международная конференция «Computational Problems of Electrical Engineering», Чехия, Кутна-Гора, 2017.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 19 научных работах, определенных ВАК РФ и Аттестационным советом УрФУ, из которых 10 изданы в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 9 — в тезисах докладов.

Диссертационная работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект «Численное исследование влияния неустойчивости потоков жидкого металла под воздействием бегущего магнитного поля», номер 20-38-90237.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 149 страниц, включая 79 рисунков и 3 таблицы. Список литературы содержит 202 наименования.

## Глава 1. Явления магнитной гидродинамики и обзор литературы

Данная глава диссертации посвящена обзору основных подходов и инструментов для описания явлений магнитной гидродинамики. В этой части работы – рассматривается их математическое и физическое описание. Также основная цель этой части работы раскрыть основные проблемы современной магнитной гидродинамики и рассмотреть подходы к их решению в мировом сообществе.

### 1.1 Возникновение уравнения магнитной гидродинамики

Идея о приведении в движение проводящей среды посредством воздействия на нее магнитным полем была реализована в 19-ом веке на примере двигателя Фарадея и динамо-машины [1]. В последующем данный принцип был использован для создания круговых электродвигателей [2; 3], линейных электрических машин [4; 5], электромагнитных выключателей [6] и множества других электротехнических устройств. Общее назначение всех этих устройств – привести в движение проводящий элемент с помощью неких внешних сил. Природа возникновения этих усилий заключается во взаимодействии частиц среды между собой [7]. В современной физике используют волновую или квантовую теорию для описания взаимодействия частиц и возникающих физических эффектов в таких физических средах. Эти подходы в большинстве случаев избыточны и являются сложными в использовании на практике, поэтому для упрощения расчета усилий во многих случаях вводят физические величины: магнитную и электрическую индукции и напряженности поля [8]. Тогда усилия можно записать в векторной форме (1.1) в терминах векторных физических полей электрической напряженности  $\mathbf{E}$  и магнитной индукции  $\mathbf{B}$

$$\mathbf{F}_{em} = q (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1.1)$$

где  $q$  – плотность электрического заряда,  $\mathbf{u}$  – скорость движения среды. Переменные электромагнитного поля могут быть описаны с помощью

уравнений Максвелла в дифференциальной форме [9]

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q, \quad (1.2б)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.2в)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}, \quad (1.2г)$$

где  $\mathbf{H}$  — вектор напряженности магнитного поля,  $\mathbf{D}$  — вектор электрической индукции и  $\mathbf{J}$  — вектор полной плотности тока. Уравнения (1.2a) и (1.2б) показывают, что в природе существует электрический заряд и не существует магнитного монополя. Уравнение (1.2в) описывает закон электромагнитной индукции открытый М. Фарадеем. Уравнение (1.2г) представляет собой закон Ампера. Электрическое поле (ток) порождает вокруг вихревое магнитное поле. В этом уравнении вектор полной плотности тока выражается внешней  $\mathbf{J}_{\text{ext}}$ , индуцируемой  $\mathbf{J}_{\text{ind}}$ , кондукционной  $\mathbf{J}_{\text{cond}}$ , движения  $\mathbf{J}_{\text{mot}}$  и смещения  $\mathbf{J}_{\text{d}}$  составляющими плотности тока

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{ext}} + \mathbf{J}_{\text{cond}} + \mathbf{J}_{\text{ind}} + \mathbf{J}_{\text{mot}} + \mathbf{J}_{\text{d}}. \quad (1.3)$$

Для расчета усилий (1.1) необходимо систему уравнений (1.2) дополнить материальными уравнениями для установления взаимосвязи между током и напряженностью электрического поля (закон Ома) (1.4a); магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля (1.4б); электрической индукцией и напряженностью электрического поля (1.4в)

$$\mathbf{E} = \sigma \mathbf{J}, \quad (1.4a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (1.4б)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}. \quad (1.4в)$$

Здесь  $\sigma$  — электропроводность среды,  $\mu_0$  и  $\varepsilon_0$  обозначают магнитную и диэлектрическую проницаемость воздуха,  $\mu_r$  и  $\varepsilon_r$  — относительные значения магнитной и диэлектрической проницаемости среды в отношении к воздуху.

Тогда каждую компоненту плотности тока в (1.3) можно расписать с учетом материальных уравнений [10]. Компонента плотности тока может быть выражена через напряженность электрического поля, создаваемого внешними воздействиями как в (1.5a). Индуцируемая составляющая плотности тока

может быть выражена через индуцируемую напряженность электрического поля и электропроводность среды в этой области (1.56). Кондукционную составляющую плотности тока можно выразить через разность потенциалов  $\varphi$  приложенную к проводящей среде. Движение проводника в магнитном поле порождает ток в движущемся элементе согласно (1.5г), а токи смещения (1.5д) позволяют описать явление протекания тока через диэлектрическую среду, например конденсатор.

$$\mathbf{J}_{\text{ext}} = \sigma \mathbf{E}_{\text{ext}}; \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{J}_{\text{ind}} = \sigma \mathbf{E}_{\text{ind}}; \quad (1.5б)$$

$$\mathbf{J}_{\text{cond}} = \sigma \nabla \cdot \varphi; \quad (1.5в)$$

$$\mathbf{J}_{\text{mot}} = \sigma [\mathbf{v} \times \mathbf{B}]; \quad (1.5г)$$

$$\mathbf{J}_d = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad (1.5д)$$

Открытие Ханнес Улоф Йеста Альвена, опубликованное в [11; 12] в 1942 году, считается рождением области науки магнитной гидродинамики. В этих исследованиях Альвен предсказал существование поперечных магнитогидродинамических плазменных волн (Альвеновские волны), распространяющиеся вдоль силовых линий магнитного поля, как следствие изменение скорости распространения плазмы за счет действия электромагнитной энергии. Хотя эксперименты по исследованию силовых воздействий электромагнитного поля на жидкое вещество проводились Гартманом и Лазарусом [13; 14] еще до Альвена в 1937 году, но эти эксперименты не отражают основные принципы магнитной гидродинамики [15]. Также в 1918 году упоминается о первой спроектированной конструкции МГД насоса [16], но систематического объяснения принципа ее работы дано не было. Поэтому только после открытия Альвена наблюдается систематическое изучение магнитной гидродинамики и применение этих знаний на практике.

В 1950-ых годах начинаются работы над созданием термоядерного синтеза (проблема удержания плазмы) [17] и разработкой системы охлаждения на быстрых реакторах в 1960-ых годах [18; 19]. Развитие этих отраслей и техники требует использование новых типов металлов. Согласно сформулированной идеи Дорфманом Я.Г в 1932 году о применении вращающихся магнитных полей для повышения качества изготавливаемых сплавов [20] знания о физических явлениях на стыке областей электромагнетизма, механики сплошных сред и

теплопередачи становятся все более актуальными в то время. Таким образом в период 1940-1950-ых годов вырос спрос на электромагнитные насосы без уплотнителей и подвижных частей для перекачки алюминия [1; 21], а в последующем для ядерной энергетики. Для этих целей было спроектировано более 30 конструкций МГД насосов в период с 1947 по 1958г. [22]. В работе [1] говорится, что первый индукционный насос был разработан Альбертом Эйнштейном и Лео Сзилард [23] с целью создания системы охлаждения. Принцип работы однофазного магнитного насоса был впервые сформулирован Д. Ваттом в 1956 году [24]. Также важную роль в развитии прикладной магнитной гидродинамики сыграла космическая организация NASA в 1950-1960 гг. Данная организация занималась разработкой МГД насосов для космического ядерного реактора SNAP-10A [25]. Магнитное поле в данном насосе создавалось с помощью постоянных магнитов и токов, создаваемых термоэлектрическими эффектами. Развитие насосов на термоэлектрическом эффекте продолжила компания North American Aviation в 1960-ые годы [26; 27]. Удалось решить ряд проблем металлургии по созданию материалов с новыми свойствами за счет управления движением потоков расплавленного металла бесконтактным способом с помощью электромагнитного поля в 60-ых годах 20-ого века [20; 28–30]. Можно написать не одну книгу о зарождении прикладной магнитной гидродинамики, что уведет от основной идеи повествования этой работы, поэтому кратко резюмируем области применения магнитной гидродинамики с некоторыми ссылками на работы по этой теме:

- ядерная энергетика [18; 19; 31–36];
- металлургия [37–41];
- термоядерный синтез [42–46];
- космическая баллистика [47];
- низкотемпературная плазма [48];
- измерительная техника [49–51];

и этим список применений магнитной гидродинамики не ограничивается.

Реализация, модернизация и развитие рассмотренных выше идей, требуют физического и математического осмысления. Как можно было понять из идей, используемых в применении магнитной гидродинамики на практике, эта область является мультидисциплинарной, что требует дополнить уже описанные в этой работе явления электромагнетизма явлениями переноса потоков жидких веществ и термических эффектов в них.

Для описания поведения потоков жидкости в магнитной гидродинамике используют концепцию механики сплошных сред, рассматривая масштаб значительно больше длины свободного пробега молекулы (макроуровень) [52], и характеризуют этот масштаб векторным полем скоростей и скалярными полями давления и плотности. Поведение потоков жидкости описывается законами непрерывности массы (1.6a) и движения (1.6б), другими словами, уравнением Навье–Стокса.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (1.6a)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) = -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} + \left( \xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{F}. \quad (1.6б)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{u}$  — векторное поле скорости,  $p$  — скалярное поле давления  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости,  $\xi$  — объемная вязкость,  $\mathbf{F}$  — внешние силы. Эти уравнения (1.6a) и (1.6б) записаны для сжимаемой жидкости, для ряда задач жидкость можно рассматривать несжимаемой, т.е. плотность постоянная. Тогда (1.6a) и (1.6б) можно переписать в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.7a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \mathbf{F}, \quad (1.7б)$$

где,  $\nu = \eta/\rho$  — кинематическая вязкость.

В магнитной гидродинамике внешние силы  $\mathbf{F}$  часто описывают электромагнитные силы (1.1) и иногда силы плавучести. В большинстве задач влияние электрических зарядов на генерацию усилий в среде пренебрежимо мало, тогда электромагнитное усилие можно записать как (1.8). Силы плавучести с учетом фазового состояния вещества могут быть записаны в приближение Буссинеска (1.9). Приближение Буссинеска состоит в том, что изменением плотности вещества потока жидкости в связи с изменением температуры можно пренебречь, а изменение движения за счет градиента температур учитывать дополнительной компонентой усилий. В уравнении (1.9)  $\rho_0$ ,  $T_0$ ,  $C_0$  отображают плотность вещества, температуру, и концентрацию фазы вещества для какого-то реферативного состояния, соответственно,  $T$  — текущая температура,  $\mathbf{g}$  — вектор гравитации,  $\beta_T$  и  $\beta_C$  — коэффициенты термического и фазового расширения плотности вещества.

$$\mathbf{F}_{mag} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (1.8)$$

$$\mathbf{F}_b = \mathbf{g}\rho = \mathbf{g}\rho_0 (1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)). \quad (1.9)$$

Термические эффекты могут быть описаны с помощью уравнения сохранения энергии (1.10), которое записано через энтальпию  $h$  [53]. Для учета сил плавучести необходимо знать распределение температур. Температурное поле вычисляется из определения изменения внутренней энергии (энтальпии) (1.11) и может быть описано с помощью уравнения (1.12).

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho h = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{U} h) + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S_h; \quad (1.10)$$

$$dh = \int C_p dT; \quad (1.11)$$

$$C_p \frac{\partial}{\partial t} \rho T = -C_p \nabla \cdot (\rho \mathbf{U} T) + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + S_h; \quad (1.12)$$

В этих уравнениях используются обозначения:  $\lambda$  — теплопроводность,  $C_p$  — удельная теплоемкость,  $S_h$  — источник тепловыделения, например, в связи с вязким трением (1.13а), работой сил давления (1.13б), джоулевым нагревом (1.13в).

$$S_{sh} = \boldsymbol{\tau} : (\nabla \otimes \mathbf{U}); \quad (1.13а)$$

$$S_p = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U} p; \quad (1.13б)$$

$$S_J = \frac{1}{2} |\mathbf{J}|^2 \sigma. \quad (1.13в)$$

Из вышеупомянутых уравнений можно сделать заключение, что температурное, электромагнитное и гидродинамические поля воздействуют друг на друга и вносят/претерпевают изменение. Такие системы очень сложно поддаются анализу. Основными проблемами анализа мультифизической задачи является сепарация физических явлений для оценки влияния его на физические процессы. Поэтому одна из важных задач магнитной гидродинамики — это найти их аналитическое решение. Экспериментальные исследования осложняются слабо развитыми подходами по измерению физических параметров в жидких средах. Поэтому одной из важных задач магнитной гидродинамики — это описать условия, в которых уравнения могут быть упрощены и доказать адекватность таких упрощений. Магнитная гидродинамика пытается ответить на большое количество вопросов физики, и на данном этапе ее развития не представляется возможным обобщить все результаты в одной работе. Поэтому в данной работе сделан акцент на изучение



потоков проводящей жидкости в прямоугольных каналах в безразмерном виде, частным случаем этому могут служить электромагнитные насосы в металлургии и ядерной энергетике. Рассмотрим основные проблемы в ряде областей применения магнитной гидродинамики.

## 1.2 Обзор основных проблем в МГД

### 1.2.1 Металлургия

Вопросы решения задач металлургии с использованием теории магнитной гидродинамики начали бурно обсуждаться со второй половины 20-ого века в работах [28; 39; 54–56]. В работе [28] утверждается, что для сокращения технологического времени плавки необходимо повысить скорость протекания металлургических процессов. Интенсификация металлургических процессов может быть повышена механическим воздействием на металл, например, с помощью внешнего магнитного поля. Такой подход проще в реализации, не ограничен в мощности и энергоэффективнее [28]. Также в работе [28] утверждается, что первые попытки управлять электрической дугой были предприняты профессором С.И. Тельным в [57]. Затем в 1928 году инженер Л.И. Морозенский предложил устройство для перемешивания металла в печи и одновременно управления дугой [58]. Значительный вклад в развитие электромагнитного перемешивания было сделано Шведской компанией ASEA, которая впервые запустила двухсторонний индуктор для перемешивания металла, установленный в поду печи в 1939 г, который вышел из строя через месяц. Эта компания решила эту проблему размещением индукторов под дном кожуха в 1949 году [28; 59].

Последующее развитие магнитного перемешивания в основном связан с исследованием способов формирования специфических структур потоков. Плавка и перемешивания жидких металлов были исследованы во многих диссертациях [60–69]. Цели этих работ можно обобщить следующими положениями:

- о снижении градиента примесного распределения;

– о снижении перепада температур во всем объеме печи.

Интенсификация тепломассопереноса за счет вынужденной электромагнитной конвекции, формируемой специфическими включениями обмотки индуктора, исследуется в [64]. В работах [60–62] были показаны подходы формирования потоков жидкости с помощью встраивания дополнительных электромагнитных перемешивателей. В этих работах не рассматривается влияние естественной конвекции на изменение поведения потока. В работе [68] показана важность учета мелкомасштабного численного моделирования для расчета индукционных тигельных печей с целью учета изменения структуры потоков жидкости. Также в работе [66] экспериментально были сделаны подобные выводы, что для ряда случаев конвективный теплоперенос в основном определяется крупномасштабной циркуляцией, а в ряде случаев важную роль играют мелкомасштабные вихри на конвективный перенос вещества.

### 1.2.2 Кристаллизация и отливка

Кристаллизация позволяет повышать качество металла за счет формирования его структуры в процессе затвердевания [70]. Один из наиболее распространенных способов — это воздействие на металл магнитным полем [71–73]. В данном технологическом процессе важны как электромагнитные явления, так и тепловые конвективные режимы. Показано, что скорость коррозии значительно меньше у стальных образцов, полученных при отливки с воздействием внешнего магнитного поля, чем без него [74] Рисунок 1.1.



Рис. 1.1 — Сравнение коррозии металла пяти заготовок, изготовленных при воздействии магнитным полем и без этого воздействия [74].

Электромагнитное торможение при отливки металла также является полезным с точки зрения повышения качества конечного продукта. В

процессе отливки воздействуют магнитным полем, которое тормозит поток, ламинаризирует его (см. Рисунок 1.2), что приводит к снижению уровня турбулентности и как следствие повышению качества металла [75; 76]. Процесс ламинаризации вихрей характеризует переход от турбулентного состояния потока к ламинарному. Понимание устойчивых и неустойчивых состояний потока жидкости должно быть надлежащим образом изучено для воспроизведения процесса ламинаризации жидкости. Уже в 1988 году рассматривались вопросы искривления линий потока магнитного поля за счет движения проводящей среды и неравномерности гидродинамического поля [77]. На тот момент не было соответствующего инструмента для анализа состояний потока жидкости для многофазных сред, но на данный момент можно упомянуть работы [78; 79] в которых учитываются колебания скорости потоков жидкости при кристаллизации стали. В диссертации [80; 81] показано, что отношения электропроводностей твердой и жидкой фаз среды влияет на структуру кристаллизованной заготовки и то, что взаимодействие свободной тепловой и вынужденной электромагнитной конвекции определяет распределение макросегрегаций. Конвективные потоки могут формировать мелкие вихри на стыке фаз, которые должны быть рассмотрены. Возможность точно предсказывать устойчивость потока в различных условиях для исследуемой системы с учетом перехода фаз будет играть важную роль в развитии производства новых технологичных материалов.

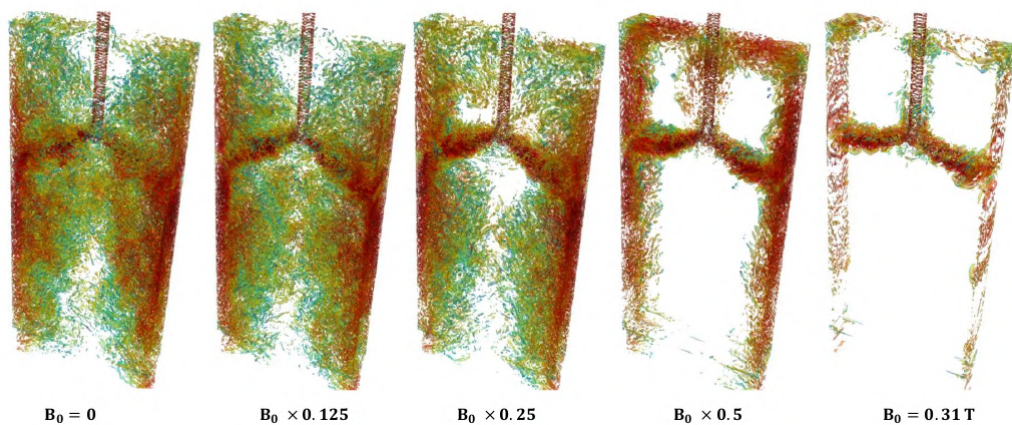


Рис. 1.2 — Распределение потока жидкости при различных значениях магнитной индукции [76].

### 1.2.3 Измерительная техника в жидких веществах

Важная задача во многих технических и научных приложениях — это проводить измерение скорости потока. Возможность измерять скорость жидкости позволяет контролировать технологические процессы и проводить лабораторные опыты по исследованию физических явлений. Измерение скорости жидкости является сложной задачей из-за большого количества степеней свободы частиц и распределения значений скоростей в пространстве. В прозрачных средах можно использовать для измерения оптические методы: лазерную анемометрию или измерения по скорости изображения частиц [82]. Для непрозрачных сред одним из простых способов измерения скорости является инвазивный способ [83]. Основная идея этого метода заключается в том, что измерение проводится с помощью вспомогательного вводимого элемента в поток жидкости, например, датчик силовой реакции, термический анемометр, датчик разности электрических потенциалов [84]. Такой тип измерения имеет недостатки: вносит помехи (обтекание твердого тела потоком), измеряет скорость потока в одной точке, его сложно использовать в агрессивных средах. Также такое измерение дает усредненное значение скорости, действующее на механический элемент без учета возможности проскальзывания жидкости. В [20] измерение скорости вращения жидкости при электромагнитном перемешивании проводилось по количеству оборотов, вносимой в жидкий металл примесной среды, в единицу времени.

В работе [85] представлен метод для измерения скорости потока в линейных цилиндрических насосах. Особенность метода заключается в измерении утечки магнитного поля с помощью измерительных катушек вблизи конца статора на стороне выхода и в сопоставлении его с расходом натрия. Метод был верифицирован с помощью численного и экспериментального исследования. Этот метод удобен для мониторинга состояния потоков в МГД насосах. Представлен график устойчивости потока линейного цилиндрического насоса в зависимости от скольжения и магнитных чисел Рейнольдса для определенного температурного режима, как следствие показано, что нестабильность зависит от температурных режимов. Корреляция между магнитными потоками утечки и скоростью потока является линейной. Значение

напряжения, возникающего в измерительной катушке, линейно зависит от значений скорости потока.

Ультразвуковое доплеровское измерение скорости является неинвазивным контактным методом. Кратко рассмотрим принцип действия этого метода. Ультразвуковой импульс длительностью в несколько периодов пропускают через среду, в которой планируется измерение скорости. При попадании такого импульса на взвешенные в жидкости микрочастицы часть энергии ультразвука рассеивается. Вся информация о профиле скорости вдоль ультразвукового луча содержится в эхо сигнале. Если скорость звука в жидкости известна, то пространственное положение вдоль измерительной линии можно определить по обнаруженной временной задержке между излучением всплеска и его приемом [83]. Успешное применение данного метода для измерения жидкого галлия было опубликовано в [86]. Такой способ позволяет измерять только одну компоненту скорости вдоль линии и требует отверстия в резервуаре/канале с измеряемой средой для запуска волны доплеровским датчиком, что может нарушить герметизацию для ряда систем.

Рентгеноскопические методы измерения скорости позволяют проводить измерение скорости и турбулентную диффузию в жидких металлах [83; 87]. Основная идея метода — поместить радиоактивный материал в жидкий металл и с помощью рентгеновских лучей отслеживать их траекторию в жидком металле. В работах [88—90] представлены результаты измерения поведения потока, обтекающего препятствие, и траектории движения пузырьков. Самый главный недостаток таких методов — это введение радиоактивных примесей в среду, поэтому данные методы в основном используют в лабораторных испытаниях.

Бесконтактная индукционная проточная томография разрабатывается в институте HZDR [83; 91; 92]. Этот метод использует принцип индукции электрических токов из-за движения проводящего материала через магнитное поле. Сложностями этого метода измерения являются численное решение линейной обратной задачи, а также измерение очень малых магнитных полей, индуцированных потоком. На основе этих данных необходимо уметь отфильтровывать поля порядка 100 нТл. Похожим методом измерения скорости является метод измерения по усилию Лоренца [49; 50]. Принцип метода состоит в измерении скорости на основе значений силы Лоренца, действующей на постоянные магниты, расположенные вокруг жидкости.

Результаты измерений скорости с помощью данного метода были опубликованы в [93–95]. Взаимодействие потока жидкости с внешним магнитным полем может вызывать неустойчивые состояния потока жидкости. В этом случае магнитное поле ведет себя как твердое препятствие (см. Рисунок 1.3) [96–100], что вносит свой вклад в поведение потока и должно учитываться для ряда экспериментов. Коррекция и поверка этих приборов проводится с помощью численного моделирования. Поэтому необходимо численно исследовать поведение потока жидкости как в ламинарных, так и турбулентных состояниях.

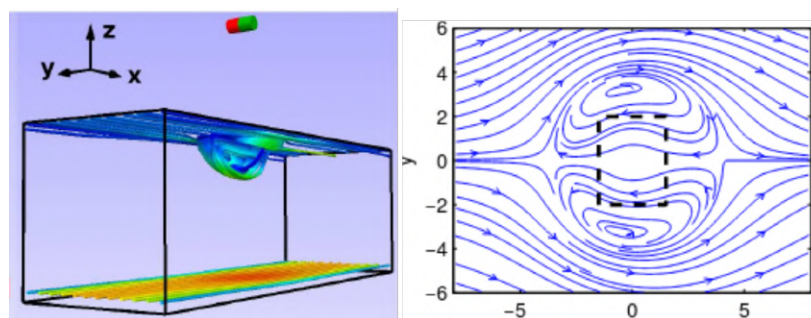


Рис. 1.3 — Линии тока скорости потока жидкости под воздействием магнитного поля от постоянного магнита [97; 100].

#### 1.2.4 Обзор проблем в МГД–насосах

Электромагнитные насосы обладают рядом преимуществ перед механическими для перекачки проводящих немагнитных жидкостей: отсутствие подвижных частей, низкие уровни шумов и вибраций, простота в управлении и обслуживании [32; 33]. Но существует и ряд недостатков, одним из основных является возникновение обратных потоков и пульсаций жидкости при определенных условиях, что усложняет разработку конструкции электромагнитных насосов, способных создавать нагнетаемое давление (выше 8 бар) при высоких расходах жидкости (от  $3 \text{ м}^3/\text{с}$ ), как сообщалось в ряде работ [1; 18; 19] (см. Рис. 1.4). Также коэффициент полезного действия, как правило, не превышает 45 %, в то время как у механических насосов он варьируется от 65 до 83 % [1]. Если учитывать всю систему, в которую встраиваются данные насосы, КПД обеих систем не превышает 40 %.

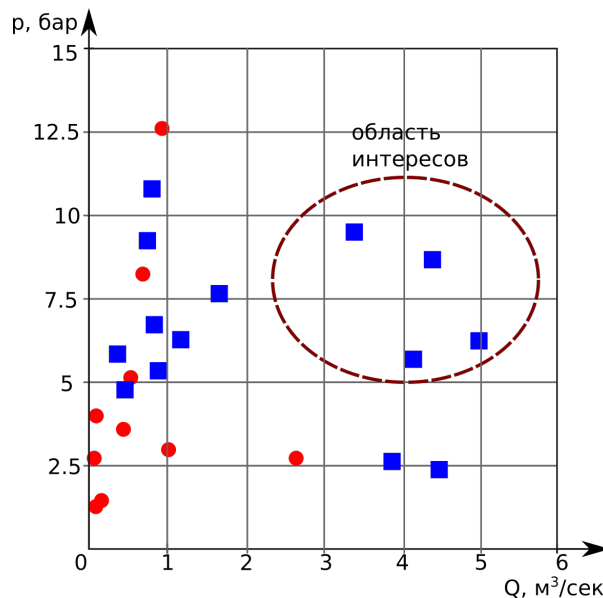


Рис. 1.4 — Сравнение разработанных конструкций механических (синий цвет) и индукционных насосов (красный цвет) [1].

В работе [1] предлагается убрать магнитопровод индуктора, чтобы повысить производительность цилиндрического индукционного насоса, но не объясняются основные причины его повышения. В работе [101] рассматривался вопрос о использовании цилиндрического насоса без ферромагнитного сердечника с целью снижения механических и тепловых нагрузок. Невысокий КПД насоса и среда эксплуатации, в большинстве случаев характеризующаяся высокими температурами, приводит к перегреву элементов насоса и выходу его из строя [102]. Уже в 1963 году поднимался вопрос о выборе способа охлаждения насоса, который обуславливается электрической нагрузкой, температурой перекачиваемого металла, максимально допустимой температурой обмоток, эффективностью теплоизоляции [103]. В диссертации [102] предлагается решение проблемы перегрева обмоток индукционного насоса для перекачки магния с помощью использования неорганической теплоизоляции и особой формы обмоток, но не рассматривается, как это решение влияет на гидродинамические характеристики системы. Вопросы о выборе конструкции МГД-насосов были обсуждены в работах [104–106]. В работах [54; 103] авторы делают попытку обобщить двадцатилетний опыт исследовательских и проектно-конструкторских работ по МГД-машинам с щелочными металлами, но приведенные выводы могут быть спроецированы и на другие металлы.

МГД насосы для металлургического применения имеют ряд особенностей: повышенный немагнитный зазор, высокие рабочие температуры, термограви-

тационную конвекцию [107], ярко выраженные краевые эффекты [108; 109]. Генерируемые лоренцевские силы изменяется с двойной частотой магнитного поля во времени, что приводит к эффекту пульсаций потока жидкости [32; 33], как следствие к повышенной нагрузке на футеровку канала и увеличению вероятности перехода к турбулентным режимам. В [109; 110] были проведены исследования по влиянию бегущего магнитного поля на гидравлическое сопротивление. В этих работах показана тенденция на образование внутренних течений в насосах из-за неравномерного распределения магнитного поля в пространстве и, как следствие, ухудшению производительности насоса. В [104] объясняется снижение производительности с помощью коэффициента ослабления, который описывает активное взаимодействие вращающегося вихря с транзитным потоком и как следствие обменом энергии между ними.

В работах [102; 111–114] предлагается оптимизировать конструкции и параметры источников питания с помощью численного моделирования магнитного поля и линейного программирования. Такие предложения не позволяют существенно изменить подходы к проектированию МГД насосов, но как следствие, получать конструкции насосов, способные работать на больших давлениях и высоких скоростях потока жидкости. Основным фактором снижения количественных характеристик (напорная характеристика, КПД, коэффициент мощности и т.д.) является появление нестабильных потоков в бегущем магнитном поле [115; 116]. Поэтому современные актуальные исследования направлены на качественный и количественный анализ возмущений потока проводящей жидкости под воздействием магнитного поля. Особенно это важно для применения МГД-насосов при дозации металла [117; 118] с целью повышения точности управления этим процессом. В этом технологическом процессе происходит переход от перемещения металла к его торможению, что в любом случае вызывает турбулентности потока.

Из написанного выше, можно сделать заключение о важности влияния гидродинамических эффектов на электромагнитные параметры и наоборот. Работа [39] содержит основные отличия области науки МГД от электромеханики и автор дает наставление будущим исследователям и ученым: «Надо сказать, что такой подход (электродинамического приближения) сослужил свою службу в начальный период разработки МГД-устройств, но в настоящее время становится тормозом для их дальнейшего развития». Подтверждение этому можно найти в работе [109], автор утверждает, что «в таком виде



влияние магнитного поля на гидравлическое сопротивление в реальных индукционных насосах примерно на два порядка больше». Гидродинамические и электромагнитные эффекты могут приводить к неустойчивому состоянию системы, которая становится слабо прогнозируемой. Поэтому стоит более детально остановиться на описании устойчивых и неустойчивых состояний потока жидкости.

### 1.3 Неустойчивые состояния потока жидкости

Неустойчивость наглядно можно объяснить на примере классической механики. Рассмотрим случаи, когда шарик находится на гладкой поверхности, сила трения шарика о поверхность пренебрежимо мала. Шарик находится в покое на плоской поверхности, в этом случае любое воздействие на шарик приведет к его бесконечному смещению (см. Рисунок 1.5а). Если шарик находится на вогнутой поверхности (см. Рисунок 1.5б, ) то такое состояние считается устойчивым, потому что действие любого усилия будет скомпенсировано силой гравитации и вернет его в исходное положение (см. Рисунок 1.5в). Если шар находится на выпуклой поверхности то сила гравитации будет способствовать возникновению смещения шарика (см. Рисунок 1.5г). В случае на Рисунок 1.5д, сила гравитации играет двойную роль, сначала она компенсирует устойчивость системы, но при этом раскачивает шарик в другую сторону к неустойчивому состоянию. Шарик на Рисунок 1.5, е при смещении вправо покинет устойчивое состояние, а при смещении влево имеет потенциальную возможность остаться в устойчивом состоянии.

В этой работе под неустойчивым состоянием будем понимать переход к турбулентному состоянию и нахождение в нем длительное время. На Рисунке 1.6 показан один из возможных переходов от ламинарного режима к турбулентному или наоборот. Неустойчивость (иногда используется зарубежный термин нестабильность) означает, что система может покинуть первоначальное состояние покоя и не возвращаться в него. Неустойчивость делят на линейную и нелинейную. Линейная теория устойчивости изучает эволюцию малых возмущений, это значит, что пренебрегают конвективным членом  $\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u})$  уравнения Навье-Стокса (1.66). Линейная теория работает

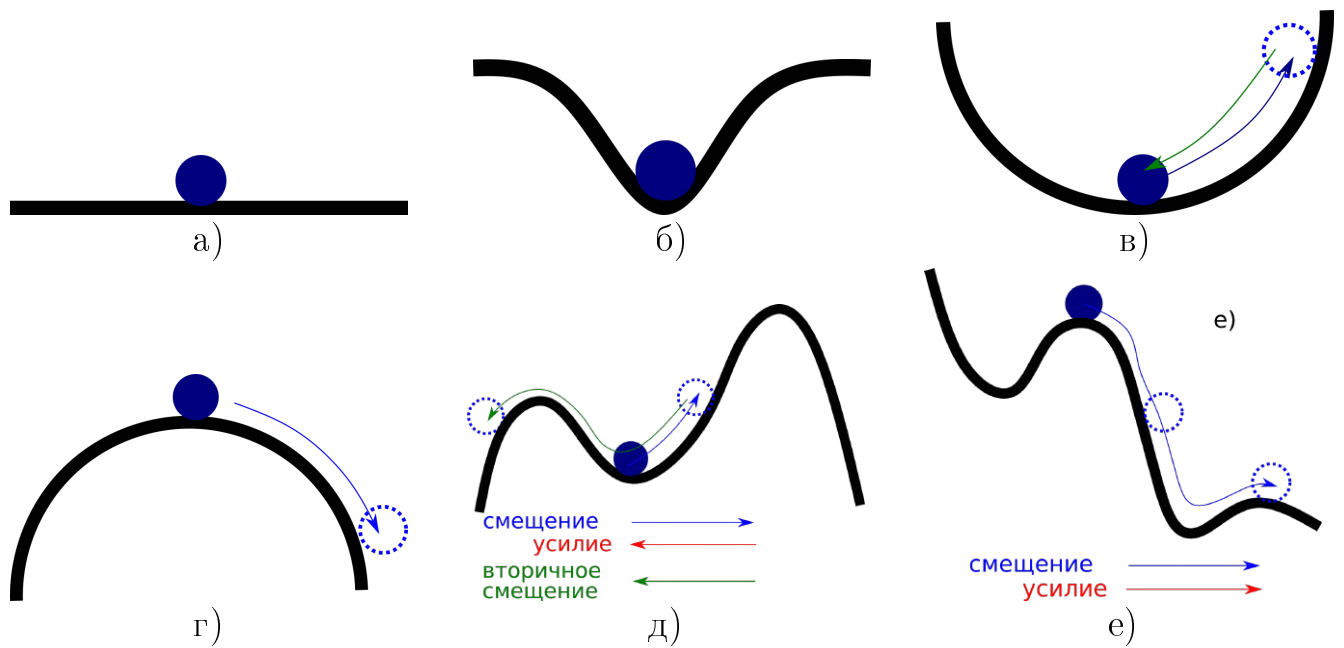


Рис. 1.5 — Механическое представление неустойчивого состояния системы.

только вблизи порога возникновения неустойчивости и не описывает его распространение. В реальности поток не переходит внезапно от ламинарного к турбулентному режиму во всей области сразу [52]. Появляются локальные возмущения конечной амплитуды, которые могут привести к лавинному процессу возникновения других возмущений, что приведет систему к глобальным возмущениям и неустойчивому состоянию. Такие возмущения исследуются с помощью нелинейной теории неустойчивости. Понимание этих механизмов возникновения неустойчивости позволит управлять поведением течений.

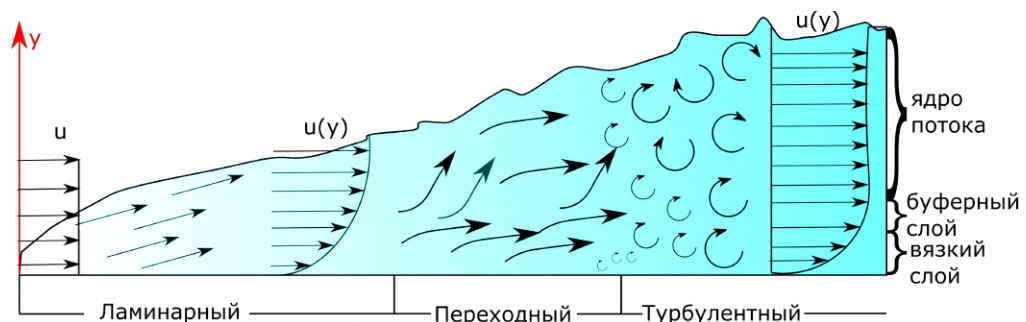


Рис. 1.6 — Переход от ламинарного течения к развитому турбулентному течению.

Рассмотрим основные принципы перехода гидродинамических систем в неустойчивое состояние. Два потока жидкости движутся навстречу друг другу с различной скоростью (Рисунок 1.7, а), зеленым цветом изображены частички одной жидкости, бирюзовым другой. В начальный момент времени давление

во всех точках одинаково. Силы вязкого трения вызовут сдвиг слоев на поверхности. В областях, где объемная концентрация частиц будет меньше, скорость частиц в этих местах также будет меньше (Рисунок 1.7, б и г). Согласно уравнению Бернулли в этих частях давление будет иметь большее значение, чем в узких диапазонах, что приведет к возникновению градиента давлений и, как следствие, завихренности потока. Этот пример называется неустойчивостью Кельвина–Гельмгольца [119]. Примером такой неустойчивости является образование волн в море.

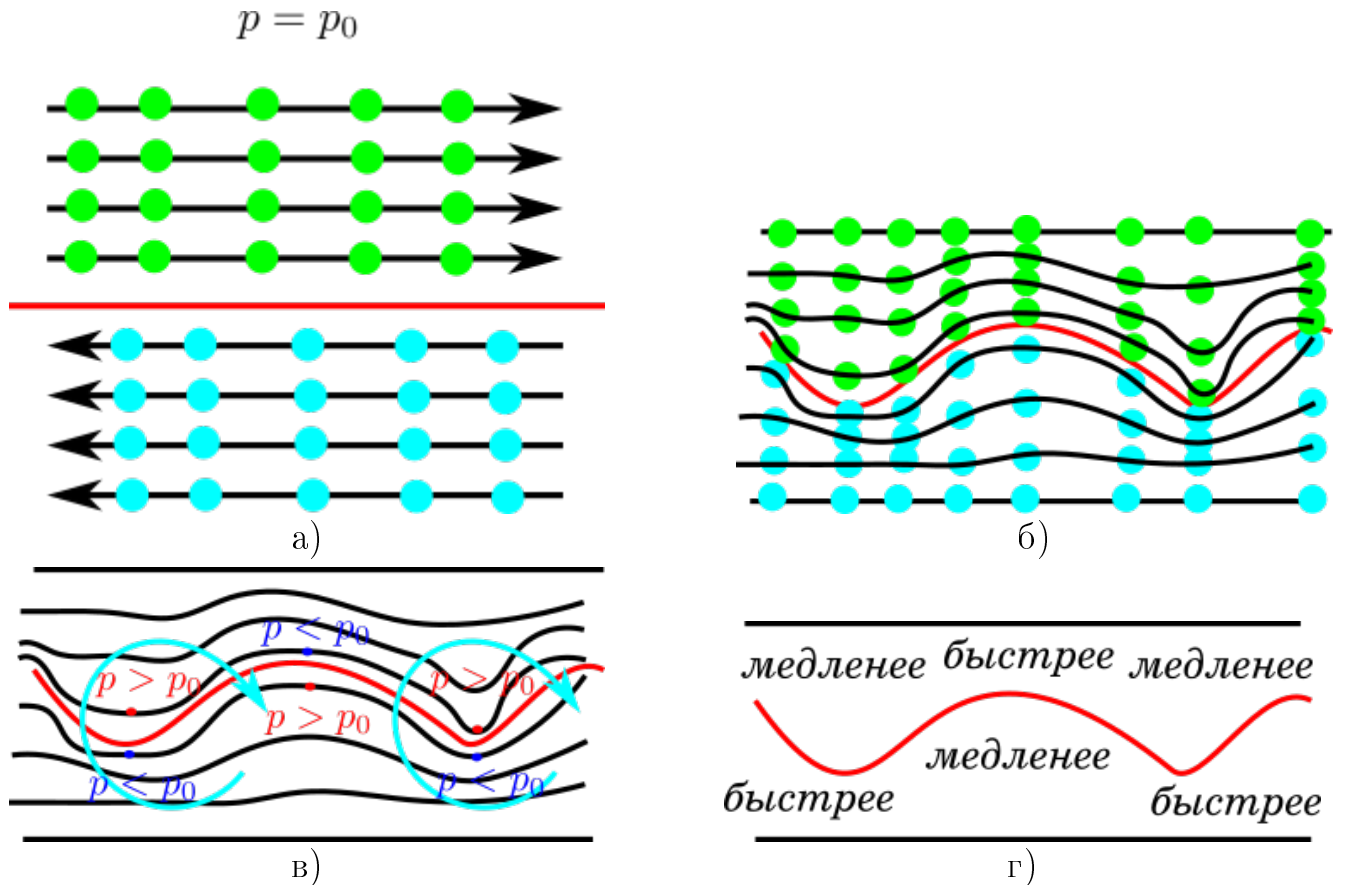


Рис. 1.7 — Представление неустойчивости Кельвин–Гельмгольца.

Следующим примером является неустойчивостью Релея–Тэйлора, возникающая из-за разности плотностей жидкостей (1.8). В этом случае изменение объемной концентрации частиц вызвано силой гравитации, что так же, как и в первом случае приведет к разности скоростей и давлений в пространстве, как следствие к завихренности потока. Практическое применение такого типа неустойчивости было рассмотрено в работе [120].

Важным для описания процесса в каналах различной формы является понимание механизмов возникновения неустойчивости для течений Куэтта и Пуазейля. Течение Куэтта представляет поток жидкости между подвижной

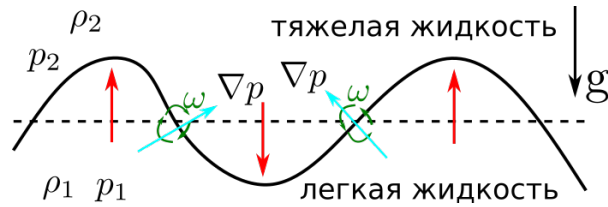


Рис. 1.8 — Неустойчивость Рэля – Тейлора .

и неподвижной стенкой (Рисунок 1.9а), а течение Пуазейля поток жидкости между двумя неподвижными стенками (Рисунок 1.9б). Эти течения можно описать аналитически, поэтому удобно на них исследовать основные механизмы неустойчивости в трубах. Важно понимать, что значения скорости потока по сечению неравномерно, а они описывается линейным законом для потока Куэтта и параболическим для случая потока Пуазейля. Основным механизмом возникновения неустойчивого состояния системы в этих случаях является сила вязкого трения в области неподвижной стенки. В этой области происходит резкое изменение скорости от нулевого значения к скорости потока. Это приводит к возникновению градиента давления по направлению перпендикулярному стенке и как следствие потенциальному возникновению турбулентных течений.



Рис. 1.9 — Течения а) Куэтта и б) Пуазейля.

Распределение скорости по сечению будет изменяться в зависимости от градиента давлений вдоль направления течения. На Рисунке 1.10 показаны основные шаблоны поведения потока для разных случаев изменения давления. Подобные изменения скорости будут происходить и для Пуазейлевского потока.

Один из способов предсказать неустойчивость системы — это энергетический метод [121—123]. Частицы обмениваются энергией за счет неупругих столкновений между собой (Рисунок 1.11). Рассмотрим синюю частицу. Она получает от верхней частицы, находящейся в верхнем слое, энергию за счет обмена моментом  $\Delta E_1$ . Синяя частица передает часть энергии

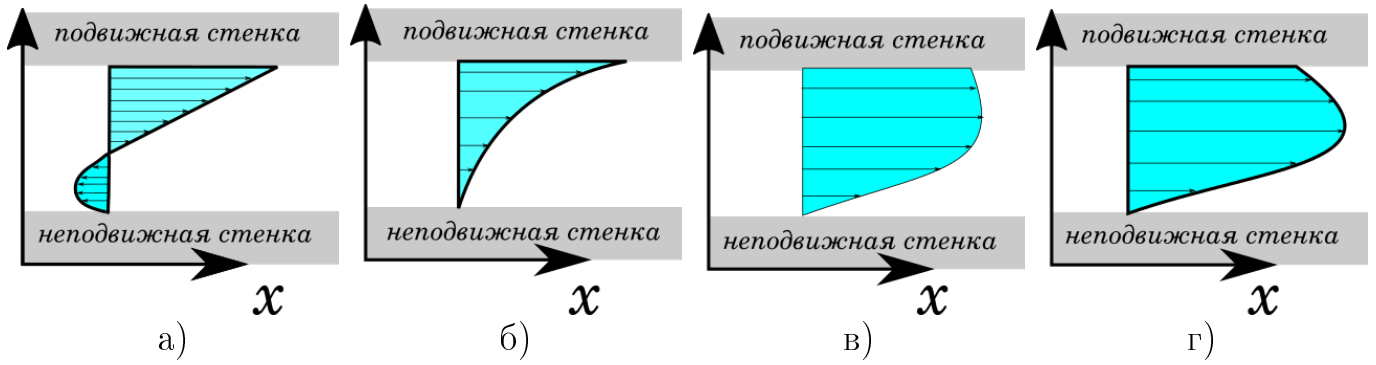


Рис. 1.10 — Различные типы поведения потока Куэтта.

На рисунке изображены случаи: а)  $dp/dx \gg 0$ , б)  $dp/dx > 0$ , в)  $dp/dx < 0$ , г)  $dp/dx \ll 0$ .

$E_1$  частице ниже. Общая энергия, полученная синей частичкой от верхней и нижней частицы, равна разнице  $\Delta E = \Delta E_1 - \Delta E_2$ . Потери энергии из-за вязкого трения при взаимодействии между частицами будут  $\Delta H > 0$ . Установившийся ламинарный режим должен быть описан балансом энергий  $\Delta E - \Delta H = 0$  в ином случае частица подвергается вертикальному воздействию. Из вариации кинематической энергии во всей области времени определяются критические значения параметров, описывающих неустойчивость системы. Критические значения параметров, определяемые с помощью энергетического метода, являются минимальными числами ниже которых кинетическая энергия любого конечного возмущения распадается монотонно. Недостатком этого метода является, что функция кинетической энергии может мгновенно возрасти до критического значения на незначительный временной промежуток, в то время как неустойчивое состояние не успеет еще сформироваться, а этот метод будет прогнозировать неустойчивость. Поэтому можно встретить энергетический градиентный метод оценки устойчивости системы [124]. Сущность этого метода заключается в исследовании изменения кинетической энергии в пространстве.

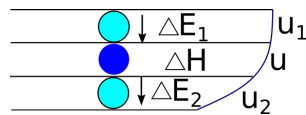


Рис. 1.11 — Схематичное изображение частиц жидкости в установившемся параллельном потоке сдвига.

Выше были рассмотрены основные гидродинамические неустойчивости и показаны основные механизмы их возникновения. В случае магнитной гидродинамики появляются дополнительные источники искажения распределения

энергии и давлений из-за влияния электромагнитных сил. Режимы работы МГД установок часто характеризуются высокими значениями и неравномерностью распределения в пространстве и времени температуры рабочего тела (жидкости). Наличие высоких магнитных полей приводит к появлению дополнительного источника нагрева. Все эти факторы могут привести к дополнительным механизмам неустойчивости, связанных с естественной конвекцией, например Рэлея–Бернара. Поэтому стоит отдельно рассмотреть электромагнитные явления, которые могут существенно влиять на поведение потока. Прежде чем перейти к обсуждению МГД неустойчивости, следует отметить, что количество переменных, которые влияют на поведение потоков является очень большим. Для этой цели используют теорию подобия физических явлений для снижения количества исследуемых переменных и возможности масштабировать полученные результаты.

#### 1.4 О теории подобия и безразмерных числах в расчетах МГД

Физически подобными называют такие явления, которые могут быть преобразованы с помощью линейных множителей. Геометрические подобные тела — это частный случай физически подобных явлений. Многие физические явления могут быть исследованы для безразмерных или нормированных пространств, а затем эти результаты перенесены на множество других пространств. Если число размерных переменных, описывающих явление равняется  $n$ , то оно может быть описано при помощи  $n - k$  безразмерных переменных, где  $k$  — число основных величин [125]. В магнитной гидродинамике соотношение гидродинамических сил к электромагнитным будут характеризовать поведение потока. Поэтому опишем их в безразмерном виде [54]:

- усилия вязкости отнесенные к единице объема  $F \sim \rho \nu \frac{U}{L^2}$ ;
- усилия инерции, отнесенные к единице объема  $F \sim \rho U^2 / L$ ;
- электромагнитные усилия отнесенные к единице объема  $F \sim \sigma B_0^2 U$ .

Здесь,  $\rho$  — плотность потока,  $\nu = \eta / \rho$  — кинематическая вязкость,  $\eta$  — динамическая вязкость,  $L$  — характерный размер,  $U$  — характерная скорость,

$B_0$  - характерная величина индукции магнитного поля,  $\sigma$  – электропроводность жидкости,  $Q$  – расход жидкости,  $A$  – площадь сечения.

В прикладной магнитной гидродинамике используют для упрощения анализа физических явлений числа подобия Гартмана  $Ha$  (1.14), характеризующее отношение электромагнитной силы к силе вязкого трения, Стюарта  $N$  (1.15), отношение электромагнитной силы к силам инерции, гидродинамического Рейнольдса  $Re$  (1.16), характеризующее силы инерции к силам вязкого трения.

$$Ha = B_0 L \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}; \quad (1.14)$$

$$N = \frac{\sigma B_0^2 L}{\rho U}; \quad (1.15)$$

$$Re = U \cdot L / \nu = Q \cdot L / (A \cdot \nu). \quad (1.16)$$

Можно заметить, что квадрат числа Гартмана  $Ha^2 = N \cdot Re$ . Помимо силового взаимодействия внешнего магнитного поля и индуцированных электрических токов, необходимо учитывать возмущение внешнего магнитного поля собственным магнитным полем токов. Полный ток при отсутствии приложенного разности потенциалов пропорционален  $\sigma B_0 U L^2$ , а индукция собственного магнитного поля этого тока  $\Delta B_0 \sim \mu_0 \mu \sigma B_0 U L$ . В большинстве случаев  $\mu = 1$ . Тогда отношение этой величины к значению внешнего магнитного поля будет равна магнитному числу Рейнольдса.

$$Rem = \mu_0 \sigma U L. \quad (1.17)$$

Споры о том как определять вышеуказанные числа начинались еще в прошлом столетии и продолжаются по сей день. В работе [126] был раскритикована идея из работы [127] об интерпретации магнитного числа Рейнольдса как отношение индуцированного тока к внешнему току данной системы (ток питания). В [115; 116] значение характерной скорости для расчета магнитного числа Рейнольдса берется равной синхронной скорости бегущего магнитного поля для любых режимов, а в [128; 129] при расчете этого числа учитывается проскальзывание бегущего магнитного поля. Помимо обсуждения о магнитном числе Рейнольдса, также шли дискуссии, как корректно определять число Стюарта и Гартмана. В работе показано [18; 128], что число Стюарта зависит от гидродинамической нагрузки системы. В

[130] обсуждается важность учета аспектного соотношения ширины и высоты канала для расчета числа Гартмана или выбор в виде характерного значения гартмановский слоя. Во многих других задачах ставится вопрос о выборе характеристических размеров. Всегда, когда используется теория подобия, необходимо четко представлять физический смысл рассматриваемого явления. Выбор характерного размера будет влиять на оценку влияния тех или иных сил.

## 1.5 МГД неустойчивость

Действие магнитного поля на поток электропроводящей жидкости изменяет его поведение и механизмы перехода к неустойчивому режиму. Это было доказано еще Гартманом в [14; 131] для одномерного случая. Эту задачу называют задача Гартмана и часто применяют этот термин на ее вариации. Эффект Гартмана заключается, что в центре канала возникают электромагнитные силы противоположные по направлению скорости потока, а в пристеночной области наоборот действуют силы сонаправленные движению жидкости. Данные силы примерно можно определить по формуле  $F = \sigma B_0^2 (V - u)$ , где  $V$  – средняя скорость потока, а  $u$  – мгновенная скорость [54]. Электропроводность стенок изменяет профиль распределения скорости потока в сечении, что впервые было показано в работах [14; 131–133]. Изменение поведение потока за счет электромагнитных параметров влияет на гидравлическое сопротивление и КПД насосов [109; 134].

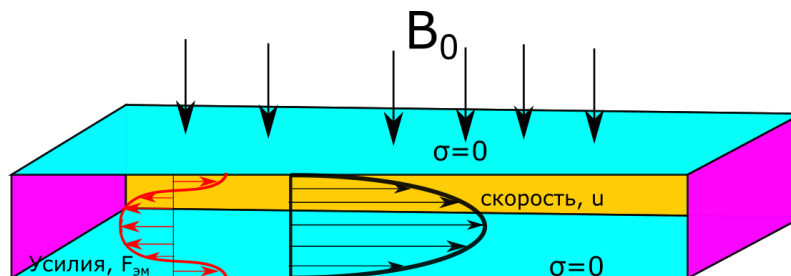


Рис. 1.12 — Поток жидкого металла в прямоугольной трубе, помещенной в поперечное магнитное поле.

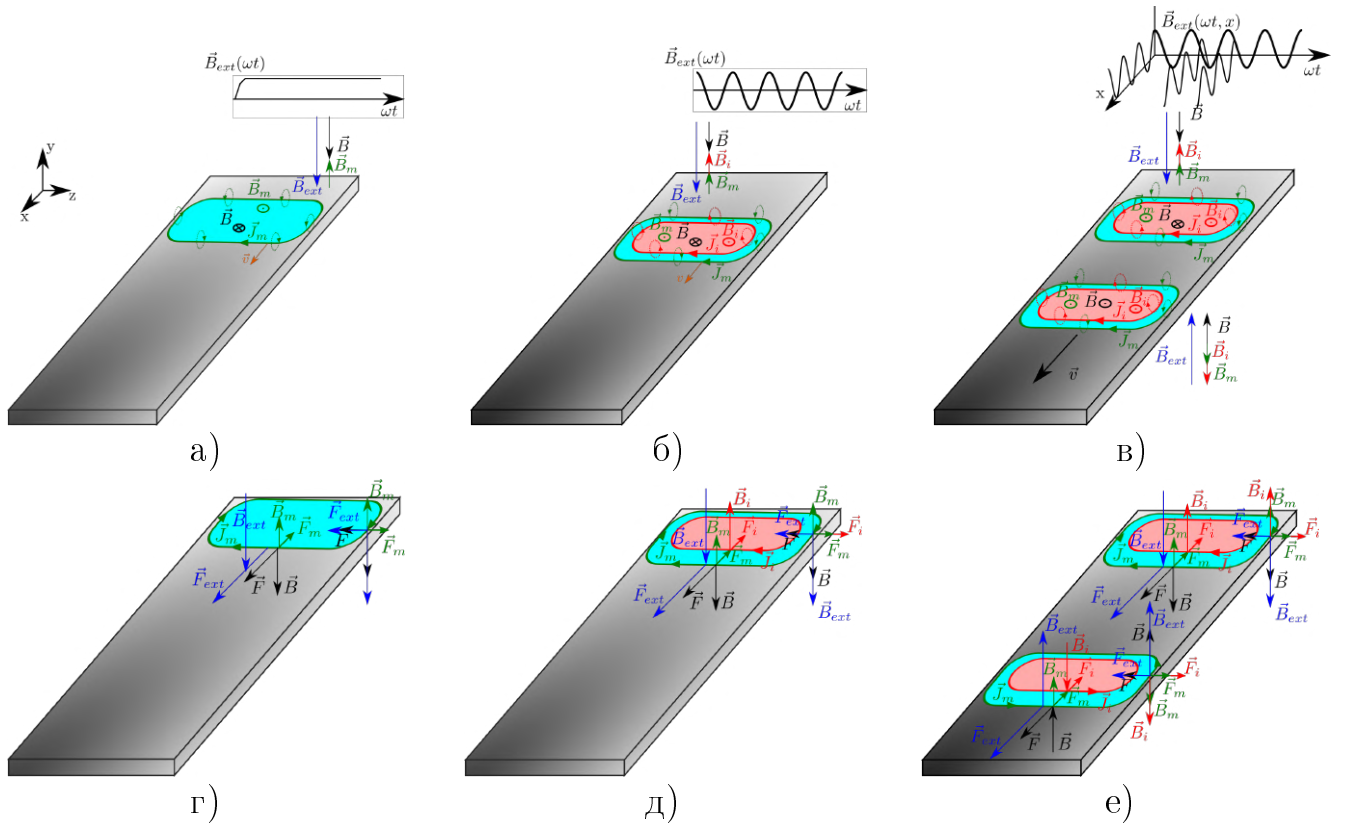
Большинство современных работ посвящены исследованию неустойчивых состояний в постоянных магнитных полях [135–139]. Это связано с популярностью темы развития новой энергетики на основе управляемого



термоядерного синтеза в тороидальных установках для магнитного удержания плазмы. В [140] работе описываются механизмы возникновения неустойчивости потока жидкости. Важными для оценки состояния гидродинамической системы является понимание структуры потока жидкости, результаты этих исследований были опубликованы в [141]. В [142] показаны результаты зависимости устойчивых состояний формы проводящего пучка жидкости на примере механической интерпретации устойчивости. В этой же работе описывается возможность достигать определенных режимов потока жидкости различными путями, тем самым обходить зоны возникновения неустойчивых режимов. Подобные выводы об инвариантности перехода к неустойчивым состояниям были сделаны в [141]. Однородные статические магнитные поля могут подавлять течение неустойчивости за счет дополнительной энергии омической диссипации, как описано в [136; 143; 144]. С другой стороны, магнитные поля могут способствовать переходу турбулентного течения из трехмерного в квази-двухмерное [141].

Вышеупомянутые работы посвящены однородным статическим магнитным полям, но для других систем механизмы неустойчивости течения могут иметь ряд других особенностей. На Рисунке 1.13 схематично показаны направления и пути замыкания переменных электрического тока и магнитной индукции в начальный момент времени для а) постоянного, б) переменного и в) бегущего магнитных полей, а также для времени, равного половине периода магнитного поля на Рисунках 1.13г — 1.13е. Постоянное магнитное поле генерирует ток только за счет движения среды или включения и отключения поля. В случае переменного магнитного поля происходит изменение электромагнитных переменных во времени, а в случаи бегущего поля и в пространстве.

Уже в 1980 году ученые задавались вопросом об устойчивости конфигурации проводящей жидкости в переменном магнитном поле [145]. В [146] обсуждается тормозящий эффект потока жидкости под воздействием бегущего магнитного поля. В работе [147] показано даже при низких магнитных числах Рейнольдса может наблюдаться асимметрия вращающегося магнитного поля. Это приводит к изменению электромагнитных сил. Аналогичные явления возникают в потоках проводящей жидкости под действием движущихся магнитов, где процесс вихреобразования сопровождается уменьшением продольной силы Лоренца [100; 139]. Устойчивые состояния жидкости под



Зеленым цветом обозначаются переменные вызванные движением среды, красным цветом – индуцированные, синим – внешние поля, черным – результирующие компоненты.

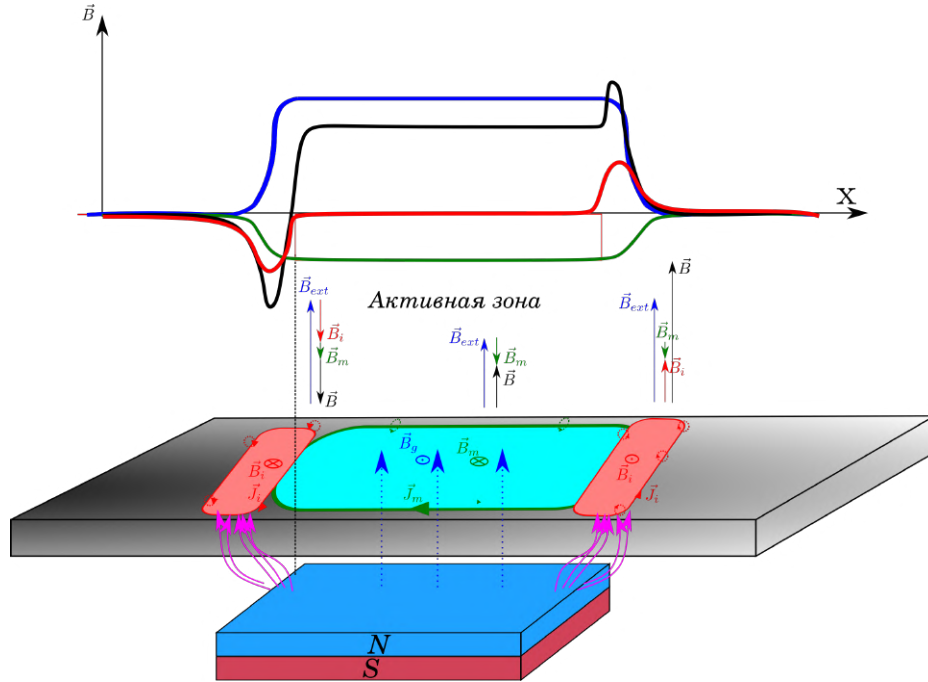
Рис. 1.13 — Схематичное представление плотностей тока и магнитной индукции для случая постоянного, переменного и бегущего магнитных полей.

воздействием гетерогенных полей исследуется в работах [34; 135; 148]. Результаты исследования бегущего магнитного поля на поток жидкости можно найти в [115; 116; 146; 149–152].

Помимо влияния формы магнитного поля на поведения потока, важным аспектами являются магнитные эффекты. Их влияние обсуждалось в работах [130; 137; 151; 152]. Из них особо важную роль играют краевые эффекты [151; 152]. Рассмотрим их более детально.

Поперечный краевой эффект описывает вихревую природу вторичных токов, которые вызывают не только тяговую составляющую, но и силы сжатия или растяжения, как показано на Рисунке 1.13. Влияние этого эффекта хорошо изучено в электромеханике [153–157]. В работе [108] образование обратных потоков объяснялось с помощью поперечного краевого эффекта. В работах [140; 148] обсуждается изменение поведения потоков из-за сложных контуров токов, что можно также называть в какой-то степени поперечным краевым эффектом.

Продольный краевой эффект характеризует неравномерность магнитного поля по длине канала в связи с конечностью магнитной системы (индуктора), как показано на Рисунке 1.14. На этом рисунке изображены основные составляющие магнитного поля и их влияние на результирующее магнитное поле. Фиолетовые стрелки показывают потоки рассеивания магнитного поля из-за разомкнутой магнитной системы.



Цветом изображены составляющие магнитной индукции: внешняя — сини), индуцированная — красный, движения — зеленый и результирующей — черный.

Фиолетовыми стрелочками обозначены потоки рассеивания.

Рис. 1.14 — Схематическое представление продольного краевого эффекта по составляющим магнитной индукции.

Индукцируемая составляющая на входе зависит от скорости роста магнитного поля. Скорость роста зависит от распределения магнитного поля в пространстве и от скорости потока жидкости. Произвольное магнитное поле может быть описано

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}(t)f(\mathbf{x}), \quad (1.18)$$

тогда производная по времени магнитного поля будет

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} f(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(t) \frac{\partial f(t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} f(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(t)v(x), \quad (1.19)$$

где  $v(t)$  есть функция изменения пространства или другими слова скорость. Из этого можно сделать вывод о том что индуцируемый ток на входе и

выходе будет характеризоваться скоростью нарастания магнитного поля в пространстве, скоростью движения магнитного поля в пространстве и его изменением во времени. Это явление играет важную роль в устойчивости системы для МГД-насосов и обсуждалось в работах [32; 33; 153; 157–159]. Основным выводом этих работ является необходимость плавного увеличения магнитного поля в пространстве на входе и выходе активной зоны канала. Влияние потоков рассеивания магнитного поля было рассмотрено в [160]. Влияние пульсаций сил Лоренца из-за изменения пространства вдоль длины канала были рассмотрены в [161].

В действительности магнитное поле имеет пространственные гармоники из-за специфики его генерации, например, зубчатость магнитопровода или разрыв между катушками. Этот магнитный эффект называется эффектом зубчатости и показан на Рисунке 1.15. Это подтверждается в [147], где показано, что параметры магнитной системы индуктора существенно влияют на характер потока. Высокие значения магнитной проницаемости стали индуктора, его дендритная фрагментация и концентрация проводящих примесей приводят к деформации линий магнитного поля и изменению типа магнитной волны, а в ряде случаев к изменению характера течения. Отчасти эти выводы объясняют причину, по которой удаление магнитопровода приводит к улучшению показателей индукционного насоса в работе [1].

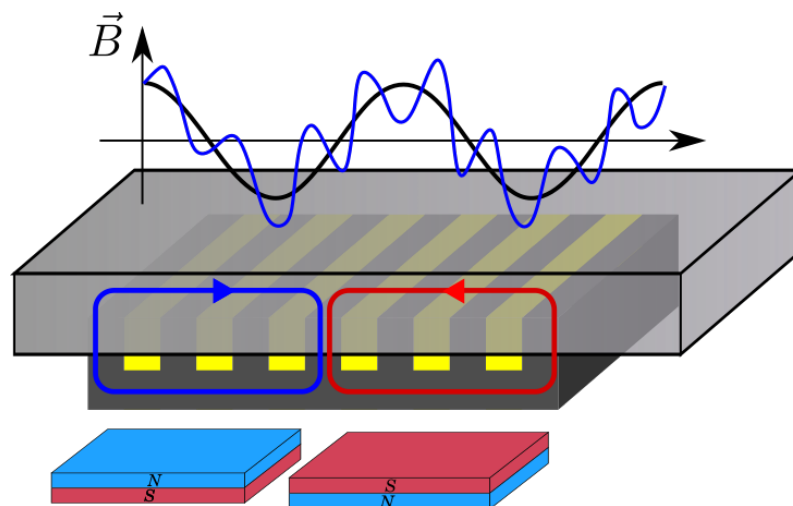


Рис. 1.15 — Эффект зубчатости магнитного поля.

Кроме краевых эффектов в таких насосах сильно выражен поверхностный эффект, и жидкий металл в рабочем участке канала находится в неравномерном силовом поле, которое во времени меняется с двойной частотой тока. Это приводит к определенным пульсациям скорости и искажению линий

давлений. В связи с этим у канала образуются вихри потока жидкости или противотечения [1].

## 1.6 Выводы по главе

При всем многообразии возникающих причин появления турбулентных течений в практических задачах магнитной гидродинамики, их можно условно классифицировать по физической природе происхождения на явления электромагнитной, термической и гидродинамической природы. Основные гидродинамические явления, влияющие на неустойчивость потока — это вязкое трение слоев жидкости вблизи стенок, разницы плотностей и скоростей между слоями жидкого вещества. Среди электромагнитных эффектов и явлений, влияющих на устойчивость потока, можно выделить следующие: краевые эффекты, эффекты вытеснения поля, явления связанные с неравномерным пространственным и временным распределением магнитного поля, неравномерное распределение усилий из-за разности скоростей магнитного поля и жидкости. И наконец, термические явления — градиент температур, фазовый переход, неравномерное распределение тепловыделения и силы плавучести. Гидродинамические, электромагнитные и термические явления приводят к возникновению градиента давлений, который в свою очередь вызывает закручивание потоков жидкости. Таким образом, действие всех этих явлений можно обобщить тем, что они приводят к увеличению неравномерности давлений в пространстве. Турбулентные течения возникают в локальной области и распространяются в пространстве и времени при достаточном конечном возмущении на них. Условие наличия достаточного возмущения анализируют с помощью баланса кинетической и диссипативной энергиями.

Необходимо учитывать специфику практической задачи или научной проблемы при исследовании механизмов неустойчивых течений, поскольку в одних приложениях наличие турбулентных течений может привести к неблагоприятному исходу, а в другом случае наоборот.

## Глава 2. Разработка численного инструмента для расчета магнитогидродинамических задач

### 2.1 Современные подходы к исследованию потоков жидкости

При исследовании поведения потоков жидкости важно уметь предсказывать структуру образующихся вихрей в различных условиях. На сегодняшний день в исследованиях поведения жидкого металла под воздействием магнитного поля используют следующие инструменты:

- физический эксперимент;
- аналитические модели;
- численные модели;
- бессеточные модели;
- гибридные модели.

Каждый инструмент имеет свои достоинства и недостатки, сложность и простоту реализации для различных типов задач. В начале этой главы рассмотрим существующий опыт успешной их реализации на практике.

#### 2.1.1 Экспериментальные подходы

Измерение потоков жидкости является сложной задачей из-за большого количества степеней свободы. Это уже упоминалось в первой части работы. Также сложность измерений добавляет наличие внешнего магнитного поля, которое может вносить дополнительные помехи в измерительной технике. Многие исследования подразумевают измерение скорости в пространстве и времени, а не только в локальных точках. Поэтому при экспериментальном исследовании потоков жидкости используют упрощенные конструкции установок для изучения физических процессов в них и проецирования этих знаний на реальные конструкции. В работе [109] рассматривается вопрос об экспериментальном определении электромагнитного давления с помощью весов. Такой подход весьма ограничен в своем применении и не позволяет производить

современные эксперименты. С помощью измерения электрического потенциала на поверхности стенок канала была проведена верификация численного кода в [162]. Явление пульсации давления с двойной частотой было численно исследовано в [158]. Измерение скорости вращения жидкости в индукционной тигельной печи с внешним магнитным перемешивателем было проведено косвенным методом при помощи измерения температуры в различных точках пространства [29]. В работах [149; 150] были проведены эксперименты по исследованию структуры профилей скорости в каналах индукционных насосов. В [80; 163] была проведена верификация численного кода для расчета перемешивания металла бегущим магнитным полем в процессе кристаллизации с помощью сравнения с экспериментальными данными из [164]. Также верификация численных моделей для расчета МГД течений была проведена с помощью эксперимента по измерению скорости в электромагнитном перемешивателе на вращающихся постоянных магнитах в работе [165]. В [166] экспериментально показано влияние неравномерного магнитного поля на поведение потока и эффект ламинаризации потока жидкости. Часть диссертации [18] посвящена экспериментальному исследованию магнитных полей в цилиндрических насосах, а диссертация [19] посвящена экспериментальному изучению характеристик индукционных насосов.

### 2.1.2 Аналитические модели

Аналитические модели позволяют существенно экономить время расчета и вычислительные ресурсы. Также исследования с использованием аналитических моделей позволяет оценивать поведения физических переменных, анализируя математические функции. На сегодняшний день нет аналитического решения уравнения Навье–Стокса, поэтому анализ гидродинамических процессов невозможен в полной мере с помощью аналитических моделей. Существуют решения частных случаев уравнения Навье–Стокса, например, уравнение Бернулли или Гартмана для одномерного случая ламинарной жидкости без и с магнитным полем соответственно [14; 131]. Аналитические выражения описания потока в двух направлениях пространства для различной электропроводности стенок приведены в [132; 133; 167].

В диссертации [18; 102] приводится обзор ряда аналитических решений для расчета цилиндрических насосов в электродинамическом приближении. В работе [41] предлагаются аналитические выражения для расчета магнитных систем со следующими особенностями:

- возможности учета низкой частоты питания индуктора;
- возможности учета большого немагнитного зазора;
- возможности учета конечности магнитных систем;
- возможности учета лобовых частей;
- возможности учета продольного и поперечного краевых эффектов.

Эта модель отдельно решает отдельно уравнение записанные для  $y - z$  и  $x - z$  плоскостей двухмерных задач. Недостатком этой модели является сложность учета термогидродинамической части и связанных явлений, турбулентности, свободной поверхности.

В заключении аналитические модели в современных исследованиях используются для верификации численных моделей, поиска приближенных критических значений физической величины и проведения анализа чувствительности входных параметров на поведение системы. Часто аналитические выражения используют для упрощения численной модели, замещая в ней часть математических процедур, например, пристеночные функции, демпфирующие коэффициенты и т. д.

### 2.1.3 Гибридные модели

Гибридные модели совмещают в себе несколько типов моделей. В [153–157] моделируется поведения бегущих магнитных полей в проводящей среде с помощью метода конечных элементов, а поперечный краевой эффект учитывается демпфирующим коэффициентом. Использование гибридных конечно–разностных граничных элементов с рядом аналитических выражений позволяет экономить вычислительные ресурсы в численных методах [168]. Применение пристеночных функций, описываемые аналитическими или эмпирическими функциями позволяет также существенно снизить время расчета [130; 169]. Эквивалентные схемы замещения часто используются на предварительной стадии проектирования МГД устройств [18; 35;



54; 134; 170]. Непосредственно метод расчета физических параметров с помощью эквивалентных схем не относятся к гибридным моделям, но их детализированные гибриды как в работах [154; 171; 172] можно назвать гибридными моделями. Эти модели позволяют описывать пространственное распределение физических переменных представляя область пространства в виде эквивалентных сопротивлений. В диссертациях [173–176] для расчетов магнитных, тепловых и аэродинамических полей используется метод детализированных схем замещений. Такой подход был актуален в отсутствии больших вычислительных мощностей, но на сегодняшний день его применение крайне ограничено ввиду сложности реализации и слабого развития алгоритмов составления матриц уравнений и их решения. В современных исследованиях магнитной гидродинамики часто используют методы распознавания картинок для определения поведения потоков жидкости [89; 90], машинного обучения с элементами кластеризации для распознавания структуры вихрей [177], обучение определения поведения системы на ранее рассчитанных или измеренных данных [178].

#### 2.1.4 Численное моделирование

Численные модели позволяют избежать прямого решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью замены их на множество линейных уравнений, записанных для конечных малых областей. С помощью численного моделирования можно описывать системы различной сложности с помощью математических уравнений и задания граничных условий. Также на данный момент уже разработано большое количество коммерческих и бесплатных продуктов, позволяющие реализовать в них численные модели. На электронном ресурсе<sup>1</sup> показано сравнение более 78 пакетов для численного моделирования, на самом деле их количество больше тысячи. Недостатком численного моделирования является необходимость настройки масштаба конечной области и выбора его типа для получения адекватных результатов. Некоторые типы задач требуют решения системы линейных уравнений с более чем миллионом миллионов уравнений, что

---

<sup>1</sup>Интернет ресурс [сайт]. URL: <http://feacompare.com>

приводит к проблеме нехватки вычислительных мощностей. Еще одной проблемой является организация мультифизического решения в одном продукте.

Взаимосвязанное решение магнитного поля в Ansys Classic и задачи гидродинамики в Fluent показано в [41] с помощью языка CPP с использованием UDF библиотеки Fluent. Подобные задачи решались в работах с использованием ANSYS [179] и Comsol Multiphysics [180]. В работах [179; 181] с помощью ANSYS CFX 18.2 исследовалось поведение потока жидкости в устройствах сложной формы с тонкими стенками, обладающими различной электропроводностью, для чисел Гартмана выше 1000. Пакет Comsol Multiphysics успешно применен при расчетах термоядерного синтеза в [180] и работы индукционных насосов в [128; 182]. Некоторые из авторов названных публикаций параллельно развивали свои коды применительно к задачам магнитной гидродинамики [151; 152; 183]. Большой вклад в развитие вычислительной магнитной гидродинамики внесла работа [136]. Ее авторы разработали собственный код для расчетов течения жидкости при воздействии постоянного магнитного поля. Эти же авторы в работе [183] провели анализ корректности использования различных моделей турбулентности для различных типов задач магнитной гидродинамики. Интерес для задач магнитной гидродинамики представляет работа [146], где на основе HERACLES кода [184] исследовались потоки жидкости в неидеализированных магнитных системах. В [168] авторы предлагают ряд подходов к учету конечности и вихревой природы магнитного поля на основе граничных условий, что позволяет снизить вычислительные ресурсы.

Преимуществом коммерческих численных пакетов является возможность реализации широкого спектра задач, но в то же время это достоинство является недостатком при решении задач, требующих особенных настроек, однако эти задачи можно решать с помощью программ с открытым кодом, как в [185]. Программы с открытым кодом для численного моделирования, как правило, создаются под конкретную задачу и тестируются на ней, что вызывает сложности использования этого инструмента для других случаев и требует дополнительной валидации.

### 2.1.5 Бессеточные модели

В некоторых задачах вместо модуляции полей скорости и давления моделируют плотность жидкости на решетке с помощью процессов течения и столкновения. Такой процесс осуществляется на основе метода решеточных уравнений Больцмана. В этом методе жидкость рассматривается в виде частиц. Применение реализации таких методов для расчетов магнитной гидродинамики можно найти в [186; 187]. Этот метод прост для вычислений, но ограничен в применении из-за ограничений к скорости частиц. По сравнению с другими численными методами для него не так много разработано готовых инструментов и решений.

## 2.2 Разработка алгоритмов расчета

Алгоритмы расчетов реализованы на программном обеспечении с открытым исходным кодом OpenFOAM и Elmer. Обмен данными между ними реализована с помощью связки EOF-library с использованием параллельного интерфейса передачи сообщений (MPI). Данная библиотека распространяется в открытом доступе<sup>2</sup>. Больше информации об этой библиотеке можно найти в [188; 189]. Программное обеспечение OpenFOAM отвечает за расчет гидродинамической части модели, а Elmer обеспечивает расчет магнитной части модели. Общая блок-схема предлагаемого решателя представлена на Рисунке 2.1.

Главным преимуществом такой реализации алгоритма — это возможность создания уникальных процедур решения физических уравнений в OpenFOAM и Elmer отдельно. Самым простым примером взять стандартный решатель OpenFOAM и модернизировать его, например, добавить член электромагнитных усилий в уравнение сохранения момента. Обмениваемые физические переменные могут быть любыми скалярами, векторами и тензорами. Основным численным методом расчета в программе OpenFOAM является метод конечных объемов. Этот метод лучше других численных

---

<sup>2</sup>URL: <https://eof-library.org>

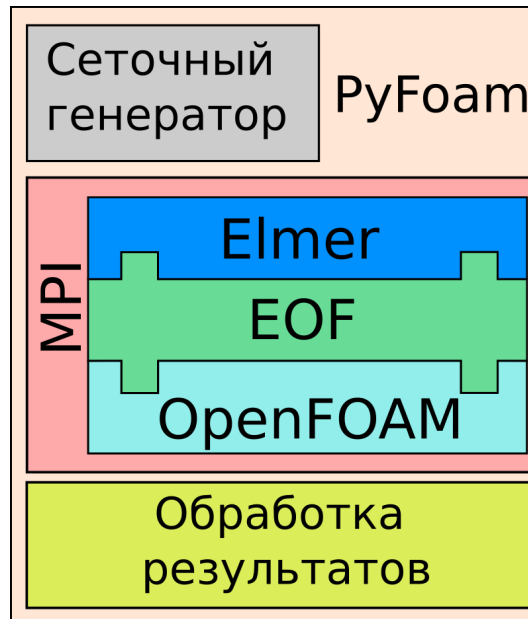


Рис. 2.1 — Блок-схема взаимодействия программ для расчета задач магнитной гидродинамики.

методов подходит для решения задач гидродинамики. Программа Elmer основана на методе конечных элементов. Метод конечных элементов хорошо разрешает сложные геометрические объекты в виду большого количества типов конечных элементов. Эта особенность важна для прямого моделирования внешних электромагнитных систем, например, индукторов.

Для реализации численных моделей в обеих программах требуется проведение дискретизации расчетной области, другими словами, создание сеток. Сетка для OpenFOAM в данной работе создавалась в бесплатной программе SALOME с использованием языка программирования Python для автоматизации ряда процедур или с помощью встроенной утилиты «blockMesh». Сетка для Elmer моделей создавалась в программах SALOME или GMESH с автоматизацией при помощи Python интерфейсов. Разделенное создание сетки для различных физических задач позволяет сделать процедуру моделирования более гибкой и менее требовательной к вычислительным ресурсам. Представленные результаты были подготовлены с помощью программного обеспечения ParaView и библиотеки Python Matplotlib.

Обработка результатов была реализована в открытой программе ParaView в интерактивном режиме с помощью Python. В основном в этой программе строились многомерные графики и проводилась трансформация данных в csv файлы для дальнейшей их обработки с помощью библиотеки matplotlib реализованной в языке Python. Использование библиотеки matplotlib позволяет

создавать графики в одном стиле с желаемым качеством и различными требованиями по оформлению, что существенно сложнее реализовать в ParaView.

Таким образом основные шаги для реализации расчетов требуемой задачи можно представить:

1. Разработать алгоритм решения модели в OpenFOAM;
2. Указать при каких условиях необходимо запускать на расчет электромагнитную задачу (модель Elmer);
3. Указать в этом алгоритме какие данные необходимо отправлять в модель Elmer и при каких условиях;
4. Указать какие переменные принимать после решения электромагнитной задачи;
5. Настроить модели для Elmer и OpenFOAM;
6. Настроить сетки для расчетных областей;
7. Задать физические настройки, начальные условия и т.д. для этих моделей;
8. Запустить на расчет разработанную модель;
9. Визуализировать результаты.

Процедура настройки моделей OpenFOAM и Elmer заключается в заполнении текстовых файлов кодом с использованием синтаксиса этих программ. Синтаксис языка OpenFOAM основан на C++, а Elmer на Fortran. Написание таких кодов требует знания большого количества встроенных методов, умения программирования на разных языках, понимания физических процессов, иметь высокий уровень численного моделирования и т.д. Но с другой стороны в большинстве задач эти процессы настройки являются повторяющимися и превращаются в рутинную работу. Эти процедуры можно автоматизировать с помощью применения языка Python. Выбор на языке Python был остановлен ввиду его популярности, множество программ с открытым кодом поддерживают работу с Python, наличия большого количества научных библиотек, а также простота синтаксиса.

Для осуществления однообразия синтаксиса языка программирования при настройке и проведении манипуляций над моделями была написана библиотека <sup>3</sup> в ходе выполнения работы. Эта библиотека позволяет проводить настройку моделей используя только язык программирования Python.

---

<sup>3</sup>URL: <https://github.com/TreeDa93/PyRunOF>

Эта библиотека позволяет управлять всеми элементами приведенными на блок–схеме (см. Рисунок 2.1). О ее функционале будет написано в разделе 2.2.3.

Рассмотрим кратко реализацию моделей с точки зрения математического аппарата.

### 2.2.1 Гидродинамическая часть модели. OpenFOAM

Поведение потока жидкости в магнитной гидродинамике описывается уравнением Навье–Стокса, как упоминалось в разделе 1.1. Эти уравнения могут быть представлены для сжимаемой жидкости (1.6) или для несжимаемой (1.7). Рассмотрим реализацию решения уравнения Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в программе OpenFOAM. Уравнения (1.7a) и (1.7б) разбиваются на два уравнения (2.1) для скорости, использующей матрицу коэффициентов  $\Lambda$ , вычисляемую по члену дискретизации, и для давления, (2.2), использующее диагональную  $\mathbf{A}$  и не диагональную матрицы  $\mathbf{H}$ .

$$\Lambda \mathbf{U} = -\nabla p - \mathbf{F}/\rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot [\mathbf{A}^{-1} \mathbf{H} - \mathbf{A}^{-1} \nabla p] = 0 \quad (2.2)$$

Первоначально процедура инициализирует EOF-библиотеку и проверяет логические условия для запуска магнитной части решателя (зеленый прямоугольник «EOF» на Рисунке 2.2). Затем решатель вычисляет скорость в уравнении 2.1 и передает рассчитанную переменную в уравнение 2.2 для расчета давления. Внутренний цикл расчета уравнения 2.2, показанный на Рисунке 2.2 зеленым цветом, называется циклом PISO, а другой цикл PIMPLE показан светло-коричневым цветом. Параметр *nNonOrthogonalCorrectors* необходим для высоких нелинейных задач, чтобы несколько раз пересчитать уравнение 2.2 для одного цикла PISO. Количество итераций цикла PISO устанавливается постоянным значением *nCorrectors*, а количество итераций цикла PIMPLE контролируется максимальным числом итераций *nOuterCorrectors* или допуском решения *outerCorrectorResidualControl* для каждой переменной поля. Если *nOuterCorrectors* равно единице, то решатель работает в режиме PISO, в противном случае в режиме PIMPLE. Каждая

задача может иметь абсолютно разные настройки процедур для достижения оптимальных результатов по точности и расчету времени. Для стационарных задач применяется цикл SIMPLE. Его принцип действий похож на PISO цикл только под временным шагом понимается номер текущей итерации, а работа решателя останавливается при достижении заданной невязки решаемых уравнений или максимального количества итераций в настройках модели. Подробно о этих циклах можно прочитать в работе [53].

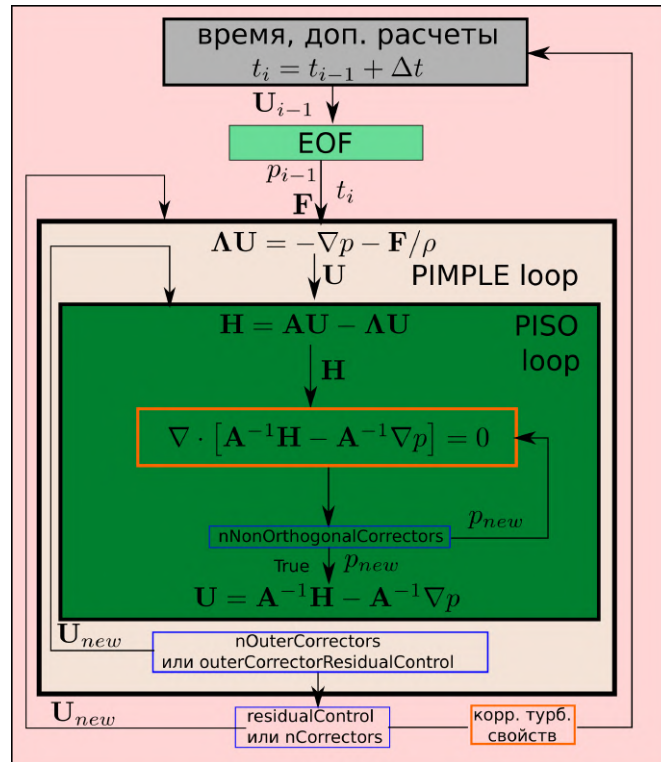


Рис. 2.2 — Блок-схема расчета гидродинамической части задачи в программе OpenFOAM.

При расчете гидродинамических задач используют различные модели турбулентности. Эти модели турбулентности предполагают дополнительные вычисления, например, турбулентной вязкости на основе значений кинетической энергии и диссипации. Эти переменные пересчитываются при переходе на новый временной шаг, а именно снижение невязки переменных давления и скорости ниже значения *residualControl* или максимального количества итераций *nCorrectors*. Можно вычислять турбулентные свойства на каждой итерации включив опцию *turbOnFinalIterOnly* в настройках *fvSolution*.

Временной шаг выбирается исходя из значений числа Куранта  $Co = \frac{\mathbf{U}\Delta t}{\Delta x}$ , где  $\mathbf{U}$  — локальное значение скорости в конечном объеме,  $\Delta x$  — расстояние между соседними объемами. Временной шаг  $\Delta t$  должен

быть таким, чтобы число Куранта  $Co$  не превышало 1 для PISO циклов и 3 для PIMPLE цикла. После перехода на новый временной шаг запускается проверка инициализации запуска EoF-библиотеки для расчета магнитной части задачи. В разработанных алгоритмах реализованы 5 условий вызова на расчет магнитной задачи:

1. На каждом временном шаге;
2. Каждые  $n$  временных шагов;
3. Каждый промежуток времени  $\Delta t$ ;
4. Только в начальный момент времени;
5. По максимальному отклонению какой-либо физической переменной от предыдущего временной итерации.

Условия можно изменить или расширить согласно требованиям задач. Также стоит отметить, что процедура инициализации может быть вызвана в любой части процесса, например внутри PISO цикла. Такая реализация инициализации выбрана из-за специфики задач.

### 2.2.2 Магнитная часть модели. Elmer

Процедура решателя магнитных моделей показана на Рисунке 2.3. На первом этапе происходит «Процедура 1. OpenFOAM2Elmer», когда в Elmer модель поступают переменные из OpenFOAM модели. Эти переменные переносятся с помощью нескольких алгоритмов интерполяции. Об этих алгоритмах интерполяции можно почитать в [188; 189]. Следующим шагом решения «Проц. 2 EM Solver» согласно Рисунку 2.3 идет процедура вычисления электромагнитных параметров. Вычисление электромагнитного поля выполняется относительно фазоров магнитного вектора  $\underline{A}$  и скалярных  $\Phi$  потенциалов с помощью  $A - \Phi$  формулировке уравнений Максвелла (2.3), записанных в комплексных числах. Переход к (2.3) записи уравнений от классических уравнений максвелла в дифференциальной форме (1.2) можно найти в [10]. Переход от временной записи уравнения к гармонической осуществляется с помощью преобразования Лапласа. Формулировка магнитного поля выбрана с целью возможности учета моделирования замыканий токов на стенках.



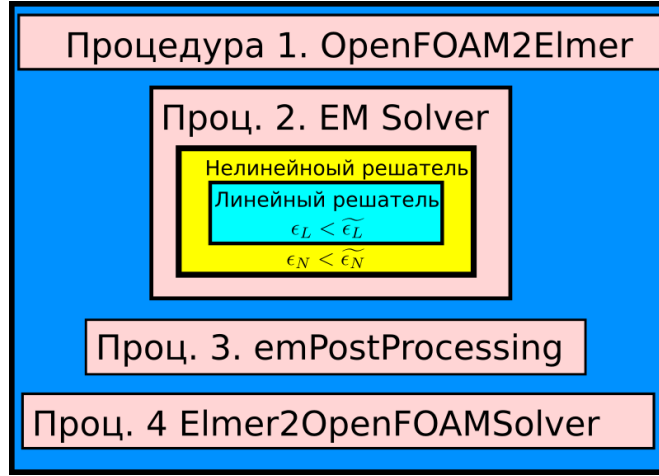


Рис. 2.3 — Процедура выполнения операции для расчета электромагнитных параметров в программе Elmer.

$$\Delta \underline{\mathbf{A}} - j\omega\mu\sigma \underline{\mathbf{A}} - \mu\sigma \nabla \varphi + \mu\sigma (\mathbf{U} \times \nabla \times \underline{\mathbf{A}}) = -\mu \underline{\mathbf{J}}. \quad (2.3)$$

Здесь  $\omega$  — угловая частота магнитного поля,  $\mu$  — магнитная проницаемость,  $\sigma$  — электропроводность. Плотность магнитного потока  $\underline{\mathbf{B}}$  и плотность тока  $\underline{\mathbf{J}}$  вычисляются по уравнениям 2.4-2.5.

$$\underline{\mathbf{B}} = \nabla \times \underline{\mathbf{A}}. \quad (2.4)$$

$$\underline{\mathbf{J}} = \sigma(-\nabla \varphi + j\omega \underline{\mathbf{A}}). \quad (2.5)$$

Сила Лоренца рассчитывается на третьем шаге «Проц. 3. emPostProcessing» как показано на рис. 2.3, с использованием следующего уравнения. На этом шаге можно рассчитать дополнительные электромагнитные величины, необходимые для анализа или расчета в модели OpenFOAM.

$$\underline{\mathbf{F}} = \frac{1}{2} \Re\{\underline{\mathbf{J}} \times \underline{\mathbf{B}}\}. \quad (2.6)$$

Последним шагом является «Проц. 4 Elmer2OpenFOAMSolver» как показано на рис. 2.3. На этом шаге осуществляется отправка значения переменной силы Лоренца в модель OpenFOAM после чего продолжается расчет гидродинамической части.

### 2.2.3 Разработка библиотеки для управления настройками модели в открытых программах

Библиотека предназначена для автоматизации ряда рутинных процедур настройки задач для решения в компьютерных средах OpenFOAM, Elmer и их совместного взаимодействия с использованием библиотеки EOF-library. Главным образом данная программа разрабатывалась для расчета гидродинамических, магнитогидродинамических и задач теплопереноса, но ее возможности этим не ограничиваются. С помощью кода «PyRunOF» можно проводить параметрические расчеты, расчеты для определения начальных условий с последующим переносом результатов в интересующий кейс, изменять любые настройки кейсов в одном текстовом файле и множество других процедур, которые отнимают существенное количество времени. Основные цели и задачи кода «PyRunOF»:

- сократить время на настройку задач OpenFOAM;
- снизить количество рутинных операций и больше сфокусироваться на обработке и анализе результатов;
- сделать возможным легко проводить параметрические исследования;
- возможность использования алгоритмов оптимизации.

Библиотека содержит следующую структуру:

- AdditionalFiles — папка хранит текстовые файлы с настройками различных моделей турбулентности;
- Examples — папка содержит несколько примеров по использованию данной программы;
- Modules — основная папка программы, содержащая различные модули для работы с кейсами OpenFOAM, Elmer и EOF;
- solvers — хранятся основные решатели EOF и OpenFOAM для работы с примерами из папки Examples.

Все инструменты для проведения каких-либо процедур над моделями расположены в папке Modules. Рассмотрим разработанные на данном этапе модули, их функционал и назначение. На данном этапе разработки программа содержит восемь модулей:

1. Модуль Elmer предназначен для автоматического редактирования текстового файла с настройками Elmer моделей;

2. Модуль `InitialValue` служит для настройки начальных условий моделей OpenFOAM;
3. Модуль `Manipulations` предназначен для осуществления процедур копирования, дублирования, удаления информации и настроек моделей;
4. Модуль `Meshes` служит для работы с сетками OpenFOAM и Elmer;
5. Модуль `ParametricSweep` позволяет проводить параметрические исследования;
6. Модуль `RunApplication` служит для запуска моделей на расчет с заданными настройками;
7. Модуль `SetConstant` предназначен для работы с папкой `constant` моделей OpenFOAM;
8. Модуль `SetSystem` предназначен для настройки папки `system` в моделях OpenFOAM.

Количество модулей может расширяться или сокращаться в зависимости от текущей версии разработки программы.

Основная идея работы с кодом «PyRunOF» — это создать основной кейс задачи, настройки которого планируется изменять, создать его копию, с помощью модулей «PyRunOF» настроить его по требованию пользователя и запустить на расчет в желаемом режиме исследования.

Основной кейс служит шаблоном для настраиваемой модели. В файлах настроек этого кейса расставляются ключевые слова в тех местах, которые должны будут изменяться. Приведем пример. В задаче необходимо изменять скорость потока и время расчета, тогда в папке «0» файла «U» необходимо указать уникальное ключевое слово, например, «Uin\_var», тоже самое необходимо сделать для переменной времени, хранящейся в папке «system» файла «contolDict», используя другой уникальный ключ. Модули «PyRunOF» позволяют в последствии заменять эти ключи на заданные значения пользователем в самом кейсе или его копии. После настройки шаблонного кейса для удобства работы лучше сделать его копию и использовать ее для запуска и настроек модели, что позволит неоднократно изменять заданные вами ключи и менять настройки. Преобразовать выставленные ключевые слова в реальные значения с помощью модулей «PyRunOF» и запустить на расчет.

Принцип работы всех модулей похож на описанный выше. На данный момент реализовано более 150 функций в этой библиотеке. Описание

назначение каждой функции указано в ее описании и может быть выведено в консоль с помощью магического метода `__doc__`. Также в библиотеки встроены функции отлавливания ошибок. Это значит, что библиотека будет подсказывать о допущенной ошибке и в некоторых случаях говорить в каком месте кода она сделана.

### 2.3 Численная верификация

Один из распространенных способов проверить работоспособность и оценить точность разрабатываемых алгоритмов по расчету численных моделей — это сравнить с результатами полученными другими методами или процедурами как в [190; 191]. Проведем эту процедуру сравнивая между собой результаты полученные при помощи

- предлагаемой процедуры решения в этой работе;
- стандартной встроенной процедуры решения «mhdFoam» в программе OpenFOAM;
- аналитического решения уравнений магнитной гидродинамики для двухмерного случая согласно уравнению

$$U_x = U_0 \frac{\cosh(Ha) - \cosh(Ha \cdot y/2b)}{\cosh(Ha) - \sinh(Ha/2b)}; \quad (2.7)$$

- коммерческих пакетов Comsol и ANSYS.

Объектом сравнения выберем прямоугольный канал длиной  $L = 20$  m и поперечным сечением шириной  $2a$  и высотой  $2b$ . На поверхности входа канала задано параболическое распределение скорости и постоянное во времени для повышения сходимости процесса расчета. Для расчетов примем, что высота и ширина канала равны  $2a = 2b$ . Магнитное поле проходит через две горизонтальных стенки (Гартмановские стенки) канала, равномерно распределяется в пространстве перпендикулярно потоку жидкости и со временем не изменяется. Электропроводность  $\sigma$ , плотность  $\rho$ , кинематическая вязкость  $\nu$ , половина высоты канала  $b$  заданы равными 1, чтобы упростить вычисление числа Гартмана. Тогда согласно (1.14), значение числа Гартмана будет равно значению внешнего магнитного поля  $B$ . На всех стенках канала

выполним условия прилипания жидкости, а на выходе зададим нулевое давление с учетом обратных потоков.

Для численного анализа была построена ортогональная сетка с числом элементов  $n_x \times n_y \times n_z = 100 \times 60 \times 60$ . У стенок, перпендикулярных магнитному полю, толщина сеточного слоя задана по формуле  $2a/Ha^{0.5}$ , а у стенок параллельных магнитному полю по  $2a/Ha$ . На эти слои приходится 10 элементов сетки.

Сравним результаты, полученные на основе двухмерных моделей в предположении, что канал имеет бесконечную ширину. Такой подход позволяет верифицировать модель с помощью аналитического выражения (2.7), приведенного в [131; 167]. На Рисунке 2.4а, а показаны распределения скорости между стенками, перпендикулярными магнитному полю, для чисел Гартмана 1 и 20, которые рассчитаны с использованием: встроенного решателя «mhdFoam» в программе OpenFOAM (на графиках обозначаются аббревиатурой OF); предлагаемого авторами решателя с использованием библиотеки EOF (на графиках EOF) и аналитического выражения (2.7). Численные результаты демонстрируют достаточное совпадение с аналитическим решением. В таких задачах третья компонента пространства играет важную роль как с точки зрения гидродинамики так и с точки зрения электромагнетизма. Это подтверждается сравнением результатов на Рисунке 2.4б, полученных в двухмерной постановке задачи с трехмерной и различными граничными условиями на стенках канала, имитирующие их электропроводность. Результаты на Рисунке 2.4б рассматривают три случая граничных условий:

- случай 1 — все стенки изолированы;
- случай 2 — стенки, перпендикулярные направлению магнитного поля, обладают бесконечной проводимостью, а стенки, параллельные магнитному полю, изолированы;
- случай 3 — все стенки обладают бесконечной проводимостью.

Следующим шагом является верификация авторского решателя на трехмерной модели, которая позволяет учесть прилипание жидкости не только на стенках, перпендикулярных магнитному полю, но и на параллельных ему. Включение в модель условия прилипания является важным, потому что основным механизмом неустойчивости течений в каналах является резкий рост сдвигового напряжения в пристеночных областях, который обусловлен именно прилипанием. Кроме этого, в трехмерной модели становится возможным учет

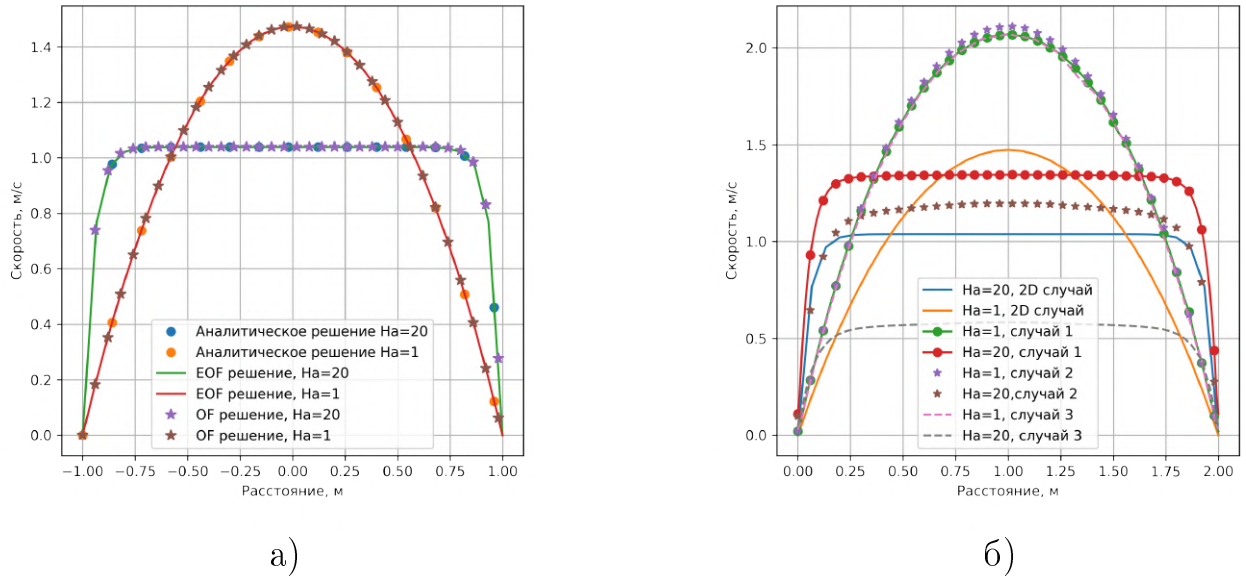
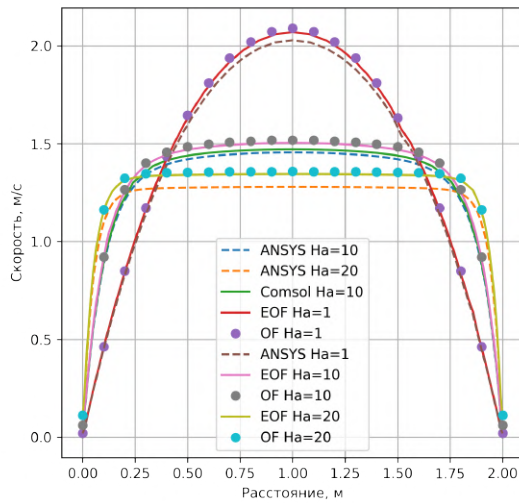


Рис. 2.4 — Сравнение распределения скорости между стенками перпендикулярными магнитному полю для в а) двухмерной постановки и б) трехмерной с различными граничными условиями.

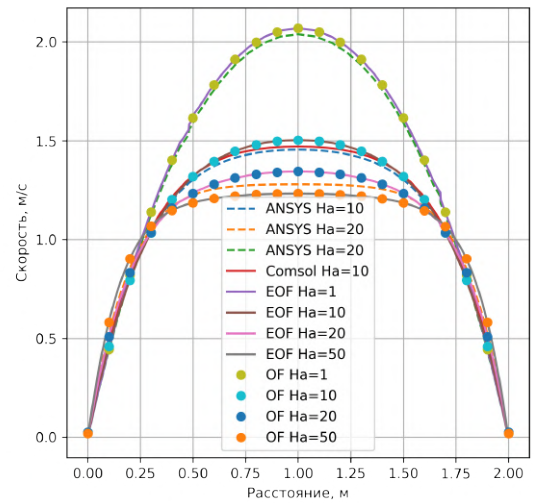
вихревой природы поля скорости во всех пространственных направлениях, что является также важным для анализа течений в системах, на которые воздействует постоянное магнитное поле, а значит, для ответа на вопрос, как магнитное поле влияет на возникающие усилия. Сравнение результатов расчетов в различных программных пакетах, в том числе с помощью предлагаемого кода, позволит оценить степень их точности.

Распределения скорости между сверхпроводящими стенками показаны на рисунке 2.5. Отличие между кривыми, полученными стандартным решателем (OF) и с помощью библиотеки EOF менее 1 % для чисел Гартмана 1 и 20. Данное расхождение может быть вызвано, с одной стороны, недостаточно точной расчетной сеткой в пристеночной области, где наблюдается наибольший градиент скорости, а с другой — методом интерполяции данных, участвующих в обмене между программами OpenFOAM и Elmer. Наибольшее отличие имеют результаты, вычисленные в ANSYS. Это можно объяснить спецификой модуля в ANSYS Fluent, предназначенного для решения задач магнитной гидродинамики. В данном модуле граничное условие необходимо разрешать конечными элементами, что приводит к уменьшению сечения канала с жидкостью на размер толщины стенки, заданный в настройках программы.

В задачах, где эффект толщины стенки является важным, этот факт может помочь описать математическую модель более простым способом.



а)



б)

Рис. 2.5 — К сравнению распределений скорости в канале с изолированными стенками: а) стенки перпендикулярны и б) параллельны магнитному полю

На Рисунке 2.6 изображены изолинии скорости для числа  $Ha$  50, рассчитанные разными способами: с привлечением библиотеки EOF (2.66); стандартным решателем OpenFOAM (см. Рисунок 2.6в); коммерческим пакетом ANSYS Fluent (см. Рисунок 2.6г); аналитически (см. Рисунок 2.6а) из [167]. Можно сделать вывод, что предлагаемый решатель на основе библиотеки EOF обеспечивает хорошую сходимость в сравнении с другими данными.

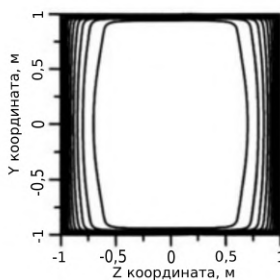
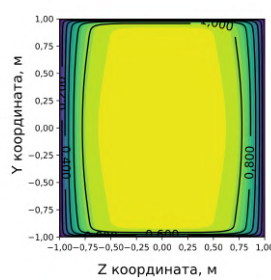
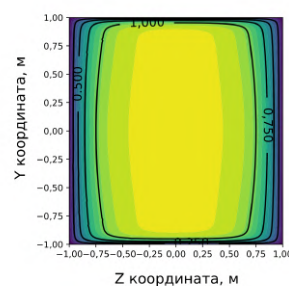
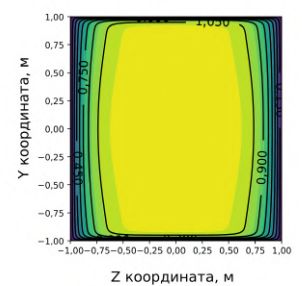
а)  $Ha=50$ б)  $Ha=50$ в)  $Ha=50$ г)  $Ha=50$ 

Рис. 2.6 — Линии тока скорости в поперечном сечении в случае изолированных стенок

Продолжительность счета является важным критерием оценки производительности выбранного при моделировании математического

представления задачи и метода решения. Приведем сравнительный анализ времени решения задачи Гартмана с помощью библиотеки EOF, встроенного решателя OpenFOAM и коммерческого пакета Comsol Multiphysics. Все три рассматриваемых варианта расчетов отличаются по используемым методам. Стандартный решатель OpenFOAM — это чистый метод конечных объемов, библиотека EOF сочетает метод конечных элементов и метод конечных объемов, а Comsol Multiphysics — это чистый метод конечных элементов. Во всех случаях решение систем линейных уравнений, выбор схем дискретизации по пространству и времени осуществлялись согласно настройкам, установленным в перечисленных программных средствах по умолчанию. Для расчета использовался канал с изолированными стенками, течение характеризовалось числом Гартмана, равным 10. Данные вычислений сведены в Таблицу 1. Из Таблицы 1 видно, что наилучший результат показывает стандартный решатель OpenFOAM. Но стоит отметить, что требующееся для расчетов время значительно повышается при рассмотрении неравномерных полей в пространстве, а также сокращение времени расчета при распараллеливании задачи. Однако решатель предназначен только для анализа постоянных полей и не имеет инструментов для моделирования неидеализированных систем, в которых необходимо учитывать конструкционные особенности источника поля, то есть к исследованиям течений жидкости в бегущем магнитном поле. Производительность Comsol Multiphysics ограничена тем, что инструмент распараллеливания вычислений не представлен в явном виде и возможно применять только метод конечных элементов. Достоинством данного пакета является интуитивно понятный интерфейс, позволяющий создавать сложные мультифизические модели. Разработанный в диссертации решатель устойчив и имеет хорошую сходимость результатов как при решении классических задач физики, так и при анализе реальных установок. Основной недостаток — это необходимость работы с двумя открытыми пакетами Elmer и OpenFOAM, которые используют разный программный синтаксис, а также может потребоваться знание языка программирования C++, если возникнет необходимость в изменении условий сочетания магнитной и гидродинамической задач.

В ряде задач магнитной гидродинамики важную роль играют пути замыкания тока в пространстве. Эти траектории могут иметь сложный характер, особенно на участках со значительным градиентом магнитного



Таблица 1 — Сравнение времени расчета задачи потока проводящей жидкости в прямоугольном канале под воздействием магнитного поля в различных численных пакетах.

Программный пакет	2 ядра	4 ядра	8 ядер	12 ядер
OpenFOAM	250 сек	132 сек	89 сек	93 сек
Библиотека EOF	1992 сек	1080 сек	757 сек	639 сек
Comsol	250 мни	-	48 мин	-
ANSYS	40 мин	-	30 мин	-

поля. Тогда важным параметром в этих случаях является распределение плотности тока в канале, потому что его значение непосредственно влияет на распределение усилий и как следствие поведение потока. Один из способов оценки данной переменной — это построение для скорости линий одинакового уровня. На Рисунке 2.7 представлено сравнение изолиний скорости рассчитанных (Рисунки 2.7б и 2.7г) и полученных аналитически (Рисунки 2.7а и 2.7в) в [132; 167] для чисел Гартмана, равных 10 и 50. На основе этих результатов можно сделать вывод о достаточной повторяемости рассчитанных результатов с помощью предложенного алгоритма на основе библиотеки EOF.

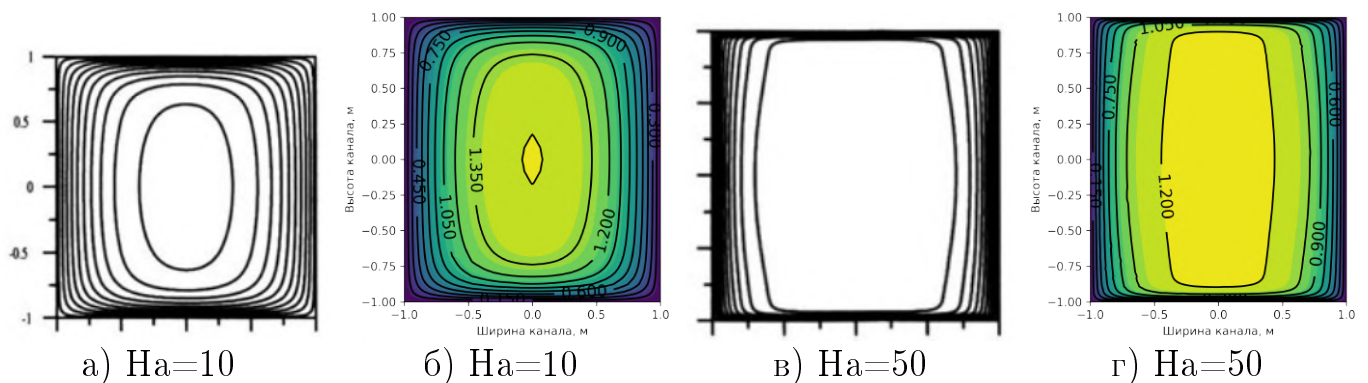


Рис. 2.7 — Линии тока скорости в поперечном сечении в случае изолированных стенок.

Количественные результаты распределения скорости можно показать с помощью распределения скорости вдоль линий между стенками перпендикулярными (Рисунок 2.8а) и параллельными (Рисунок 2.8б) магнитному полю. Увеличение числа Гартмана приводит к уплощению потока. Причем стоит отметить, что эффект уплощения профиля скоростей имеет более ярко выраженный характер между гартмановскими стенками

(см. Рисунок 2.8а), чем между стенками параллельными магнитному полю (см. Рисунок 2.8б). Такое распределение соответствует теории магнитной гидродинамики.

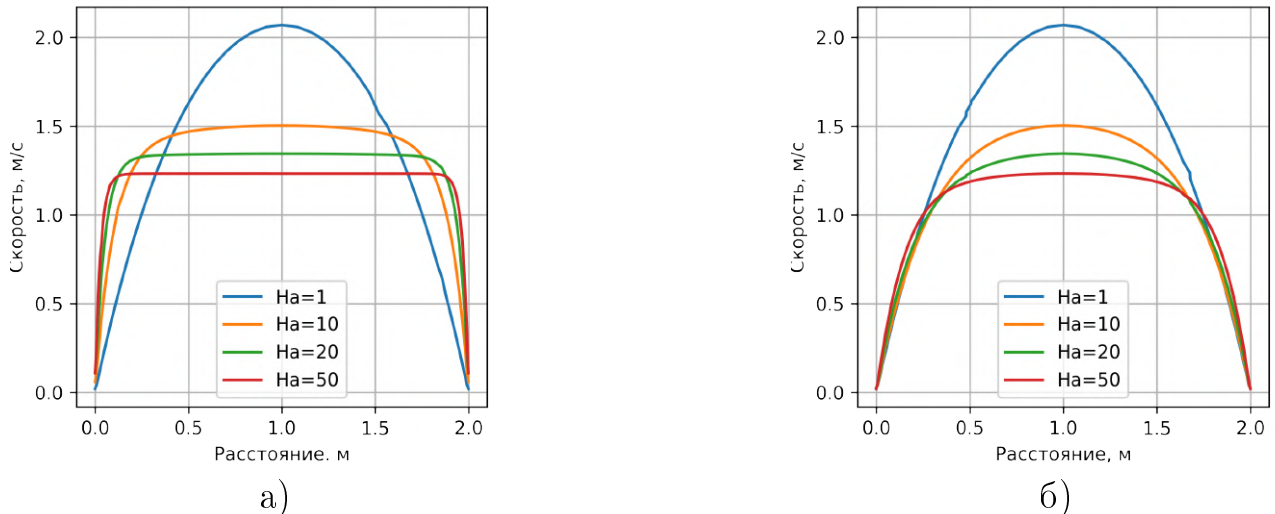


Рис. 2.8 — Распределения скоростей в канале с изолированными стенками. Распределения построены вдоль линий между стенками: а) перпендикулярные и б) параллельные магнитному полю.

Важно проверить возможность предлагаемой методики учитывать электропроводность среды на границах с помощью граничных условий, потому что значение электропроводности существенно влияет на поведение потока. Для этого рассмотрим случаи, для которых есть аналитические решения. В работе [133; 167] рассматривается случай, когда все стенки канала имеют бесконечную электропроводность. На рисунке 2.9 показаны распределение скорости в сечении канала для чисел Гартмана 10 и 50 полученные с помощью предлагаемой методики (Рисунки 2.9б и 2.9г) и аналитических (Рисунки 2.9а и 2.9в) результатов в [133; 167]. Можно сделать заключение, что на числах Гартмана около 10 сравниваемые результаты не существенно расходятся, а для больших чисел Гартмана наблюдается высокая повторяемость их поведения.

Количественная оценка результатов проведена с помощью построения распределения значений скоростей вдоль линий между стенками параллельных (см. Рисунок 2.10а) и перпендикулярных (см. Рисунок 2.10б) магнитному полю. Анализируя результаты, можно сделать вывод, что эффект уплощения профиля скоростей в случае электропроводящих стенок проявляется сильнее. Также этот эффект выражен более ярко для гартмоновского распределения

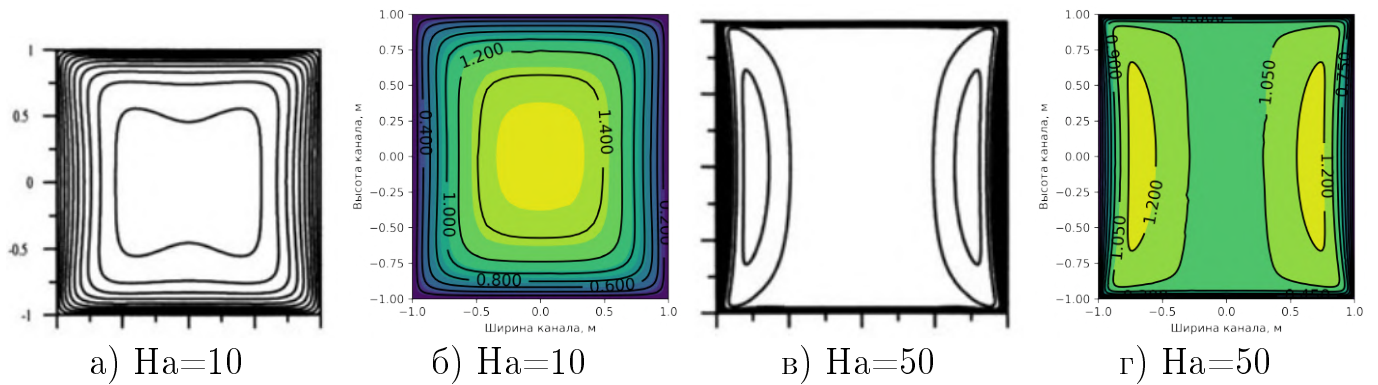


Рис. 2.9 — Линии тока скорости в поперечном сечении в случае сверхпроводящих стенок.

скоростей на Рисунке 2.10а, чем для распределения скорости между стенками параллельным магнитному полю на рисунке 2.10б.

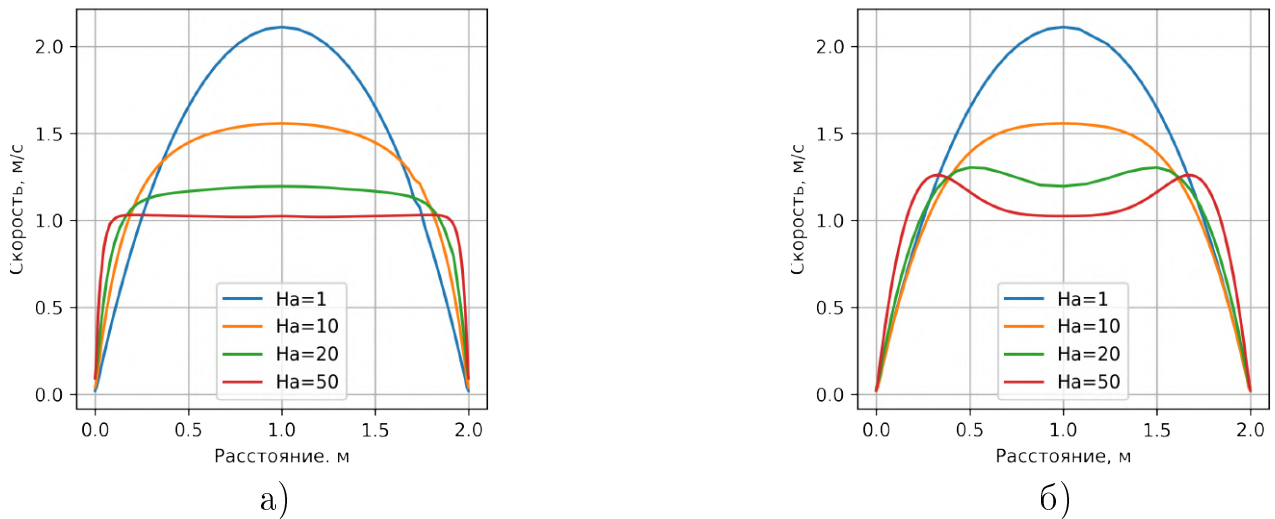


Рис. 2.10 — Распределения скоростей в канале со сверхпроводящими стенками. Распределения построены вдоль линий между стенками: а) перпендикулярные и б) параллельные магнитному полю.

Рассмотрим последний случай для верификации результатов, когда стенки перпендикулярные магнитному полю обладают сверхпроводимостью, а стенки параллельные магнитному полю выполнены из изолированного материала. Этот случай был аналитически решен в работе [192]. Сравним рассчитанные результаты предлагаемой методики с результатами в [192] на Рисунке 2.11. Рисунки 2.9б и 2.9г представляют результаты полученных с помощью предлагаемой методики, а Рисунки 2.9а и 2.9в соответствуют аналитическим результатам из [167; 192]. Можно наблюдать высокую

повторяемость результатов для всех представленных чисел Гартмана в такой постановке задачи.

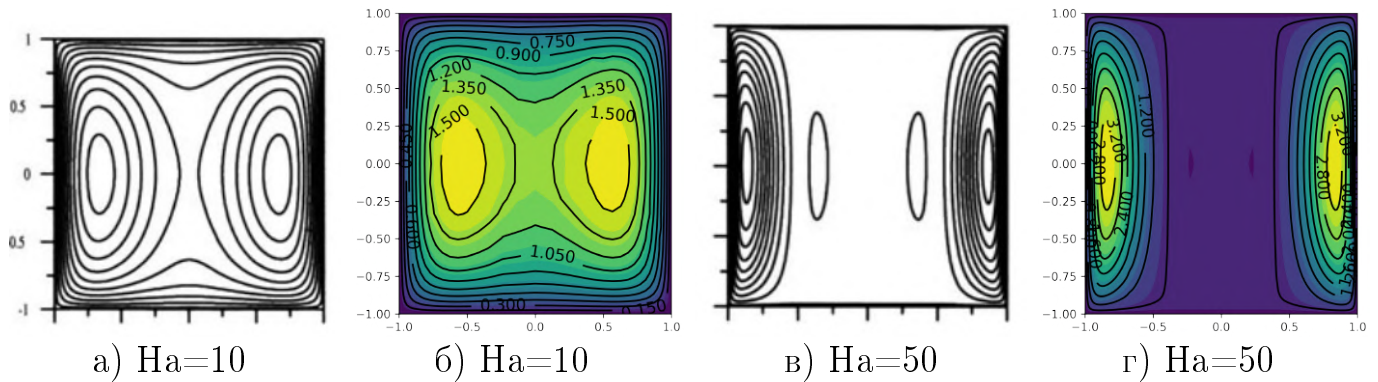


Рис. 2.11 — Линии тока скорости в поперечном сечении канала при граничных условиях стенки, перпендикулярные магнитному полю, обладают бесконечной проводимостью, а стенки параллельные магнитному полю, изолированы.

Количественно результаты сравним также как в предыдущих случаях с помощью распределения значений скоростей потока жидкости вдоль линий между стенками параллельными и перпендикулярными магнитному полю в центре канала. Эти результаты представлены на Рисунке 2.12, где Рисунок 2.12а соответствует распределению вдоль линии между стенками перпендикулярными магнитному полю, а Рисунок 2.12б — распределению вдоль линии между стенками параллельными магнитному полю. Следует отметить, что в таком случае эффект уплощения проявляется еще более явно. Скорость ядра потока снижается в 4 раза для числа Гартмана 50, и появляются пиковые значения скоростей у стенок параллельных магнитному полю. Возможность учета такого поведения математической моделью является очень важной особенностью при анализе устойчивости потока под воздействием магнитного поля. Влияние таких явлений будет подробно рассмотрено в третьей главе этой диссертации, а в этой части показана адекватность их учета в предлагаемой методике.

Последним этапом верификации предлагаемого кода является проведение качественного сравнения течения жидкости в постоянном магнитном поле для перечисленных выше трех основных случаев граничных условий [167]. На Рисунке 2.13 представлены картины распределения скорости в поперечном сечении канала, которые качественно повторяют результаты хорошо известных в магнитной гидродинамике численных экспериментов, описанных, например, в [132; 133; 167; 192].

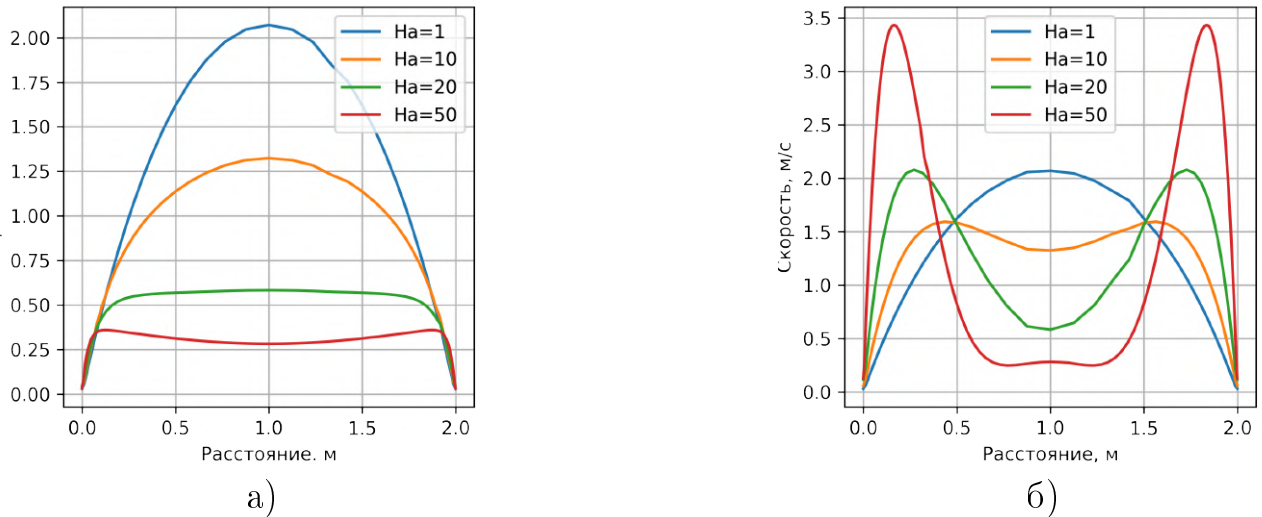


Рис. 2.12 — Распределения скоростей в канале со сверхпроводящими гартмановскими стенками и изолированными стенками, параллельные магнитному полю. Распределения построены вдоль линий между стенками: а) перпендикулярные и б) параллельные магнитному полю.

Осуществлена верификация, а также количественная и качественная оценка предложенного кода для решения задач течения жидкости в присутствии постоянного магнитного поля в каналах прямоугольного сечения. Проведенные исследования показали, что отклонение между результатами, полученными с помощью авторского кода, и аналитическим решением [167] составляет не более 1 %. Также проведено количественное сравнение распределений скорости между стенками канала с найденными другими способами: с использованием численных пакетов с открытой лицензией для расчета магнитного поля (Elmer), механики сплошных сред (OpenFOAM), библиотеки-связки этих пакетов (EOF-library) и коммерческих пакетов ANSYS и Comsol. Качественная оценка распределения скорости в поперечном сечении при различных граничных условиях на стенках канала произведена на примере трехмерной постановки задачи течения жидкости. Она также показала адекватность авторских результатов. Оценка производительности различных численных пакетов выявила, что самую высокую скорость вычислений имеет стандартный решатель OpenFOAM, но он, в отличие от библиотеки EOF не позволяет производить сложные вычисления для электромагнитной задачи. Возможность осуществлять на основе библиотеки EOF квазистационарные вычисления электромагнитного

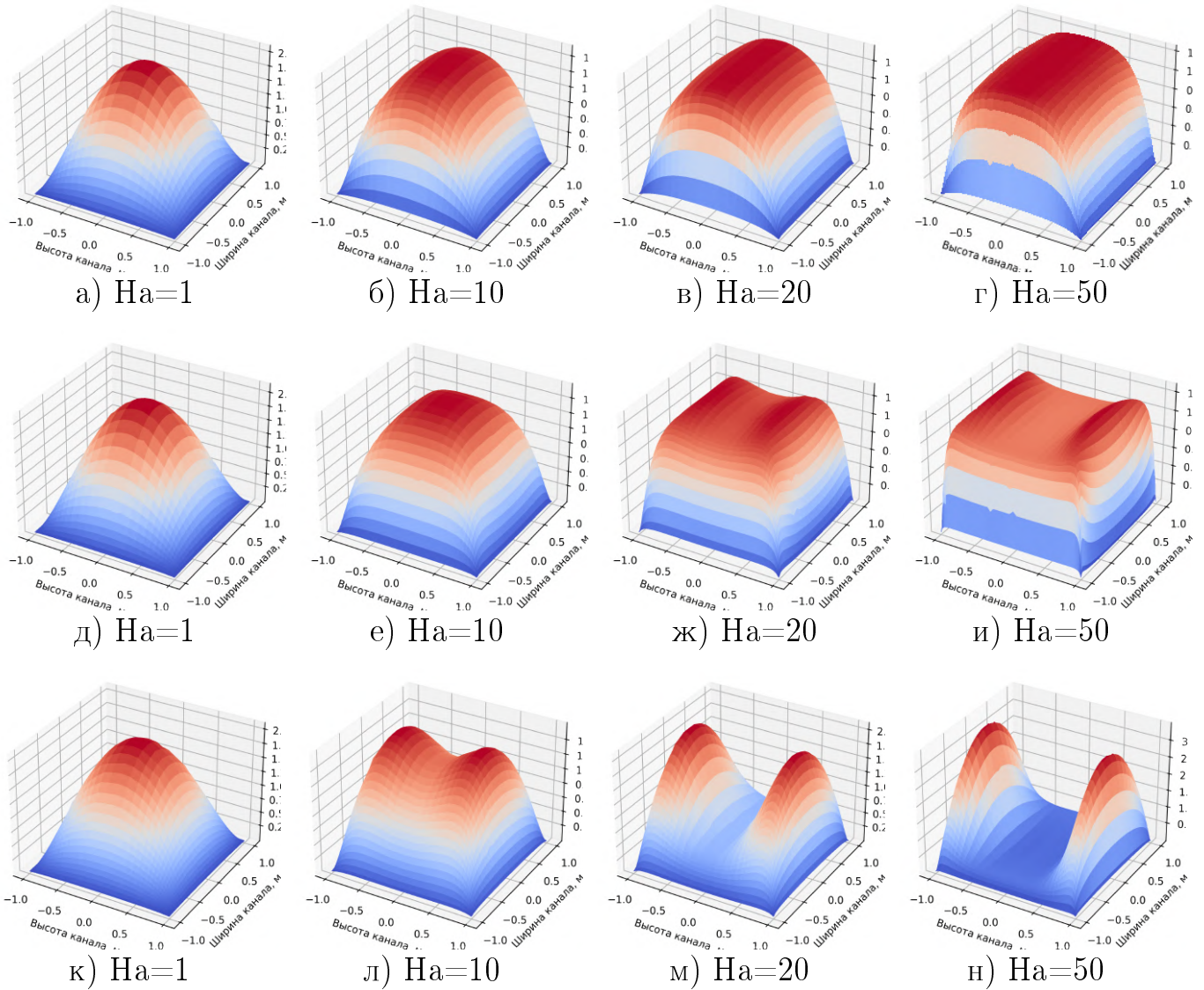


Рис. 2.13 — Картины поверхностей скорости в сечении канала при разных граничных условиях: все стенки изолированы (а–г); стенки, перпендикулярные направлению магнитного поля — сверхпроводимые, а стенки, параллельные магнитному полю — изолированные (д–и); все стенки имеют бесконечную проводимость (к–н).

поля являются еще одним ее преимуществом перед стандартным решателем OpenFOAM, который не работает с комплексными числами. Из слабых сторон предлагаемого кода можно выделить отсутствие встроенных модулей для расчета протекания тока в катушках со сложной замкнутой формой. Эти опции присутствуют в коммерческих программах Comsol Multiphysics и ANSYS. Исследована эффективность кода при распараллеливании вычислений с использованием библиотеки EOF в сравнении с другими программными пакетами. Обнаружено, что увеличение числа ядер при одинаковом объеме

оперативной памяти приводит к сокращению времени счета более чем в 3 раза. Также открывается возможность настраивать отдельно распараллеливание магнитной и гидродинамической задач, а это может способствовать в будущем повышению производительности данного кода и расширению круга решаемых задач. Резюмируя описанные выше результаты, можно утверждать:

1. Проведенная верификация предлагаемого кода показала адекватность получаемых с его помощью решений.
2. Самая высокая устойчивость решения при одинаковых сетках демонстрирует код в совокупности с библиотекой EOF.
3. При использовании EOF-library и языков программирования C++ и Fortran можно создавать уникальные граничные условия.
4. На абсолютные значения скорости в канале значительное влияние оказывают электромагнитные граничные условия.
5. Предлагаемый код не ограничивается возможностью решения ламинарных течений под действием постоянного магнитного поля, а имеет более широкий круг применений, ряд из них можно найти в работах [151; 152; 193; 194]. Также стоит отметить, что дальнейшие работы будут посвящены исследованию влияния бегущего магнитного поля на распределение скорости в индукционном насосе.

## 2.4 Экспериментальная верификация

Важно также проверить полученные результаты с помощью экспериментальной модели. Получение распределения скорости потока жидкости в сечения канала является нетривиальной задачей как с точки зрения создания лабораторной установки, так и выбора измерительной техники. Одним из возможных способов проверить решатель — это создать прототип с упрощенной конструкцией, но похожим протеканием физических явлений, как например, в [191].

Объектом исследования выбрана лабораторная установка электромагнитного перемешивания (см. Рисунок 2.14), состоящая из цилиндрического сосуда, выполненного из плексигласа. Сосуд наполнен жидким сплавом GaInSn® при температуре окружающей среды (около 19 C°). Использование эвтектического

сплава GaInSn® в настоящее время широко распространено в научном мире благодаря его особым свойствам низкотемпературного плавления. Установка имитировала типичную линию литья металлов. Сосуд радиусом 31 мм и общей высотой 215 мм окружен круглым индуктором из меди со средним радиусом 61 мм. Индуктор был разделен на три группы по два витка в каждой и питался трехфазным симметричным током с частотой  $f = 50$  Гц и пиковым значением тока  $I_{max} = 100$ . Таким образом, каждая группа витков представляла одну из трех фаз с электрическим углом сдвига  $120^\circ$ . Выбранная последовательность фаз шла от низа системы к ее вершине и создавала бегущее магнитное поле, соответственно бегущее в том же направлении. Геометрическое расстояние между фазами, равное 30 мм, было предварительно оптимизировано для достижения наибольшей скорости потока жидкости при выбранных электрических параметрах; таким же образом расстояние между витками каждой фазы устанавливалось равным 12.4 мм.

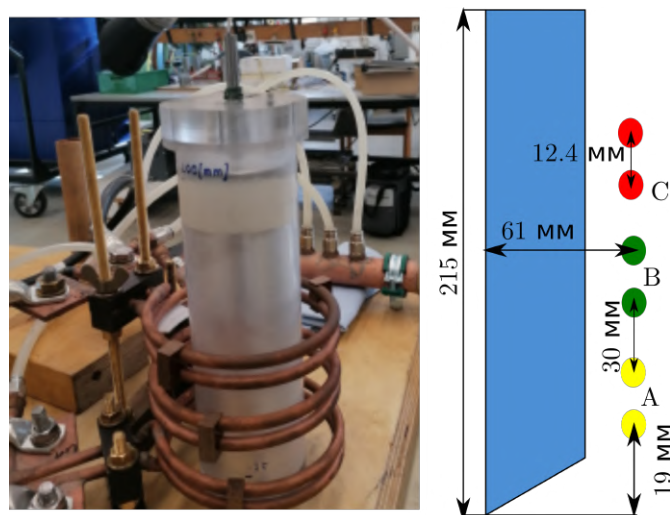


Рис. 2.14 — Экспериментальная установка для перемешивания GaInSn®.

Процедура верификации:

1. Сравнение экспериментальных результатов и математического моделирования в ANSYS.
2. Сравнение численных расчетов в ANSYS и с помощью разрабатываемого кода на основе EOF-library.

Результаты сравнения представлены на Рисунке 2.15. Рисунок 2.15а отображает распределение аксиальной скорости вращения металла вдоль линии в центре перемешивателя. Это распределение построено в установившийся момент времени. Отклонение численных результатов не превышает 11 %. Такой результат может быть удовлетворительным для верификации численных



моделей. Измерение скорости во времени в точке, находящейся на 110 мм от начала координат линии измерения, представлен на Рисунке 2.156. В этом случае относительное отклонение не превышает 5 %. Таким образом показана адекватность методики расчета в программе ANSYS как для пространственного распределения, так и временного.

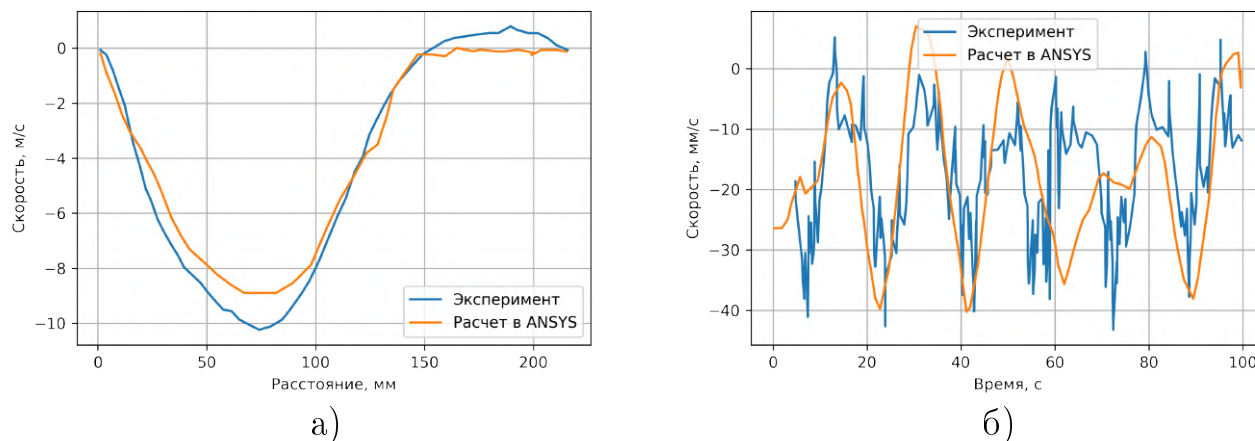


Рис. 2.15 — Сравнение экспериментальных данных с расчетами в программе ANSYS.

Точность электромагнитного моделирования была первоначально проверена путем сравнения распределения плотности силы Лоренца вблизи стенки сосуда на Рисунке 2.16а. Учитывалась только средняя составляющая силы, так как ожидалось, что удвоение частоты окажет незначительное влияние на течение. На Рисунке 2.16а видны два пика в распределении силы, что является следствием трехфазного тока, подаваемого на индуктор, а плотность силы была в среднем направлена снизу вверх системы, как и ожидалось, следуя последовательности фаз тока. Осевая составляющая скорости построена вдоль оси сосуда (см. Рисунок 2.16), где ожидалось возникновение наибольшей турбулентности. Эти результаты были получены для стационарного режима с использованием алгоритма SIMPLE. Можно наблюдать высокую повторяемость для разных моделей турбулентности. Результаты без постфикса EOF обозначают расчеты в ANSYS.

Динамические расчеты (Рисунок 2.17) скорости показали сходимость со стационарным случаем на 100-й секунде. Стационарный режим по скорости в эксперименте наблюдался через 55 секунд работы электромагнитного перемешивателя. В динамических расчетах установившейся режим был получен примерно на таком же временном промежутке. SIMPLE  $k-\epsilon$

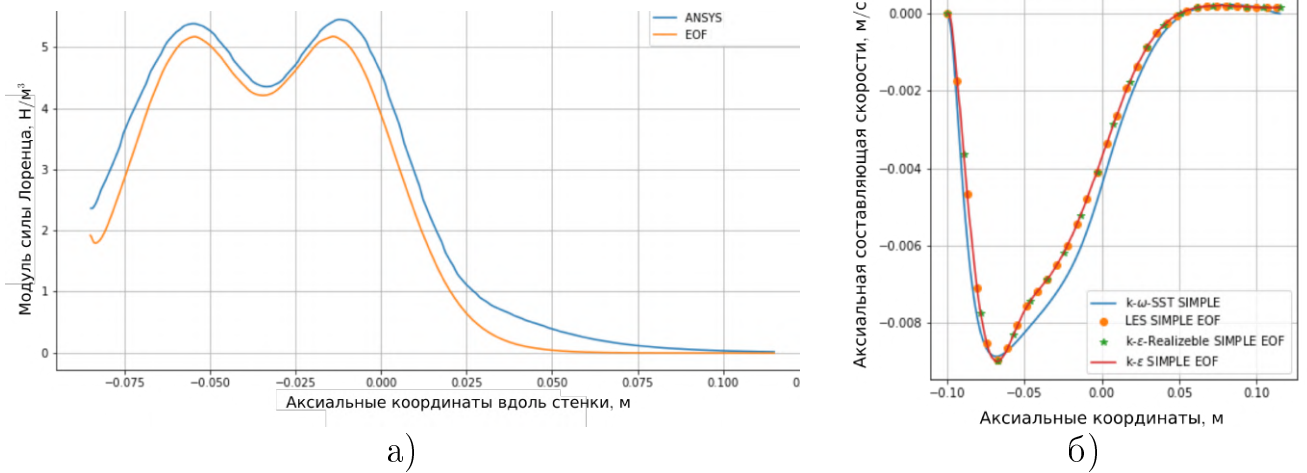


Рис. 2.16 — Сравнение распределения а) электромагнитных усилий вблизи стенки кюветы и б) скорости жидкого металла вдоль линии в центре контейнера.

случай, выполненный в Ansys Fluent, можно сравнить с PISO  $k-\varepsilon$  случаем, смоделированным в OpenFOAM на 17 секунде. Можно отметить достаточную сходимость между PISO  $k-\varepsilon$ , выполненным в OpenFOAM, и SIMPLE  $k-\omega$ -SST в Ansys Fluent.

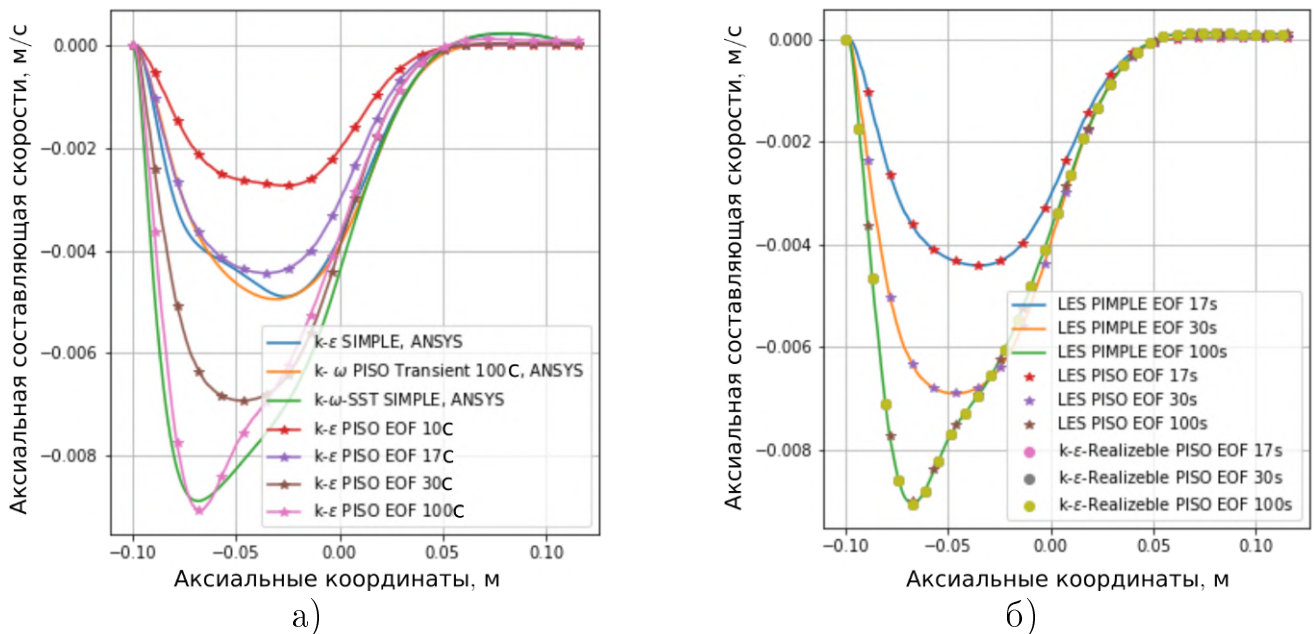


Рис. 2.17 — Распределения скорости в динамике, рассчитанные а) разными алгоритмами и б) моделями турбулентности.

Максимальная скорость располагалась на одной и той же осевой координате, а их пики различаются на  $\Delta v_{axial,max} = 0.2$   $\text{mm/s}$ , что соответствует 2.2 %. Поведение потока было окончательно подтверждено применением моделей Realizable- $k-\varepsilon$  PISO, LES PIMPLE и LES PISO в OpenFOAM:

эволюция осевой скорости во времени практически полностью совпадает в трех моделях, подтверждая как положение ее пика, так и максимальное значение 8.6 мм/с. Из этого можно сделать вывод: использование OpenFOAM алгоритмов для расчета распределения скорости позволяет пользователю получать аналогичные результаты независимо от выбранных моделей турбулентности и процедуры решения уравнений. Использование инструмента ANSYS требует дополнительных настроек и контроля этих параметров для получения одинаковых результатов. В целом проведенные симуляции подтвердили сходство результатов, полученных с помощью коммерческих программ Ansys Fluent и предлагаемой методики, а также интересное применение нестандартных методов решения. Было достигнуто хорошее сходство между численными результатами в Ansys Fluent и EOF в 80% смоделированных случаев.

## 2.5 Влияние размера сетки и модели турбулентности на результаты расчетов

Изучение структуры потока и определение его неустойчивых режимов с помощью численного моделирования требует надлежащей настройки модели.

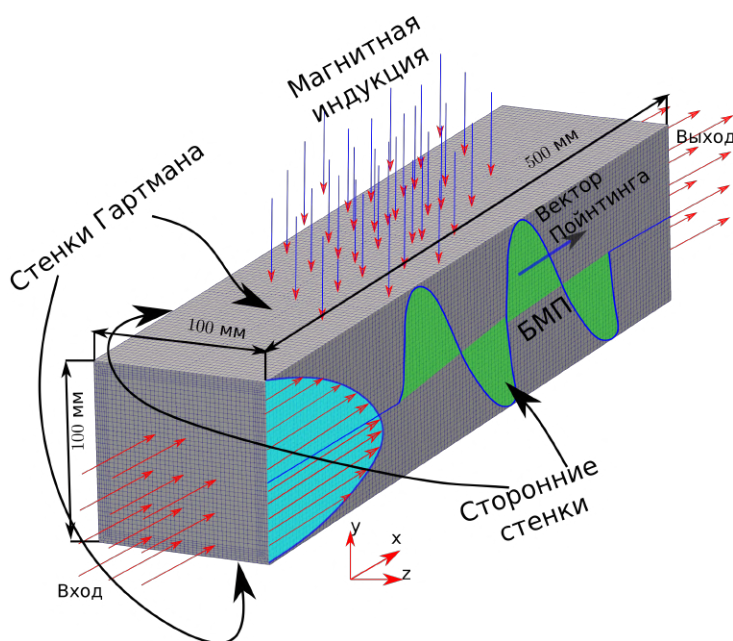


Рис. 2.18 — Описание модели.

Один из ключевых параметров в численном моделировании гидродинамики — настройка сетки и выбор модели турбулентности. В этой части работы проведем исследование по адаптации размера сетки для расчета потока проводящей жидкости в прямоугольном канале. Для этого рассмотрим электропроводящую жидкость в канале с квадратным поперечным

сечением, как показано на схематическом виде на Рисунке 2.18. Ширина и высота канала равны 0.1 м и 0.5 м, соответственно. Канал состоит из активной магнитной зоны, равной двум значениям полюсного деления, и краевых зон по 0.1 м с каждой стороны канала. В краевых зонах внешнее магнитное поле равно нулю. Поток жидкости распространяется в активной части канала согласно развитому распределению потока Пуазейля в начальный момент времени, а затем дополнительно приводится в движение бегущим магнитным полем (2.8), наложенным перпендикулярно на две поверхности стенок

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\max} \cos(\omega t - \pi/\tau x), \quad (2.8)$$

здесь  $\mathbf{V}$  — вектор магнитной индукции,  $\mathbf{V}_{\max}$  — модуль плотности магнитного потока,  $\omega$  — угловая скорость магнитного поля,  $\tau$  — полюсное деление, а  $x$  — координата, соответствующая направлению движения основного потока. Стенка, на которую действует бегущее магнитное поле, называется стенкой Гартмана, а две другие стенки, параллельные магнитному полю, называются боковыми стенками. Распределение скоростей течения Пуазейля рассчитывается на предварительном этапе исследования с учетом только гидродинамической задачи без учета внешних магнитных полей. Частота магнитного поля  $f$  задана 50 Гц, полюсное деление  $\tau$  выбрано 0.15 м, а скорость магнитного поля  $U_m = 2\tau f = 15$  м/с. Свойства жидкости (кинематическая вязкость, электропроводность, массовая плотность) задаются в модели в соответствии с выбранными числами: Гартмана, магнитного и гидродинамического Рейнольдса и Стюарта.

Начнем обсуждение результатов с представления общей структуры течения, рассчитанной для различных сеток, изображенных на Рисунке 2.19. На Рисунке 2.20 показаны изо-поверхности Q-критерия, на которые нанесены значения модуля скорости с помощью цветовой палитры. Q-критерий определяется следующим образом [195]:

$$Q = \frac{1}{2} (\|\Omega\|^2 - \|S\|^2), \quad (2.9)$$

где  $\Omega$  — антисимметричная часть, а  $S$  — симметричная часть тензора скорости деформации, и их можно вычислить

$$\Omega = \frac{1}{2} (\nabla \vec{U} + \nabla \vec{U}^T), \quad (2.10)$$

$$S = \frac{1}{2} (\nabla \vec{U} - \nabla \vec{U}^T). \quad (2.11)$$

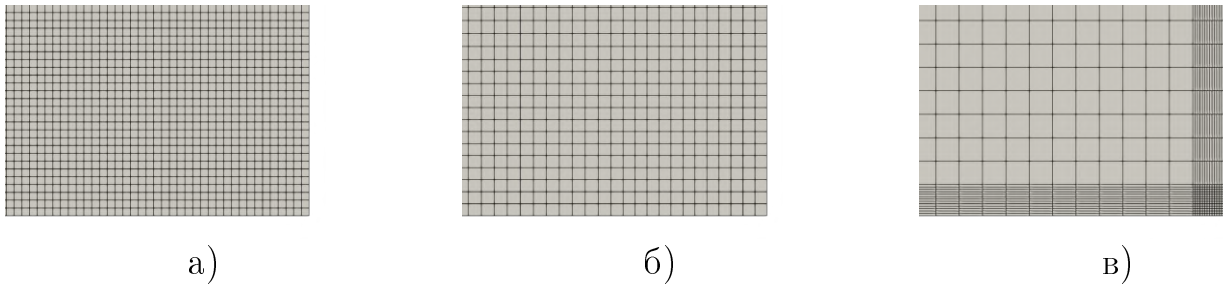


Рис. 2.19 — Исследуемые типы сеток **а)** равномерная мелкомасштабная сетка (80x80x200) **б)** равномерная разреженная сетка (50x50x100) **в)** неравномерная разреженная сетка (50x50x100)

Для этого рассмотрим три случая:

1. Расчет с помощью модели турбулентности  $LES$  на сетке, изображенной на Рисунке 2.19а;
2. Расчет с помощью модели турбулентности  $k-\omega-SST$  на сетке, изображенной на Рисунке 2.19б;
3. Расчет с помощью модели турбулентности  $k-\omega-SST$  на сетке, изображенной на Рисунке 2.19в.

Образованные вихри имеет двумерно-валковую структуру в области пространства вблизи стенок Гартмана в зоне действия магнитного поля. Эта зона обозначена как «область 1» и выделена бирюзовым цветом на Рисунке 2.20. В случае неравномерной крупной сетки, рассчитанной по модели  $k-\omega-SST$ , вихрей не наблюдается, хотя в этом случае (Рисунок 2.20в) сетка задается более мелкой в пограничных слоях, чем для случая на Рисунке 2.20б. В случае равномерной крупной сетки наблюдаются прерывистые вихри в середине канала, а в случае равномерной мелкой сетки, рассчитанной методом  $LES$ , наблюдаются плавные вихри меньшего размера. Тогда можно сделать вывод, что структурированная равномерная сетка позволяет лучше разрешать мелкомасштабные вихри в таких задачах, а также важно учитывать временные пульсации поля скоростей с помощью прямого их моделирования.

Вне этой области на границе действия магнитного поля возникают вихри сложной формы. Эта зона изображена как «область 2» и выделена оранжевым цветом на Рисунке 2.20. Вихри состоят из двух общих двумерных вихрей валковой формы между стенками Гартмана вблизи боковых стенок и нескольких вихрей меньшего размера между боковыми стенками по всему поперечному сечению. Следует отметить, что такая структура вихрей

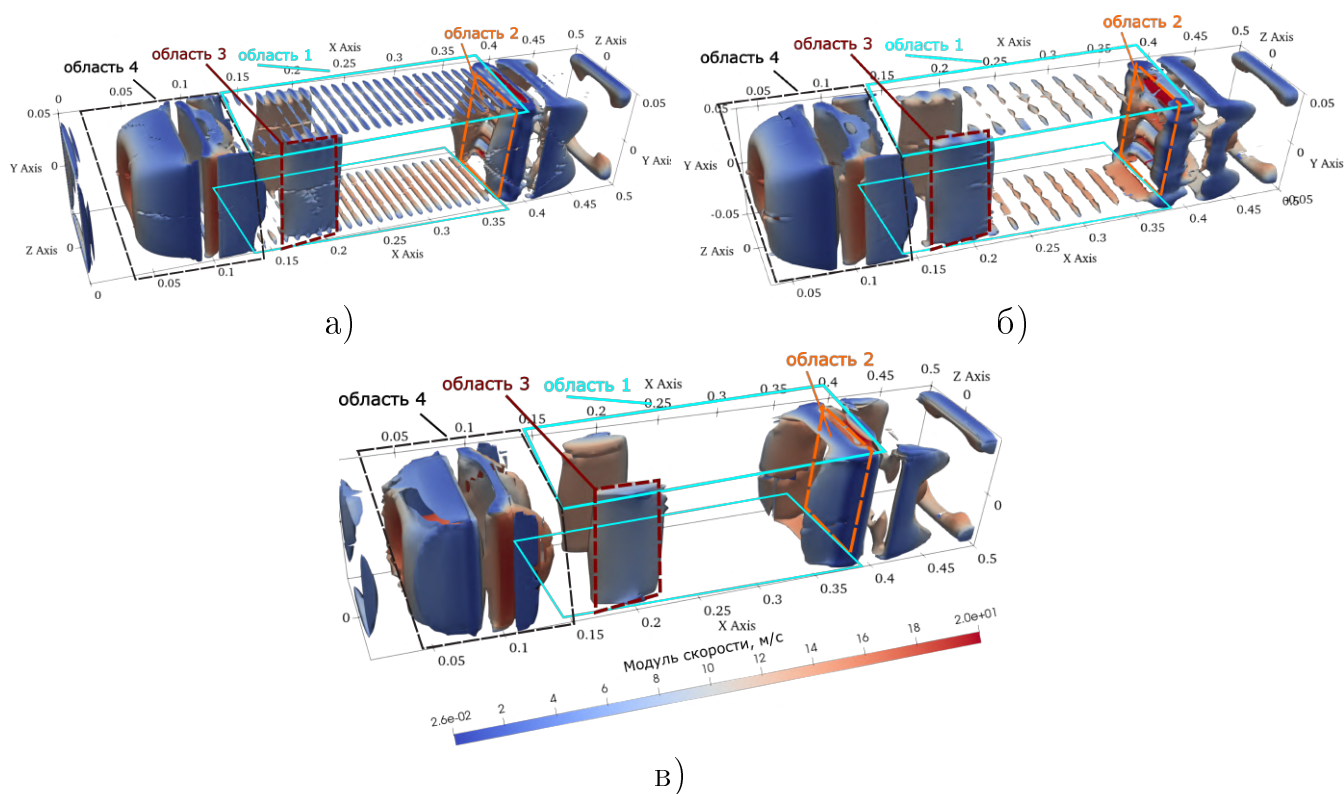


Рис. 2.20 — Контурные графики  $Q$ -критерия, размеченные по модулю скорости для а) случая 1, б) случая 2, в) случая 3.

отсутствует для случая 3 (неравномерная разряженная сетка и  $k-\omega-SST$  модель) и появляется для случая 2 (равномерная разряженная сетка и  $k-\omega-SST$  модель). Модель крупномасштабных вихрей позволяет разрешить большее количество таких вихрей в этой области 2, как показано на Рисунке 2.20а. Наглядно это видно на Рисунке 2.21 распределения скорости по поперечному сечению в области 2. Структура вихрей выглядит в виде клетки, а размер «стержней» этой клетки зависит от сетки и модели турбулентности. Также общий вихрь, изображенный на Рисунке 2.20а в области 2, состоит из мелких вихрей, которые можно рассчитать только на более мелких сетках. Таким образом, можно сделать вывод, что расчетная структура течения зависит от типа сетки и модели турбулентности.

На входе в переходную зону мы видим трубчатый вихрь. Зона изображена как «область 4» и выделена оранжевым цветом на Рисунке 2.20. Два вихря между стенками Гартмана наблюдаются после начала действия магнитного поля, отмеченной красным цветом, и подписана как «область 3». Структура этих вихрей разрешена для всех представленных случаев. Общим механизмом введения в неустойчивость на участке 2-4 являются магнитные эффекты. Хотя в [130] авторы сообщают, что исследование неустойчивости

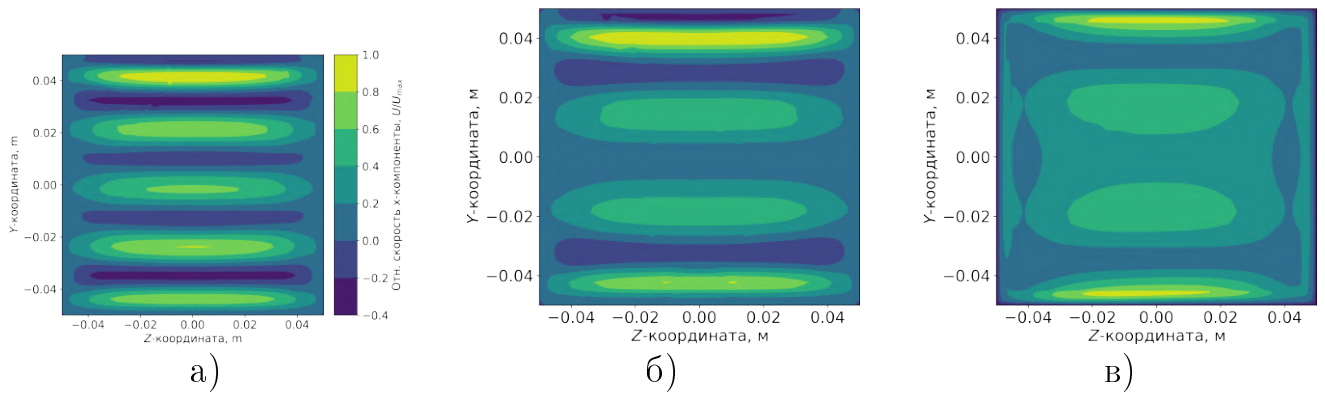


Рис. 2.21 — Распределение скоростей в поперечном сечении на границе перехода от активной зоны магнитного поля к краевой для а) случая 1 б) случая 2, в) случая 3.

может быть выполнено с помощью моделей турбулентности RANS для устранения магнитных эффектов, действующих на потоки гидродинамической неустойчивости, но из представленных результатов можно сделать вывод о необходимости использовать модели турбулентности крупномасштабных вихрей для учета таких эффектов.

На основании  $Q$ -критерия, можно сделать вывод, что в активной зоне магнитного поля влияние сетки и моделей турбулентности слабо выражено. Это можно показать с помощью распределения нормированной скорости, выраженной скольжением  $s = (U_m - U)/U_m$  для трех рассмотренных выше случаев на Рисунке 2.22. Это распределение построено в центре канала между гартмановскими стенками. Если провести оценку по распределению вдоль длины канала средних значений турбулентной кинетической энергии и кинетического давления можно наблюдать существенную разницу для рассматриваемых случаев. Причем случай 2 и 1 имеют хорошую сходимость по кинетической энергии и существенное расхождение со случаем 1 (см. Рисунок 2.23а), а при сопоставлении давлений большую сходимость между результатами наблюдается между случаями 1 и 3. Это может быть связано с эволюцией турбулентности во времени, которая характеризуется временным шагом решателя и точностью разрешения переменных уравнений на каждом шаге решателя.

Поэтому важно оценить степень влияния выбора алгоритма решения уравнений (PISO и PIMPLE) и их настроек на точность результатов. Следующим шагом является сравнение алгоритмов PISO и PIMPLE для следующих случаев:

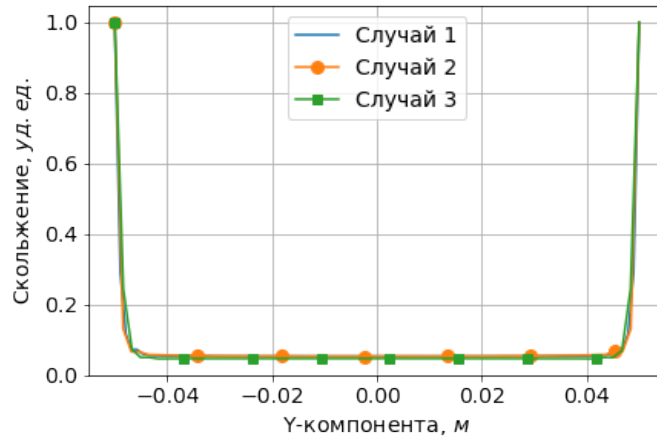


Рис. 2.22 — Значения скольжения вдоль прямой между гартмоновскими стенками в центре канала.

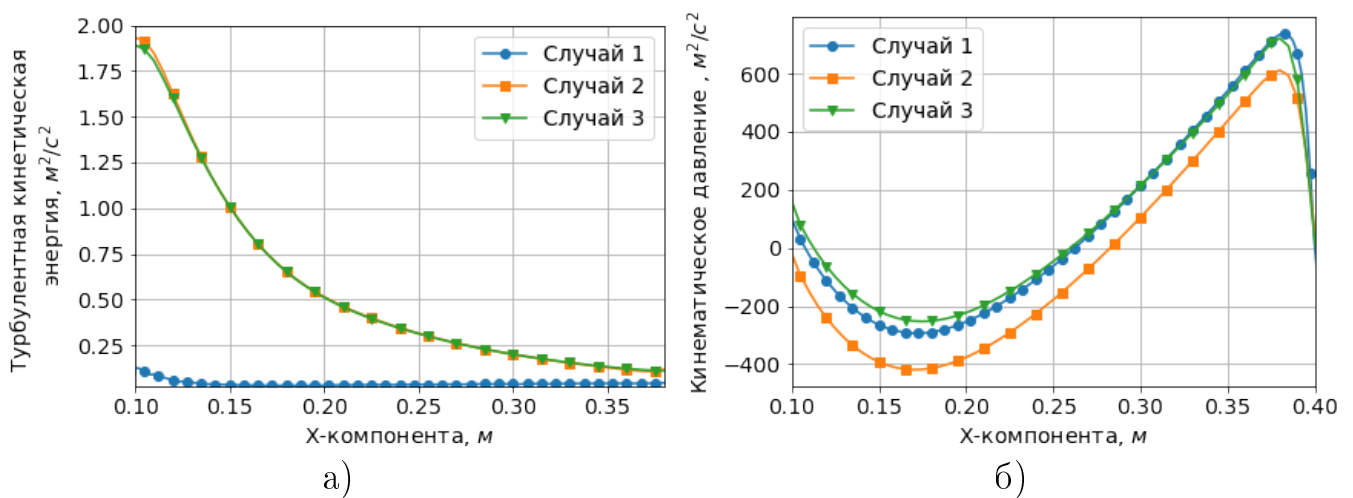


Рис. 2.23 — Усредненные значения кинетической энергии и давления для трех случаев.

1. Моделирование LES по алгоритму PIMPLE с итерациями цикла PIMPLE, контролируемые допуском;
2. Моделирование LES по алгоритму PIMPLE с ограничением числа итераций цикла PIMPLE, равным 50;
3. Моделирование LES алгоритмом PISO с ограничением числа итераций цикла PISO, равным 2;
4. Моделирование LES алгоритмом PISO с ограничением числа итераций цикла PISO, равным 20.

Пространственное распределение таких параметров, как давление, скорость и кинетическая энергия, при изменении количества итераций цикла PISO и PIMPLE показано на Рисунках 2.24 и 2.25. На Рисунке 2.24б видно, что распределения средних значений давления имеют достаточную сходимость для всех рассмотренных случаев. Наибольшая разница наблюдается только для



случая 1 вблизи входа в активную зону, но разница весьма незначительна, примерно равна 10 %. Основное отличие наблюдается в турбулентном распределении кинетической энергии (см. Рисунок 2.24а). На входе в активную зону сильно выделяется случай 3, где разница составляет около 60% по отношению к другим случаям. В этой области наблюдается сильное возмущение потока, представленного на Рисунке 2.20, поэтому малое количество итераций цикла PISO влияет на результат. В центре активной зоны наибольшее отклонение наблюдается для случаев 1 и 3, примерно 170% относительно случая 1. Это различие объясняется тем, что это два самых разных в расчетном отношении случая, где случай 1 является наиболее вычислительно затратным, а случай 3, наоборот, менее затратным. Несмотря на различия в распределении кинетической энергии, распределение относительной скорости по оси Y имеет хорошую повторяемость для всех случаев (см. Рисунок 2.25).

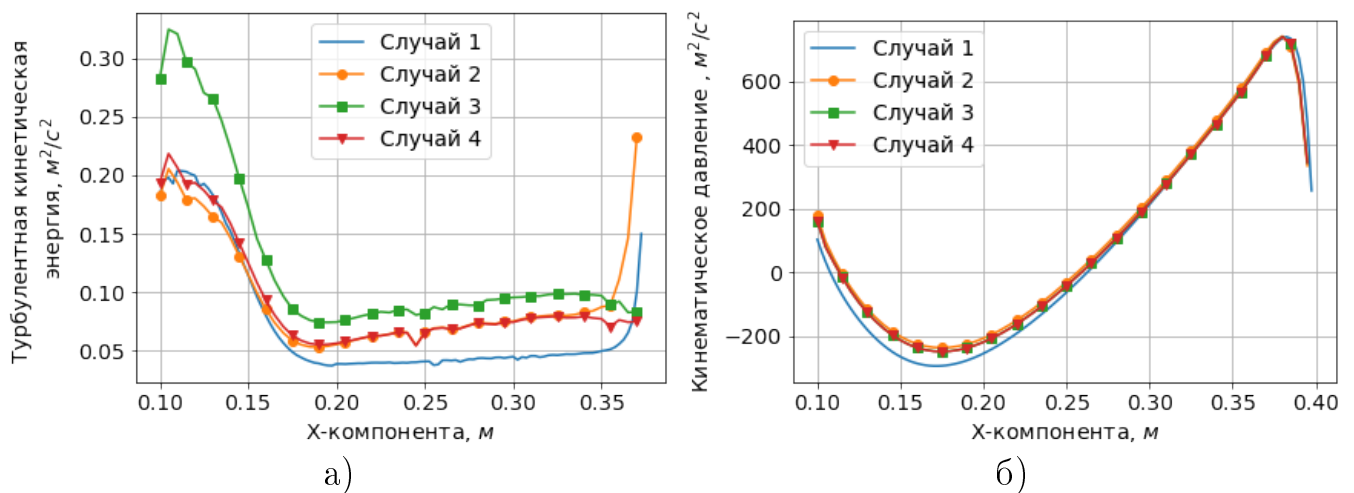


Рис. 2.24 — Усредненные значения кинетической энергии и давления вдоль длины канала для четырех случаев.

Модель турбулентности LES рассчитывает напрямую крупные вихри с помощью пространственной фильтрации, а мелкомасштабные вихри моделируются с использованием модели подсетки. Теоретически отношение  $K = \frac{k_{res}}{TKE}$  разрешенной кинетической энергии к полной турбулентной кинетической энергии  $TKE = k_{res} + k_{sgm}$  должно быть не менее 0.8 для учета всего масштаба крупномасштабных вихрей. Отношение разрешенной  $k_{res}$  и смоделированной  $k_{sgm}$  турбулентной кинетической энергии зависит от размера сетки. Среднее значение этого критерия по длине канала построено на Рисунке 2.26а. Можно видеть, что слабо разрешены области на входе канала и активной зоны. На основании этих результатов была улучшена

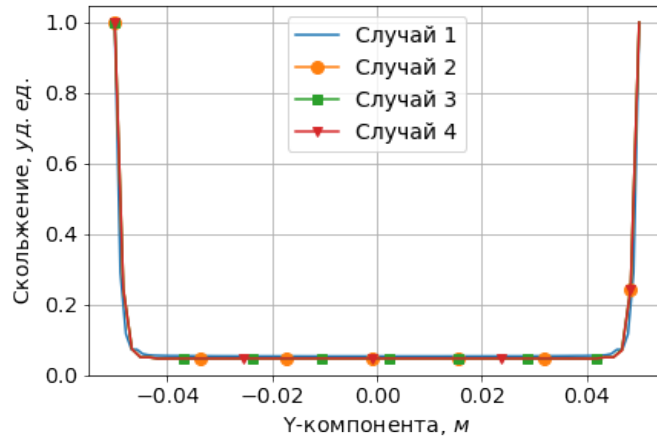


Рис. 2.25 — Распределение скольжения  $s = (U_m - U)/U_m$  вдоль линии между стенками Гартмана.

сетка для последующих исследований в этой работе. Результаты можно посмотреть на Рисунке 2.266, где  $\beta$  — отношение ширины к высоте канала. Во всех областях доля прямого разрешения вихрей превышает 88 %, что удовлетворяет теоретическим требованиям. В заключении стоит отметить, что этот критерий служит хорошим индикатором, но требует дополнительного исследования именно для задач магнитной гидродинамики. Представленные результаты являются важными, поскольку мелкомасштабные вихри оказывают существенное влияние на неустойчивость только в случае перехода их формы из 2D в 3D или квази-2D.

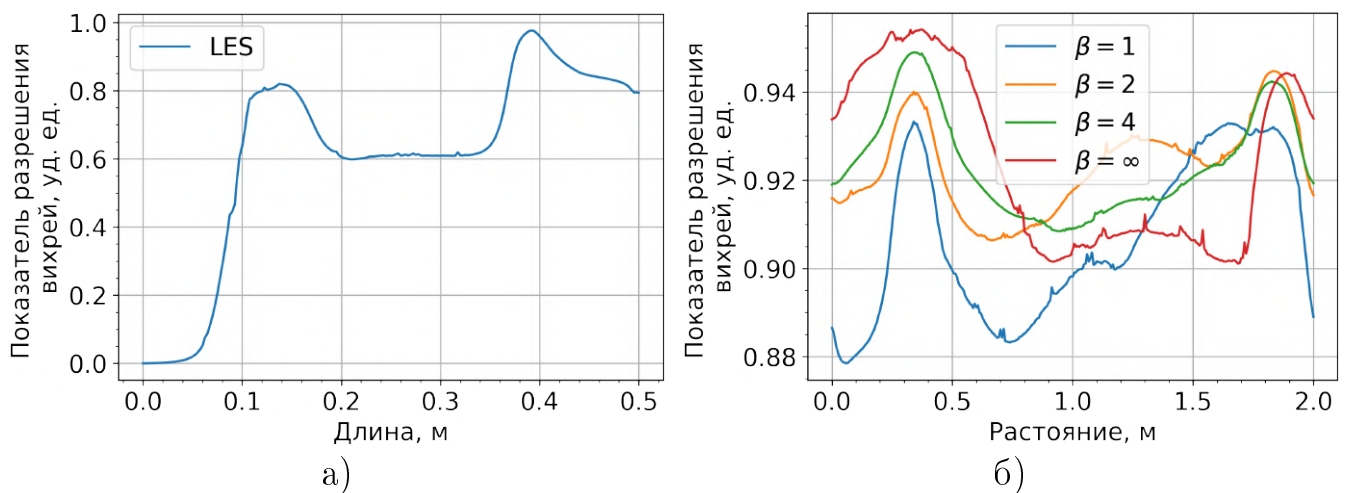


Рис. 2.26 — Усредненное значение по поперечному сечению канала критерия прямого разрешения вихрей.

## 2.6 Выводы по главе

Проведен литературный обзор подходов к исследованию неустойчивых состояний потока жидкости под воздействием магнитного поля из которого следует, что основным инструментом в таких исследованиях служит численный анализ. Эксперимент в большинстве случаев служит для проверки разрабатываемых моделей. Применение прямого численного моделирования оказывается весьма ресурсозатратным. Применение крупномасштабных моделей турбулентности, например, LES позволяют значительно снизить требования к вычислительным ресурсам, а для ряда задач могут быть использованы RANS модели турбулентности. При выборе методов решения той или иной задачи, необходимо учитывать как специфику самой проблемы, так и возможности верификации алгоритмов решения и самих моделей. Использование аналитических подходов для упрощения моделей является актуальной задачей.

Разработаны алгоритмы расчета численных моделей для описания поведения течений в каналах под воздействием магнитного поля. Эти алгоритмы объединяют преимущества использования методов конечных элементов для расчета электромагнитных задач в особенности со специфической областью расчетов и методов конечных объемов для вычисления гидродинамических уравнений. Время расчета было снижено за счет применения параллельных вычислений на мульти процессорном сервере и специальных настроек циклов решения систем линейных уравнений. Проведено исследование настроек циклов для сегрегированного решения уравнений гидродинамики, которое показало, что их настройка в большей степени влияет на расчеты кинетической энергии и слабо влияет на переменные давления и скорости. Эти настройки играют важную роль только при моделировании сильно турбулентных течений.

Разработана библиотека «PyRunOF» на языке Python для автоматизированной настройки модели и проведения параметрических исследований. Применение этой библиотеки позволяет исключить множество рутинных операций настройки численных моделей и сократить время на выполнения этих операций.

Проведена численная верификация алгоритмов расчета. Проведенные исследования показали, что отклонение между результатами, полученными с помощью авторского кода, и аналитическим решением составляет не более 1 %. Граничные условия, моделирующие электропроводность стенок существенно влияют на результаты поведения потока и должны учитываться как в научных, так и инженерных расчетах. Также проведена экспериментальная верификация расчетов для лабораторной установки, имитирующая отливку жидкого металла. Отклонения между численными и экспериментальными результатами не превышает 11 % и показывают высокую сходимость в 80 % случаев.

Проведено исследование по оценки сеточного масштаба на качество результатов. Структурная сетка с равномерным шагом позволяет детальнее разрешать структуры вихрей, чем с неравномерным шагом при одинаковом количестве элементов. Самые требовательные области пространства к настройкам сетки — это области перехода между краевыми зонами (магнитное поле равно нулю) и активной (магнитное поле не равно нулю), а также пристеночные области у стенок канала. Пространственная оценка отношение кинетической энергии крупномасштабных разрешенных вихрей к полной турбулентной кинетической энергии позволяет понять области, в которых требуется измельчение сетки. Теоретически это отношение должно быть более 80 %.

## Глава 3. Исследование механизмов неустойчивых течений и влияние турбулентных течений на характеристики насосов

### 3.1 Оценка влияния магнитных эффектов и идеализации математических моделей на поведение потока

В реальном физическом эксперименте величина магнитного поля затухает в проводящей среде в направлении распространения электромагнитной волны и имеет вихревую природу. Это приводит к неравномерному распределению магнитного поля в проводящей среде. Существуют дополнительные составляющие плотности тока, которые при взаимодействии с магнитным полем создают электромагнитные усилия, перпендикулярные движению основного потока жидкости. Это является следствием наличия краевых эффектов, которые были описаны в разделе 1.5. В этой части работы рассмотрим химерный математический эксперимент, в котором выделим основные электромагнитные эффекты и с помощью математических манипуляций будем исключать или включать их в расчеты численной модели. Такой подход позволит оценить, как каждый магнитный эффект влияет на поведение потока по отдельности. Знания о влиянии каждого эффекта по отдельности на поведение потока жидкости даст понимание о том, с какими эффектами нужно бороться, а какие эффекты могут вызвать благоприятный исход для конкретной задачи.

#### 3.1.1 Постановка задачи

Численная модель представляет прямоугольный канал с размерами  $100 \times 100 \times 500$  мм, заполненный электропроводящей немагнитной жидкостью. Ось координат  $x$  выбрана по направлению движения потока жидкости, ось  $y$  перпендикулярно к потоку жидкости и приложенному магнитному полю, а ось  $z$  перпендикулярно к потоку и параллельно магнитному полю. Модельная жидкость имеет следующие физические свойства – массовая плотность

1575 кг/м<sup>3</sup>, кинематическая вязкость  $9.454 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с, электропроводность  $3.838 \cdot 10^6$  См/м. Поток жидкости входит через поверхность *Inlet* и выходит из поверхности *Outlet*, как показано на Рисунке 2.18.

На движущейся поток действует бегущее магнитное поле, которое ориентировано в  $y$ -направлении. Магнитное поле описывается выражением для напряженности магнитного поля как  $H_y = H_{max} e^{j(\varphi - \pi/\tau \cdot x)}$ . Здесь  $H_{max}$  — амплитуда напряженности магнитного поля,  $\varphi$  — начальный фазовый сдвиг,  $\tau$  — половина длины волны. Частота и длина волны магнитных полей составляют 50 Гц и 0.3 м соответственно.

Любая реальная магнитная система имеет конечный размер, поэтому существуют области, где начинается и заканчивается взаимодействие проводящей жидкости с магнитным полем. В этих областях сила Лоренца стремится вытолкнуть поток из этой области (Рисунок 1.14). Это продольный краевой эффект. Этот эффект исключается из нашего моделирования за счет искусственного уменьшения электропроводности на много порядков (в нашем случае на  $10^6$ ) для получения распределения плотности тока во всей области жидкости. Позже это распределение плотности тока используется для восстановления силы Лоренца путем умножения на  $10^6$ , тот же коэффициент использовался ранее для уменьшения проводимости. Таким образом, сила Лоренца не имеет продольных краевых эффектов. Также значения напряженности магнитного поля равны нулю на расстоянии 100 мм, как от поверхностей *Inlet*, так и от *Outlet*, чтобы имитировать конечность магнитной системы.

Плотность индуцированного тока в канале имеет замкнутый контур, и как следствие, имеет  $z$ - и  $x$ -составляющие тока. Взаимодействие первичного магнитного потока и  $z$ -компоненты плотности тока создает силу Лоренца в направлении  $x$ , а взаимодействие с  $x$ -компонентой плотности тока создает силу Лоренца в направлении  $z$ , как показано на Рисунке 1.13. Этот эффект хорошо известен как поперечный краевой эффект и подавляется обнулением продольной ( $J_x$ ) и поперечной ( $J_y$ ) составляющих плотности тока.

Уравнения (1.7a) и (1.76), описывающие гидродинамическую часть модели, решаются с помощью решателя OpenFOAM «pimpleFoam», а уравнение (2.3) было решено с помощью решателя «WhitneyAVHarmonicSolver» в Elmer, как было описано в разделе 2.2. Передача данных между этими программами осуществлялась с помощью библиотеки EOF-Library. Блок-схема модели

показана на Рисунке 2.1. Для расчетов уравнений поля скоростей (2.1) и давления (2.2) использовался цикл PIMPLE, описание которого было в разделе 2.2.1. Турбулентная кинематическая вязкость  $\nu_t$  в (1.76) разрешалась с использованием стандартной модели турбулентности  $k-\omega-SST$ . Условие инициализации библиотеки EOF (другими словами, запуск на пересчет электромагнитной задачи) проводилось по максимальному отклонению скорости в пространстве 3.1.

$$\left| \frac{\max(U_i - U_{i-1})}{aver(U_i)} \right| < \chi_c. \quad (3.1)$$

Здесь  $U_i$  и  $U_{i-1}$  обозначают распределение скорости на текущем и предыдущей временной итерации.

Граничное условие для скорости задается выражением  $U_x = 10.5 - 4200y^2$  на входной поверхности. Граничное условие для давления задано нулевым градиентом для поверхности *Inlet* и всех стенок. На выходе давление устанавливается на ноль. Для боковых стенок и стенок Гартмана используется граничное условие прилипания для скорости. Напряженность магнитного поля устанавливается равной нулю для каждой поверхности модели.

### 3.1.2 Обсуждение результатов

В [54] авторы показывают, что для задач с продольной силой Лоренца рациональнее использовать число Стюарта  $N$ , а не число Гартмана  $Ha$ . Число Стюарта изменяется от 0 до 100 за счет изменения магнитного потока в канале, гидродинамическое число Рейнольдса поддерживается постоянным около 54500 за счет постоянной скорости потока на входе, а число Гартмана изменяется от 0 до 7377. Рассматривать магнитное число Рейнольдса  $Re_m$  в идеализированном случае не имеет смысла, так как в модели исключен индуцированный ток.

Был оценен параметр  $\chi_c$  (3.1), отвечающий за частоту пересчета магнитного поля, для экономии вычислительного времени и в то же время не в ущерб точности результатов. Этот параметр оценивался для числа Стюарта равным 20. Оптимальная частота пересчета была определена с использованием сравнительного анализа профиля скорости Гартмана в середине канала (см. Рисунок 3.1). По полученным результатам значение  $\chi_c$  (3.1) равно 0.3 и является

оптимальным с точки зрения временных ресурсов и точности результатов. Это значение будет использоваться в последующих исследованиях.

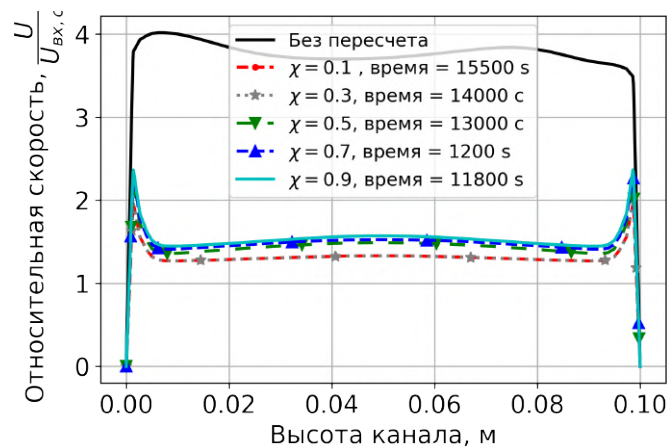


Рис. 3.1 — Пиковые скорости.

На Рисунке 3.2а, показана зависимость относительной скорости от числа Стюарта. Это распределение построено вдоль линии между стенками Гартмана в центре канала. Относительная скорость выражается как значение скорости, деленное на максимальное значение скорости на входе. В этом эксперименте наблюдается уплощение профиля относительной скорости по всей длине линии. Наблюдается незначительное ускорение течения в слое Гартмана (небольшие пики на профиле скорости) при малых значениях числа Стюарта от 0 до 5. Значения пиков возрастают с увеличением числа Стюарта. Следует отметить, что линейное увеличение силы Лоренца при сохранении постоянной силы инерции приводит к нелинейной зависимости между скоростью потока и числом Стюарта. Линейное поведение пиковых значений наблюдается только при малом числе Стюарта. Более того, существует критическое значение числа Стюарта, когда пиковые значения уменьшаются.

Профиль относительной скорости показан на Рисунке 3.2б вдоль линии, проведенной между стенками, параллельные магнитному полю, в центре канала. Профиль, показанный на Рисунке 3.2б, показывает замедление потока, изображенное в виде пиков скорости, перемещающихся в направлении, противоположном общему потоку, когда число Стюарта выше значения 3. Предполагается, что эти потоки вызваны градиентом давления из-за пиков в области гартмановских слоев, как показано на Рисунке 3.2а. Кроме того, член силы Лоренца  $(\vec{U} \times \vec{B}) \times \vec{B}$  влияет на ускорение потока в области резкого изменения скорости. В слоях Гартмана этот член значительно больше, чем в области у стенок параллельных магнитному полю, так как магнитное поле



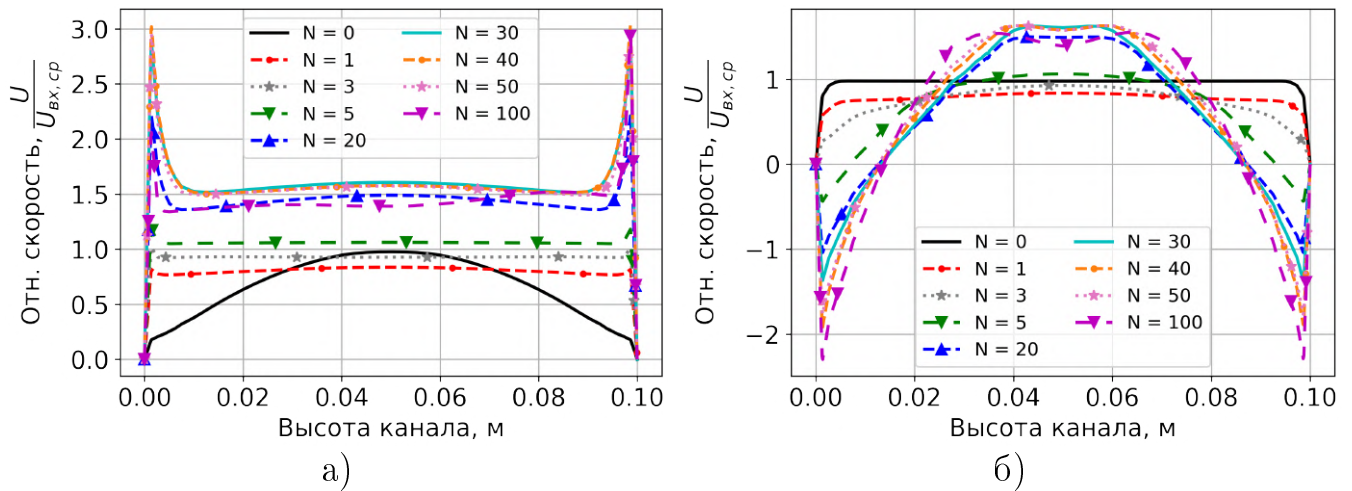


Рис. 3.2 — Распределение скорости между стенками: а) перпендикулярными магнитному полю и б) параллельными магнитному полю в центре канала.

ориентировано в перпендикулярном направлении к стенке Гартмана. Кроме того, величина и направление силы Лоренца, вызванной бегущим магнитным полем, зависят от соотношения скоростей магнитного поля и проводящей среды. Для обобщения вышеприведенных результатов построен Рисунок 3.3, на котором показаны зависимости значений скоростей пиков и ядра потока течения в зависимости от числа Стюарта.

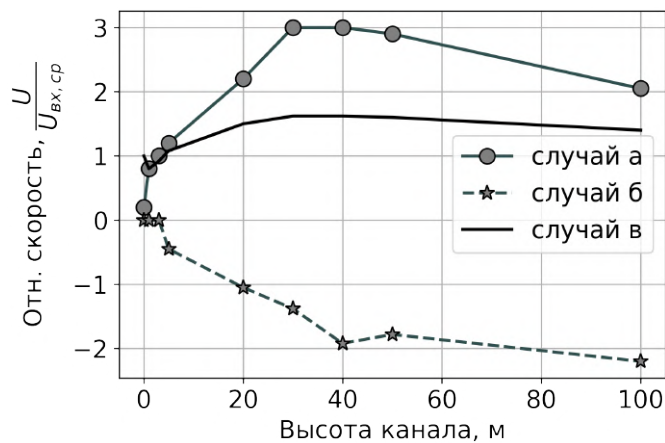


Рис. 3.3 — Пиковые значения скоростей в зависимости от числа Стюарта.

Распределение относительной скорости между боковыми стенками показано на Рисунке 3.26. Скорость увеличивается в центральной части канала для числа Стюарта от 0 до примерно 30, но дальнейшее увеличение числа Стюарта снижает скорость в центральной части канала. Наблюдается даже незначительное снижение скорости в центре распределения при больших числах Стюарта и возникновение обратных течений у стенок. Поэтому профиль скорости изменяется от уплощенного П-образного до М-образного.

Это послужит дополнительным источником неустойчивости потока и увеличения гидродинамического сопротивления. Пиковые положительные значения скорости, получаемые на Рисунке 3.2а имеют большие значения, чем отрицательные пиковые значения на Рисунке 3.3 примерно в полтора раза. Зона действия положительных значений меньше, чем отрицательных. Зона действия у стенок обратных течений постоянная после значений числа Стюарта 10 и приблизительно равна 0.02 м для этого случая. Зона действия ускорений у гартмоновских стенок не изменяется при числах Стюарта больше 20 и равна порядка 0.01 м. Этот эффект снижает зону эффективного сечения канала, а также существенно увеличивает градиент давлений между положительными и отрицательными пиковыми значениями. Этот градиент будет являться основным механизмом неустойчивости потока жидкости.

Описанные выше явления связаны с неустойчивостью течения и повышенным гидродинамическим сопротивлением, что приводит к увеличению турбулентной кинетической энергии и возникновению вихрей. Хотя скорость на входной поверхности поддерживалась постоянной, сила инерции потока увеличивалась из-за сил в центре канала. Это показывает невозможность бесконечного нарастания электромагнитной силы без учета явлений гидродинамики, возникающих в таких системах, как это делалось во многих предыдущих работах, посвященных электродинамическим подходам, например, [113; 114]. Возникающая неустойчивость течения имеет свою закономерность в зависимости от времени и пространства. На Рисунке 3.4 линии тока скорости окрашены значениями кинетической энергии в разные моменты времени и показаны значения плотности магнитного потока бегущего магнитного поля по длине канала. Вихрь потока жидкости возникает в области максимального значения кинетической энергии и с той же скоростью движется в направлении бегущего магнитного поля. Таким образом, бегущее магнитное поле несет в себе образовавшийся турбулентный поток. Этот результат может быть полезен для анализа процессов, происходящих в приборах учета и асинхронных насосах для металлургии.

Формирование вихрей удобно рассмотреть с помощью линий тока на Рисунке 3.5. На этих графиках изображена эволюция поля скоростей выраженная изо-линиями. Можно наблюдать две структуры вихрей, обозначенные красным и синим цветом. Сплошными линиями обозначены сформированные вихри, а пунктирными их слияние с другими потоками.

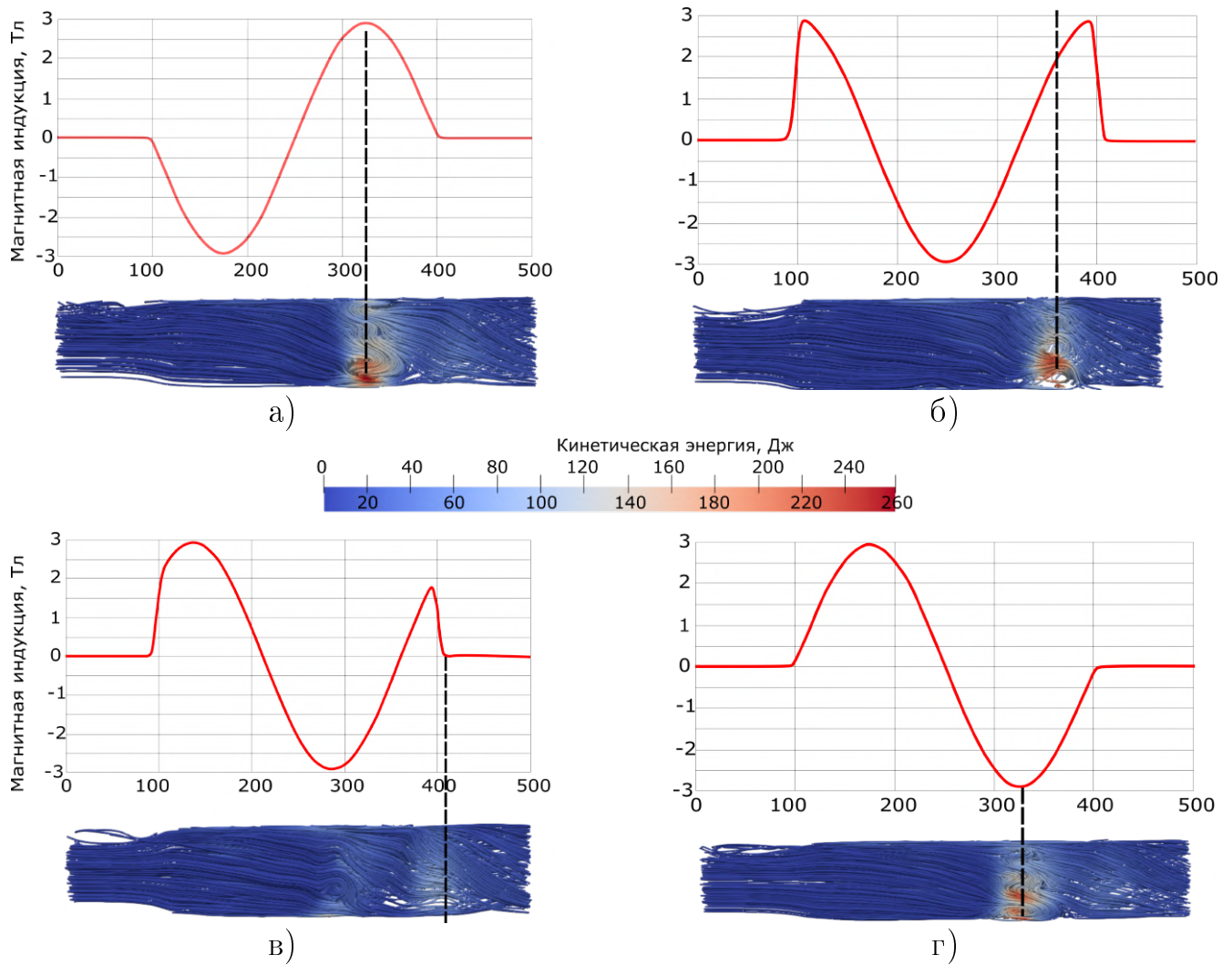


Рис. 3.4 — Движение вихря потока вслед за бегущим полем.

На входе в активную зону можно наблюдать формирование двух вихрей у стенок параллельных магнитному полю (красные линии). Эти вихри со временем перемещаются в активную зону и сливаются с вихрями обозначенные синим цветом. Через определенное время, когда красный вихрь полностью поглощается синим вихрем, на входе в активную зону формируется новый. В активной зоне формируются два вихря, периодически превращаясь в один. Из опыта моделирования таких систем количество вихрей в активной системе равно количеству пар полюсов. Образование таких структур потока вызывает снижение эффективного сечения канала и может рассматриваться как механическое препятствие.

Важным параметром в таких установках является частота магнитного поля. В реальных экспериментах этот параметр играет важную роль для индукционных эффектов, затухания магнитного поля, колебательных процессов и ряда других явлений. График на Рисунке 3.6 показывает

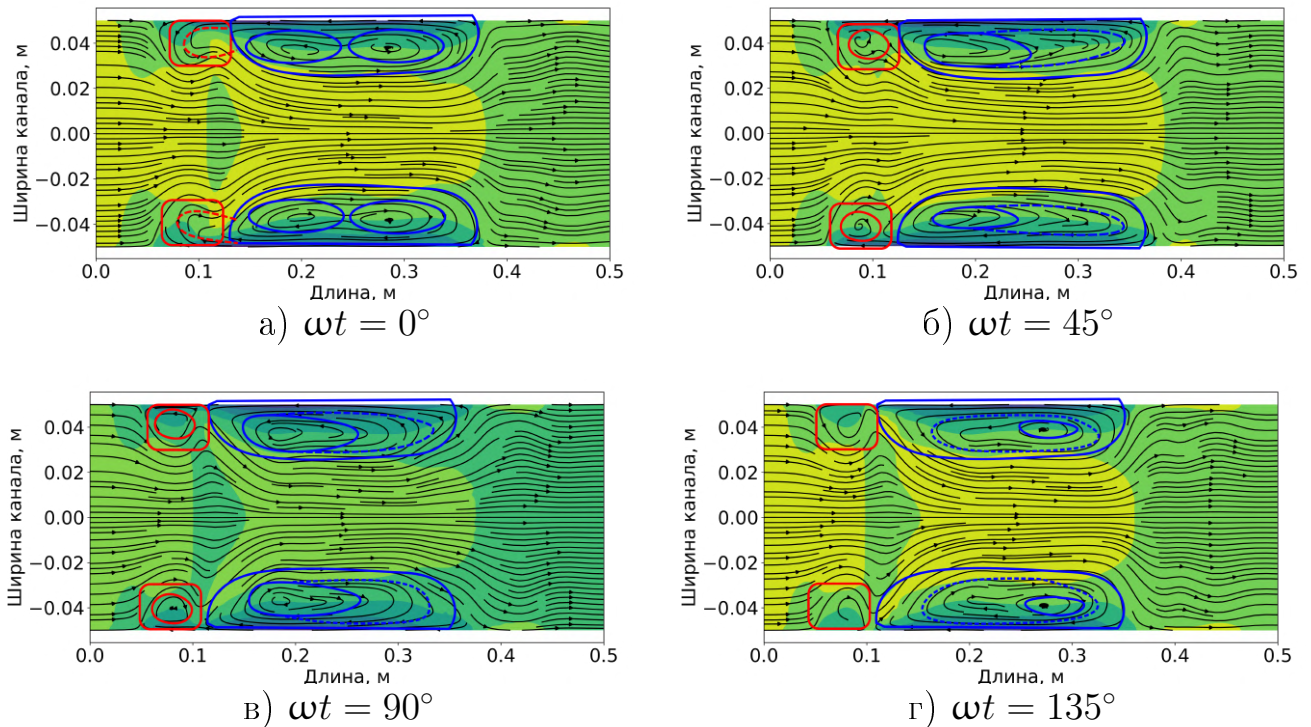


Рис. 3.5 — Эволюция вихрей для числа Стюарта 20.

распределение скоростей между гартмановскими стенками при фиксированном значении магнитной индукции и его скольжения, равным 0.3. Это значение проскальзывания часто является рабочим для индукционных насосов. Постепенное увеличение частоты приводит к увеличению скорости до определенного значения. Это связано с тем, что при дальнейшем увеличении частоты максимальные значения сил смещаются в область с большими значениями скольжения. Следует помнить, что в реальном эксперименте наличием индукционных эффектов нельзя пренебречь. Тогда уменьшится глубина проникновения поля в металл и увеличатся колебания сил во времени. Это должно привести к другим частотно-зависимым кривым силы по сравнению с Рисунком 3.6.

Выше был рассмотрен идеализированный случай, когда поперечный, продольный и индукционные эффекты отсутствовали. Следовательно тормозящие силы на входе и выходе активной зоны канала не учитывались, магнитное поле создавало усилие только в направлении движения потока жидкости. Рассмотрим, как влияют электромагнитные эффекты с помощью создания четырех математических моделей со следующими особенностями:

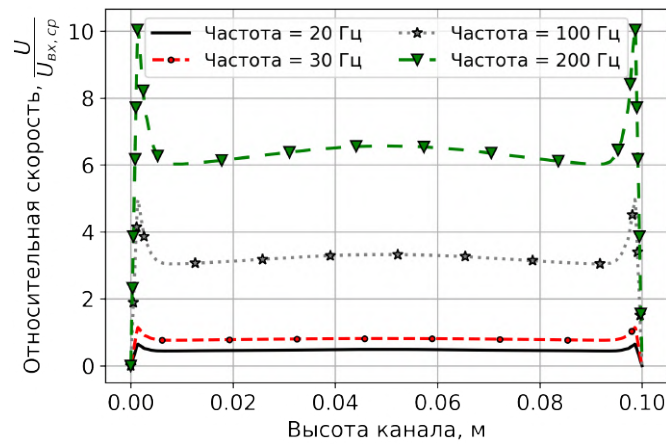


Рис. 3.6 — Гартмоновское распределение скорости в центре канала в зависимости от частоты магнитного поля.

1. Идеализированная модель без влияния наведенных токов на электромагнитное поле и только с одной составляющей силы. Всеми электромагнитными эффектами пренебрегаем.
2. Модель с влиянием наведенных токов на электромагнитное поле и только с одной составляющей силы. Продольный краевой эффект учитывается, поперечным пренебрегают.
3. Модель без влияния наведенных токов на электромагнитное поле и со всеми составляющими силы. Продольный краевой эффект не учитывается, поперечный учитывается.
4. Модель с влиянием наведенных токов на электромагнитное поле и со всеми составляющими силы. Продольный и поперечный краевые эффекты учитываются.

Значение скорости относительно максимальному значению скорости на входе канала построено на Рисунке 3.7 для чисел Стюарта 1, 5 и 20. Рисунки 3.7а — 3.7в соответствуют распределению скорости вдоль прямой в центре канала между стенками, перпендикулярными магнитному полю для чисел Стюарта 1, 5 и 20, соответственно. Рисунки 3.7г — 3.7е соответствуют распределению скорости вдоль прямой в центре канала между стенками параллельными магнитному полю для чисел Стюарта 1, 5 и 20, соответственно.

Максимальная скорость ядра потока жидкости наблюдается при исключении влияния индуцированных токов (случай 3) для всех чисел Стюарта. В этом случае скорость потока выше даже, чем в случае 1 для идеализированной модели. Тогда можно сделать заключение, что продольный краевой эффект увеличивает значение скорости потока. Буферная

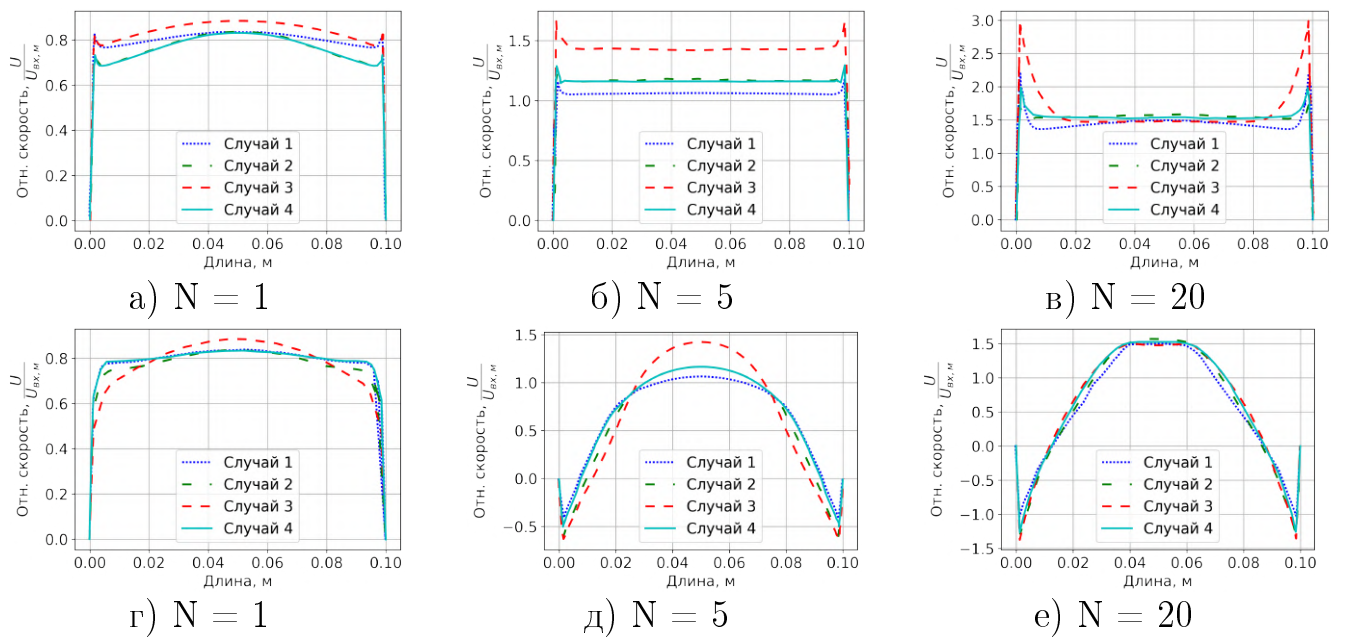


Рис. 3.7 — Распределение скорости между стенками, перпендикулярными (а–в) и параллельными (г–д) к магнитному полю.

зона увеличивается при исключении из расчета индукционных эффектов. Значения скорости обратных потоков практически не зависят от типа модели, а положительные пиковые значения скорости значительно изменяются при смене рассматриваемых моделей. Следовательно, можно сказать, что обратные потоки у стенок, параллельных магнитному полю, возникают из-за ускорения потока у гартмановских стенок. В рассматриваемых задачах гидродинамическая система рассматривается с постоянным расходом жидкости, в ряде систем это условие может быть другим. В таких случаях обратные потоки будут меньшего значения, но общие закономерности, приведенные выше будут также справедливы. Этот вывод говорит, что помимо важности учета электромагнитных эффектов важно правильно описывать гидродинамическую систему. С инженерной точки зрения важно, что паразитные эффекты в электротехнике, например, поперечный краевой эффект могут положительно влиять на технологический процесс и им стоит уделять особое внимание в процессе разработки МГД-установок.

## 3.2 Влияние турбулентных течений и неустойчивых состояний жидкости на расходно–напорную характеристику

Неустойчивые состояния потока влияют на многие технические характеристики МГД–установок. В этой части работы покажем важность их исследования с помощью их воздействия на параметры индукционных насосов. Основной характеристикой, определяющей работоспособность насоса, является зависимость расхода от давления. Эту характеристику называют расходно–напорной характеристикой. В электротехнике существует аналог этой характеристика — зависимость усилий от скорости движения, которую называют механической характеристикой. Под расходом будет пониматься количество проходящей массы в единицу времени и определяется по формуле

$$Q = U/S, \quad (3.2)$$

где,  $Q$  — расход,  $U$  — нормальное значение скорости к поверхности  $S$ .

### 3.2.1 Постановка задачи

Рассматривается двумерная постановка задачи. Математическое описание алгоритмов решений соответствует описанным в разделах 2.2 и 3.1.1. Модель турбулентности выбрана «dynamic LES». Схематичное представление объекта исследования представлено на Рисунке 3.8. Высота канала  $A_d = 0.01$  м, немагнитный зазор между индуктором и каналом  $h_g = 0.01$  м. Индуктор представляет собой прямоугольный геометрический элемент, длина которого равна  $L_{ind} = Q_{coil}(w_s + w_t) + w_t = 0.35$  м, где  $Q_{coil} = 18$  — количество катушек,  $w_s = 0.015$  — ширина паза,  $w_t = 0.01$  — ширина зубца. Эффект зубчатости магнитного поля не учитывается в расчетах, так как магнитное поле в индукторе описывается напряженностью по формуле  $H_y = H_{max}e^{j(\varphi - \pi/\tau \cdot x)}$ . Здесь  $H_{max}$  — амплитуда напряженности магнитного поля,  $\varphi$  — начальный фазовый сдвиг,  $\tau$  — половина длины волны. Частота магнитного поля  $f = 5$  Гц. Подключение фаз выбрано классическим «AZBХСУ» с количеством пазов на фазу  $q = 3$ . Свойства среды кинематическая вязкость,

электропроводность, плотность, а также параметр магнитного поля магнитная индукция выбираются, исходя из значений чисел подобия в эксперименте. Рассматривается постоянное значение числа гидродинамического Рейнольдса  $Re = 5000$ , Гартмана в диапазоне от 100 до 2000, магнитного Рейнольдса  $1 < R_m < 10$ .

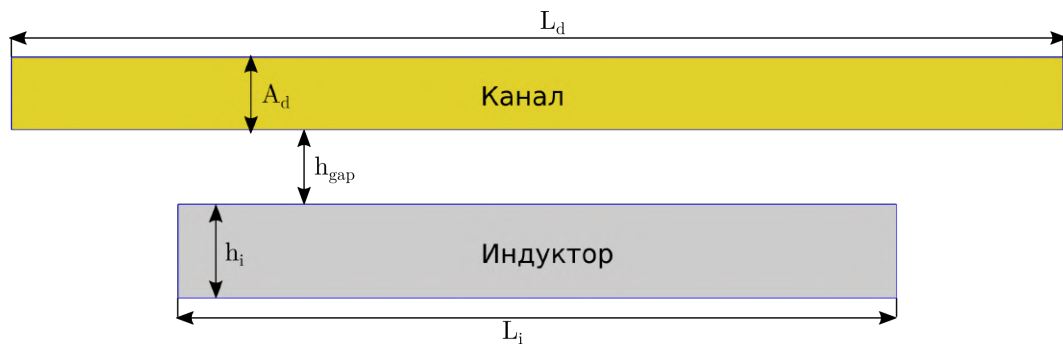


Рис. 3.8 — Схематичное представление расчетной области .

Процедура расчета расходно–напорной характеристики следующая:

1. Расчет развитого подхода без действия магнитного поля;
2. Перенос полученных значений в задачу МГД как начальные и граничные условия;
3. Расчет течений потока под воздействием магнитного поля.
4. Построение результатов.

Данная процедура выполняется для каждого значений скоростей в диапазоне  $0 < U < 1.2U_b$ , где  $U_b$  — синхронная скорость магнитного поля. Предварительный этап расчета развитого потока (пункт 1) выполнялся с использованием периодических условий на входе и выходе канала. Таким образом проводилась симуляция замкнутого канала. Требуемая скорость достигалась за счет введения дополнительного члена давления. Такой подход один из наиболее эффективных в расчете развитого потока. В магнитогидродинамической части рассчитанные значения задавались постоянными на входе канала.

### 3.2.2 Обсуждение результатов

На Рисунке 3.9 представлены результаты расчетов развиваемого магнитного давления деленного на максимальное значение магнитного



давления для данной характеристики в зависимости от средней скорости в сечении канала. Зависимости представлены для чисел Гартмана от 100 до 2000 для магнитных чисел Рейнольдса от 1 до 10. Приписка «*inf*» в легенде на Рисунке 3.9в показывает, что гидродинамическая система (канал) имеет замкнутую форму. Магнитное давление вычисляется по формуле (3.3)

$$p_m = \iint_S F_m dy dz / S. \quad (3.3)$$

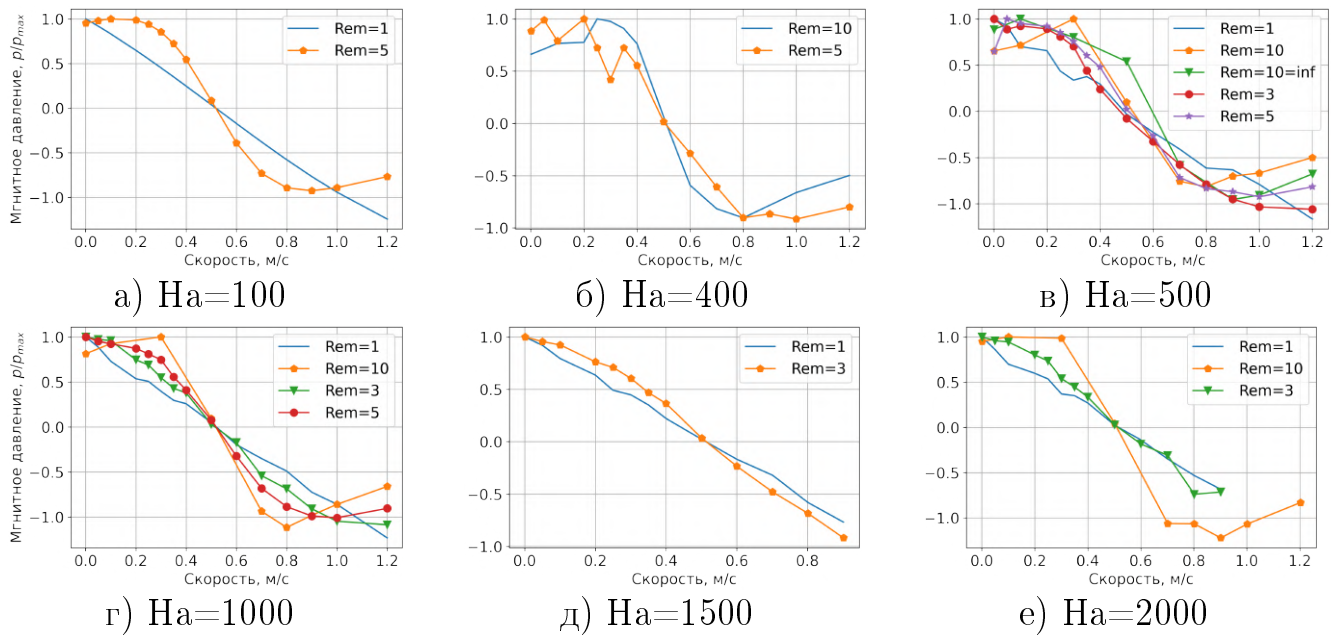


Рис. 3.9 — Зависимость магнитного давления в зависимости от скорости потока на входе канала для значения Гартмана от 100 до 2000.

Из результатов, представленных на Рисунке 3.9, можно заключить, что значение магнитного числа Рейнольдса влияет на форму кривой, но переход нулевых значений магнитного давления при этом не меняется. Увеличение числа магнитного числа Рейнольдса приводит к трансформации от линейной зависимости расходно—напорной характеристики к S-образной. Подобные выводы можно найти в теории электромеханики, в которой электромагнитная добротность служит подобием магнитному числу Рейнольдса. Также важную особенность играет характеристика внешней нагрузки, другими словами, тип гидродинамической системы. Во всех случаях переход от положительных значений давления к отрицательным осуществляется на скоростях порядка 0.5 м/с. В случае рассмотрения замкнутой системы ( $Rem = 10 = inf$  на Рисунке 3.9в) эта точка смещается в область скоростей порядка 0.6 м/с. Формирование S-образной характеристики становится на больших значениях

магнитного Рейнольдса с увеличением чисел Гартмана. В случае образования S-образной характеристики, система становится более устойчивой.

В гидродинамике разница давлений создается не только наличием внешнего электромагнитного поля, а также самой гидродинамической системой из-за движения потока жидкости, наличия вязких сил и ряда других факторов. Поэтому важно рассматривать суммарную разницу давлений, учитывающую магнитное и кинетическое давления. На Рисунке 3.10 представлена разница суммарных давлений между входом и выходом канала в зависимости от среднего значения скорости на входе канала. На этих графиках представлены результаты с усредненными значениями давлений во времени, также с учетом пульсационных составляющих. Можно заметить влияние временных колебаний давлений практически не влияет на эти характеристики для всех рассматриваемых значений Гартмана.

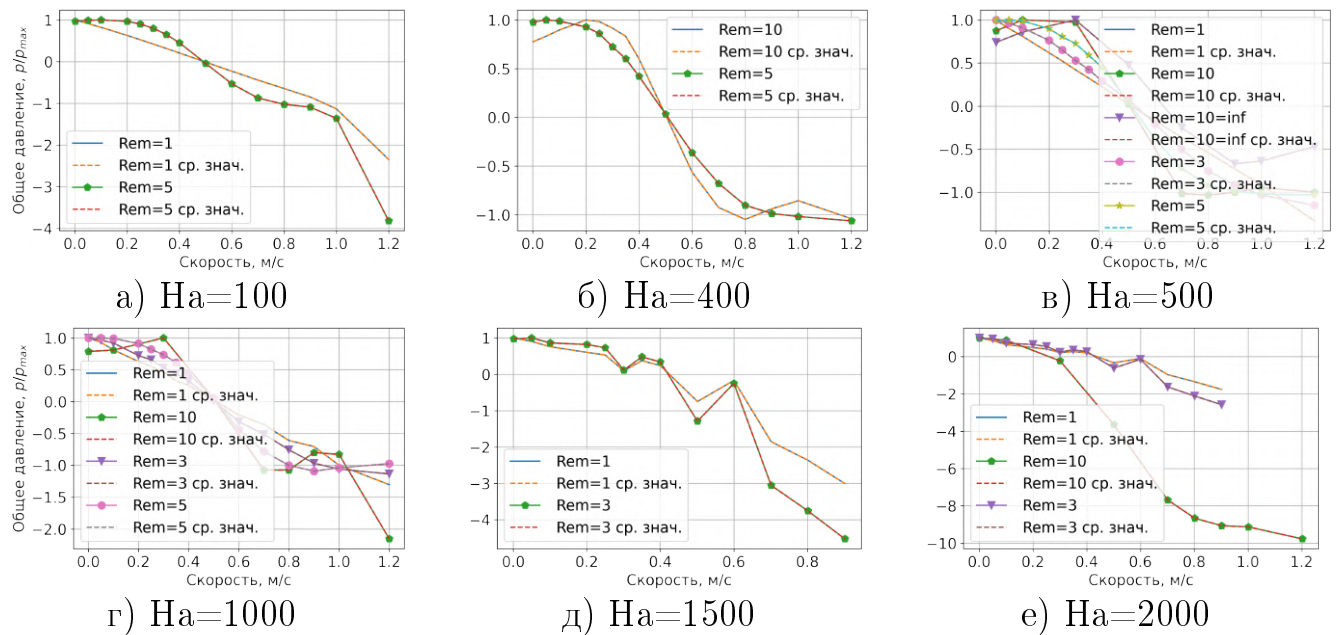


Рис. 3.10 — Зависимость суммарного давления в зависимости от скорости потока на входе канала для значения Гартмана от 100 до 2000.

Если сравнить характеристики магнитного давления и общего давления на Рисунках 3.9 и 3.10, можно сказать о том что общее давление более инерционно. Инерционность можно показать на Рисунке 3.10а, где видно, что при кривые расходно-напорных характеристик изменяются плавно во всем диапазоне скоростей, но при достижении значения 1м/с имеют резкий провал по давлению. В то время как магнитное давление на этих значениях изменяется плавно без провала по давлению. Это показывает, что существуют такие неустойчивые режимы при переходе, в которые электромагнитной энергии

будет недостаточно, чтобы покинуть эти состояния. Точка нулевого давления не смещается при числах Гартмана меньше 1000, но при числах Гартмана выше 1000 происходит ее смещение. Также при больших числах Гартмана наблюдались ряд проблем со сходимостью исследований при решении модели.

Рассмотрим картину поля скоростей для различных чисел Гартмана, равных 100, 400, 500 и 1000 на Рисунке 3.11. Увеличение числа Гартмана приводит к появлению турбулентных течений и неустойчивому состоянию системы. Вихревые течения возникают у стенок канала и распространяются по всему объему канала. Также обратные потоки образуются у стенок канала, что и предполагалось получить. Размер вихрей уменьшается, а их количество увеличивается с увеличением числа Гартмана. Линии поля скоростей в активной зоне магнитного поля имеют более вытянутую равномерную форму по сечению канала, чем вне активной зоны для числа Гартмана 100. Это показывает, что в ряде режимов работы магнитное поле не только вызывает дополнительные усилия, но и ламинаризирует поток.

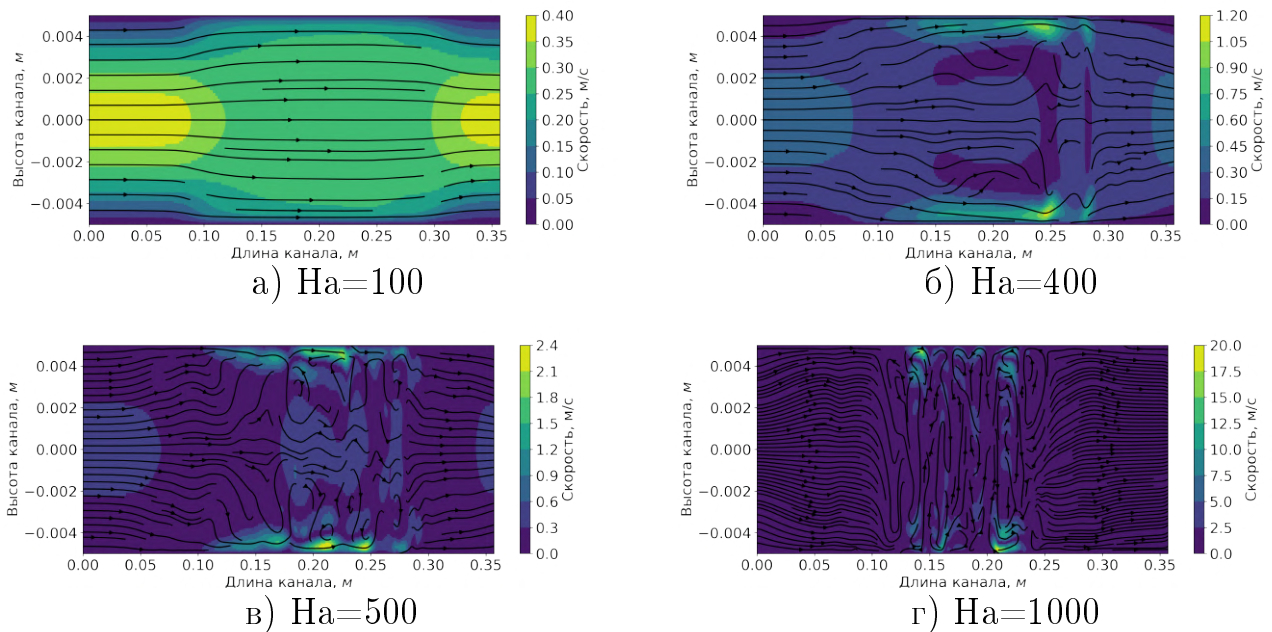


Рис. 3.11 — Распределение скорости в канале при среднем значений скорости на входе канала 0.25 м/с для значений Гартмана а) 100, б) 400, в) 500, г) 1000 при магнитном числе Рейнольдса 5.

Выше упоминалось о том, что увеличение магнитного числа Рейнольдса приводит к образованию S-образных расходно-напорных характеристик. Рассмотрим, как этот параметр влияет на распределение поля скорости в канале на Рисунке 3.12. Рисунок 3.12 представляет линии поля скоростей для

магнитных чисел Рейнольдса 1, 3 и 10. Рисунок 3.12г представляет замкнутую гидродинамическую систему, моделируемую периодическими граничными условиями на входе и выходе канала. Увеличение магнитного числа Рейнольдса «успокаивает» поток жидкости. Замкнутая гидродинамическая система имеет более устойчивый характер, чем при постоянной скорости на входе канала, это можно наблюдать, если сравнить Рисунки 3.12в и 3.12г.

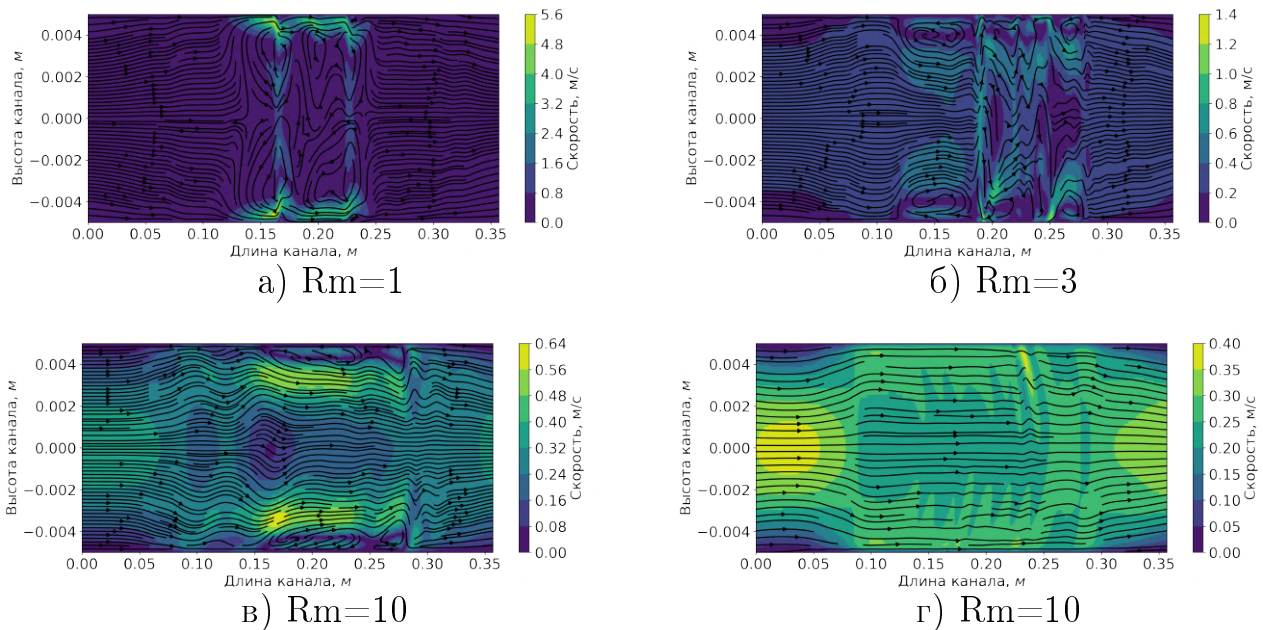


Рис. 3.12 — Распределение скорости в канале при среднем значении скорости на входе канала 0.25 м/с для значений магнитного числа Рейнольдса а) 1, б) 3, в) 10, г) 10 замкнутая система и постоянном значении Гартмана равному 500.

При проектировании МГД-установок одним из важных параметров является коэффициент гидродинамического трения. На Рисунке 3.13 показан этот коэффициент в зависимости от среднего значений скоростей на входе канала для чисел магнитного Рейнольдса 1, 3 и 10 и чисел Гартмана 100, 500, 1000, 1500, 2000. Увеличение числа Гартмана снижает значение гидродинамического коэффициента в двигательном или, другими словами, насосном режиме работы индуктора. При переходе через точку со скоростью 0.45 коэффициент гидродинамического сопротивления резко возрастает, а зависимость от числа Гартмана меняется в противоположную сторону. В большей степени на коэффициент трения влияет значение числа Гартмана, чем значение магнитного числа Рейнольдса. В неустойчивых состояниях с сильными турбулентными потоками, как для числа Гартмана 2000, на

Рисунке 3.13в происходит резкий скачок гидродинамического сопротивления и изменяется его поведение.

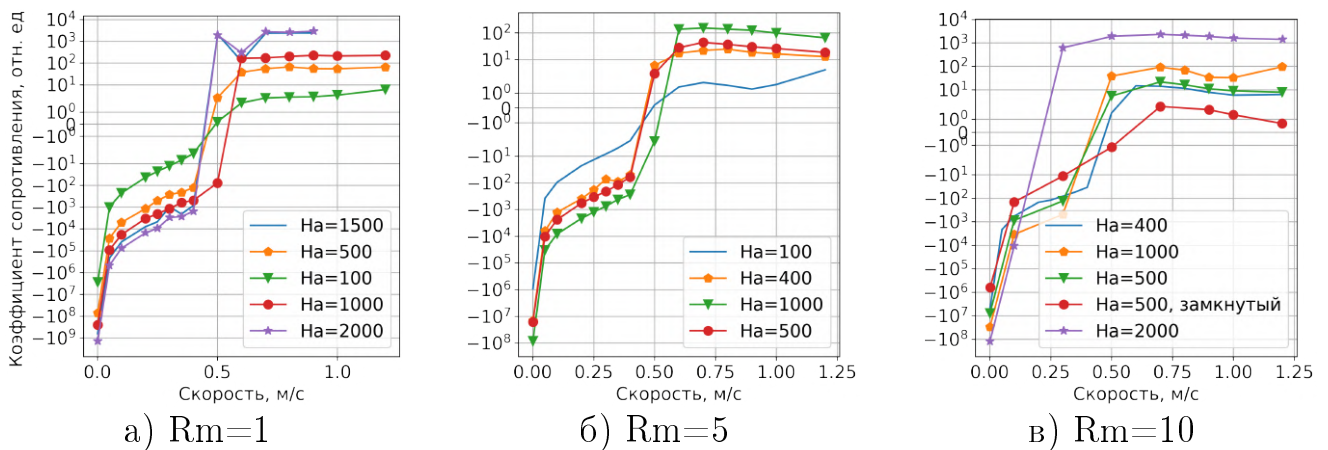


Рис. 3.13 — Гидродинамический коэффициент трения в зависимости от средней скорости на входе канала.

Рассмотрев интегральные и распределенные параметры, можно убедиться во влиянии неустойчивых режимов на поведение потока и характеристики устройств. Также было показано, какими параметрами можно управлять этими явлениями. Но остается важным резюмировать полученные данные и показать зависимости типа турбулентностей от чисел подобия. Это удобно сделать с помощью карты состояний, изображенной на Рисунке 3.14. Эта карта построена

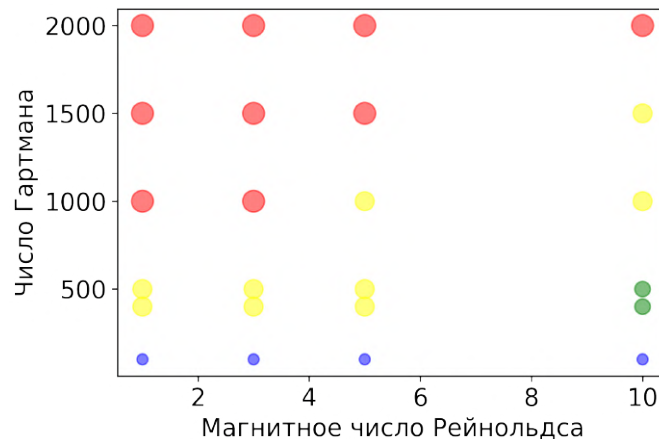


Рис. 3.14 — Картина возникновения вихрей. Синий цвет – устойчивое ламинарное состояние, зеленый – локальные возмущения, желтый – локальные устойчивые вихри, красный – сильная неустойчивость.

на основе результатов в данном разделе главы по двумерным графикам. Классификация структур вихрей определена следующим образом:

- синий цвет – устойчивое ламинарное состояние;
- зеленый – локальные возмущения в пространстве;

- желтый – локальные в пространстве и устойчивые во времени вихри;
- красный – неустойчивое состояние.

На основе этой карты можно заключить, что увеличение числа Гартмана приводит к неустойчивым потокам, увеличение числа магнитного числа Рейнольдса приводит к «успокаиванию» потока. Следовательно, значение критических чисел, при которых наступает неустойчивое состояние потока, имеет зависимость от других чисел. Эти зависимости должны быть исследованы в следующих работах для того, чтобы упростить процесс проектирования таких установок и лучше понимать природу явлений в магнитной гидродинамике. Также представленные результаты в этом разделе были выполнены с рядом допущений, например, не учитывалась зубчатость магнитной системы и третья координата пространства. Предполагается также, что эти допущения повлияют на конечный результат исследований неустойчивых состояний потока жидкости. Но была выполнена основная цель этих исследований — показать возможности достижения определенных параметров системы различными способами, для того чтобы обходить неблагоприятные режимы работ.

### **3.3 Исследование влияния ширины канала на поведение потока**

Ширина проводящего вторичного элемента играет важную роль при проектировании как электромеханических, так и магнитогидродинамических установок. Приведенные выше результаты были получены в большинстве случаев в безразмерном виде с целью их актуальности для большого спектра задач и не ограничиваться только узким диапазоном типовых конструкций и размеров. Представленные безразмерные критерии — это числа Гартмана, Рейнольдса и Стюарта. В этих числах есть зависимость от одного пространственного параметра, как правило, он выражает высоту канала. Известный факт, что электромагнитные явления имеют строгую зависимость от ширины канала. Этот вопрос обсуждался в работе [130], где авторы утверждают, что необходимо разработать такой критерий, который будет учитывать аспектные соотношения пространственных параметров. Поэтому

в этом разделе будет рассмотрено влияние аспектного соотношения ширины канала к его высоте  $\beta = B/A$ .

### 3.3.1 Постановка задачи

Рассматривается канал с прямоугольным сечением в трехмерной постановке задачи. Параметры электромагнитного поля справедливы из рассматриваемой задачи в разделе 3.1.1. Длина канала  $L = 2$  м. Конечность системы моделируется отсутствием магнитного поля с каждой стороны канала по 0.25 м, следовательно, активная зона магнитного поля равна 1.5 м. В задаче рассматриваются гидродинамическое число подобия Рейнольдса  $Re = 10^5$  вычисленное по формуле (1.16), магнитное число Рейнольдса  $Rm = 10$  по (1.17), Гартмана  $Ha = 500$  по (1.14) и Стюарта  $N = 2.5$  по (1.15). Эти числа не учитывают влияние ширины канала, поэтому рассмотрим расчет числа Рейнольдса через гидродинамический радиус  $D_h$  (3.4), где гидродинамический радиус определяется как  $D_h = 4A_c/P$  четыре площади жидкости  $A_c$  деленное на периметр смачивания жидкости. В [130] предлагается ввести критерий для анализа устойчивости системы как отношения чисел Рейнольдса к Гартмана (3.5) или заменить характеристический пространственный размер в числе Рейнольдса  $A$  на толщину гартмановского слоя  $\delta_{ha}$  (3.6).

$$Re_{wetted} = UD_h/\nu; \quad (3.4)$$

$$R = \frac{Re}{Ha}; \quad (3.5)$$

$$R = \frac{U_0\delta_{Ha}}{\nu}. \quad (3.6)$$

На основании физического смысла выше рассмотренных чисел в этой работе предлагается ввести новый критерий анализа устойчивости состояния

$$Re_{my} = UR_{my}/\nu, \quad (3.7)$$

где  $U$  — характерная скорость потока,  $R_{my} = 2S_{Ha}/P$ , площадь гартмановских и сторонних слоев потока жидкости  $S_{Ha} = S_1 - S_2$ . Здесь  $S_1$  — площадь потока жидкости,  $S_2$  — площадь без учета гартмановских слоев у стенок

канала. Толщина гартмановских слоев у стенок перпендикулярных магнитному полю определяется как  $\delta_{Ha} = 1/Ha$ , у параллельных магнитному полю как  $\delta_{Sh} = 1/Ha^{0.5}$ . Сведем полученные значения чисел подобия в зависимости от ширины канала в Таблицу 2.

Таблица 2 — Сводка чисел подобия, используемых в исследовании поведения потока от ширины канала.

$\beta$	Re (1.16) при $L_0 = a$	$Re_{wetted}$ (3.4)	$Re_{my}$ (3.7)	R (3.5)	R (3.6)
1	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	37090	200	1600
2		$2.66 \cdot 10^5$	25793		
4		$2.66 \cdot 10^5$	16756		
$\infty$		$\infty$	$\infty/\infty$		

Модель турбулентности для этой задачи была выбрана «dynamic Smagorinsky LES». Эта модель позволяет учитывать флуктуации скорости во времени и разрешает 80 % вихрей напрямую без математических манипуляций. Сетка была настроена согласно исследованию в разделе 2.5 и проверена на процент разрешения мелких вихрей на Рисунке 2.266. Алгоритм решения уравнений был выбран PIMPLE с корректировкой по максимальному числу Куранта не больше 1.

В исследовании рассматривается гидродинамический расчет без действия магнитного поля и магнитогидродинамический расчет под воздействием магнитного поля. В обоих случаях канал рассматривается как замкнутая система, моделируемая периодическими условиями на входе и выходе канала. Для поддержания рассматриваемого значения Рейнольдса вводится корректирующий член давления для стабилизации скорости. Исследование бесконечно широкого канала моделируется периодическими условиями на стенках канала. Этот случай подобен цилиндрическому каналу.

### 3.3.2 Обсуждение результатов

Структура вихрей является важным критерием при анализе неустойчивых состояний. Проведем ее оценку по Q-критерию о котором шла



речь в разделе 2.5 и определяется по формуле (2.9). Рисунок 3.15 представляет структуру образуемых вихрей в канале без действия магнитного поля для бесконечно широкого случая  $\beta = \infty$  (Рисунок 3.15а),  $\beta = 1$  (Рисунок 3.15б),  $\beta = 2$  (Рисунок 3.15в) и  $\beta = 4$  (Рисунок 3.15г). Возникновение вихрей в канале конечной ширины без воздействия магнитного поля происходит строго у стенок канала. В центре канала изоповерхностей Q-критерия практически не наблюдается. Распределение вихрей по длине канала носит хаотичный характер. Для большинства вихрей их форма имеет вытянутый характер по длине канала. Количество изоповерхностей Q-критерия (равно числу вихрей) значительно меньше в случае бесконечно широкого канала. Это показывает важность учета шероховатостей при моделировании потоков в каналах. На основании этого можно заключить, что механизм возникновения вихрей в таких системах — это силы вязкого трения из-за резкого роста скорости у стенок канала. Также важно отметить, что ширина канала влияет на состояния системы и должна быть отображена в критериях для анализа системы и поведения потока. Это условие выполняется только для выражений (3.4) и (3.7). Выражение (3.4) возрастает при увеличении ширины, а (3.7) растет (смотри Таблицу 2). Если гидродинамическая система имеет меньшее количество вихрей и их концентрацию в объеме канала при увеличении ширины, следовательно система становится устойчивее. Тогда критерий, описывающий неустойчивость должен снижаться. В этом случае выражение (3.7), предлагаемое в этой работе, лучше описывает возможность возникновения неустойчивости системы.

Рисунок 3.16 представляет структуру образуемых вихрей в канале под действием магнитного поля для бесконечно широкого случая  $\beta = \infty$  (Рисунок 3.16а),  $\beta = 1$  (Рисунок 3.16б),  $\beta = 2$  (Рисунок 3.16в) и  $\beta = 4$  (Рисунок 3.16г). В случае воздействия магнитным полем на поток жидкости структура вихрей меняется. Во-первых, образуются дополнительные мелкие вихри, во-вторых, вытянутых длинных вихрей становится меньше и, в-третьих, количество вихрей увеличивается. В части пространства «область 1» при воздействии поля появляются трубчатые двухмерные вихри. С увеличением ширины канала эти вихри размываются. Движение жидкости без проскальзывания отсутствует для бесконечно широкого канала, когда вихри в области 1 исчезают. На выходе канала, что соответствует «область 2» на Рисунке 3.16, появляется двухмерный вихрь. Его форма с увеличением ширины канала изменяется по подобию вихрей как в области 1. Формирование этих

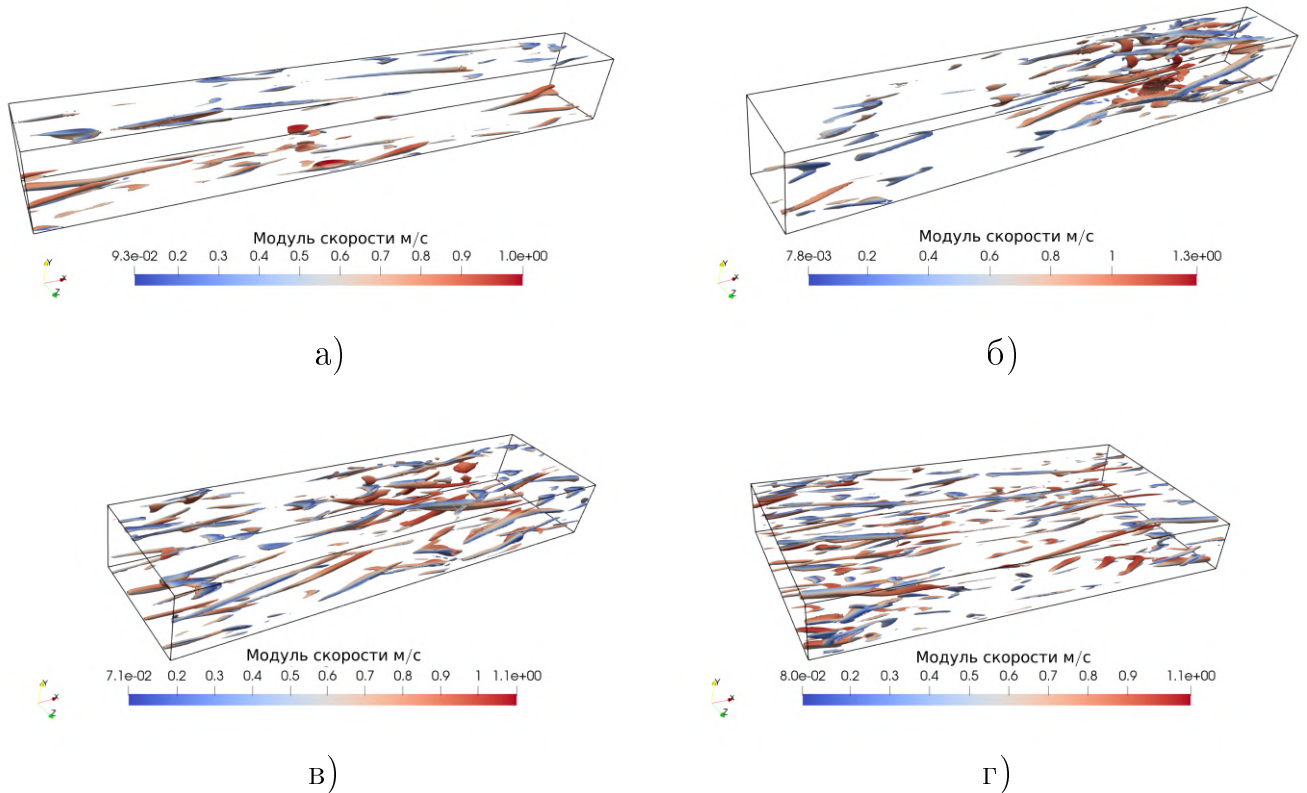


Рис. 3.15 — Изо-поверхности  $Q$ -критерия с нанесением цветовой гаммы, соответствующей модулю скорости без действия магнитного поля для а)  $\beta = \infty$  б)  $\beta = 1$  в)  $\beta = 2$  г)  $\beta = 4$ .

вихрей носит не только электромагнитную природу, но и гидродинамическую, потому что их форма и степень проявления меняется не только от наличия электромагнитного поля, а также от влияния трения о стенки, параллельные магнитному полю. Важным выводом с инженерной точки зрения — это то, что цилиндрические конструкции будут более устойчивыми к таким возмущениям, так как в этих конструкциях такие структуры вихрей отсутствуют. Зона на входе канала до активной зоны магнитного поля «Область 3» представляет концентрацию трубчатых вихрей в направлении длины канала. Размер и их количество снижается с увеличением ширины канала. Поэтому влияние магнитного поля распространяется не только в зоне его действия, но и вне этой зоны за счет переноса энергии потоками жидкости. Такой же вывод об изменении чисел подобия в зависимости от ширины, как и в исследовании без магнитного поля можно сделать и в этой задаче.

Количественная оценка распределения усредненных значений по сечению силы Лоренца вдоль длины канала представлена по компонентам на Рисунке 3.17. Можно заметить, что тормозящие усилия, возникающие на

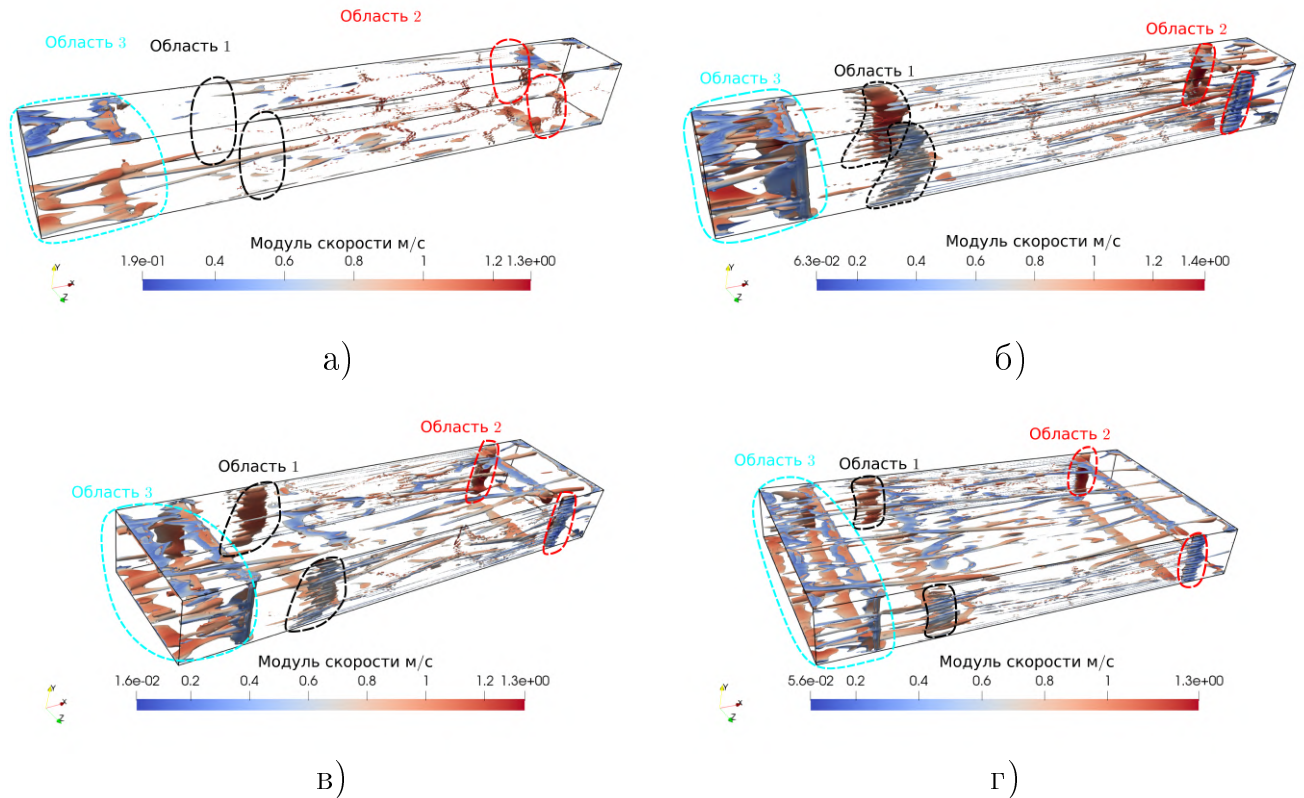


Рис. 3.16 — Изо-поверхности  $Q$ -критерия с нанесение цветовой гаммы, соответствующей модулю скорости с действием магнитного поля для а)  $\beta = \infty$  б)  $\beta = 1$  в)  $\beta = 2$  г)  $\beta = 4$ .

границе действий магнитного поля (0.25 и 1.75 м), имеют примерно одинаковые значения и не зависят от ширины канала. Следовательно форма замыкания токов в проводящей среде не влияет на их значения, а влияет только градиент магнитного поля по длине канала, что было математически показано в разделе 1.5 и на Рисунке 1.14. Изменение градиента магнитной индукции по длине канала может быть реализовано специальным включением обмоток, например, выполнением части пазов на половину заполненными обмотками. В активной зоне ширина канала влияет на значения плотности усилий, вследствие изменения путей замыкания токов. Составляющая электромагнитных сил в направлении  $y$  координаты (по ширине канала) на порядок меньше усилий, действующих в направлении  $z$  координаты (параллельно магнитному полю или по высоте канала). Значения усилий для всех трех компонент снижаются при увеличении ширины канала.

Природа вихря описывается как минимум двумя компонентами скорости. В рассматриваемых случаях наблюдается двухмерная трубчатая структура в плоскости  $x - z$ . Поэтому количественно их можно оценить, рассматривая

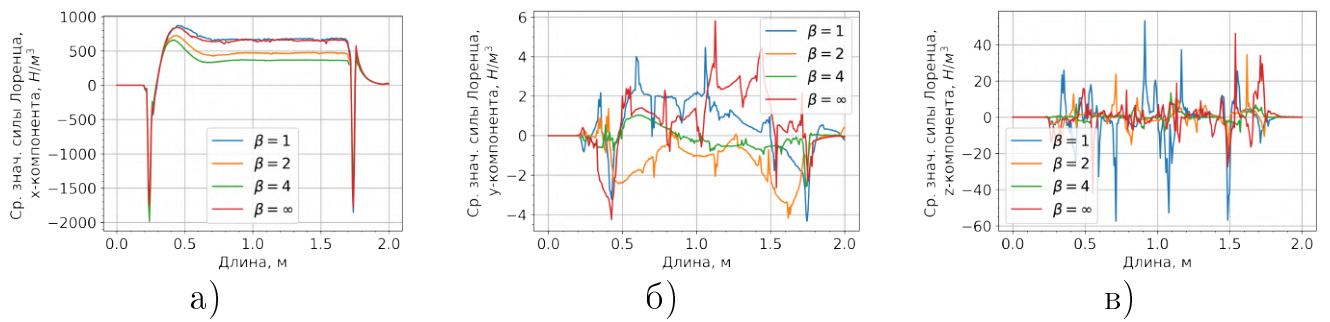


Рис. 3.17 — Средние значения компонент усилий по сечению канала вдоль его длины.

распределение  $z$  компоненты скорости. Распределение скорости в трехмерном пространстве сложно визуализировать, поэтому построены средние значения  $z$  компоненты скорости в поперечном сечении канала по длине на Рисунке 3.18а. Можно отметить значительные скачки скорости в областях 1 и 3, отмеченные на Рисунке 3.18а. Резкий рост скорости в этих областях снижается с увеличением ширины канала. Увеличение ширины канала приводит к более плавному распределению среднего значения давления по длине канала на Рисунке 3.18б. Одним из основных механизмов неустойчивости остается шероховатость стенок канала, параллельных магнитному полю. Увеличение ширины канала снижает степень влияния этого фактора. Практическим примером может служить цилиндрический насос. У такого типа насосов отсутствует этот эффект, так как в них стенки канала геометрически замкнуты сами на себя.

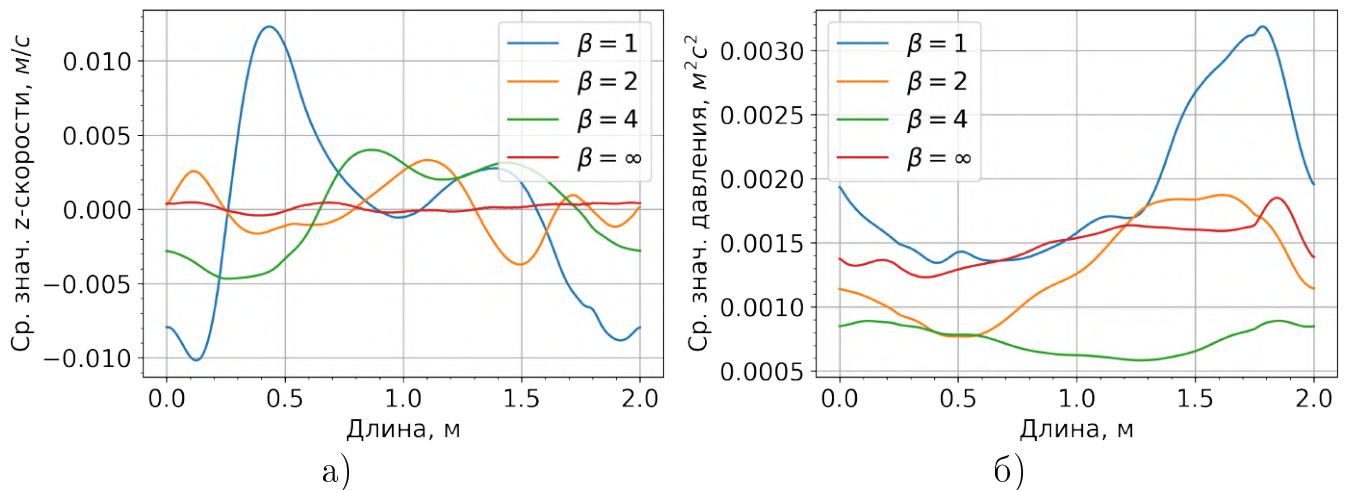


Рис. 3.18 — Средние значения  $z$ -компоненты скорости и давления вдоль длины канала.

### 3.4 Выводы по главе

Разработана математическая модель для численного анализа влияния электромагнитных явлений на устойчивость потока. Модель позволяет подавлять влияние краевых эффектов в расчетах. Такая модель сделала возможным обособленно оценить вклад электромагнитных эффектов на поведение потока. Паразитные эффекты с точки зрения электромеханики могут положительно влиять на электротехнологические процессы, например, подавлять турбулентные течения, ускорять поток жидкости или выравнивать значения скорости потока по сечению канала. Скорость потока жидкости увеличивается при учете поперечного краевого эффекта в расчетах. Значения скорости обратных потоков практически не зависят от действия краевых эффектов. Краевые эффекты влияют на ускорение потока вдоль стенок перпендикулярных магнитному полю.

Проведено исследование потока жидкости в прямоугольном канале с изолированными стенками под воздействием идеализированного бегущего магнитного поля. Показано, что ускорение потока происходит у стенок перпендикулярных магнитному полю, а обратные течения у параллельных. Увеличение электромагнитных усилий не позволяет бесконечно разгонять поток жидкости. Построена зависимость пиковых значений скорости у гартмановских стенок и обратных потоков у стенок параллельных магнитному полю, в зависимости от числа Стюарта. Движение образовавшихся вихрей в пространстве пропорционально синхронной скорости бегущего магнитного поля. Количество вихрей у стенок, параллельных магнитному полю равняется количеству пар полюсов магнитного поля. Показано что увеличение частоты магнитного поля приводит к увеличению относительной скорости до определенных значений. Дальнейшее увеличение частоты слабо влияет на относительную скорость потока. Глобальные турбулентные течения возникают при числах Стюарта выше 20. Дальнейшее увеличения числа Стюарта вызывает снижение пиковых скоростей у стенок Гартмана и увеличение скорости обратных течений.

Количественно показано, что пересчет электромагнитного поля на каждой временной итерации является не рациональным подходом, приводящей к значительному увеличению времени расчета. Оптимальным условием пересчета

электромагнитной задачи является критерий максимального отклонения скорости в пространстве текущего временного шага от предыдущего. Это значение для множества задач не должно превышать 30 %. Этот критерий соответствует физическому смыслу магнитного числа Рейнольдса.

Количественно показано влияние поведения потока на интегральные характеристики индукционных насосов с помощью упрощенной численной модели. Увеличение магнитного числа Рейнольдса изменяет форму кривой расходно–напорной характеристики насоса от линейного характера к S–образному. Нагрузочная характеристика (тип гидродинамической системы) играет важную роль в анализе поведения потока. Точка перехода расходно–напорной характеристики через нулевое значение давления не зависит от значений чисел Гартмана и магнитного Рейнольдса, а зависит от типа гидродинамической системы. Гидродинамические системы с постоянным расходом на входе канала являются менее устойчивыми к образованию турбулентных течений, чем, например, замкнутые.

Построена карта состояний возникновения турбулентных течений в зависимости от числа Гартмана и магнитного Рейнольдса с классификацией по типу турбулентностей. Увеличение числа магнитного Рейнольдса снижает вероятность образование перехода к турбулентным течениям. Увеличение числа Гартмана приводит к образованию мелкомасштабных глобальных вихревых течений.

Проведен анализ аспектного соотношения ширины и высоты канала на структуру потоков. Показано, что увеличение ширины канала ослабляет влияние электромагнитных эффектов в областях между активной и краевыми зонами. Показано, что образование вихрей из-за продольного краевого эффекта сильно зависит не только от параметров магнитной системы, но и от гидродинамических. Введен критерий для оценки неустойчивостей в зависимости от ширины и высоты канала.

## Глава 4. Исследование термогравитационных эффектов на устойчивость потока жидкости

Многие МГД-установки эксплуатируются в тяжелых условиях с точки зрения температурных режимов, это особенно характерно для металлургического применения, как обсуждалось в разделе 1.2.1. Эти особенности эксплуатации и реализации технологического процесса могут приводить к существенным значениям градиента температур. Наличие градиента температур приводит к образованию дополнительных усилий в жидком металле и изменению поведения его потока. Задачи по исследованию термогравитационных эффектов на поведение потоков рассматривались с фундаментальной точки зрения во многих научных работах, но эта проблема в направлении проектирования МГД-насосов и учета этих явлений для расчета потока жидкости в каналах под воздействием внешнего магнитного поля слабо освещена. Тема по исследованию термических эффектов включает множество аспектов и требует большого количества исследований. Широта рассматриваемой проблемы сужается до «верификации» актуальности ее дальнейшего развития, так как глава диссертации не предполагает полного раскрытия этой темы. А именно показать, как влияют температурные режимы на поведение потока, провести предварительную оценку их воздействия на гидродинамические параметры системы и найти некоторые задачи, которые было бы важно решить в бедующем научном сообществе. Полученные количественные результаты отображают общую концепцию физического представления об этих явлениях, но требуют уточнения в последующих исследованиях.

### 4.1 Процедура расчета естественной конвекции

Алгоритм расчета представляет процедуру, описанную в разделе 2.2 с рядом ее модификаций. Главная модификация процедуры — это имплементация уравнения энергии (1.10) для расчета термических процессов в жидкости. На основании полученных значений энтальпии в уравнении (1.10) вычисляется

температурное поле по формуле (1.12). Имплементация уравнения энергии (1.10) была реализована на основе встроенного решателя «buoyantPimpleFoam» для несжимаемой жидкости. Блок-схема модифицированной процедуры расчета гидродинамической части изображена на Рисунке 4.1. Силы плавучести учитываются с помощью приближения Буссинеска–Обербека по выражению (1.9) на основании разницы температур. В электромагнитной части задачи вычисляются значения тепловыделения (джоулево тепло) помимо усилий Лоренца, и затем эти значения передаются в гидродинамическую часть расчетов. Переданная тепловая энергия учитывается в уравнении энергии (1.10) в зависимости от задач исследований. Модификация данного решателя доступна на GitHub<sup>1</sup> под названием «mhdHeatFoam». Процедуру расчета в упрощенном виде можно описать следующими шагами:

1. Инициализация библиотеки EOF — это проверка условий запуска на расчет электромагнитной задачи и запуск ее при достижении условий запуска;
2. Передача переменных усилий и тепловой энергии из Elmer;
3. Решение уравнений скоростей;
4. Решение уравнения энергии;
5. Решение уравнения давления;
6. Проверка сходимости (невязки) по давлению и скорости на текущем временном промежутке; Если сходимость переменных достигнута заданным значениям в настройках или достигнуто максимальное количество итераций, тогда алгоритм переходит на новый временной шаг и вычисляются все перечисленные шаги. В ином случае повторяются только шаги 3–5.

Первый шаг выполняется всегда для начального расчета, последующие инициализации библиотеки EOF производится при максимальном отклонении скорости на 30 %.

---

<sup>1</sup>URL: <https://github.com/TreeDa93/PyRunOF/tree/main/solvers>



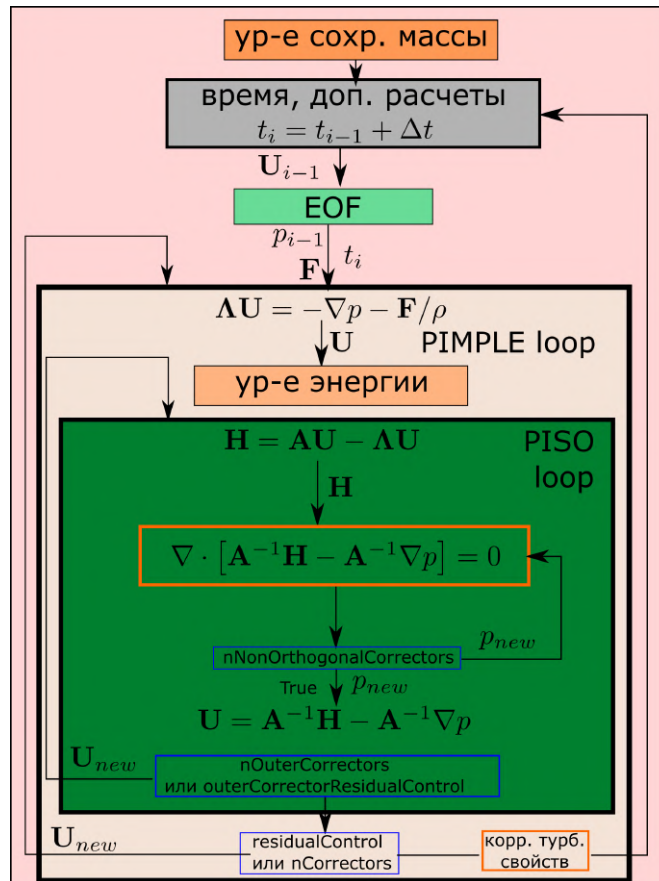


Рис. 4.1 — Блок-схема расчета гидродинамической части алгоритма с учетом уравнения энергии.

## 4.2 Верификация

В разделе 2.3 уже была проведена верификация алгоритмов для расчета задач потока жидкости в прямоугольных каналах под воздействием магнитного поля. Учет тепловых явлений вносит существенные влияния в математический аппарат и физическое описание модели. Поэтому для подтверждения адекватности предлагаемых алгоритмов расчета и подходов к моделированию термических эффектов необходимо провести дополнительный этап проверки результатов. Верификация модели и предлагаемого для ее расчета алгоритма была проведена с помощью сравнения результатов проведенного численного эксперимента по исследованию естественной конвекции в работе [196]. Объектом исследования служит физическое явление естественной конвекции, возникающее в жидком металле, который находится в прямоугольном контейнере (смотри Рисунок 4.2). Размеры контейнера  $10 \times 6 \times 1$  см. Верификация проводится для числа Грасгофа  $8.88 \times 10^6$ . Число Грасгофа

определяет процесс теплообмена при свободном движении в поле гравитации и является отношением сил плавучести к силам вязкости (4.1)

$$Gr = g\beta(\Delta\theta/L)h^4/\nu^2, \quad (4.1)$$

где  $h$  — высота контейнера,  $\beta$  коэффициент температурного расширения,  $L$  — длина контейнера,  $g$  — постоянная гравитации,  $\theta$  — разница температур между холодной и горячей стенкой,  $\nu$  — кинематическая вязкость.

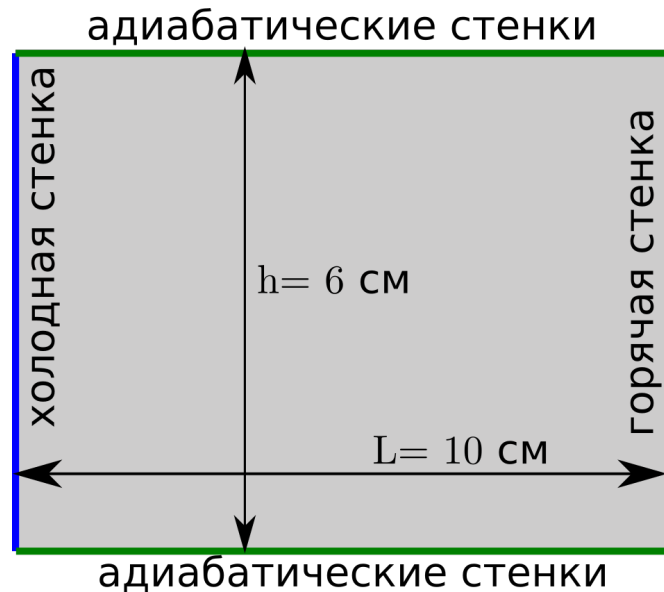


Рис. 4.2 — Схематичное описание задачи.

Сравнение результатов, полученных в этой работе и представленных в [196] представлены на Рисунке 4.3. Результаты представляют распределение температуры вдоль линии, проведенной по длине контейнера через его центр. Можно сделать вывод о высокой сходимости результатов расчета естественной конвекции с помощью предлагаемого алгоритма. Максимальное отклонение между результатами наблюдается на промежутке от 0.04 до 0.06 м. Значение отклонения не превышает 0.5 К, что составляет менее 0.12 % в относительных величинах.

Второй этап верификации заключается в сравнение рассчитанных результатов фронта плавления металла с результатами из [197]. Задача представляет, как и в первом случае, прямоугольный контейнер наполненный галием без каких либо примесей. Контейнер имеет следующие геометрические параметры длина — 89 мм, ширина 38 мм, высота — 64 мм. В начальный момент времени зона расплавленного металла равна 4.5 мм от горячей стенки, а ее температура равна 302.9 К. Схематичное описание численного эксперимента

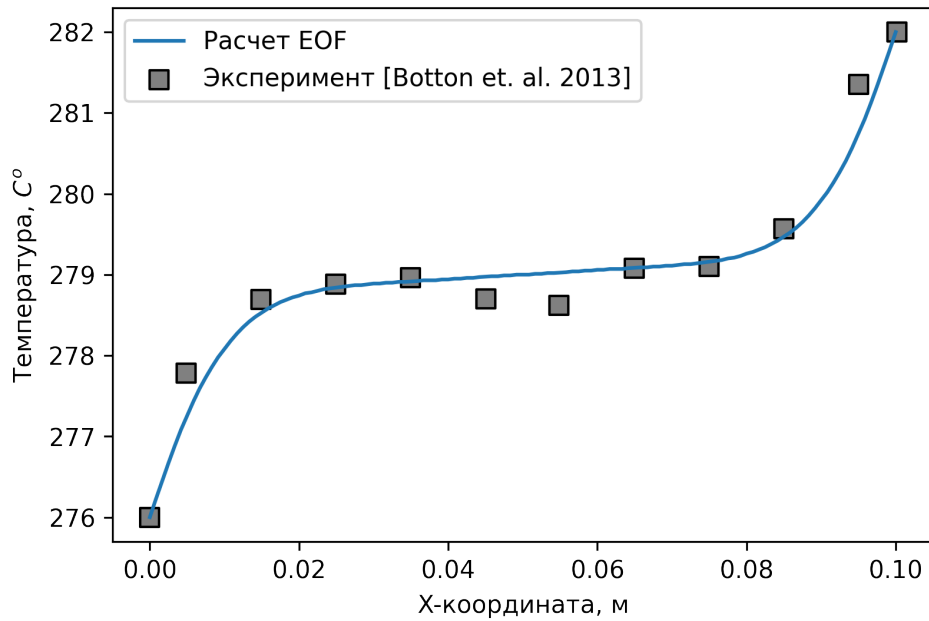


Рис. 4.3 — Сравнение распределения температур по длине контейнера в его центре, полученных при помощи предлагаемого алгоритма, и данных из [196].

представлено на Рисунке 4.4. Основные физические свойства, требуемые для расчета задачи представлены в Таблице 3. Скрытая теплота плавления металла задана  $q_0 = 8 \cdot 10^4$  J/kg

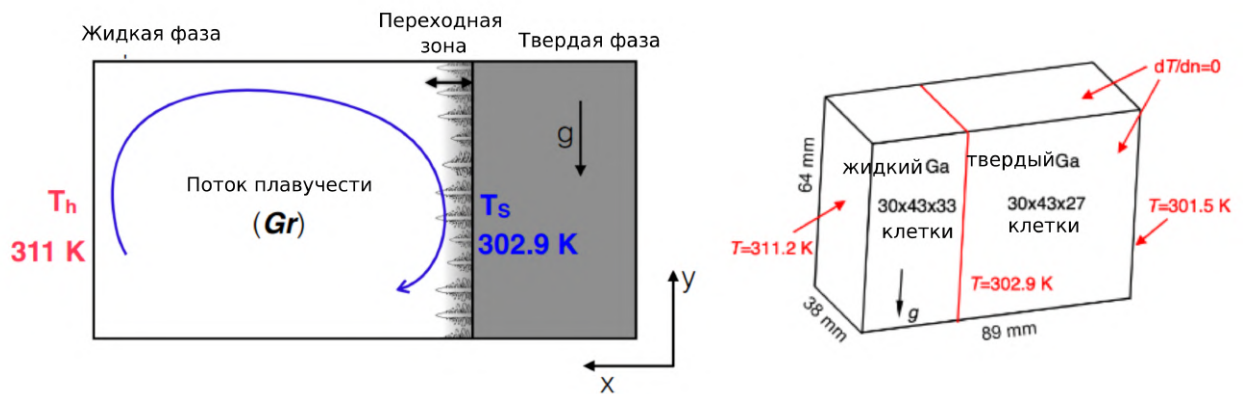


Рис. 4.4 — Схематичное описание задачи для верификации предлагаемых алгоритмов на примере процесса плавки металла.

Для расчета этой задачи в алгоритм расчетов была добавлена функция, учитывающая фазовый переход. На основании распределения агрегатного вещества определялись физические свойства в пространстве. Эволюция фронта расплава показана на Рисунке 4.5. Синим цветом обозначена твердая фаза. Векторами черного цвета указываются направления потока жидкости

Таблица 3 — Сводка физические свойства используемых в задаче верификации на примере плавки металла.

	Жидкая фаза	Твердая фаза
$\rho$ , плотность, $\text{kg/m}^3$	6116	5904
$\lambda$ , теплопроводность, $\text{W/(mK)}$	34.1	40.8
$c$ , теплоемкость, $\text{J/kgK}$	360	374
$\eta$ , динамическая вязкость, $\text{Pa} \cdot \text{s}$	0.00213	—
$\beta$ , коэффициент темп. расширения, $1/\text{K}$	0.00013	—

вследствие естественной конвекции. Представленные результаты повторяют теоретические и практические результаты по естественной конвекции.

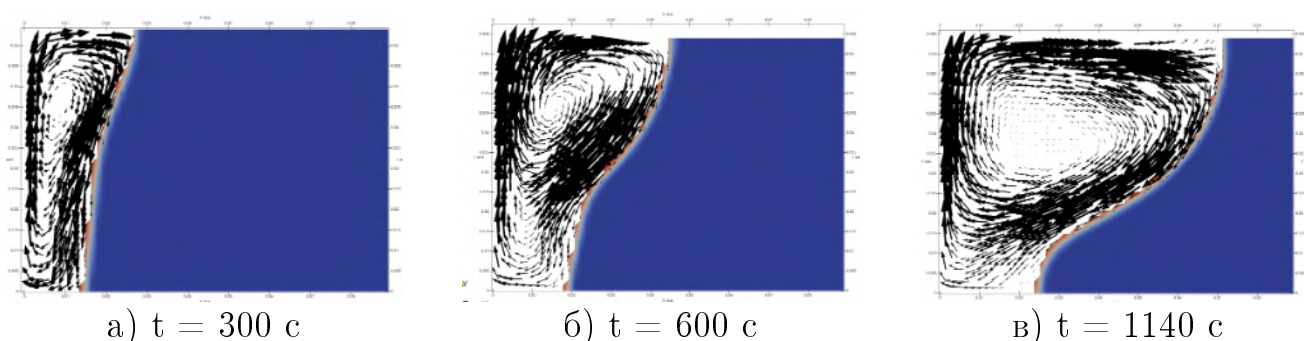


Рис. 4.5 — Эволюция поля скоростей при процессе плавления за счет естественной конвекции

Помимо качественной верификации проведенных расчетов важно их оценить количественно. Количественные результаты сравнения представлены на Рисунке 4.6. Эти результаты представляют собой сравнение симуляций изо-линий фронта расплава на 6 мин., 9 мин, 12.5 мин. и 19 мин. Максимальные расхождения между сравниваемыми результатами наблюдаются на временном промежутке 19 мин. в области верхней стенки. Такое отклонение приемлемо для моделирования мультифизических процессов. Расхождения результатов могут быть снижены за счет настройки процедур решения систем уравнения и корректировки физических свойств согласно эксперименту. Поэтому можно сделать вывод о достаточной сходимости результатов даже при усложнении моделирования физических процессов за счет имплементации процедуры изменения агрегатного состояния вещества. Из этого можно сделать заключение об адекватности применения предлагаемых процедур для расчета естественной конвекции в задачах протекания потока жидкости под воздействием магнитного поля.

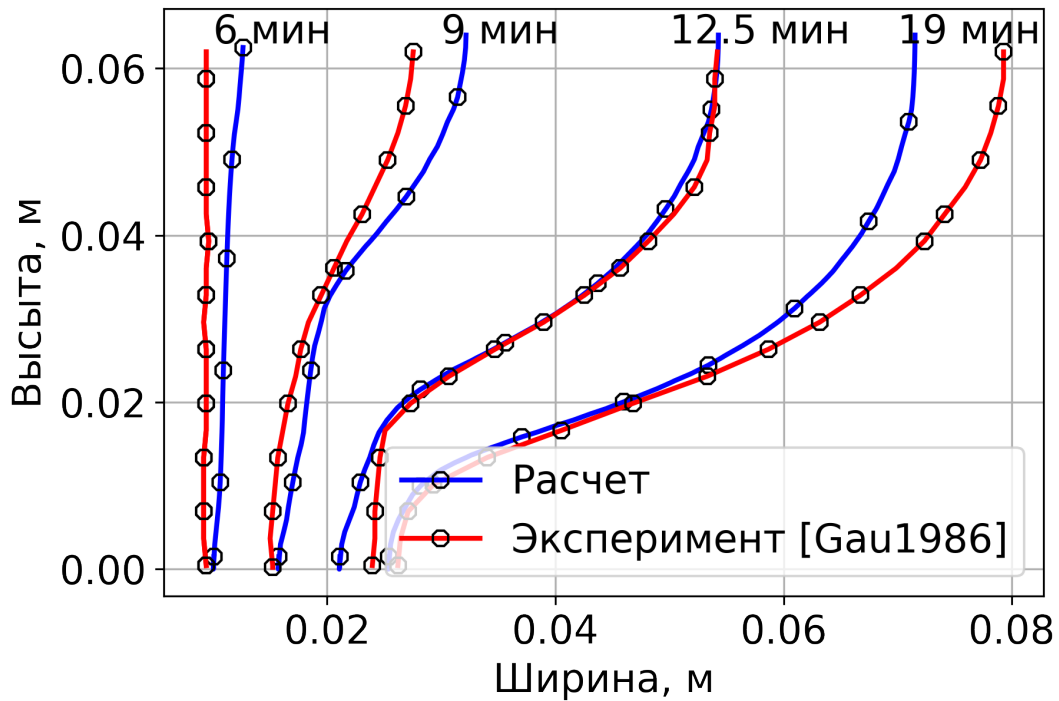


Рис. 4.6 — Изо-линии фронта расплава в зависимости от времени симуляции, рассчитанные в этой работе (синяя линия) и в [197] (красная линия).

### 4.3 Влияние неравномерного температурного поля на поведение потока

#### 4.3.1 Описание задачи

Для исследования влияния естественной конвекции или, другими словами, термогравитационных эффектов на поведение потока рассмотрим прямоугольный канал, по которому протекает электропроводящий жидкий металл с заданной скоростью. Моделируемая длина канала равна  $L = 2$  м. Гидродинамическая система моделируется замкнутой с помощью периодический условий на входе и выходе канала. Это условие описывает одинаковые значения основных физических переменных на входе и выходе канала. Ширина канала равна 0.5 м, высота 0.25 м. Магнитное поле действует в центре канала по всей его ширине и отсутствует по 0.25 м с каждой стороны канала. Параметры описывающие, магнитное поле, соответствуют параметрам описанным в разделе 3.3.1. Система описывается безразмерными параметрами:

- Число Гартмана, равное 100;

- Магнитное число Рейнольдса, равное 10;
- Гидродинамическое число Рейнольдса, равное  $10^4$ ;
- Число Стюарта, равное 1.

На всех стенках канала заданы граничные условия прилипания потока для переменных скорости. Тепловой поток через стенки, параллельные магнитному полю, равен  $200 \text{ W/m}^2$ . Между стенками, перпендикулярными магнитному полю, задается разница температур. Начальные условия для потока жидкости задаются из предварительного расчета развитого потока без воздействия на эту систему магнитного поля. Схематичное представление численного эксперимента по исследованию влияния естественной конвекции на поведение потока показано на Рисунке 4.7.

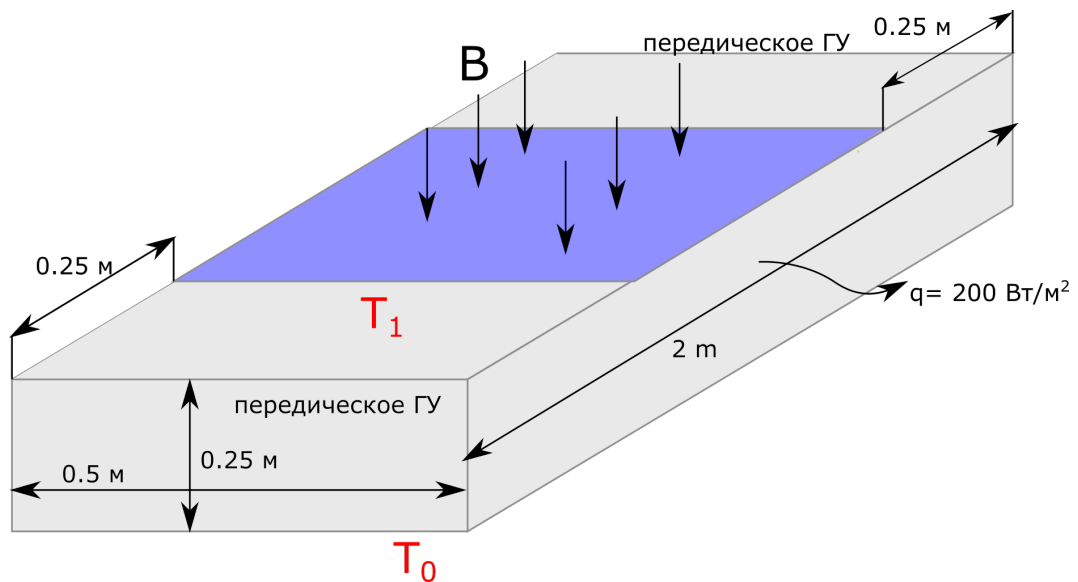


Рис. 4.7 — Схематичное описание задачи по исследованию влияния естественной конвекции на поведение потока.

Для расчетов потоков жидкости используется «dynamic Smagorinsky LES» модель турбулентности. Размер сетки настроен таким образом, чтобы разрешить больше 80 % вихрей прямым способом. Исследование сетки была проведена в разделе 2.5 для данной конструкции.

### 4.3.2 Обсуждение результатов

Распределение скорости потока в сечении канала показано на Рисунках 4.8 и 4.9. Распределение скорости на Рисунке 4.8 соответствует случаю, когда

магнитное поле равно нулю. Анализируя эти результаты, можно заметить появление искривления поверхностей профиля скорости в центре ядра при увеличении разницы температур между стенками. Поведение потока слабо изменяется по длине канала. Теоретически при моделировании такой системы без магнитного поля должен получиться развитый пуазейлевский поток. Представленные распределения скорости в некоторой степени повторяют пуазейлевские шаблоны скорости, но имеют более уплощенное распределение в ядре потока (центр канала). Следовательно, можно сделать заключение о влиянии температурного поля на поведение потока.

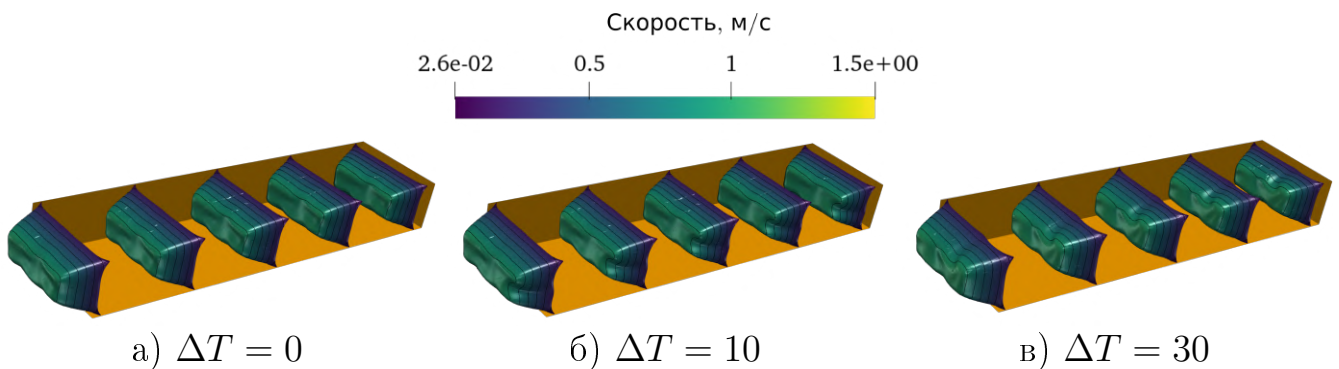


Рис. 4.8 — Распределение скорости в сечении канала без воздействия магнитного поля для случаев разницы температур между стенками: а)  $\Delta T = 0$ , б)  $\Delta T = 10$  и в)  $\Delta T = 30$ .

При воздействии магнитным полем поведение потока значительно изменяется (см. Рисунок 4.9). В этом случае появляются явные пиковые значения скорости вдоль стенок, параллельные магнитному полю. Подобные структуры уже рассматривались в этой работе. Но стоит отметить сложную форму ядра потока, которая формируется наличием температурного поля. Важно оценить влияние действия джоулевого нагрева на поведение потока. С помощью пространственного распределения значений скорости оценить влияние температурного поля достаточно сложно. Поэтому рассмотрим распределение поля скоростей вдоль линий между стенками, параллельными магнитному полю и перпендикулярными ему.

На Рисунке 4.106 представлены результаты значений относительной скорости  $(U_{max} - U)/U_{max}$  вдоль линии между стенками, перпендикулярными магнитному полю, а на Рисунке 4.10а эти же результаты, только вдоль прямой между стенками, параллельные магнитному полю. Эти результаты представлены для значений разницы температур между стенками 0, 10 и 30.

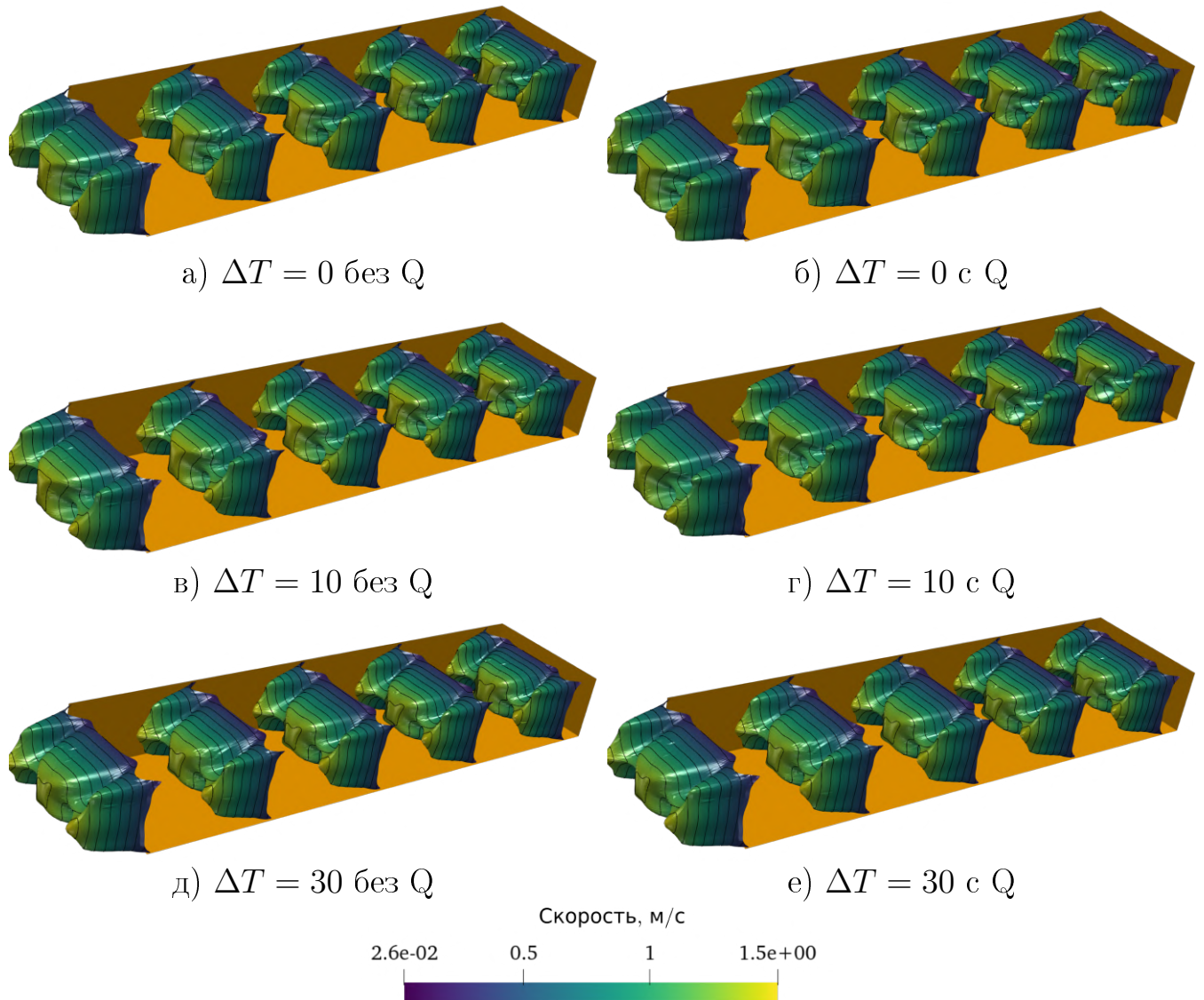


Рис. 4.9 — Распределение скорости в сечении канала под воздействием магнитного поля с учетом (правый столбец графиков) и без джоулевого (левый столбец графиков).

Обозначение на этих графиках «без МП» — магнитное поле равно нулю, «с Q» — действует магнитное поле и учитывается джоулев нагрев и «без Q» — действует магнитное поле и не учитывается джоулев нагрев. Разница между относительными скоростями при учете влияния джоулевого нагрева и без (сплошные кривые) составляет порядка 5 %. Эти значения существенно меньше, чем влияние электромагнитных сил, но могут в ряде случаев привести к серьезному искажению результатов. Важно в будущих работах ввести критерий оценки влияния тепловой энергии на поток жидкости. В данной работе показывается только качественный анализ его влияния. Также



интересно, что влияние разницы температур между стенками имеет большее значения в случае действия магнитного поля, чем без него.

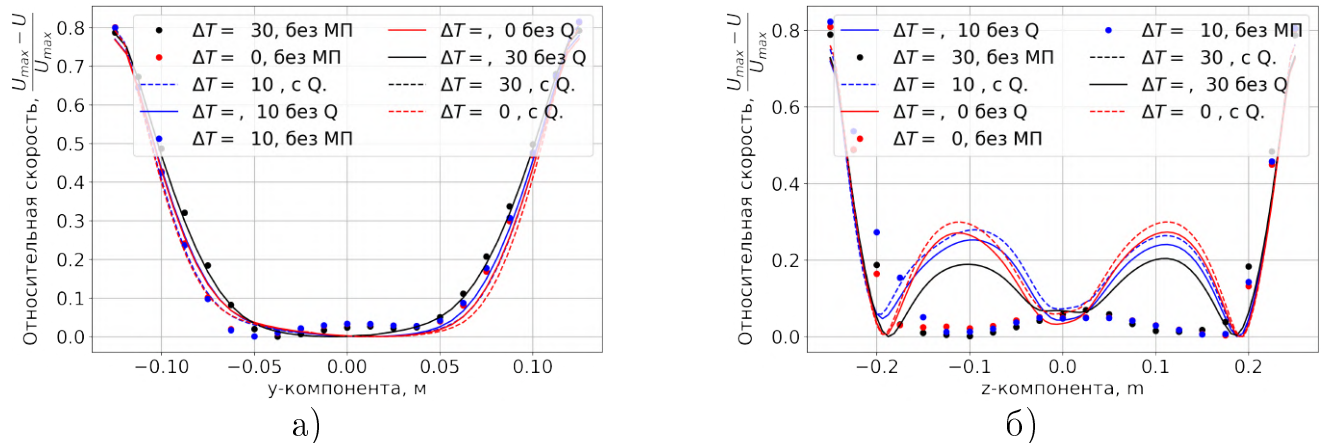


Рис. 4.10 — Относительная скорость между стенками, (а) перпендикулярными и (б) параллельными магнитному полю с различными значениями разницы температур между перпендикулярными стенками

При анализе таких явлений численными методами важно правильно выбирать модель турбулентности. На Рисунке 4.11 показаны распределения усредненной во времени скорости в поперечном сечении канала. Усредненные значения скорости используются в расчетах моделей турбулентности осредненные по Рейнольдсу (RANS). Распределения усредненных значений

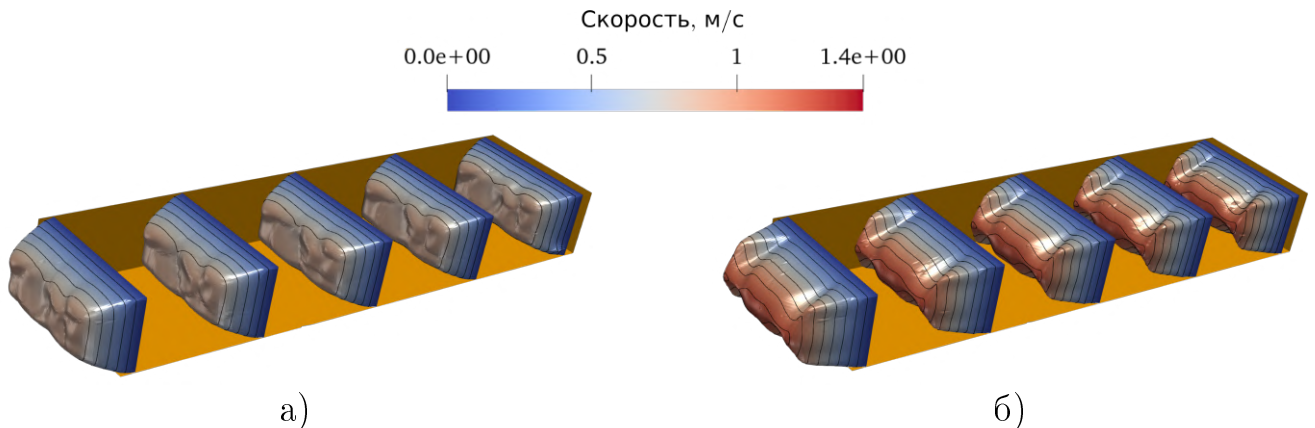


Рис. 4.11 — Пространственное распределение усредненных значений скорости потока жидкости в сечении канала для случаев а) без действия магнитного поля и б) под действием магнитного поля.

скорости по сечению канала носит более гладкий характер (см. Рисунок 4.11), чем эти же распределения мгновенных значений скорости (см. Рисунок 4.9). Но стоит отметить, что в обоих случаях характер функций совпадает. Также при усредненных значения максимальное значение скорости становится меньше.

Поэтому можно заключить, что при анализе термогравитационных эффектов важно адекватно выбирать модель турбулентности.

Количественно отличие результатов осредненных и мгновенных значений скорости можно показать с помощью одномерных графиков их распределения вдоль линий в пространстве на Рисунке 4.12. Разница скоростей между мгновенными и усредненными значениями скорости достигает порядка 0.2 м/с. Максимальная амплитуда флуктуаций скорости наблюдается в центральной части канала, где значения скорости имеют максимальные значения. Амплитуды флуктуаций скорости сопоставимы в случаях расчетов с учетом действия магнитного поля и без. Из этого можно сделать вывод, что магнитное поле слабо влияет на флуктуации скорости потока. В случае расчетов на усредненных значениях происходит размытие пиковых значений скорости у стенок канала и его центре. В центре канала наблюдается скачок значений мгновенной скорости. Этот скачок не наблюдался при моделировании потоков жидкости в таких же системах с теми же моделями турбулентности и физическими настройками в разделах 2.5 и 3.

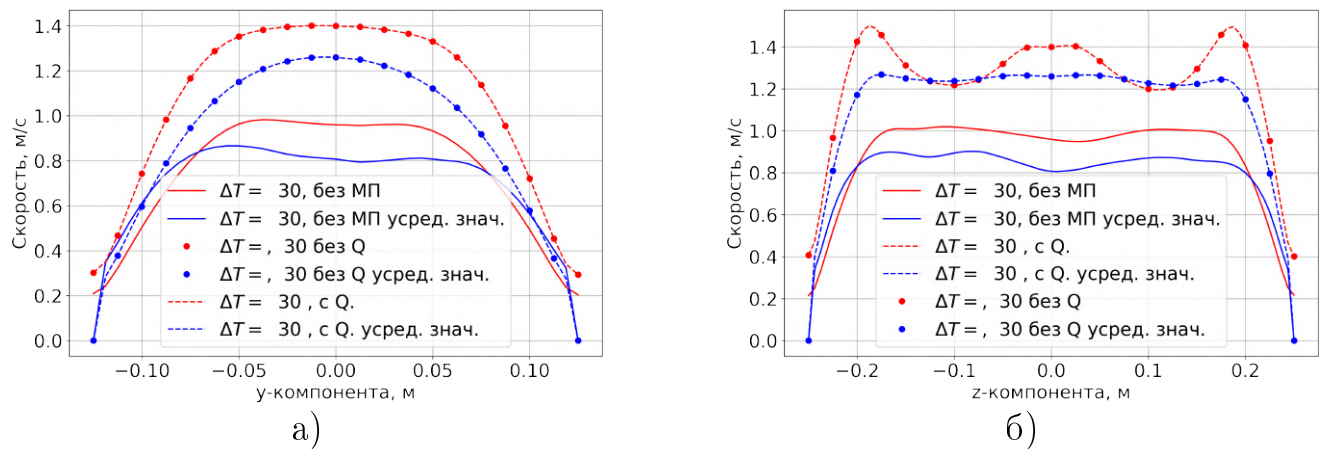


Рис. 4.12 — Относительная скорость между стенками: (а) перпендикулярными и (б) параллельными магнитному полю с различными значениями разницы температур между перпендикулярными стенками.

Модуляция пиковых скоростей в пространстве — это одна из важных характеристик при анализе неустойчивых состояний потока жидкости и поиска граничных турбулентно-ламинарных состояний потока. Пиковые значения скорости вдоль стенок канала имеют сглаженную форму. Важный фактор при использовании мелкомасштабных моделей турбулентности — это правильная настройка сетки. Некорректное разрешение сеточного масштаба вихрей для мелкомасштабных моделей турбулентности приведет к большим значениям

погрешности результатов, чем в случае моделей турбулентности осредненных по Рейнольдсу.

Предварительная оценка влияние термических эффектов на поведение потоков может быть проведена с помощью сопоставления значений температурных и гидродинамических полей между собой. Для этого рассмотрим полученные результаты поля температур в зависимости от разницы их задания на стенках и влияния внешнего источника тепла. На Рисунке 4.13 представлены абсолютные значения температуры между стенками, параллельные и перпендикулярные магнитному полю. Увеличение

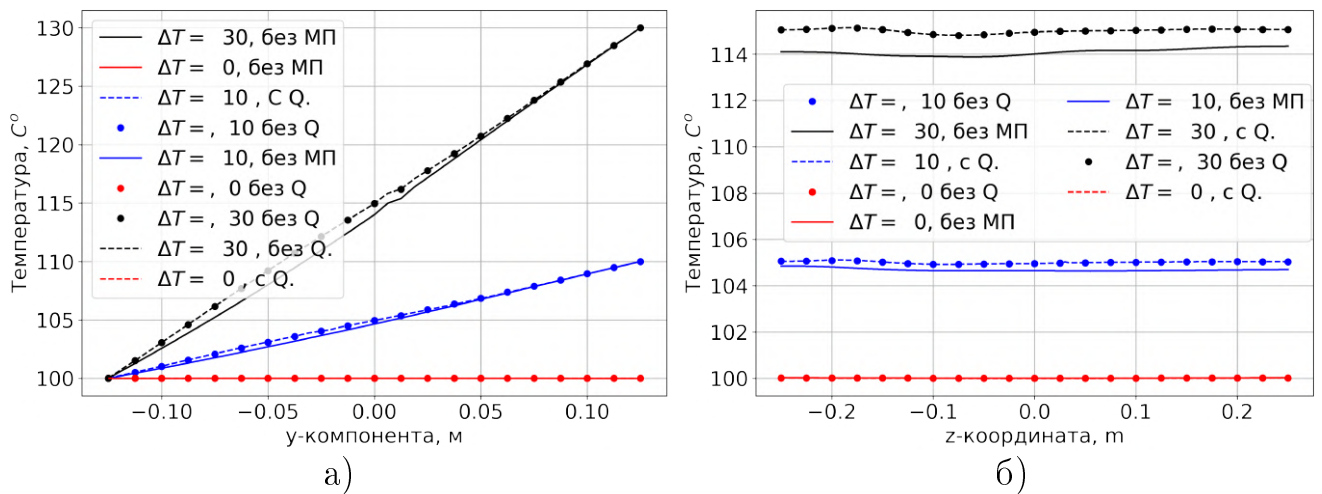


Рис. 4.13 — Абсолютные значения температуры вдоль линии между стенками, а) параллельные и б) перпендикулярные магнитному полю.

значений разницы температур на стенках канала приводит к увеличению отклонения между результатами распределения температур с и без воздействия магнитного поля. Оценку поведения температурного поля в пространстве удобно проводить на основе графиков, построенных в абсолютных величинах (Рисунок 4.13), но они слабо отражают различие между рассматриваемыми случаями. Количественная оценка влияния магнитного поля и джоулева тепла проводилась на основании относительных значений температур на Рисунке 4.14.

Учет в расчетах джоулева тепла несущественно влияет на распределение температурного поля. Разница между результатами с учетом и без учета джоулева тепла в относительных значениях не превышает 0.01 %. Более существенный вклад в распределение температур вносит действие магнитного поля. Действие магнитного поля характеризуется созданием электромагнитных сил, которые действуют только на гидродинамические параметры, а не

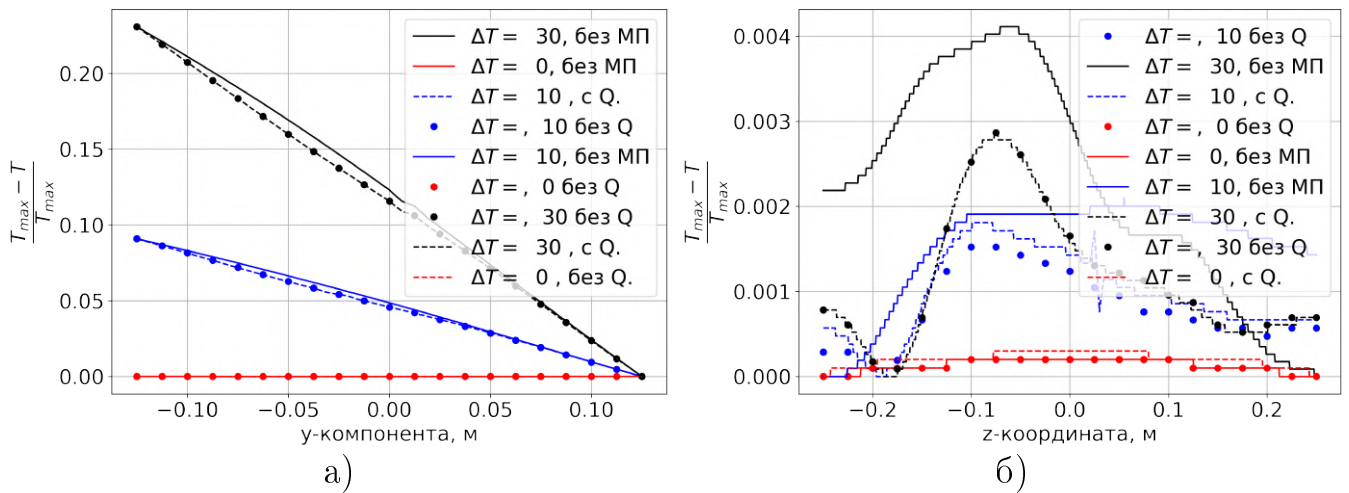


Рис. 4.14 — Относительные значения температуры вдоль линии между стенками, а) параллельные и б) перпендикулярные магнитному полю.

температурные. Тогда резюмируем все выше написанное: воздействие магнитного поля приводит к изменению скорости потока, изменение скорости потока приводит к изменению температурного поля, и результирующее изменение температурного поля влияет на распределение скорости. Также можно заметить, что увеличение разницы температур между стенками приводит к флуктуации функции температуры вдоль ширины канала.

Можно сделать следующие выводы:

1. Джоулев нагрев слабо влияет на температурное поле (менее 0.01 %);
2. Джоулев нагрев влияет на поле скоростей (около 5 %).
3. На учет потока жидкости в большей степени влияет магнитное поле.
4. Магнитное поле за счет электромагнитных усилий приводит к изменению скорости потока. Температурное поле претерпевает изменение из-за возникшего изменения скорости. Как показало численное исследование, даже незначительное изменение температурного поля приводит к изменению потока жидкости.

В последующих работах необходимо исследовать влияние джоулева тепла, используя какой-либо параметр оценки. Необходимо больше внимания уделить формулировке задачи и описанию математической модели, чтобы она отображала протекающие физические процессы в моделируемой системе. Можно использовать для этого, например, число Грасгофа.

#### 4.4 Представление дополнительных возможностей разрабатываемого кода

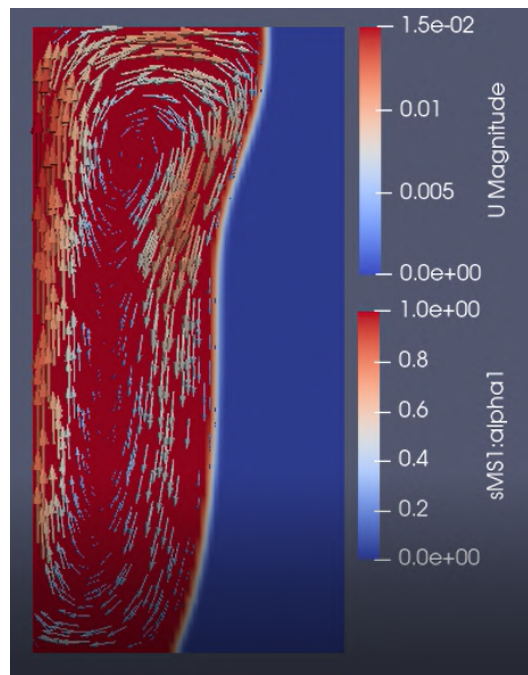
Эта диссертационная работа посвящена исследованию неустойчивых потоков жидкости под воздействием магнитного поля и как сопутствующие физические явления воздействуют на его поведение. Для этих целей разрабатывались, модернизировались и тестировались представленные в работе алгоритмы, процедуры решения задач и численные модели. Дальнейшее развитие данного программного продукта не связано только с исследованиями расчетов потоков жидкости в каналах под воздействием магнитного поля. В этой части работы будут кратко освещены некоторые дополнительные результаты, полученные с помощью этого продукта. Детальное их описание можно найти в работах [198—201].

##### 4.4.1 Плавка металла под воздействием магнитного поля

Разработанный алгоритм расчета МГД задач с учетом термических эффектов может моделировать фазовый переход вещества с дальнейшим учетом изменения свойств от распределения фазы в моделируемом пространстве. На Рисунке 4.15 представлен результат плавки металла за счет разницы температур между вертикальными стенками. Также в разделе 4.2 была представлена верификация модели на примере плавки металла.

##### 4.4.2 Кристаллизация металла под воздействием магнитного поля

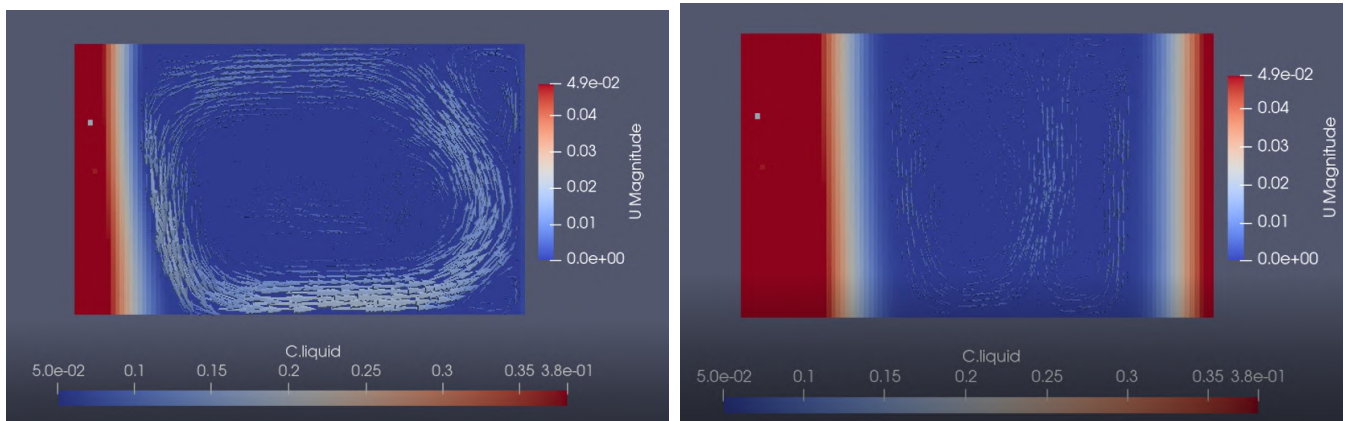
Обратной задачей плавки металла является процесс затвердевания или, другими словами, кристаллизации. Технологический процесс кристаллизации используется на многих металлургических предприятиях и поэтому возможность его моделирования является важной для анализа процессов в таких системах. На Рисунке 4.16 приведены результаты затвердевания металла



а)

Рис. 4.15 — Процесс плавления металла при воздействии внешнего магнитного поля.

и эволюцию потока скорости при этом превращении. Движение металла осуществляется за счет естественной конвекции и электромагнитных усилий.



а)

б)

Рис. 4.16 — Процесс затвердевания металла при естественном охлаждении и воздействии внешнего магнитного поля.

#### 4.4.3 Учет свободной поверхности при электромагнитном перемешивании

В некоторых задачах требуется учитывать изменения формы жидкого металла, например, при моделировании процессов в индукционных тигельных печах или электромагнитном перемешивании. Этот процесс был реализован с помощью рассматриваемого кода в этой работе. Результаты распределения, усилий, скорости и фазового распределения жидкого металла и воздуха в пространстве приведены на Рисунке 4.17.

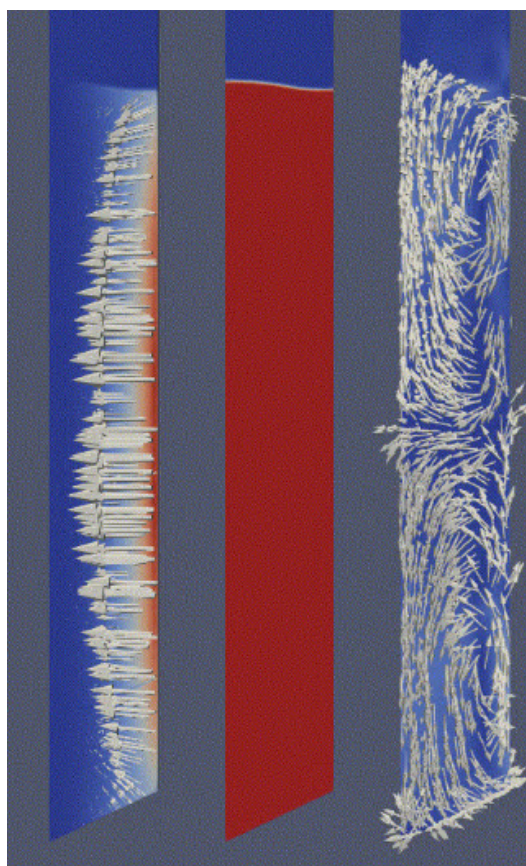


Рис. 4.17 — Моделирование миниска в тигельной печи.

#### 4.4.4 Учет свободной поверхности при кристаллизации жидкого металла

В некоторых инженерных приложениях требуется прогнозирование фазового перехода с учетом формы жидкого металла в пространстве. Можно привести ряд примеров, в которых такая симуляция играет важную роль:

- Плавка во взвешенном состоянии;
- Плавка в тигельных печах с холодным тиглем;
- Отливка металла.

На Рисунке 4.18 представлено фазовое распределение жидкой (красный цвет) и твердой (синий цвет) фазы металла, а также окружающей среды (воздух — белый цвет) при отливке металла под воздействием переменного магнитного поля. Эта процедура расчетов была разработана и модернизирована в Латвийском университете в процессе прохождения летней школы для аспирантов.

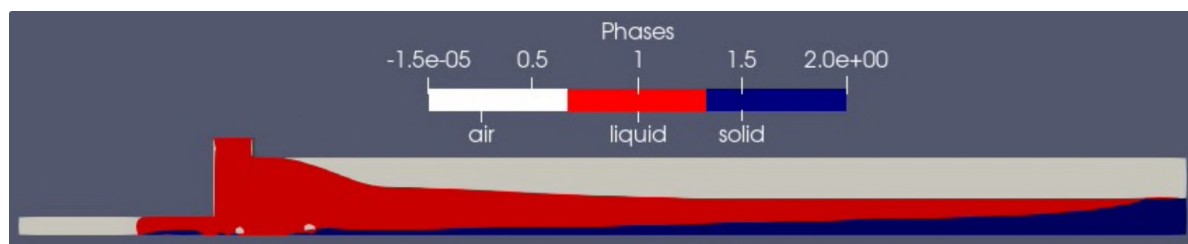


Рис. 4.18 — Моделирование затвердевания жидкого металла под воздействием переменного магнитного поля с учетом свободной поверхности.

#### 4.4.5 Моделирование процесса кристаллизации двухкомпонентных сплавов под воздействием магнитного поля

Учет макросегрегации — это важная часть ряда технологических процессов. Моделирование процессов изменения агрегатного вещества с учетом тепловых и гидродинамических процессов является сильно нелинейной задачей. Учет примесей в сплаве при моделировании процесса кристаллизации повышает степень нелинейности задачи. Эта задача была решена на основании математических моделей в [202] и имплементации ее в рассматриваемые



алгоритмы в данной работе. На Рисунке 4.20 показаны карты концентрации растворенных веществ для различных случаев воздействия. На основании этих результатов оценивались оптимальные соотношения между силами, вызванными естественной и электромагнитной конвекцией в [198; 199]. Обсуждение этих результатов выходит за рамки темы диссертации, поэтому ограничимся обсуждениями возможности симуляции этих процессов и хорошей повторяемостью получаемых результатов с другими работами.

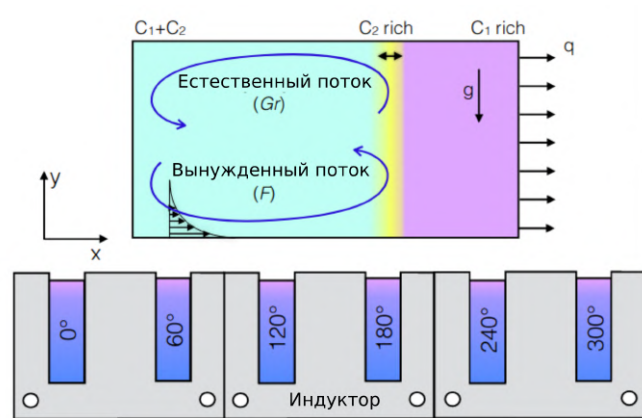


Рис. 4.19 — Схематичное описание задачи кристаллизации под воздействием внешнего бегущего магнитного поля.

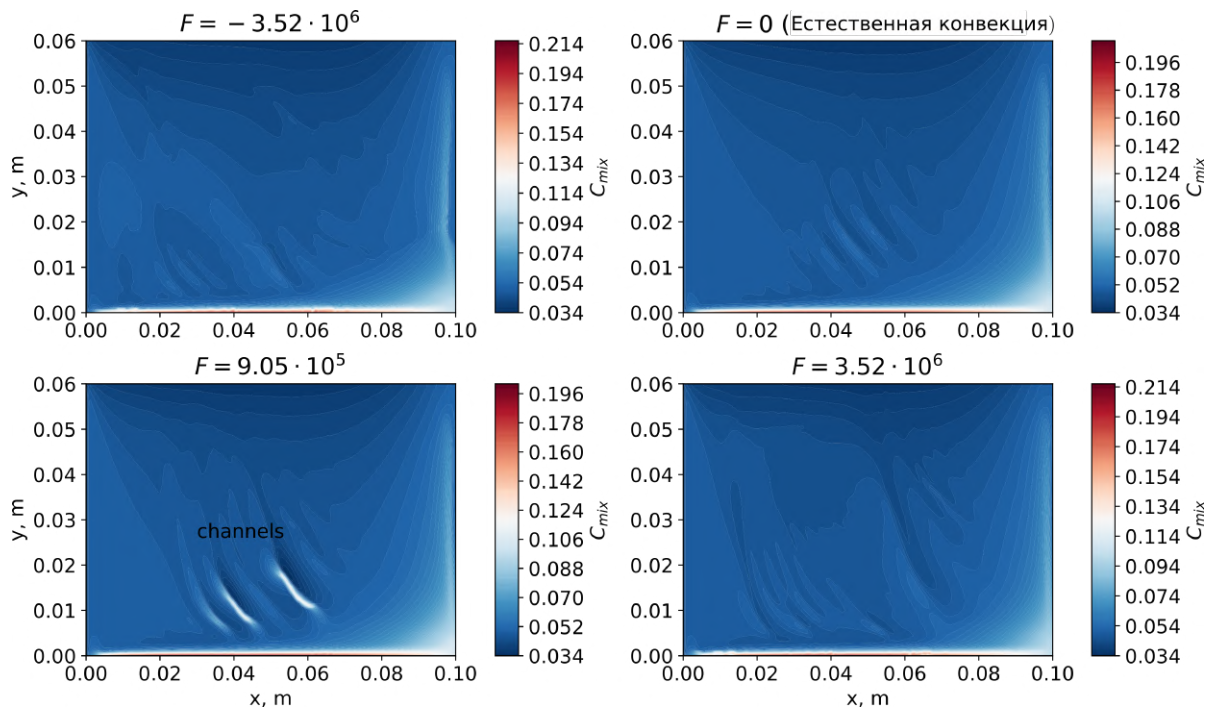


Рис. 4.20 — Карта концентраций для различных значений электромагнитного воздействия.

## 4.5 Выводы по главе

Построена численная модель термогравитационной конвекции в приближении Буссинеска–Обербека для анализа влияния термических эффектов на поведение потока с применением метода крупных вихрей и динамической модели Смагоринского. Для решения этой модели были разработан алгоритм решения «mhdHeatFoam» на основе кода решателя «buoyantPimpleFoam» в программе OpenFoam. Верификация модели произведена на результатах из эталонных задач для проверки алгоритмов расчета. Значение отклонения между результатами не превышает 0.5 К, что составляет менее 0.12 % в относительных величинах. На втором этапе верификации сравнивались результаты эволюций фронта плавления металла. На основании этих результатов можно сделать вывод о корректности расчетов с помощью реализованных алгоритмов для расчета численных моделей.

На основании верифицированной модели для исследования термогравитационной конвекции был проведен анализ влияния джоулевого нагрева на поведение потока при различных температурных градиентах, заданных на стенках, перпендикулярных каналу. Анализ проведен для числа Гартмана 100, Рейнольдса  $10^4$  и тепловые потери энергии через боковые стенки равные  $200 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$ . Разница между результатами с учетом джоулевого нагрева и без не превышает 0.01 % для поля температур и 5 % для поля скоростей. Электромагнитные усилия вносят основной вклад в изменение поведения потока жидкости.

Магнитное поле за счет электромагнитных усилий приводит к изменению скорости потока. Температурное поле претерпевает изменение из-за возникшего изменения скорости. Как показало численное исследование даже незначительное изменение температурного поля приводит к изменению потока жидкости. Это цепочка объясняет взаимосвязь физических явлений и важность решения сильно связанных мультифизических задач.

Усреднение скорости по Рейнольдсу в используемых моделях турбулентности приводит к сглаживанию распределения скоростей и занижению его максимальных значений. Это играет важную роль при определении критериев неустойчивости потока.

В заключении главы показаны возможности масштабирования предлагаемых алгоритмов расчета численных моделей для проведения исследований по кристаллизации однокомпонентных и двухкомпонентных сплавов, плавке металла с учетом и без учета свободной поверхности, а также электромагнитному перемешиванию с учетом мениска.

## Заключение

### Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Разработаны алгоритмы расчета численных моделей для описания течений в каналах под воздействием магнитного поля. Эти алгоритмы объединяют преимущества использования методов конечных элементов для расчета электромагнитных задач, в особенности со специфической областью расчетов и методов конечных объемов для вычисления гидродинамических уравнений.
2. Разработана библиотека «PyRunOF» на языке Python для автоматизированной настройки модели и проведения параметрических исследований. Применение этой библиотеки позволяет исключить множество рутинных операций по настройке численных моделей и сократить время на создание модели.
3. Проведена численная верификация алгоритмов расчета. Исследования показали, что отклонения между результатами, полученными с помощью авторского кода и аналитического решения составляют не более 1 %. Относительные значения отклонений между результатами, полученными с помощью предлагаемых моделей и алгоритмов расчета с результатами, рассчитанными в коммерческих программах и тестовых задачах, не превышают 1 % для большинства случаев, а для ряда задач составляют около 5 %. Отклонения между численными и экспериментальными результатами не превышают 11 % и показывают высокую сходимость в 80 % случаев.
4. Показано, что паразитные эффекты с точки зрения электромеханики могут положительно влиять на электротехнологические процессы, например, подавлять турбулентные течения, ускорять поток жидкости или выравнивать значения скорости потока по сечению канала. Скорость движения образовавшихся вихрей в пространстве пропорциональна синхронной скорости бегущего магнитного поля. Количество вихрей у стенок, параллельных магнитному полю, равняется количеству пар полюсов источника магнитного поля. Скорость потока жидкости увеличивается при учете поперечного краевого эффекта в расчетах. Значения скорости обратных потоков

- практически не зависят от действия краевых эффектов. Краевые эффекты влияют на ускорение потока вдоль стенок перпендикулярных магнитному полю.
5. Построена карта состояний возникновения турбулентных течений на основе чисел Гартмана и магнитного числа Рейнольдса с классификацией по типу турбулентностей. На основе этой карты можно утверждать, что увеличение магнитного числа Рейнольдса приводит к снижению вероятности перехода к турбулентным течениям. Увеличение числа Гартмана приводит к образованию мелкомасштабных глобальных вихревых течений.
  6. Увеличение магнитного числа Рейнольдса приводит к изменению формы кривой расходно–напорной характеристики насоса от линейного характера к S–образному. Нагрузочная характеристика (тип гидродинамической системы) играет важную роль в анализе поведения потока. Точка перехода расходно–напорной характеристики через нулевое значение давления не зависит от значений чисел Гартмана и магнитного числа Рейнольдса, а зависит от типа гидродинамической системы.
  7. Проведен анализ аспектного соотношения ширины и высоты канала на структуру потоков. Показано, что увеличение ширины канала приводит к ослаблению электромагнитных эффектов в областях между активной и краевыми зонами. Показано, что образование вихрей из-за продольного краевого эффекта сильно зависит не только от параметров магнитной системы, но и от гидродинамических. Введен критерий для оценки неустойчивостей в зависимости от ширины и высоты канала.
  8. Разница между результатами с учетом джоулева нагрева и без не превышает 0.01 % для поля температур и 5 % для поля скоростей. Магнитное поле за счет электромагнитных усилий приводит к изменению скорости потока. Температурное поле претерпевает изменение из-за возникшего изменения скорости. Как показало численное исследование даже незначительное изменение температурного поля приводит к изменению потока жидкости. Это цепочка объясняет взаимосвязь физических явлений и важность решения сильно связанных мультифизических задач.

**Перспективами дальнейшей разработки темы являются:**

1. Проведение исследований влияния пространственных и временных гармоник магнитного поля на неустойчивость потока;
2. Уточнение разработанных карт состояний с помощью трехмерных численных моделей и развитие их для более широкого диапазона чисел подобия;
3. Разработка новых критериев устойчивости потока жидкости, способных отражать физический смысл как можно большего количества параметров. Это позволит снизить количество переменных в исследованиях;
4. Исследование влияния термогравитационных явлений и разработка критерии оценки их воздействия на поведения потоков жидкости с учетом особенностей объекта исследования.

В заключение автор выражает особую благодарность и большую признательность научному наставнику и ментору Сараполову Ф.Н. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и написание научных заявок на гранты в рамках которых была написана эта диссертация. Автор благодарен своему научному руководителю директору Уральского энергетического института, доктору технических наук, доценту Сараполову С.Ф. Также автор благодарит Шмакова Е.И. ассистенту Уральского федерального университета кафедры «Электротехника» за помощь в проведении численных экспериментов и совместной работе над разрабатываемым программным продуктом «PyRunFOAM». Также автор благодарит Швыдкого Е.Л. старшего преподавателя Уральского федерального университета кафедры «Электротехника» за помощь в работе над текстом диссертации, тестировании разрабатываемого кода и создании численных моделей для этого кода. Благодарность выражается коллективу из «Institut für Elektroprozess-technik» в Университете имени Лейбница, в котором автор проходил годовую стажировку по теме связанной с диссертацией. Автор благодарен кандидату технических наук Тарасову Ф.Е. доценту Уральского федерального университета кафедры «Электротехника» за помощь в поиске технических партнеров и реализации знаний представленных в проекте на реальных предприятиях и доктору технических наук Фризену В.Э заведующему кафедры «Электротехника» в Уральском федеральном университете за помощь в редактировании работы. Отдельную благодарность автор выражает профессору В. Яковичу

из Латвийского университета за организацию летних школ для аспирантов, на которых автор получил основы владения открытыми пакетами. За помощь в подготовке документов для защиты кандидатской диссертации автор выражает благодарность Хальясмаа А.И. доценту в Уральском федеральном университете на кафедре «Электротехника».

Автор выражает глубокую благодарность родным и близким друзьям за моральную поддержку. А также отдельно благодарит свою жену за понимание и советы по оформлению диссертационной работы.

## Словарь терминов и список сокращений

**Неустойчивость** — способность системы покидать ее первоначальное состояние при внешнем воздействии на нее и не возможность вернуться в исходное состояние.

**Модель турбулентности** — математическое описание физических процессов хауса жидкости.

**Численная модель** — физическая модель, в которой физические уравнения в дифференциальной форму представлены с помощью системы линейных уравнений используя дискретизации расчетной области.

**Кейс** — папка с набором файлов, в которых хранится информация с настройками физической модели.

**Решатель** — процедура выполнения программного кода для выполнения расчетов физической модели.

**Невязка** — величина ошибки (расхождения) приближённого равенства.

**Механизм неустойчивости** — причина перехода потока из ламинарного состояния в турбулентное.

**МКЭ** — метод конечных элементов;

**МГД** — магнитогидродинамический;

**МКО** — метод конечных объемов;



## Список литературы

1. *Geza, V.* Numerical simulation of core-free design of a large electromagnetic pump with double stator / V. Geza, B. Nacke // Magnetohydrodynamics. — 2016. — Vol. 52, no. 3. — P. 417—431.
2. Обмотки электрических машин / В. Зимин [и др.]. — М.-Л. : Госэнергоиздат., 1961. — 476 с.
3. *Иванов-Смоленский, А.* Электромагнитные поля и процессы в электрических машинах и их физическое моделирование / А. Иванов-Смоленский. — М : Энергия, 1969. — 304 с.
4. *Ямамура, С.* Теория линейных асинхронных двигателей / С. Ямамура. — Ленинград : Энергоатомиздат., 1983. — 180 с.
5. *Иванов-Смоленский, А.* Основы теории и расчета устройств с бегущим магнитным полем / А. Иванов-Смоленский. — Рига : Зинатне, 1983. — 278 с.
6. Структурное моделирование электротехнических систем и механизмов / В. Иванушкин [и др.]. — Нижний Тагил : УГТУ-УПИ, 2006. — 400 с.
7. *Ландау, Л. Д.* Теория Поля. Том II. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. — 422 с.
8. *Фейман, Р.* Феймоновские лекции по физике. Т. I (1-2) / Р. Фейман, Л. Р., М. Сэндс. — Москва : АСТ, 2021. — 448 с.
9. *Максвелл, Д.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля / Д. Максвелл. — М. : ГИТТЛ, 1952. — 687 с.
10. Математическое моделирование электротехнических установок в среде Comsol Multiphysics: учебно-методическое пособие / И. А. Смольянов [и др.]. — Екатеринбург : Урал.ун-та, 2021. — 255 с.
11. *Alfven, H.* Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves / H. Alfven // Nature. — 1942. — Vol. 150. — P. 405—406.

12. *Alfven, H.* On the existence of electromagnetic-hydrodynamic waves / H. Alfven // Arkiv of Mat. Astron. of Fys. 29B. — 1943. — Vol. 29B, no. 2. — P. 1—7.
13. *Hartmann, J.* Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field / J. Hartmann // Det Kgl Danske Vid Sels Mat-Fys Medd. — 1937. — Vol. 15, no. 6. — P. 1—27.
14. *Hartmann, J.* Hg-Dynamics II. Experimental investigations on the flow of mercury in a homogeneous magnetic field / J. Hartmann, F. Lazarus // Det Kgl Danske Vid Sels Mat-Fys Medd. — 1937. — Vol. 15, no. 7. — P. 1—45.
15. *Roberts, P.* How MHD Transformed the Theory of Geomagnetism / P. Roberts // Magnetohydrodynamics: Historical Evolution and Trends. — Dordrecht : Springer Netherlands, 2007. — P. 3—26. — URL: [https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4833-3\\_1](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-4833-3_1).
16. *Davidson, P.* An Introduction to Magnetohydrodynamics / P. Davidson. — New York : Cambridge University Press, 2001. — 431 p.
17. *Gorbunov, E.* The effect of a strong magnetic field on the magnetohydrodynamic stability of plasma and the containment of charged particles in the "Tokamak" / E. Gorbunov, K. Razumova // Arkiv f Mat Astron o Fys 29B. — 1963. — Vol. 15, no. 6. — P. 1105—1112.
18. *Goldsteins, L.* Experimental and numerical analysis of behavior of electromagnetic annular linear induction pump : PhD Thesis / L. Goldsteins. — Alpes : Université Grenoble, 2015. — 174 p.
19. *Lopez, E. M.* Study of MHD instabilities in high flowrate induction electromagnetic pumps of annular linear design. Mechanics of materials : PhD thesis / Lopez Elena Martin. — Alpes : Université Grenoble, 2018. — 194 p.
20. *Идиатуллин, А. А.* Разработка индукционного вращателя жидкометаллической загрузки плавильного агрегата и исследование его электромагнитных и гидродинамических характеристик : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / А. А. Идиатуллин. — Екатеринбург, 2010. — 209 с. — URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01004875723>.
21. *Tama, M.* Direct current electromagnetic pump / M. Tama. — 1951.

22. *Jaross, J.* Design and Operation of a 10000gpm DC Electromagnetic Sodium Pump and 250000 Ampere Homopolar Generator / J. Jaross, A. Barnes // Second U.N. International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy. — 1958.
23. *Смольянов, И. А.* Математическое моделирование линейных асинхронных двигателей в приложении к электротехнологии : дис. ... маг. / Смольянов И. А. — Екатеринбург : УрФУ, 07.2018.
24. *Watt, D.* Electromagnetic Interaction Pump / D. Watt. — 1956.
25. *Voss, S.* Tech. Rep. AFWL-TN-84-14, U.S. Air Force Weapons Laboratory : tech. rep. / S. Voss ; U.S. Air Force Weapons Laboratory. — New Mexico, 1984.
26. *Perlow, M.* Thermoelectric Pump / M. Perlow. — 1966.
27. *Rocklin, S.* Thermoelectric Pump / S. Rocklin. — 1964.
28. *Окороков, Н.* Электромагнитное перемешивание металла в дуговых сталеплавильных печах / Н. Окороков. — М. : Metallurgizdat, 1961. — 176 с.
29. *Болотин, К. Е.* Повышение эффективности индукционных магнитогидродинамических машин металлургического назначения : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / К. Е. Болотин. — Екатеринбург, 2018. — 110 с.
30. *Горемыкин, В.* Численное и физическое моделирование электромагнитного лотка для транспортировки расплавов алюминия : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / В. Горемыкин. — Екатеринбург, 2015. — 177 с.
31. *Smolentsev, S.* Characterization of key magnetohydrodynamic phenomena in PbLi flows for the US DCLL blanket. / S. Smolentsev, R. Moreau, M. Abdou // Fusion Engineering and Design. — 2008. — Vol. 83, no. 5. — P. 771—783.
32. Magnetohydrodynamic instability in annular linear induction pump Part I. Experiment and numerical analysis / H. Araseki [et al.] // Nuclear Engineering and Design. — 2004. — Vol. 227, no. 1. — P. 29—50.
33. Magnetohydrodynamic instability in annular linear induction pump Part II. Suppression of instability by phase shift / H. Araseki [et al.] // Nuclear Engineering and Design. — 2006. — Vol. 236, no. 9. — P. 965—974.

34. *Kwak, J.* Design and preliminary test of an annular linear induction electromagnetic pump for a sodium-cooled fast reactor thermal hydraulic experiment / J. Kwak, H. Kim // Journal of Nuclear Science and Technology. — 2017. — Vol. 54, no. 12. — P. 1292—1299.
35. *Kim, H.* MHD design analysis of an annular linear induction electromagnetic pump for SFR thermal hydraulic experimental loop / H. Kim, J. Kwak // Annals of Nuclear Energy. — 2016. — Vol. 92. — P. 127—135.
36. *Baker, R. S.* Handbook of Electromagnetic Pump Technology / R. S. Baker, M. J. Tessier. — New York : Elsevier, 1987. — 324 p.
37. *Cukierski, K.* Flow control with local electromagnetic braking in continuous casting of steel slabs / K. Cukierski, B. Thomas // Metall. Mater. Trans. B. — 2008. — Vol. 3, no. 1. — P. 94—107.
38. *Первухин, М.* Современные электротехнологии для производства высококачественных алюминиевых сплавов: монография / М. Первухин, В. Н. Тимофеев. — Красноярск : Сиб. федер. ун-т., 2015. — С. 156.
39. *Верте, Л. А.* Магнитная гидродинамика в металлургии / Л. А. Верте. — М. : Металлургия, 1975. — 288 с.
40. *Верте, Л. А.* Электромагнитная разливка и обработка жидкого металла / Л. А. Верте. — М. : Металлургия, 1967. — С. 288.
41. *Хацаюк, М. Ю.* Теория и моделирование магнитогидродинамических процессов в электротехнологических комплексах металлургического назначения : дис. ... д-ра тех. наук : 05.09.10 / М. Ю. Хацаюк. — Красноярск, 2019. — 338 с. — URL: [https://etu.ru/assets/files/nauka/dissertacii/2019/hacayuk/avtoreferat\\_hacayuk-myu.pdf](https://etu.ru/assets/files/nauka/dissertacii/2019/hacayuk/avtoreferat_hacayuk-myu.pdf).
42. *W., C. O.* Heat transfer enhancement using rectangular vortex promotes in confined quasi-two-dimensional magnetohydrodynamic flows / C. O. W., H. W. K., S. G. J. // Heat Mass Transfer. — 2016. — Vol. 93, no. 88. — P. 1186—1199.
43. *KUMAMARU, H.* Three-Dimensional Numerical Calculations on Liquid-Metal Magneto-hydrodynamic Flow through Circular Pipe in Magnetic-Field Inlet-Region / H. KUMAMARU, K. SHIMODA, K. ИТОИ // Journal of Nuclear Science and Technology. — 2007. — Т. 44, № 5. — С. 714—722.

44. Preliminary MHD pressure drop analysis for the prototypical WCLL TBM with RELAP5/MOD3.3 / L. Melchiorri [и др.] // Fusion Engineering and Design. — 2022. — Т. 176. — С. 113048. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920379622000485>.
45. The DEMO Water-Cooled Lead–Lithium Breeding Blanket: Design Status at the End of the Pre-Conceptual Design Phase / P. Arena [и др.] // Applied Sciences. — 2021. — Т. 11, № 24. — URL: <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/24/11592>.
46. MHD RandD Activities for Liquid Metal Blankets / C. Mistrangelo [и др.] // Energies. — 2021. — Т. 14, № 20.
47. *Hillier, A.* Ideal MHD Instabilities, with a Focus on the Rayleigh–Taylor and Kelvin–Helmholtz Instabilities. / A. Hillier // Topics in Magnetohydrodynamic Topology, Reconnection and Stability Theory. CISM International Centre for Mechanical Sciences. — 2020. — Vol. 591.
48. *Joncquieres, V.* A fluid formalism for low-temperature plasma flows dedicated to space propulsion in an unstructured high performance computing solver. / V. Joncquieres, O. Vermorel, C. B. // Phys.: Conf. Ser. — 2020.
49. *Thess, A.* Lorentz Force Velocimetry / A. Thess, E. V. Voyakov, Y. Kolesnikov // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 96.
50. Theory of the Lorentz force flowmeter / T. André [et al.] // New Journal of Physics. — 2006. — Vol. 9, no. 8.
51. *Kolesnichenko, I.* The study of turbulence in MHD flow generated by rotating and traveling magnetic fields / I. Kolesnichenko, A. Pavlinov, E. e. a. Golbraikh // Exp Fluids. — 2020. — Vol. 56, no. 88.
52. *Фрик, П.* Турбулентность: модели и подходы. Курс лекций. Часть I / П. Фрик. — Пермь : Перм. гос. техн. ун-т., 1998. — 108 с.
53. *Holzmann, T.* Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM(R) / T. Holzmann. — Leoben : Holzmann CFD, 2016. — 159 p. — URL: [www.holzmann-cfd.de](http://www.holzmann-cfd.de).
54. *Брановер, Г. Г.* Магнитная гидродинамика несжимаемых сред / Г. Г. Брановер, А. Б. Цинобер ; под ред. В. Б. Левин. — М. : Наука, 1970. — С. 380.

55. *Баранов, Г. А.* Расчет и проектирование индукционных МГД-машин с жидкометаллическим рабочим телом / Г. А. Баранов, В. А. Глухих, И. Р. Кириллов. — М. : Атомиздат, 1978. — С. 248.
56. *Цинобер, А. Б.* Вопросы влияния магнитного поля на обтекание тел / А. Б. Цинобер // Вопросы магнитной гидродинамики / под ред. И. М. Кирко. — АН Латвии Институт физики. Латвия : Академия наук Латвийского ССР, 07.1963. — С. 49—58.
57. *Тельный, С.* Электрическая печь с вращающейся вольтовой дугой. / С. Тельный. — М. : Инженерный работник, 1924.
58. *Свенчанский, А.* Электрические промышленные печи. / А. Свенчанский. — М. : Госэнергоиздат, 1948.
59. *Dreyfus, L.* Induktiv omroring i bjusbagsugnar / L. Dreyfus, F. Nilson. — Jerncontorets Annaler A.R.G., 1949. — P.133.
60. *Бычков, С.* Исследование электромагнитного перемешивателя цветных металлов и сплавов в процессе кристаллизации : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / С. Бычков. — Екатеринбург, 2011. — 218 с.
61. *Фаткуллин, С.* Формирование энергоэффективных режимов работы индукционного плавильного агрегата : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / С. Фаткуллин. — Екатеринбург, 2011. — 145 с.
62. *Сарапулов, С. Ф.* Индукционные магнитогидродинамические машины технологического назначения для электромеханического воздействия на металлические расплавы : дис. ... д-ра тех. наук : 05.09.01 / С. Ф. Сарапулов. — Екатеринбург, 2011. — 355 с. — URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01005091119>.
63. *Хацаюк, М. Ю.* Индукционная установка с МГД воздействием на высоколегированные алюминиевые сплавы в процессе их приготовления и разлива : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / М. Ю. Хацаюк. — Екатеринбург, 2013. — 232 с.
64. *Фризен, В. Э.* Исследование электромеханических процессов в индукционной магнитогидродинамической установке : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.10 / В. Э. Фризен. — Екатеринбург, 2003. — 232 с.

65. *Авдулов, А. А.* Электромагнитный модификатор слитка в роторной литейной машине : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.03 / А. А. Авдулов. — Красноярск, 2015. — 162 с.
66. *Павлинов, А. М.* Электромагнитный модификатор слитка в роторной литейной машине : дис. ... канд. физ. мат. наук : 01.02.05 / А. М. Павлинов. — Пермь, 2016. — 113 с.
67. *Scepanskis, M.* The modelling of the behaviour of solid inclusions in the EM induced : дис. ... канд. / Scepanskis M. — Riga : University of Latvia, 2014. — 143 с. — URL: <https://dspace.lu.lv/dspace/handle/7/5209>.
68. *Umbrasko, A.* Heat and mass transfer in electromagnetically driven recirculated turbulent flows : дис. ... канд. / Umbrasko A. — Riga : University of Latvia, 2011. — 113 с. — URL: <https://dspace.lu.lv/dspace/handle/7/5076>.
69. *Spitans, S.* Investigation of turbulent free surface flow of liquid metal in electromagnetic field : дис. ... канд. / Spitans S. — Riga : University of Latvia, 2014. — URL: <https://dspace.lu.lv/dspace/handle/7/31308>.
70. *Курц, У.* Фундаментальные основы затвердевания / У. Курц, Д. Фишер. — М.-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2013. — С. 300.
71. *Hachani, L.* Experimental study of the solidification of Sn-10wt.%Pb alloy under different forced convection in benchmark experiment / L. Hachani, K. Zaidat, Y. Fautrelle // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2015. — Vol. 85. — P. 438—454.
72. Grain size control in Al-Si alloys by grain refinement and electromagnetic stirring / V. Metan [et al.] // Journal of Alloys and Compounds. — 2009. — Vol. 487, no. 1. — P. 163—172.
73. Electromagnetic melt flow control during solidification of metallic alloys / S. Eckert [et al.] // The European Physical Journal Special Topics. — 2013. — Vol. 220, no. 1. — P. 123—137.
74. *Muktepavela, F.* Experimental studies of the strong magnetic field action on the corrosion of RAFM steels in Pb17Li melt flows / F. Muktepavela // RAMIR / под ред. И. М. Кирко. — Paris, 2008.

75. Scale-Adaptive Simulation of Transient Two-Phase Flow in Continuous-Casting Mold / Z. Liu [и др.] // Metallurgical and Materials Transactions B: Process Metallurgy and Materials Processing Science. — 2019. — Т. 50, № 1. — С. 543—554. — URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85055968437&doi=10.1007%2fs11663-018-1443-0&partnerID=40&md5=2392d873b962f740265458e2049e6a64>.
76. Optimizing the flow conditions in the thin-slab casting mold using electromagnetic brake / A. Vakhrushev [и др.] //. — 2019. — С. 615—619. — URL: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-85081987606&doi=10.33313%2f503%2f064&partnerID=40&md5=b0c57b7f16af14658335a51e2c53a5acf>.
77. *Аинтов, Т. Н.* МГД-течения в сильных магнитных полях / Т. Н. Аинтов, А. И. Калютник. — Ленинград : Издательство Ленинградского университета, 1988. — 180 с.
78. Import Key Process Simulation in the Field of Steel Metallurgy / A. Ludwig [et al.] // Berg Huettenmaenn Monatsh. — 2022. — Vol. 167, no. 1. — P. 2—9.
79. Review on Modeling and Simulation of Electroslag Remelting / A. Kharicha [et al.] // Steel Research International. — 2017. — Vol. 89, no. 1. — P. 1—20.
80. *Швыдкий, Е. Л.* Исследование гидродинамических процессов в жидкометаллическом вторичном элементе индукционных МГД машин : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / Е. Л. Швыдкий. — Екатеринбург, 2020. — 181 с.
81. *Wang, J.* Etude de leffet thermoelectrique magnituque en solidification directionnelle dalliges Al-Cu : PhD thesis / Wang Jiang. — Grenoble : University de Grenoble, 2013. — URL: <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00965543>.
82. Contactless Inductive Flow Tomography: Brief History and Recent Developments in Its Application to Continuous Casting / M. Ratajczak [et al.] // Journal of Sensors. — 2014. — P. 1—9.
83. *Eckert, S.* Velocity Measurement Techniques for Liquid Metal Flows / S. Eckert, A. Cramer, G. Gerbeth // Magnetohydrodynamics: Historical evolution and trends, Springer. — 2007. — P. 275—294.



84. *Гущин, Г. И.* Измерение профиля скоростей электромагнитным методом / Г. И. Гущин, Н. И. Логинов, В. И. Субботин // Вопросы магнитной гидродинамики / под ред. И. М. Кирко. — АН Латвии Институт физики. Латвия : Академия наук Латвийского ССР, 07.1963. — С. 299—307.
85. *Araseki, H.* Sodium flow rate measurement method of annular linear induction pumps / H. Araseki, I. R. Kirillov, G. V. Preslitsky // Nuclear Engineering and Design. — 2012. — Т. 243. — С. 111—119.
86. *Shvydkiy, E.* Liquid Metal Flow Under Traveling Magnetic Field-Solidification Simulation and Pulsating Flow Analysis / E. Shvydkiy, E. Baake, D. Koppen // Metals. — 2020. — Vol. 10, no. 4.
87. *Eckert, S.* Experimental study of the rate of metal mixing in an open- hearth furnace / S. Eckert, A. Cramer, G. Gerbeth // Journal ISIJ. — 1964. — Vol. 202. — P. 505—508.
88. Dynamic mode decomposition of magnetohydrodynamic bubble chain flow in a rectangular vessel / M. Klevs [et al.] // Physics of Fluids. — 2021. — Vol. 202, no. 8.
89. Resolving Gas Bubbles Ascending in Liquid Metal from Low-SNR Neutron Radiography Images / M. Birjukovs [и др.] // Applied Sciences. — 2021. — Т. 11, № 20.
90. *Birjukovs, M.* Particle tracking velocimetry in liquid gallium flow about a cylindrical obstacle / M. Birjukovs, et. al. — 09/2021. — <https://arxiv.org/abs/2109.10699>.
91. Efficient Melt Stirring Using Pulse Sequences of a Rotating Magnetic Field: Part I, Flow Field in a Liquid Metal Column, Metallurgical / S. Eckert [et al.] // Metallurgical and Materials Transactions B. — 2007. — Vol. 38, no. 7. — P. 977—988.
92. Experimental Modelling using Low Melting Point Metallic Melts - Relevance for Metallurgical Engineering / S. Eckert [et al.] // Steel Research International. — 2007. — Vol. 78, no. 5. — P. 419—425.
93. *Tran, N.* Numerical simulation of Lorentz Force Velocimetry in two-phase magnetohydrodynamic flow : PhD thesis / Tran Ninh. — Ilmenau, 2020. — URL: [https://www.db-thueringen.de/receive/dbt\\_mods\\_00045597](https://www.db-thueringen.de/receive/dbt_mods_00045597) ; Dissertation, Technische Universität Ilmenau, 2020.

94. *Kolesnikov, Y.* Lorentz Force Flowmeter for Liquid Aluminum: Laboratory Experiments and Plant Tests / Y. Kolesnikov, C. Karcher, A. Thess // Metall Mater Trans B. — 2011. — Vol. 42. — P. 441—450.
95. *Andreev, O.* Lorentz Force Flowmeter for Liquid Aluminum: Laboratory Experiments and Plant Tests / O. Andreev, Y. Kolesnikov, A. Thess // Phys. Fluids. — 2006. — Vol. 18.
96. *Heinicke, C.* Interaction of a small permanent magnet with a liquid metal duct flow / C. Heinicke, S. Tympel, G. e. a. Pulugindla // Journal of Applied Physics. — 2012. — Vol. 112, no. 12.
97. *Votakov, E.* On the analogy between streamlined magnetic and solid obstacles / E. Votakov, S. Kassinos // Phys. Fluids. — 2009. — Vol. 21, no. 9.
98. Experimental and theoretical study of the dynamics of wakes generated by magnetic obstacles / D. Dominguez [et al.] // Magnetohydrodynamics. — 2015. — Vol. 51, no. 2. — P. 215—225.
99. *Votyakov, E. V.* Core of the magnetic obstacle / E. V. Votyakov, S. C. Kassinos // Journal of Turbulence. — 2010. — T. 11.
100. *Tympel, S.* Laminar and transitional liquid metal duct flow near a magnetic point dipole / S. Tympel, T. Boeck, J. Schumacher // Journal of Fluid Mechanics. — 2013. — T. 735. — С. 553—586. — URL: <http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2013.491>.
101. *Везе, А. К.* Исследование возможности перекачивания жидких металлов помощью цилиндрических насосов без ферромагнитного сердечника / А. К. Везе, А. Э. Микельсон // Вопросы магнитной гидродинамики / под ред. И. М. Кирко. — АН Латвии Институт физики. Латвия : Академия наук Латвийского ССР, 07.1963. — С. 171—178.
102. *Тарасов, Ф. Е.* Индукционный МГД-насос с одноплоскостной концентрической обмоткой индуктора для транспортировки магния : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / Ф. Е. Тарасов. — Екатеринбург, 2015. — 148 с.

103. Опыт конструкторской разработки электромагнитных индукционных насосов в институте физике АН Латвийской ССР / А. Бушман [и др.] // Вопросы магнитной гидродинамики / под ред. И. М. Кирко. — АН Латвии Институт физики. Латвия : Академия наук Латвийского ССР, 07.1963. — С. 137—152.
104. *Полищук, В. П.* Магнитодинамические насосы для жидких металлов / В. П. Полищук, М. Р. Цин, Р. К. и. д. Горн. — Киев : АН УССР. Ин-т проблем литья., 1989. — 256 с.
105. К выбору конструкционных элементов многозонных магнитогидродинамических насосов / В. П. Полищук [и др.] // МГД в металлургии и литейном производстве / под ред. Л. Бойко. — Институт проблем литья АН УССР. Киев : Киевский дом научно-технической пропаганды, 1972. — С. 63—74.
106. Электромагнитные насосы для транспорта жидких металлов: Сборник научно-технических статей / И. Ю. Иыерют [и др.]. — М.-Л. : Энергия, 1965. — 176 с.
107. Buoyancy effects in vertical rectangular duct with coplanar magnetic field and single sided heat load / Kirill [и др.] // Fusion Engineering and Design. — 2016. — Т. 104. — С. 1—8.
108. *Sarapulov, F.* Numerical simulation of double side linear induction pump for liquid magnesium / F. Sarapulov, I. Smolyanov, [et al.] // Magnetohydrodynamics. — 2017. — Vol. 53, no. 4. — P. 603—609.
109. *Калнинь, Т.* Явнополюсные МГД-насосы / Т. Калнинь. — Рига : Зинатне, 1969. — 171 с.
110. *Охременко, Н. М.* Влияние бегущего магнитного поля на гидравлическое сопротивление турбулентному течению проводящей жидкости в каналах / Н. М. Охременко // Вопросы магнитной гидродинамики / под ред. И. М. Кирко. — АН Латвии Институт физики. Латвия : Академия наук Латвийского ССР, 07.1963. — С. 115—128.
111. *Smolyanov, I. A.* Optimal design of MHD pump / I. A. Smolyanov, P. Karban // 12th International Conference ELEKTRO 2018, 2018 ELEKTRO Conference Proceedings. — 2018. — P. 1—4.

112. Shape optimization of laboratory induction pump / I. A. Smolyanov [et al.] // Proceedings of the 2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, ElConRus 2018. 2018—Janua. — 2018. — P. 793—798.
113. InductionMHD-pump with flat coils / F. Tarasov [et al.] // Acta Technica CSAV. — 2015. — Vol. 60, no. 1. — P. 71—79.
114. Optimal frequency determination of induction MHD pump power supply / S. Bychkov [et al.] // Acta Technica CSAV. — 2015. — Vol. 60, no. 1. — P. 81—88.
115. *Gissinger, C.* Instability in electromagnetically driven flows. I / C. Gissinger, R. Imazio P., S. Fauve // Fluids. — 2016. — Т. 28.
116. *Gissinger, C.* Instability in electromagnetically driven flows. II / C. Gissinger, P. R. Imazio, S. Fauve // Fluids. — 2016. — Т. 28.
117. *Мищенко, В. Д.* Однофазный МГД-дозатор жидких алюминиевых сплавов / В. Д. Мищенко, А. Э. Микельсон, А. А. Алехин // МГД в металлургии и литейном производстве / под ред. Л. Бойко. — Институт полблем литья АН УССР. Киев : Киевский дом научно-технической пропаганды, 1972. — С. 75—78.
118. *Тайсмум, Х. А.* Автоматизированный МГД-привод / Х. А. Тайсмум, Ю. Я. Лаугис. — М. : Энергия, 1980. — 160 с.
119. *Hillier, A.* Ideal MHD Instabilities, with a Focus on the Rayleigh–Taylor and Kelvin–Helmholtz Instabilities / A. Hillier // Topics in Magnetohydrodynamic Topology, Reconnection and Stability Theory / под ред. D. MacTaggart, A. Hillier. — Cham : Springer International Publishing, 2020. — С. 1—36.
120. *Tucs, A.* Magnetohydrodynamic stability of large scale liquid metal batteries / A. Tucs, V. Bojarevics, K. Pericleous // Journal of Fluid Mechanics. — 2018. — Т. 852. — С. 453—483.
121. *Davidson, P. A.* An energy criterion for the linear stability of conservative flows / P. A. Davidson // Journal of Fluid Mechanics. — 2000. — Т. 402. — С. 329—348.
122. *Baines, P. G.* On the mechanism of shear flow instabilities / P. G. Baines, H. Mitsudera // Journal of Fluid Mechanics. — 1994. — Т. 276. — С. 327—342.

123. Расчеты идеальной МГД устойчивости плазмы в ловушке-галатее «Тримикс» / С. Ю. Медведев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2018. — № 253.
124. *Dou, H.-S.* Mechanism of flow instability and transition to turbulence / H.-S. Dou // International Journal of Non-Linear Mechanics. — 2006. — Т. 41, № 4. — С. 512—517.
125. *Кирко, И. М.* Магнитная гидродинамика. Современное виденье проблем / И. М. Кирко, Г. Е. Кирко. — М.-Ижевск : «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский Институт компьютерных исследований, 2009. — С. 632.
126. *Попов, Г. А.* О различном подходе к определению магнитного числа Рейнольдса и ограниченности одномерного приближения по Rem при течении проводящего газа / Г. А. Попов, В. Б. Тихонов // Вопросы магнитной гидродинамики / под ред. И. М. Кирко. — Академия наук Латвийской ССР. Рига : Академия наук Латвийского ССР, 07.1963. — С. 5—8.
127. *Реслер, Е. Р.* No Title / Е. Р. Реслер, У. Р. Срис // Механика. — 1958. — Т. 6, № 52.
128. *Goldsteins, L.* Stalling instability of annular linear induction pumps / L. Goldsteins, L. Buligins, Y. Fautrelle // Magnetohydrodynamics. — 2018. — Т. 54, № 4. — С. 453—483.
129. *Goldsteins, L.* Growth rate of azimuthal perturbation modes in an ideal annular induction pump / L. Goldsteins, L. Buligins, Y. Fautrelle // Electromagnetic Processing of Materials 2021. — 2021.
130. Laminar-Turbulent Transition in Magnetohydrodynamic Duct, Pipe, and Channel Flows / O. Zikanov [и др.] // Applied Mechanics Reviews. — 2014. — Апр. — Т. 66, № 3. — eprint: [https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanicsreviews/article-pdf/66/3/030802/6074018/amr\\\_066\\\_03\\\_030802.pdf](https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanicsreviews/article-pdf/66/3/030802/6074018/amr\_066\_03\_030802.pdf). — URL: <https://doi.org/10.1115/1.4027198> ; 030802.
131. *Hartmann, J.* Hg-dynamics I: theory of the Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field / J. Hartmann // Mat. Fys. Medd. — 1937. — Т. 15, № 6. — С. 1—28.

132. *Shercliff, J. A.* Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields / J. A. Shercliff // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1953. — Т. 49, № 1. — С. 136—144.
133. *Chang, C.* Duct flow in magnetohydrodynamics / C. Chang, T. Lundgren // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP. — 1961. — Vol. 12, no. 2. — P. 100—114.
134. *Лиелпетер, Я. Я.* Магнитная гидродинамика несжимаемых сред / Я. Я. Лиелпетер. — Рига : Зинатне, 1969. — 247 с.
135. *Votyakov Evgeny, V.* Numerical Study of Liquid Metal Flow in a Rectangular Duct under the Influence of a Heterogeneous Magnetic Field / V. Votyakov Evgeny, A. Zienicke Egbert // Fluid Dynamics & Materials Processing. — 2007. — Т. 3, № 2. — С. 97—114.
136. Optimal growth and transition to turbulence in channel flow with spanwise magnetic field / D. KRASNOV [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2008. — Т. 596. — С. 73—101.
137. *Chaudhary, R.* Direct numerical simulations of magnetic field effects on turbulent flow in a square duct / R. Chaudhary, S. P. Vanka, B. G. Thomas // Physics of Fluids. — 2010. — Т. 22, № 7. — С. 075102.
138. Optimal linear growth in magnetohydrodynamic duct flow / D. KRASNOV [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2010. — Т. 653. — С. 273—299.
139. Numerical simulations of magnetohydrodynamic flows driven by a moving permanent magnet / S. Prinz [и др.] // Phys. Rev. Fluids. — 2016. — Т. 1, вып. 4. — С. 043601.
140. *Pothérat, A.* Why, how and when MHD turbulence at low  $Rm$  becomes three-dimensional / A. Pothérat, R. Klein // Journal of Fluid Mechanics. — 2014. — Vol. 761. — P. 168—205.
141. From three-dimensional to quasi-two-dimensional: transient growth in magnetohydrodynamic duct flows / O. G. W. Cassells [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2019. — Т. 861. — С. 382—406.
142. *Krasnov, D.* Numerical simulation of electrically conducting jet flow in a straight duct under longitudinal homogeneous magnetic field / D. Krasnov, Y. Kolesnikov, T. Boeck // Physics of Fluids. — 2019. — Т. 31, № 1. — С. 014108.

143. Optimal linear growth in magnetohydrodynamic duct flow / D. Krasnov [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2010. — Т. 653. — С. 273—299.
144. Numerical study of the instability of the Hartmann layer / D. S. Krasnov [и др.] // Journal of Fluid Mechanics. — 2004. — Т. 504. — С. 183—211.
145. Шапиро, В. Е. К вопросу об устойчивости конфигурации проводящей жидкости в переменном магнитном поле / В. Е. Шапиро // Движение проводящих сред в сильных магнитных полях / под ред. И. М. Кирко. — УНЦ АН СССР. Свердловск, 1980. — С. 35—45.
146. Reddy, K. S. Instabilities of MHD flows driven by traveling magnetic fields / K. S. Reddy, S. Fauve, C. Gissinger // Phys. Rev. Fluids. — 2018. — Т. 3, вып. 6. — С. 063703.
147. Magnetic field advection in a rotating magnetic field driven flow induced by a non-ideal inductor / A. Azulay [и др.] // Physics of Fluids. — 2018. — Т. 30, № 7. — С. 075104.
148. Kim, C. Numerical analysis of a magnetohydrodynamic duct flow with flow channel insert under a non-uniform magnetic field / C. Kim // J Hydrodyn. — 2018. — Т. 30. — С. 1134—1142.
149. Numerical and experimental modelling of various mhd induction pumps / Y. Khripchenko S. [и др.] // Magnetohydrodynamics. — 2010. — Т. 46, № 1. — С. 85—97.
150. The MHD traveling magnetic field pump for liquid magnesium / S. Denisov [и др.] // Magnetohydrodynamics. — 2013. — Т. 49, № 1. — С. 223—229.
151. Smolianov, I. Numerical analysis of liquid flows exposed to travelling magnetic field. 1. idealized numerical experiment / I. Smolianov, E. Shmakov, J. Vencels // Magnetohydrodynamics. — 2021. — Vol. 57, no. 1. — P. 105—119.
152. Smolianov, I. Numerical analysis of liquid flows exposed to travelling magnetic field. 2. mhd instabilities due to magnetic end effects / I. Smolianov, E. Shmakov, J. Vencels // Magnetohydrodynamics. — 2021. — Vol. 57, no. 1. — P. 121—132.

153. *Sarapulov, F. N.* Mathematical Modeling of a Linear-Induction Motor Based on Detailed Equivalent Circuits / F. N. Sarapulov, A. Smolyanov I., [et al.] // Russian Electrical Engineering. — 2018. — Vol. 89, no. 4. — P. 270—274.
154. *Smolyanov, I.* Calculation of linear induction motor features by detailed equivalent circuit method taking into account non-linear electromagnetic and thermal properties / I. Smolyanov, F. Sarapulov, F. Tarasov // Computers and Mathematics with Applications. — 2019. — Vol. 78, no. 9. — P. 3187—3199.
155. *Сарапулов, Ф. Н.* Исследование тягового линейного асинхронного двигателя конвейрного поезда / Ф. Н. Сарапулов, И. А. Смольянов // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2019. — Т. 62, № 1. — С. 39—43.
156. *Смольянов, И. А.* Магнитные детализированные схемы замещения для расчета электромагнитных полей линейного асинхронного двигателя / И. А. Смольянов, Ф. Н. Сарапулов // Вопросы электротехнологии. — 2018. — Т. 20, № 3. — С. 46—55.
157. *Sarapulov, F.* Study of the linear induction motor with bimetallic secondary element / F. Sarapulov, I. A. Smolyanov, F. E. Tarasov // ACTA TECHNICA CSAV. — 2018. — Vol. 63, no. 2. — P. 205—220.
158. Double-supply-frequency pressure pulsation in annular linear induction pump: Part I: Measurement and numerical analysis / H. Araseki [и др.] // Nuclear Engineering and Design. — 2000. — Т. 195, № 1. — С. 85—100.
159. Double-supply-frequency pressure pulsation in annular linear induction pump, part II: reduction of pulsation by linear winding grading at both stator ends / H. Araseki [и др.] // Nuclear Engineering and Design. — 2000. — Т. 200, № 3. — С. 397—406.
160. *Кирко, Г. Е.* Явление неустойчивости жидкометаллического проводника при взаимодействии с рассеянным магнитным полем / Г. Е. Кирко // Движение проводящих сред в сильных магнитных полях / под ред. И. М. Кирко. — УНЦ АН СССР. Свердловск, 1980. — С. 35—45.



161. Impact of Lorentz force on the pulsatile flow of a non-Newtonian Casson fluid in a constricted channel using Darcy's law: a numerical study / A. Ali [и др.] // Scientific Reports. — 2020. — Т. 10. — С. 10629.
162. Validation of numerical solvers for liquid metal flow in a complex geometry in the presence of a strong magnetic field / A. Pulugundla [и др.] // Theor. Comput. Fluid Dyn. — 2018. — Т. 32. — С. 165—178.
163. *Shvydkiy, E.* Liquid Metal Flow Under Traveling Magnetic Field—Solidification Simulation and Pulsating Flow Analysis / E. Shvydkiy, E. Baake, D. Köppen // Metals. — 2020. — Т. 10, № 4.
164. *Musaeva D. and Ilin, V.* Numerical simulation of the melt flow in an induction crucible furnace driven by a Lorentz force pulsed at low frequency. / V. Musaeva D. and Ilin, E. Baake, V. Geža // Magnetohydrodynamics. — 2015. — Т. 51, № 4. — С. 771—784.
165. Numerical and experimental study of liquid metal stirring by rotating permanent magnets / V. Dzelme [и др.] // Т. 424. — 2018.
166. *Ievlev, V.* The effect of a uniform magnetic field on instability, transition and turbulence as a control means for liquid metal flow mixing / V. Ievlev, A. Koroteev, V. Levin // Liquid Metal Magnetohydrodynamics / под ред. J. Lielpeteris, R. Moreau. — Dordrecht / Boston / London : Kluwer academic publisher, 1989.
167. *Müller, U.* Magnetofluidynamics in Channels and Containers / U. Müller, L. Bühler. — Berlin : Springer, 2001. — 210 p.
168. A hybrid finite difference–boundary element procedure for the simulation of turbulent MHD duct flow at finite magnetic Reynolds number / V. Bandaru [и др.] // Journal of Computational Physics. — 2016. — Т. 304. — С. 320—339. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999115006695>.
169. *Ulrich, F.* Investigation of vortical structures in the wake of pseudo-random roughness surfaces in hypersonic reacting boundary-layer flows / F. Ulrich, C. Stemmer // International Journal of Heat and Fluid Flow. — 2022. — Т. 95.

170. *Вольдек, А.* Индукционные магнитогидродинамические машины с жидкометаллическим рабочим телом / А. Вольдек. — Л. : Энергия, 1970. — 271 с.
171. A Novel, Improved Equivalent Circuit Model for Double-Sided Linear Induction Motor / Q. Zhang [и др.] // *Electronics*. — 2021. — Т. 10, № 14. — URL: <https://www.mdpi.com/2079-9292/10/14/1644>.
172. *Kwak, J.* Performance analysis of magnetohydrodynamic pump for sodium-cooled fast reactor thermal hydraulic experiment / J. Kwak, H. R. Kim // *Annals of Nuclear Energy*. — 2019. — Т. 132. — С. 191—198. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030645491930221X>.
173. *Гоман, В.* Тепловые процессы в линейных асинхронных двигателях и их математическое моделирование : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / В. Гоман. — Екатеринбург, 2006. — 194 с.
174. *Федореев, С. А.* Динамические режимы работы асинхронного двигателя с разомкнутым магнитопроводом и их математическое моделирование : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / С. А. Федореев. — Екатеринбург, 2006. — 159 с.
175. *Практ, В. А.* Совершенствование системы управления и математическое моделирование установки индукционного нагрева трубных заготовок : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / В. А. Практ. — Екатеринбург, 2007. — 152 с.
176. *Миронов, С. Е.* Исследование характеристик тягового линейного асинхронного двигателя для городского транспорта : дис. ... канд. тех. наук : 05.09.01 / С. Е. Миронов. — Екатеринбург, 2007. — 169 с.
177. Evolutionary clustering of Lagrangian trajectories in turbulent Rayleigh–Bénard convection flows / C. Schneide [и др.] // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Т. 32, № 1. — С. 013123.
178. *Beck, A.* A Perspective on Machine Learning Methods in Turbulence Modelling / A. Beck, M. Kurz // *CoRR*. — 2020. — Т. abs/2010.12226. — arXiv: [2010.12226](https://arxiv.org/abs/2010.12226). — URL: <https://arxiv.org/abs/2010.12226>.

179. MHD forced convection flow in dielectric and electro-conductive rectangular annuli / S. Siriano [и др.] // Fusion Engineering and Design. — 2020. — Т. 159. — С. 111773.
180. Prediction of PbLi fluid flow and temperature field in a thermal convection loop for qualification of fusion materials / Y. Jiang [и др.] // International Journal of Heat and Mass Transfer. — 2021. — Т. 172. — С. 121198. — URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001793102100301X>.
181. *Siriano, S.* Numerical Simulation of Thin-Film MHD Flow for Nonuniform Conductivity Walls / S. Siriano, A. Tassone, G. Caruso // Fusion Science and Technology. — 2021. — Т. 77, № 2. — С. 144–158.
182. Induced crystallization principle for rapid 3D printing of steel melts / V. B. Oshurko [и др.] // Magnetohydrodynamics. — 2018. — Т. 54, № 4. — С. 343–352.
183. Laminar-Turbulent Transition in Magnetohydrodynamic Duct, Pipe, and Channel Flows / O. Zikanov [и др.] // Applied Mechanics Reviews. — 2014. — Apr. — Т. 66, № 3. — 030802.
184. *Audit, E.* HERACLES: a three dimensional radiation hydrodynamics code / E. Audit, M. González // EAS Publications Series. Т. 18 / под ред. P. Stee. — 01.2006. — С. 115–128. — (EAS Publications Series).
185. *Qingyun, H.* Acceleration of the OpenFOAM-based MHD solver using graphics processing units / H. Qingyun, C. Hongli, F. Jingchao // Fusion Engineering and Design. — 2015. — Т. 101. — С. 88–93.
186. *Chaabane, R.* Lattice Boltzmann approach for MagnetoHydroDynamic convective heat transfer / R. Chaabane, A. Jemni // Energy Procedia. — 2019. — Т. 162. — С. 181–190. — Emerging and Renewable Energy: Generation and Automation.
187. *Martínez, D. O.* Lattice Boltzmann magnetohydrodynamics / D. O. Martínez, S. Chen, W. H. Matthaeus // Physics of Plasmas. — 1994. — Т. 1, № 6. — С. 1850–1867.
188. *Vencels, J.* EOF-Library: Open-source Elmer FEM and OpenFOAM coupler for electromagnetics and fluid dynamics / J. Vencels, P. Råback, V. Geža // SoftwareX. — 2019. — Т. 9. — С. 68–72.

189. *Venčels, J.* Simulation of 3D MHD with free surface using open-source EOF-library: Levitating liquid metal in an alternating electromagnetic field / J. Venčels, A. Jakovičs, V. Geža // Magnetohydrodynamics. — 2017. — T. 53, № 4. — С. 643—652.
190. Code-to-Code Comparison for a PbLi Mixed-Convection MHD Flow / S. Smolentsev [и др.] // Fusion Science and Technology. — 2020. — С. 653—669.
191. An approach to verification and validation of MHD codes for fusion applications / S. Smolentsev [и др.] // Fusion Engineering and Design. — 2015. — Т. 100. — С. 65—72.
192. *Hunt, J.* Magnetohydrodynamic Flow in Rectangular Ducts / J. Hunt // J.Fluid Mech. — 1965. — Vol. 21, no. 2. — P. 577—590.
193. *Smolyanov, I. A.* Comparison of Different Approaches to Calculate Magnetic Field of Moving Magnets for Liquid Metal Stirring / I. A. Smolyanov // Proceedings of the 2020 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, EIconRus 2020. — 2020. — P. 878—882.
194. *Shmakov, E. I.* Calculation of Magnetic Field of Induction Pump Using Open Source Software / E. I. Shmakov, I. A. Smolyanov, N. V. Tarchutkin // Proceedings of the 2020 EEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering, EIconRus 2020. — 2020. — P. 862—866.
195. *Zhan, J.-m.* Comparison between the Q criterion and Rortex in the application of an in-stream structure / J.-m. Zhan, W.-h. O. Li Yu-tian and Wai, W.-q. Hu // Physics of Fluids. — 2019. — Т. 31, № 12. — С. 121701.
196. A  $2D\frac{1}{2}$  model for low Prandtl number convection in an enclosure / V. Botton [и др.] // International Journal of Thermal Sciences. — 2013. — Т. 71. — С. 53—60.
197. *Gau, C.* Melting and Solidification of a Pure Metal on a Vertical Wall / C. Gau, R. Viskanta // Journal of Heat Transfer. — 1986. — Февр. — Т. 108, № 1. — С. 174—181. — URL: <https://doi.org/10.1115/1.3246884>.

198. *Shvydkiy, E.* Interaction of Vertical Convection with an Electromagnetically Forced Flow / E. Shvydkiy, I. Smolyanov, E. Baake // Fluid Dynamics. — 2022. — С. 012086.
199. *Shvydkiy, E.* Simulation of Binary Alloy Columnar Solidification in Presence OF EM Force Convection / E. Shvydkiy, I. Smolyanov, E. Baake // Magnetohydrodynamics. — 2022. — Vol. 58, no. 1. — P. 3—15.
200. *Швыдкий, Е. Л.* Моделирование конвективных потоков при горизонтальной направленной кристаллизации / Е. Л. Швыдкий, И. А. Смольянов, Э. Бааке // XXII Зимняя школа по механике сплошных сред. — 2021. — С. 351—352.
201. *Shvydkiy, E.* Numerical simulation of the EM forced flow during Sn-Pb alloy directional horizontal solidification / E. Shvydkiy, I. Smolyanov, E. Baake. — 2022. — URL: <https://arxiv.org/abs/2204.03650>.
202. Analysis of a numerical benchmark for columnar solidification of binary alloys / H. Combeau [и др.] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2012. — Июль. — Т. 33. — С. 012086.