Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого
Президента России Б.Н.Ельцина»

На правах рукописи

Григорьев Алексей Михайлович

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ФУНКЦИЯМИ СТОИМОСТИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СПИСКА ЗАДАНИЙ

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2021

Работа выполнена в отделе вычислительных систем Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН
Ченцов Александр Георгиевич

Официальные оппоненты: **Коновалов Анатолий Владимирович,**
доктор технических наук, профессор,
ФГБУН Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук (г. Екатеринбург), заведующий лабораторией механики деформаций

Максимов Владимир Петрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГАОУ ВО «Пермский государственный национальный исследовательский университет» (г. Пермь), профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике

Соколинский Леонид Борисович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГАОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)» (г. Челябинск), проректор по информатизации

Защита состоится 24 ноября 2021 г. в 13:00 на заседании диссертационного совета УрФУ 01.01.07 по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина 51, к. 248, Зал заседаний диссертационных советов.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», https://dissovet2.urfu.ru/mod/data/view.php?d=12&rid=2890

Автореферат разослан "____" октября 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н. Косолобов Д. А.

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности.

В диссертации рассматриваются задачи маршрутизации перемещений, имеющие своим источником ситуации прикладного характера, возникающие в атомной энергетике при выполнении набора заданий, связанных с демонтажом радиационно опасных элементов. Отметим, что подобные постановки возникают и в других содержательных задачах. Среди них выделим особо задачу управления инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ. Хотя исследуемые задачи маршрутизации, ориентированные на инженерные применения, имеют своим прототипом известную труднорешаемую задачу коммивояжера (TSP в англоязычной литературе)[1,2,3,4], в них возникают существенные особенности не только количественного, но и качественного характера: ограничения, усложненные функции стоимости, многовариантности возможных перемещений и др. Исследования в области решений т.н. обобщенной задачи коммивояжера (GTSP)[5,6,7] также не покрывают потребности интересующих нас инженерных приложений, хотя и учитывают многовариантности возможных перемещений (объектами посещения являются кластеры или мегаполисы, а не города, как в TSP).

Полезно отметить задачу коммивояжера с условиями предшествования (TSP-PC)[8,9], где, в частности, исследовалось влияние условий предшествования на сложности вычислений. Отметим, что в русскоязычной литературе используется термин "задача курьера". Отметим ряд работ, посвящённых TSP-PC, ориентированных на приложения; инспекция нефтяных вы-

[1] Gutin G., Punnen A. P. The Traveling Salesman Problem and Its Variations.— Dordrecht: Springer, 2002

[2] Cook William J. In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation. — Princeton University Press, 2012.

[3] Bellman R. Dynamic Programming Treatment of the Travelling Salesman Problem // J. Assoc. Comput. Mach. — 1962. — no. 9. — Pp. 61–63.

[4] Held M., Karp R. M. A Dynamic Programming Approach to Sequencing Problems // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics.— 1962. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 196–210.

[5] Chisman James A. The clustered traveling salesman problem // Computers and Operations Research. — 1975. — Vol. 2, no. 2. — Pp. 115–119.

[6] Balas E. New classes of efficiently solvable generalized Traveling Salesman Problems // Annals of Operations Research. — 1999. — January. — Vol. 86, — Pp. 529–558.

[7] М.Ю. Хачай, Е.Д. Незнахина. Приближенные схемы для обобщенной задачи коммивояжера // Труды ИММ УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 3.— С. 283–292.

[8] Kubo Mikio, Kasugai Hiroshi. The precedence constrained traveling salesman problem // Journal of the Operations Research Society of Japan. — 1991. —Vol. 34, no. 2. — Pp. 152–172.

[9] Salii Yaroslav. Revisiting Dynamic Programming for Precedence-Constrained Traveling Salesman Problem and Its Time-Dependent Generalization // European Journal of Operational Research. — 2017. — 04. — Pp. 32–42.

шек[10], оптимизация производственных процессов[11,12], организация складской деятельности[13]. Отметим работы [14,15,16] , использующие элементы метода ветвей и границ для решения TSP-PC. В связи с применением для решения TSP динамического программирования (ДП) отметим особо работы[3,4]. Развиваемая в настоящей работе конструкция восходит в идейном отношении к подходу[3], имеющему смысл попятной процедуры.

В связи с производственными задачами, приводящими к идеям маршрутизации с различными обобщениями, отметим исследование, посвящённое вопросам монтажа печатных плат[17]. Здесь же отметим работу[18], которая относится к GTSP-PC и связана с инженерной задачей обработки листа (сверление, развертывание отверстий, нарезка резьбы).

В настоящей работе исследуется комплекс вопросов, связанных с применением параллельных алгоритмов для решения задач маршрутизации, ориентированных на инженерные приложения, связанные с атомной энергетикой. Речь идет, в первую очередь, о вопросах, связанных со снижением облучаемости персонала АЭС и специалистов аварийно-спасательных формирований при ликвидации аварийных ситуаций, возникающих на АЭС, в которых существенную роль имеет маршрутизация выполняемых заданий. Дело в том, что снижать облучаемость можно не только с помощью различных защитных сооружений, но и за счёт разумной организации последовательности выполняемых операций (в работе приведен соответсвующий пример). В этой связи задачи маршрутизации настоящей работы могут представлять

[10]Fiala Timlin Marie T, Pulleyblank William R. Precedence constrained routing and helicopter scheduling: heuristic design // Interfaces. — 1992. —Vol. 22, no. 3. — Pp. 100–111.

[11]Escudero Laureano F. A production planning problem in FMS // Annals of Operations Research. — 1989. — Vol. 17, no. 1. — Pp. 69–103.

[12]Spieckermann Sven, Gutenschwager Kai, Voß Stefan. A sequential ordering problem in automotive paint shops // International journal of production research. — 2004. — Vol. 42, no. 9. — Pp. 1865–1878.

[13]Ascheuer Norbert. Hamiltonian path problems in the on-line optimization of flexible manufacturing systems: Ph.D. thesis / Technische Universitat Berlin Germany. — 1995.

[14]Kalantari Bahman, Hill Arthur V, Arora Sant R. An algorithm for the traveling salesman problem with pickup and delivery customers // European Journal of Operational Research. — 1985. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 377–386.

[15]Cook William J. In Pursuit of the Traveling Salesman: Mathematics at the Limits of Computation. — Princeton University Press, 2012.

[16]Shobaki Ghassan, Jamal Jafar. An exact algorithm for the sequential ordering problem and its application to switching energy minimization in compilers // Computational Optimization and Applications. — 2015. — Vol. 61, no. 2. — Pp. 343–372.

[17]Alkaya Ali, Duman Ekrem. A new generalization of the Traveling salesman problem // Applied and Computational Mathematics. — 2010. — 01. — Vol. 9. — Pp. 162–175.

[18]Lokin FCJ. Procedures for travelling salesman problems with additional constraints // European Journal of Operational Research. — 1979. — Vol. 3, no. 2. — Pp. 135–141.

не только теоретический, но и серьезный практический интерес в плане снижения радиационного воздействия на исполнителей операций по демонтажу радиационно опасных объектов.

В то же время сама реализация упомянутых возможностей по снижению радиационного воздействия связана с решением очень сложных задач маршрутизации, имеющих лишь весьма отдалённое сходство со своим прототипом – задачей коммивояжера или TSP, хотя известные вопросы, связанные с труднорешаемостью TSP[19], в полной мере сохраняют свое значение и в задачах, рассматриваемых в настоящей работе. Речь идет о комбинаторных задачах с ограничениями и усложнёнными функциями стоимости, которые допускают зависимость от списка заданий, не выполненных на текущий момент. Кроме того, сами упомянутые зависимости в типичных случаях включают при своем построении интегрирование нелинейных зависимостей и комбинирование интегральных эффектов, создаваемых отдельными излучателями.

Возникающая при должной формализации постановка выходит за пределы круга задач, исследуемых в дискретной оптимизации и включает объективно элементы задач управления с дискретным временем. В этой связи отметим, что используемый в работе вариант ДП, восходящий к схеме Р. Беллмана, соответствует в идейном отношении процедурам на основе ДП, применяемым в теории управления; в этой связи отметим[20]. В дискретной оптимизации при решении TSP и задач типа TSP чаще используется вариант Хелда-Карпа (стоит отметить, что при решении самой исходной TSP и многих слабо осложненных задач, ДП используется крайне редко и в основном теоретически – для оценки вычислительной сложности).

Методология и методы исследования. Выбор ДП в качестве основного метода исследования (что нетипично для дискретной оптимизации) связан с определённой "всеядностью" процедур на основе ДП, что и позволило встраивать в эти процедуры элементы соблюдения ограничений и разнообразные условия для функций стоимости. Таким образом, именно ДП позволяет (по крайней мере на теоретическом уровне) учитывать реальные интересы решения прикладных задач, что достигается, конечно, при соответствующей

[19] Garey M. R., Johnson D. S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness (Series of Books in the Mathematical Sciences). — First Edition. — W. H. Freeman, 1979.

[20] Р. Беллман, Р. Калаба. Динамическое программирование и современная теория управления. — Москва: Наука, 1969.

формализации исходной задачи с использованием ее разнообразных преобразований и должной теоретической проработке основных этапов исследования.

Целью диссертационной работы является исследование параллельных методов для решения ряда прикладных задач, возникающих в атомной энергетике.

Для достижения поставленной цели потребовалось решить следующие **задачи**:

1. Выполнить анализ модели перемещений с условиями предшествования и функциями стоимости, зависящими от списка невыполненных заданий, применительно к различным инженерным задачам.
2. Построить параллельный алгоритм поиска оптимального решения на основе ДП для задач маршрутизации и распределения заданий.
3. Разработать и реализовать комплекс программ, провести обширный вычислительный эксперимент.
4. Оценить влияние условий предшествования на степень распараллеливания предложенных алгоритмов ДП.

Положения, выносимые на защиту:

1. Предложен алгоритм "вертикального" распараллеливания (схема независимых вычислений[21]) ДП в системах с распределенной памятью с применением программного интерфейса MPI, использован принцип разбиения задачи верхнего уровня на подзадачи меньшей размерности.
2. Реализован программный комплекс для точного решения задачи маршрутной оптимизации с ограничениями в виде условий предшествования и функциями стоимости, учитывающими возможную зависимость от списка невыполненных заданий.
3. Реализован эвристический алгоритм для решения "больших" маршрутных задач, учитывающий ограничения в виде условий предшествования и функции стоимости, зависящие от списка заданий.
4. Предложен метод улучшения эвристического алгоритма на основе оптимизирующих мультивставок с использованием параллельных вычислений. В результате решения этой задачи реализован программный комплекс на вычислительном кластере.

[21] Ченцов А. Г. Одна параллельная процедура построения функции Беллмана в обобщенной задаче курьера с внутренними работами //Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 3. — С. 134–149.

5. Построен параллельный алгоритм и реализован программный комплекс для решения задачи распределения заданий между участниками.

Научная новизна:

1. Разработан алгоритмический аппарат для решения задач маршрутизации с ограничениями и усложнёнными функциями стоимости. Впервые реализована схема распараллеливания динамического программирования на вычислительном кластере, при которой вычислительные узлы выполняют "сквозные" вычисления, не использующие обмен данными между узлами при последовательном расчёте слоев функции Беллмана. Данная реализация позволила существенно повысить размерность решаемых задач и сократить время вычислений.
2. Для решения прикладной задачи минимизации дозовой нагрузки работников атомных электростанций при проведении работ по демонтажу выводимого из эксплуатации оборудования или персонала аварийно-спасательных формирований при ликвидации чрезвычайных ситуаций на АЭС, построен и реализован в виде программы для МВС оптимальный параллельный алгоритм. Данная прикладная задача предполагает учет ряда ограничений в виде условий предшествования и возможную зависимость функций стоимости от списка невыполненных заданий.
3. Для решения задач маршрутизации, имеющих большую размерность, построен параллельный алгоритм, реализующий оптимизирующие мультивставки в эвристические решения с целью улучшения качества исследуемого процесса.
4. Построен параллельный алгоритм на основе ДП для решения задачи распределения заданий.

Теоретическая и практическая значимость. Построены новые параллельные алгоритмы решения задач маршрутизации перемещений и распределения заданий между участниками; в основе данных алгоритмов находится аппарат ДП и схемы независимых вычислений в условиях возможного перекрытия потоков данных вычислительной процедуры.

Построенные в работе алгоритмы могут быть использованы при решении таких актуальных инженерных задач, как проблема демонтажа радиационно опасных объектов при авариях на АЭС, подобных Чернобылю и Фукусиме, плановом выводе из эксплуатации отработавшего радиационно опасного оборудования на АЭС и управления инструментом при листовой резке деталей на машинах с ЧПУ (задача, связанная с раскроем). Другие возможные применения связаны с транспортными задачами, авиапожарным патрулированием лесов, задачей о сборе космического "мусора".

Степень достоверности полученных результатов обеспечивается строгими выводами и математическими доказательствами, воспроизводимостью прогнозируемых результатов при вычислительных экспериментах с использованием МВС, сопоставлением известным из литературы результатам для аналогичных моделей в тех случаях, когда упомянутые аналогичные результаты имеются.

Апробация работы. Основные результаты работы представлялись в докладах на V Международной школе-симпозиуме "Анализ моделирование, развитие экономических систем: АМУР-2011"(Украина, Севастополь, 2011); Международной конференции "Научный сервис в сети Интернет: экзафлопсное будущее"(Россия, Новоросийск, 2011); Международной конференции "Научный сервис в сети Интернет: поиск новых решений"(Россия, Новоросийск, 2012); 47-ой Всероссийской молодежной школе-конференции "Современные проблемы математики и ее приложений" (Россия, Екатеринбург, 2016); Международной конференции "Discrete Optimization and Operations Research - (DOOR 2016): 9th International Conference"(Russia, Vladivostok, 2016); VIII Международной конференции "OPTIMIZATION AND APPLICATIONS (OPTIMA-2017)"(Montenegro, Petrovac, 2017); V, VI, VII Международных конференциях "Physics, Technologies and Innovation (PTI-2018), (PTI-2019), (PTI-2020)"(Russia, Ekaterinburg, 2018, 2019, 2020 гг.); XII Международной школе-симпозиуме "Анализ моделирование, развитие экономических систем: АМУР-2018"(Россия, Симферополь-Судак, 2018). Также диссертация представлялась на Научном семинаре по информационным технологиям ЮУрГУ (Россия, Челябинск, 2021); на семинаре лаборатории конструктивных методов исследования динамических моделей ПГНИУ (Россия, Пермь, 2021).

Личный вклад. В работах, написанных в соавторстве с научным руководителем, А.Г. Ченцову принадлежит постановка задачи и теоретические конструкции, связанные с процедурами на основе ДП, а А.М. Григорьеву эффективные параллельные алгоритмы, реализованные на суперкомпьютере; кроме того, им проведен обширный вычислительный эксперимент, позволивший выявить целый ряд полезных качественных зависимостей. В статьях, написанных в соавторстве с А.А. Ченцовым, соавтору А.А. Ченцову принадлежат выводы формул, оценивающих радиационное воздействие на различных этапах перемещений исполнителя, а также построение алгоритмов и программ для ПЭВМ, которые использовались в экспериментах при сравнении производительности с алгоритмами для МВС, а А.М. Григорьеву эффективные параллельные алгоритмы, реализованные на суперкомпьютере,а также проведение обширных вычислительных экспериментов. В работах, написанных в соавторстве с О.Л. Ташлыковым, соавтору О.Л. Ташлыкову принадлежит инженерная постановка и описание физических явлений, связанных с задачей дозиметриста; А.М. Григорьевым была предложена математическая постановка и построен параллельный алгоритм, реализованный на супервычислителе. В работах, написанных в соавторстве с Е.Е. Иванко, соавтору Е.Е. Иванко принадлежит разработка алгоритмов и оценка их трудоемкости, А.М. Григорьеву принадлежит построение параллельного алгоритма, программная реализация и проведение вычислительных экспериментов. В статье [15] соавторам А.Н. Сесекину и С.Е. Щеклейну принадлежит содержательная постановка рассматриваемой инженерной задачи, а диссертанту – построение параллельного алгоритма. В работе [2] соавтору Князеву С.Т. принадлежат некоторые элементы содержательной постановки задачи об авиапожарном патрулировании лесов. В статье [17] соавтору П.А. Ченцову принадлежит алгоритм решения обобщённой задачи курьера для ПЭВМ (результаты решения на ПЭВМ использовались в целях сравнения с аналогичными результатами для МВС).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 23 печатных и электронных изданиях, 4 из которых изданы в журналах и в трудах конференций, рекомендованных ВАК, 9 – в журналах и в трудах конференций, индексируемых системами WoS и Scopus, 10 – в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 114 страниц с 13 рисунками. Список литературы содержит 113 наименований.

Благодарность. Особую благодарность автор выражает своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, член-корреспонденту РАН, Ченцову Александру Георгиевичу за постановку задачи, всестороннюю поддержку в ходе проводимого исследования и постоянное внимание к работе. Работа выполнена в рамках деятельности Уральского математического центра.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, сформулированы научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

Первая глава посвящена вопросам решения с применением параллельных алгоритмов задачи последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования и внутренними работами, связанными с посещением мегаполисов; данная задача является обобщением GTSP-PC и включает, на уровне постановки, функции стоимости, зависящие от списка невыполненных (на текущий момент) заданий. На основе метода ДП построен параллельный алгоритм для нахождения оптимального решения. Кроме того, построен эффективный эвристический (жадный) алгоритм и проведено сравнение последнего с оптимальным в смысле достигаемого результата: выполнен вычислительный эксперимент на МВС для решения точным и эвристическим алгоритмами. Здесь фиксируются стандартные обозначения, вводятся специальные определения, описывающие конструкции ДП.

Общие сведения и обозначения. Через $\triangleq$ обозначаем равенство по определению. Семейством называем множество, элементами которого являются множества. Пусть $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leqslant \xi\}$, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ и $\mathbb{N}_0 \triangleq \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0; 1; 2; \ldots\}$. Для $p \in \mathbb{N}_0$ и $q \in \mathbb{N}_0$ полагаем $\overline{p,q} \triangleq \{t \in \mathbb{N}_0 \,|\, (p \leqslant t) \,\&\, (t \leqslant q)\}$. Для каждой упорядоченной пары УП $z = (a,b)$ произвольных объектов a и

b через $\mathrm{pr}_1(z)$ и $\mathrm{pr}_2(z)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы z: $\mathrm{pr}_1(z) = a, \ \mathrm{pr}_2(z) = b$.

Специальные понятия. Фиксируем непустое множество X, точку $x^\circ \in X$, число $N \in \mathbb{N}, N \geqslant 2$, (непустые конечные) множества $M_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, M_N \in \mathrm{Fin}(X)$, а также отношения $\mathbb{M}_1 \in \mathcal{P}'(M_1 \times M_1), \ldots, \mathbb{M}_N \in \mathcal{P}'(M_N \times M_N)$. Полагаем, что $(x^\circ \notin M_j \quad \forall j \in \overline{1,N})\,\&\,(M_p \cap M_q = \varnothing \quad \forall p \in \overline{1,N} \quad \forall q \in \overline{1,N} \setminus \{p\})$. Рассматриваем $M_1, \ldots, M_N$ в качестве мегаполисов, подлежащих посещению. Исследуются процессы следующего вида:

$$\begin{gathered} x^\circ \to (\mathrm{pr}_1(z_1) \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow \mathrm{pr}_2(z_1) \in M_{\alpha(1)}) \to \ldots \\ \to (\mathrm{pr}_1(z_N) \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow \mathrm{pr}_z(z_N) \in M_{\alpha(N)}), \end{gathered} \tag{1}$$

где z_1 – возможные входы-выходы в первый на маршруте мегаполис, z_2 – во второй и т.д., α – перестановка индексов из $\overline{1,N}$, именуемая далее маршрутом; вводим $z_0 \triangleq (x^\circ, x^\circ)$. Полагаем, что прямые стрелки отвечают внешним перемещениям (перемещениям между мегаполисами и из x° в мегаполисы), а волнистые — перемещениям, связанным с выполнением (внутренних) работ.

Выбор α может быть стеснен дополнительными ограничениями, так называемыми условиями предшествования. Они задаются посредством множества $\mathbf{K}$, удовлетворяющего условию [часть 2][22]. Элементами $\mathbf{K}$ являются упорядоченные пары индексов; будем условно именовать первую компоненту упорядоченной пары отправителем, а вторую – получателем; сами же элементы $\mathbf{K}$ называем адресными парами. Допустимость маршрута заключается в том, что отправитель должен посещаться всякий раз раньше получателя.

Определяем аддитивный критерий. Пусть α – маршрут (перестановка индексов), а $(z_i)_{i \in \overline{0,N}}$ – траектория, согласованная с α (см. (1)),

$$\begin{gathered} \mathfrak{G}_\alpha[(z_i)_{i \in \overline{0,N}}] \triangleq \sum_{t=1}^{N} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_{t-1}), \mathrm{pr}_1(z_t), \{\alpha(j) : j \in \overline{t,N}\}) + \\ + c_{\alpha(t)}(z_t, \{\alpha(j) : j \in \overline{t,N}\})] + f(\mathrm{pr}_2(z_N)). \end{gathered} \tag{2}$$

где функция $\mathbf{c}$ оценивает внешние перемещения, функции $c_1, \ldots, c_N$ - внутренние работы, а f - терминальное состояние процесса. В качестве основной

[22] Ченцов А. Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. — Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.

рассматриваем задачу минимизации аддитивного критерия:

$$\mathfrak{G}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \to \min,\ \alpha \in \mathbf{A}, (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha, \tag{3}$$

где $\mathbf{A}$ – множество допустимых (по предшествованию) маршрутов, $\mathcal{Z}_\alpha$ при $\alpha \in \mathbf{A}$ – множество траекторий согласованных (см. (1)) с α, а $\mathfrak{G}_\alpha$ определяется суммированием затрат на этапах процесса (см. (2)). Задаче сопоставляется значение (экстремум)$V \triangleq \min\limits_{\alpha\in\mathbf{A}} \min\limits_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathcal{Z}_\alpha} \mathfrak{G}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \in \mathbb{R}_+$. Цель состоит в нахождении (глобального) экстремума V и решения, его реализующего.

Для решения задачи используется параллельный вариант ДП. Для "вертикального"распараллеливания задачи в системах с распределенной памятью с применением программного интерфейса MPI использован принцип разбиения задачи верхнего уровня на подзадачи меньшей размерности. Для этого главный вычислительный узел формирует семейство $\mathbf{G}_{N-1}$, элементами которого являются множества индексов мощности $N-1$, а именно, из семейства всех множеств индексов $\overline{1,N}$ строится набор множеств $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, т.е. первое множество содержит все номера мегаполисов, за исключением первого в $\mathbf{I}(\overline{1,N})$, второе множество – номера всех мегаполисов за исключением второго в $\mathbf{I}(\overline{1,N})$ мегаполиса и т.д. (таким образом учитываются условия предшествования). Построение $\mathbf{G}_{N-1}$ и отображения $\mathbf{I}$ соответствует[21] (теоретические конструкции, связанные с ДП и схемой независимых вычислений также соответствуют[21] и восходят к работе[22]).

При старте параллельного алгоритма эти множества $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ распределяются по работающим MPI-процессам, каждый такой процесс обслуживается отдельным вычислительным узлом, который обсчитывает данное ему множество позиций и вычисляет “индивидуальные” слои функции Беллмана. Поскольку оперативная память для каждого узла является общей и обмена данными между узлами не происходит, то имеет смысл использовать дополнительное распараллеливание для расчётов “индивидуальных” слоев функции Беллмана на уровне каждого вычислительного узла. Для этого применяется библиотека OpenMP. Данное обстоятельство реализует двойное распараллеливание: на уровне кластера (MPI) и на уровне узла (OpenMP); это позволяет более эффективно использовать вычислительные ресурсы и ускоряет сами вычисления. Работа упомянутой процедуры направлена на построения сужений функции Беллмана, именуемых слоями. Данные сужения осуществляются на специальных множествах в пространстве позиций, каждая из которых является упорядоченной парой, компонентами которой являются состояние и список заданий.

После того, как последовательно были построены все “индивидуальные“ (соответствующие своим узлам) слои функции Беллмана $\mathcal{W}_s[K]$, $s \in \overline{1,N-1}$, результаты расчётов передаются с узлов, связанных со списками $K \in \mathbf{G}_{N-1}$, и собираются на главном MPI-процессоре, где на их основе, путём склейки находится “совокупный“ слой функции Беллмана v_{N-1}. Далее вычисляем значение глобального экстремума V. Затем главный процессор реализует построение оптимальных маршрута и траектории путём решения локальных экстремальных задач, подобных[21].

В тех случаях, когда построение маршрута и трассы не требуется, можно применить алгоритм нахождения глобального экстремума с последовательной перезаписью слоев функции Беллмана, который позволяет сэкономить используемую оперативную память. Такой подход может применяться для тестирования эвристических алгоритмов, для которых важно сравнение получаемого результата (насколько отличается найденное значение от оптимального). Для расчёта "индивидуального"слоя функции Беллмана $\mathcal{W}_{l+1}[K]$ необходимо знать лишь предыдущий слой $\mathcal{W}_l[K]$, поэтому в памяти вычислительного узла требуется хранить только один этот слой. Из хэш-таблицы удаляются все записи, для которых ключ хэш-таблицы имеет размер меньше номера слоя, который надо оставить в хэш-таблице. Таким образом, на каждом этапе вычисления слоев функции Беллмана происходит перезапись слоя l на слой $l+1$ для $\forall l \in \overline{1,N-2}$. После того, как "индивидуальные"слои $\mathcal{W}_{N-1}[K]$ для каждого множества $K \in \mathbf{G}_{N-1}$ будут найдены узлами кластера, эти слои передаются на главный MPI-узел, где при помощи склейки строится слой основной функции Беллмана v_{N-1}, после этого вычисляется значение глобального экстремума V. Такой подход позволяет существенно сэкономить используемую оперативную память вычислительных узлов и решать задачи большей размерности.

Был выполнен обширный вычислительный эксперимент на МВС "Уран". Рассматривается процедура ДП для решения задачи минимизации дозы облучения работника при демонтаже радиоактивных источников. Данный алгоритм был реализован на $C++11$ и обеспечивает точное решение описанной выше задачи. Программа может выполняться в 64-битных ОС Windows и Linux, и компилироваться с помощью MS Visual Studio выпуска не ниже 2013 и gcc/g++ версии не ниже 4.8 соответственно. Переносимость исходного кода программы между платформами для случаев использования ОС-зависимого API достигается применением директив условной компиляции. Вычисления распараллелены с помощью программного интерфейса MPI в реализациях Microsoft MPI и MPICH2. Программа замеряет и выводит затраченное на нахождение решения время и потребляемый объём оперативной памяти с помощью переносимого API (для времени) и ОС-зависимого API (для объёма оперативной памяти).

Для примера решения задачи обхода 51 мегаполиса, с 20-ю городами в каждом мегаполисе и при наличии 45 адресных пар, получены следующие результаты: суммарная величина дозы облучения – 2.836942, время счета составило 533 сек, максимальный объём используемой оперативной памяти 145400 МБ. График обхода 51 мегаполисов приведен на рис. 1.

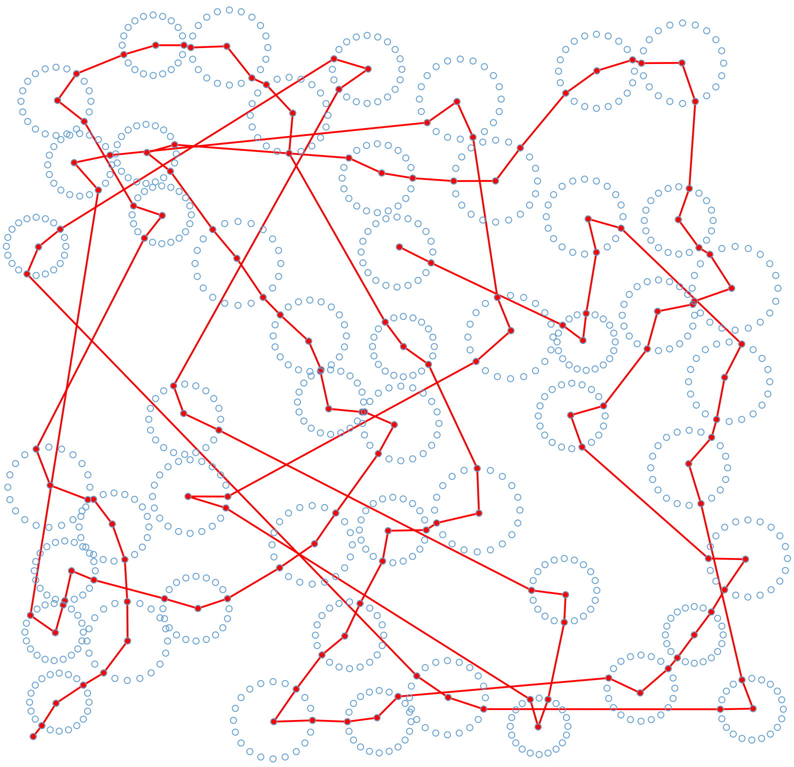

Рис. 1 — Пример вычисления для случая $N = 51$, $|M_i| = 20$, $|\mathbf{K}| = 45$

Для тестирования представленного параллельного алгоритма на основе ДП, используемого для поиска оптимального маршрута, применялись экземпляры SOP из библиотеки TSPLIB. Приведённые в данной библиотеке задачи являются существенно более простыми в сравнении с рассматриваемыми в диссертации, однако позволяют протестировать программный комплекс на достоверность получаемых результатов. Чтобы адаптировать библиотеку к нашему решателю (и постановке задачи), мы рассматривали города SOP как одноэлементные мегаполисы и убрали зависимость функций стоимости от списка невыполненных заданий.

В результате вычислений было решено значительное количество экземпляров TSPLIB SOP (ESC07.sop, ESC11.sop, br17.12.sop, ESC12.sop, br17.10.sop, ry48p.4.sop, rbg109a .sop, p43.4.sop, ft53.4.sop, rbg150a.sop, ft70.4.sop, ESC25.sop, p43.3.sop, ft53.3.sop). Для всех этих задач было найдено оптимальное решение, которое сравнивалось с результатами, доступными на веб-сайте TSPLIB. Помимо этого удалось найти оптимальные решения для двух экземпляров задач, которые были отмечены как нерешённые на сайте (ry48p.3 и kro124p.4).

Алгоритм продемонстрировал свою работоспособность и эффективность, тем самым доказав применимость для определённого круга задач, где другие алгоритмы не способы находить оптимальное решение (имеются в виду вышеупомянутые нерешённые задачи из TSPLIB SOP). В то же время построенный на основе ДП оптимальный алгоритм "справляется"с ещё более сложными и имеющими практический смысл задачами.

Вторая глава посвящена вопросу локального улучшения эвристических решений в задаче последовательного обхода мегаполисов большой размерности с условиями предшествования и функциями стоимости, допускающими зависимость от списка заданий. Данное улучшение выполняется параллельным алгоритмом, реализуемым в рамках построения специальной оптимизирующей мультивставки (имеется в виду система оптимизирующих вставок в эвристическое решение). Приведен вычислительный эксперимент на супервычислителе, показывающий значительное улучшение исходного эвристического решения.

Фиксируем непустое множество X, точку $x_0 \in X$, число $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \geqslant 3$, множества $\mathbf{L}_1 \in \mathrm{Fin}(X), \ldots, \mathbf{L}_n \in \mathrm{Fin}(X)$ именуем мегаполисами; с каждым из мегаполисов связываем варианты выполнения работ, именуемых внутренними. Рассматриваем процессы следующего вида

$$x_0 \to (x_{1,1} \in \mathbf{L}_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_{1,2} \in \mathbf{L}_{\alpha(1)}) \to \ldots \to (x_{\mathbf{n},1} \in \mathbf{L}_{\alpha(\mathbf{n})} \rightsquigarrow x_{\mathbf{n},2} \in \mathbf{L}_{\alpha(\mathbf{n})}). \quad (4)$$

Фиксируем $N \in \overline{2,\mathbf{n}-1}$ в качестве "длины" возможной (однократной) вставки; в конкретных построениях полагается, что значение N является "умеренным"; последнее связано с возможностью применения ДП в пределах вставки. Локализация вставки определяется значением $\nu \in \overline{0,\mathbf{n}-N}$. Фиксируя ν, мы заменяем фрагмент ДР "большой" задачи локально оптимальным. Полагаем, что имеются условия предшествования "большой" задачи, задаваемые множеством $\mathcal{K}$ адресных пар с элементами из $\overline{1,\mathbf{n}}$ (данные условия предшествования подобны аналогичным условиям главы 1); через $\mathcal{A}$ обозначаем множество всех $\mathcal{K}$-допустимых (по предшествованию) маршрутов. Наряду с этим, для вставки "длиной" N вводятся свои условия предшествования, порождаемые некоторым "сужением" глобальных условий; в итоге на основе $\mathcal{A}$ конструируются множества $\mathbf{A}_\nu[\alpha]$, привязанные к вставке и обслуживающие ее. С маршрутом $\alpha \in \mathcal{A}$ связываем множество $\mathfrak{Z}_\alpha$ согласованных с ним "глобальных" траекторий (см. (4)). Аналогичным образом с каждым маршрутом вставки $\beta \in \mathbf{A}_\nu[\alpha]$ связывается множество $\mathcal{Z}_\beta[\alpha; \mathbf{z}; \nu]$ (здесь $\alpha \in \mathcal{A}$ и $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$). Для траекторий также осуществляется склеивание, формируя операцию $(\mathrm{sew})[\cdot]$.

Предложение 1. *Если* $\alpha \in \mathcal{A}$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{Z}_\alpha$, $\nu \in \overline{0,\mathbf{n}-N}$, $\beta \in \mathbf{A}_\nu[\alpha]$ *и* $h \in \mathcal{Z}_\beta[\alpha; \mathbf{z}; \nu]$, *то в результате склеивания на основе* $((\mathrm{sew})[h|\alpha; \mathbf{z}; \nu](t) \overset{\triangle}{=} h(t-\nu) \ \ \forall t \in \overline{\nu+1, \nu+N})\&((\mathrm{sew})[h|\alpha; \mathbf{z}; \nu](t) \overset{\triangle}{=} \mathbf{z}(t) \ \ \forall t \in \overline{0,\mathbf{n}} \setminus \overline{\nu+1, \nu+N})$ *реализуется траектория исходной задачи, согласованная со склеенным маршрутом (имеется в виду склеивание* α *и* β*;* $\mathbf{z}$ *– эвристическая траектория,* h *– траектория вставки).*

Рассмотрим конструкцию, направленную на улучшение эвристик посредством применения мультивставки, компонентами которой являются оптимизирующие вставки. Данная конструкция ориентирована на применение параллельных алгоритмов с реализацией на МВС и многоядерных ПЭВМ.

Теперь мы планируем реализовать вышеупомянутую "одиночную" вставку m раз для чего намечаем m значений

$$\nu_1 \in \overline{0,\mathbf{n}}, \ldots, \nu_m \in \overline{0,\mathbf{n}} \tag{5}$$

со следующим свойством: $\nu_j + N < \nu_{j+1}$ при $j \in \overline{1,m-1}$. Для каждого j создаём индивидуальную вставку, в пределах которой используем вышеупомянутые "одиночные" процедуры (привязанные к конкретной вставке). В частности, определяем m локальных маршрутов $\beta_1, \ldots, \beta_m$, после чего создаём склеенный маршрут η

$$\begin{gathered}\Big(\eta(t) \triangleq \lambda(t) \ \ \forall t \in \overline{1,\mathbf{n}} \setminus \Big(\bigcup_{j=1}^{m} \overline{\nu_j + 1, \nu_j + N}\Big)\Big) \& (\eta(t) \triangleq \beta_s(t - \nu_s) \\ \forall s \in \overline{1,m} \ \ \forall t \in \overline{\nu_s + 1, \nu_s + N}).\end{gathered} \tag{6}$$

Если при этом $\beta_1, \ldots, \beta_m$ допустимы по предшествованию в соответствующих вставках, то η (см. (6)) допустим в исходной задаче: $\eta \in \mathcal{A}$. Склеивание (6) маршрутов дополняется аналогичным склеиванием траекторий (на самом деле, вклеиванием траекторий, находимых во вставках): формируется траектория w, согласованная с η.

Теорема. *Справедливо равенство*

$$\hat{\mathfrak{G}}_\eta[w] = \hat{\mathfrak{G}}_\lambda[\mathbf{h}] - \sum_{i=1}^{m} \varkappa[\lambda; \mathbf{h}; \nu_i],$$

где $\varkappa[\lambda; \mathbf{h}; \nu_1], \ldots, \varkappa[\lambda; \mathbf{h}; \nu_m]$ оценивают улучшение результатов индивидуальными вставками при замене $(\lambda, \mathbf{h})$ на (η, w). Смысл теоремы состоит в том, что улучшения, достигаемые в индивидуальных вставках, удается сделать независимыми, а общее улучшение качества свести к сумме частных. Из теоремы 1 вытекает очевидная оценка $V \leqslant \hat{\mathfrak{G}}_\lambda[\mathbf{h}] - \sum_{i=1}^{m} \varkappa[\lambda; \mathbf{h}; \nu_i]$.

Третья глава посвящена исследованию задачи оптимизации маршрута перемещения персонала при проведении работ в нестационарных радиационных полях с учётом обхода возможных препятствий. Описывается метод построения карты радиационного фона на плоскости по заранее измеренным значениям уровня радиации в ряде точек на этой плоскости. Рассматривается также параллельная реализация метода ДП в задачах об оптимальном распределении заданий.

Задача дозиметриста. Эффективным способом сокращения дозовых затрат персонала (на 25-40 %), не требующим значительных материальных затрат, является оптимизация маршрутов выполнения работ в нестационарных радиационных полях. Упомянутая оптимизация маршрута перемещений при проведении работ в нестационарных радиационных полях является эффективным способом сокращения дозовых затрат персонала. Для оптимизации маршрута перемещения персонала при проведении работ в нестационарных полях строится рабочий план смены для каждого исполнителя. Для того, чтобы построить такой план, дозиметристу необходимо выполнить ряд предварительных работ:

1. Дозиметрист должен предварительно выполнить ряд замеров в помещении, в котором планируется выполнение работ бригадой исполнителей или одним исполнителем.
2. Выполняется построение радиационной карты помещения, в котором были выполнены предварительные измерения.
3. Назначаются объекты, которые необходимо обслуживать (посещать) работникам АЭС.
4. На основе данных, полученных на 2-ом шаге, осуществляется расчёт функций стоимости перемещений между выделенными ранее объектами с учётом обхода возможных препятствий, а также терминальная функция.
5. Строится оптимальный маршрут посещения всех вышеупомянутых объектов для исполнителя с учётом возможных ограничений в виде условий предшествования.

После этих операций к работе приступает бригада, которая использует для перемещений маршрут, найденный дозиметристом.

В рассматриваемой постановке имеется набор точек на плоскости, в которых были произведены замеры уровня радиации. По имеющимся данным необходимо произвести интерполяцию и построить такую "часть" плоскости, для которой известно значение уровня радиации уже в каждой ее точке; это требуется для дальнейшего нахождения функций стоимостей с учётом возможных препятствий. Для построения фрагмента плоскости с известными значениями радиации в каждой точке сетки будем использовать интерполяцию на основе радиальных базисных функций (РБФ)[23]. Для нахождения функций стоимостей, учитывающих возможность обхода препятствий, рассматривается применение метода Дейкстры для нахождения кратчайшего пути в графе. Для этого предполагается задание сетки на плоскости и построение связного графа, из которого удаляются все ребра и вершины, попадающие в область препятствий. Таким образом, находим стоимости перемещений (значения **c**) между каждой парой точек , которые необходимо посетить исполнителю. После этого можем переходить к поиску экстремума задачи и построению оптимального маршрута. Для решения данной задачи используется метод ДП. Отличие данной реализации ДП от той, которая описана в первой главе, в том, что каждый мегаполис представляется одноэлементным множеством и нет зависимости функций стоимости от списка невыполненных заданий.

Параллельная реализация динамического программирования в задачах об оптимальном распределении заданий. Рассматриваемая в данном разделе задача об оптимальном распределении заданий является составной частью маршрутно-распределительной задачи. В первой главе описано решение маршрутных задач. Совокупное же изучение маршрутно-распеределительной задачи позволяет решать такие сложные задачи, как оптимизация перемещений бригады исполнителей при демонтаже энергоблоков АЭС или устранение последствий радиационной аварии группами специалистов аварийно-спасательных формирований. При рассмотрении такой прикладной задачи требуется минимизировать наибольшее по всем исполнителям время нахождения в радиоактивной среде.

Задано число $N \in \mathbb{N}, N \geqslant 2$, индексы $i \in \overline{1,N}$ определяют номера задач. Кроме того, задано число $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, индексы $j \in \overline{1,n}$ — определяют номера участников (работников).

Итак, предполагается, что у нас имеется N заданий и n работников (исполнителей). Требуется распределить все задания между работниками. При этом предполагается, что каждое задание выделяется ровно одному участнику. На семействе всех индексов $\overline{1,N}$ задана функция D с вещественными значениями.

[23]Buhmann Martin D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations. — Cambridge University Press, 2003.

Разбиением множества $\overline{1,N}$ на $n \in N$ подмножеств будем называть всякую совокупность (кортеж) n непустых подмножеств $(K_1, \ldots, K_n)$ множества $\overline{1,N}$ таких, что:

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i = \overline{1,N}$;
2. $\forall i \in \overline{1,n}\ \forall j \in \overline{1,n}\ (i \neq j) \Rightarrow (K_i \cap K_j = \oslash)$.

Множество всех таких разбиений будем обозначать $M_n(\overline{1,N})$. Рассматривается задача

$$V = \max_{i=\overline{1,n}} D(K_i) \to \min, (K_i)_{i \in \overline{1,n}} \in M_n(\overline{1,N}). \tag{7}$$

Решение задачи базируется на применении аппарата ДП в духе [часть 5][22]. Здесь мы ограничиваемся описанием возникающего на этой основе оптимального алгоритма и обсуждением особенностей процедуры распараллеливания.

Алгоритм 3.1:

1. Инициализация функции Беллмана (1-слой), для всякого подмножества $K \subset \overline{1,N}$ выполняем $V_1(K) := D(K)$. Имеется в виду "распределение" работ из K для случая одного исполнителя.

2. Последовательно увеличивая j от 2 до $n-1$, выполняем расчёт промежуточных значений функции Беллмана, опираясь на j-том шаге на результат вычислений, полученный на предыдущем шаге. Для всякого $K \subset \overline{1,N}$ (т.е. всякого $K \in \mathcal{P}(\overline{1,N})$: $V_j(K) := \min\limits_{\widetilde{K} \subset K} \left\{ \max\{D(\widetilde{K}), V_{i-1}(K \setminus \widetilde{K})\} \right\}$, где j – количество исполнителей.

3. Вычисляем последнее значение функции Беллмана, совпадающее со значением (экстремумом) задачи: $V_n(\overline{1,N}) := \min\limits_{\widetilde{K} \subset \overline{1,N}} \left\{ \max\{D(\widetilde{K}), V_{n-1}(\overline{1,N} \setminus \widetilde{K})\} \right\}$.

Утверждение 1. *Значение $V_m(K)$, вычисляемое в алгоритме, — есть экстремум задачи оптимального разбиения множества K среди m исполнителей.*

Рассмотрим параллельную реализацию алгоритма для решения задачи нахождения оптимального распределения.

В наших вычислениях участвует k процессоров.

– На первом шаге алгоритма корневой процессор рассылает начальные данные всем участникам вычислительного процесса. Для этого используется функция MPI Bcast.

– На втором шаге алгоритма выполняется построение функции Беллмана

$$V_i(K) := \min_{\widetilde{K} \subset K} \left\{ \max\{D(\widetilde{K}), V_{i-1}(K \setminus \widetilde{K})\} \right\}, K \in \mathcal{P}(\overline{1,N})$$

На данном этапе для каждого слоя выполняется оптимальное распределение подмножеств $K \subset \overline{1,N}$ между j участниками. Распараллеливаем наиболее трудоемкий процесс перебора подмножеств $\overline{1,N}$. Для этого необходимо распределить подмножества $K \subset \overline{1,N}$ так , чтобы все процессоры были загружены равномерно. Каждый процессор, участвующий в вычислении, находит оптимальное разбиение любого из выделенных ему подмножеств. Подмножества $K, K \subset \overline{1,N}$, упорядочиваем по возрастанию их мощности: от одноэлементных до подмножества, содержащего все элементы множества $\overline{1,N}$, и тогда оно совпадает с $\overline{1,N}$. Если мы разделим число подмножеств на количество процессоров и распределим их поровну группами, упорядоченными по возрастанию индексов, то первому процессору достанутся подмножества малой мощности, в то время как последнему достанутся наиболее трудоемкие задания. В такой ситуации первые процессоры закончат работу раньше последних и будут вынуждены простаивать в ожидании обмена полученными результатами. Для того, чтобы избежать подобной ситуации, будем распределять подмножества на процессоры по "модулю k".

– Проиндексируем все подмножества $K \subset \overline{1,N}$ в порядке возрастания мощности. Поскольку количество процессоров равно k, первый процессор получит подмножества с индексами $1, 1+k, 1+2k, \ldots$ второй процессор получит подмножества $2, 2+k, 2+2k, \ldots$ и так далее. В результате такой процедуры подмножества различной мощности относительно равномерно (по мощности) распределяются по процессорам.

– После того, как все процессоры выполнили вычисления на определенном слое, им необходимо обменяться полученными результатами для расчетов на следующем слое $V_i, i \in \overline{1,n}$. Для этого используется функция MPI Allgather.

Заключение

В диссертации исследовались важные для теории и инженерных приложений задачи маршрутизации, связанные с процедурами последовательного демонтажа системы радиационно опасных объектов. Возникающая при этом математическая модель является достаточно сложной и требует разработки серьезных теоретических конструкций для своего исследования. В настоящей работе принята модель мегаполисов, которые подлежат последовательному посещению с целью демонтажа источников излучения при соблюдении определённых ограничений, связанных с учётом особенностей исходной инженерной задачи. Среди упомянутых ограничений особую роль играют условия предшествования, которые удаётся использовать "в положительном направлении"в смысле снижения вычислительной сложности.

В диссертации построены методы и алгоритмы решения упомянутых задач маршрутизации, включая задачи ощутимой размерности. В основе используемых конструкций находится метод ДП, а конструируемые на его основе параллельные алгоритмы реализованы в виде стандартных программ на языке C++ для МВС. Эти алгоритмы используют идеи, заложенные в схемах с независимыми вычислениями слоев функции Беллмана. Они реализованы в двух вариантах:

1. точные алгоритмы, доставляющие глобальные экстремум и оптимальные маршруты;
2. алгоритмы, улучшающие качество эвристик за счёт применения оптимизирующих мультивставок (оптимизация "в окнах").

В обоих случаях получено существенное продвижение в плане увеличения размерности решаемых задач. Эту цель удалось достичь за счёт теоретически обоснованного распараллеливания вычислительных процедур. Представляется, что данный подход к решению очень сложных по постановке инженерных задач имеет смысл развивать и в дальнейшем, распространяя упомянутые конструкции на задачи другой природы. Среди таких задач можно отметить задачу управления инструментом при листовой резке на машинах с ЧПУ, задачу авиапожарного патрулирования лесов, транспортные задачи.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации.

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных ВАК РФ и Аттестационным советом УрФУ:

1 Григорьев А.М., Иванко Е.Е., Ченцов А.Г. Динамическое программирование в обобщённой задаче курьера с внутренними работами: элементы параллельной структуры // Моделирование и анализ информационных систем. – 2011. – Т. 18, № 3. – С.101–124. 1.48 п.л./0.35 п.л.

2 Григорьев А.М., Иванко Е.Е.,Князев С.Т., Ченцов А.Г. Динамическое программирование в обобщённой задаче курьера, осложнённой внутренними работами // Мехатроника. Автоматизация. Управление.– 2012.– № 7.– С. 14–21. 0.5 п.л./0.1 п.л.

3 Chentsov A.G., Grigoryev A.M. Scheme of Independent Calculations in a Precedence Constrained Routing Problem // Lecture Notes in Computer Science. 2016. Vol. 9869 : Discrete Optimization and Operations Research - (DOOR 2016): 9th International Conference, Vladivostok, Russia, September 19-23 2016 : Proceedings Paper. P.121–135. 1.73 п.л./0.58 п.л. (Scopus, WoS)

4 Ченцов А.Г., Григорьев А.М. Динамическое программирование в задаче маршрутизации: схема независимых вычислений // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2016. – Т.17,– №12. – С.834–846. 0.94 п.л./0.35 п.л.

5 Chentsov A.G., Grigoryev A.M., Chentsov A.A. Decommissioning of Nuclear Facilities: Minimum Accumulated Radiation Dose Routing Problem // CEUR-WS Proc. 2017. Vol.1987 : 8th Intern. Conf. on Optimization and Applications (OPTIMA-2017), October 2-7, 2017, Petrovac, Montenegro : Proceedings Paper. P. 123–130. 0.5 п.л./0.15 п.л. (Scopus)

6 Ченцов А.Г., Ченцов А.А., Григорьев А.М. Об одной задаче маршрутизации, моделирующей перемещения в радиационных полях // Вестн. УдГУ. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2017. – Т.27, – №4. – С. 540–557. 1.12 п.л./0.35 п.л. (Scopus)

7 Григорьев А.М. Решение задачи об оптимальном распределении заданий методом динамического программирования с применением параллельных вычислений // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. Механика. Компьютер. науки. – 2017. – Т.27, – №1. – С. 129–137. 0.56 п.л./0.56 п.л. (Scopus)

8 Chentsov A.G., Grigoryev A.M., Chentsov A.A. Optimizing the starting point in a precedence constrained routing problem with complicated travel cost functions // Ural Mathematical Journal. – 2018. – Vol.4, – no 2. – pp. 43–55. 0.8 п.л./0.2 п.л.

9 Grigoryev A.M., Tashlykov O. L. Solving a routing optimization of works in radiation fields with using a supercomputer // AIP Conference Proceedings.– 2018.– Vol.2015. Art. no.020028. – 6 p. 0.37 п.л./0.25 п.л. (Scopus, WoS)

10 Chentsov A.G., Grigoryev A.M., Chentsov A.A. Solving a Routing Problem with the Aid of an Independent Computations Scheme // Bulletin South Ural State Univ. Ser. Math. Modelling, Programming & Computer Software (Bulletin SUSU MMCS). – 2018. – Vol. 11, – no. 1. – P.60–74. 0.93 п.л./0.25 п.л. (Scopus, WoS)

11 Ченцов А.Г., Григорьев А.М. Оптимизирующие мультивставки в задачах маршрутизации // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. Механика. Компьютер. науки. – 2018. – Т. 28,– № 4.– С. 513–530. 1.12 п.л./0.35 п.л. (Scopus, WoS)

12 Chentsov A.G., Grigoryev A.M., Chentsov A.A. Optimization “In Windows” for Routing Problems with Constraints // Communications in Computer and Information Science. 2019. Vol. 1090: Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019). : 18th Intern. Conf. P. 470-485. 0.97 п.л./0.25п.л. (Scopus)

13 Grigoryev A.M., Tashlykov O. L. Route optimization during works in non-stationary radiation fields with obstacles // AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol.2174. Art. no.020216. – 6 p. 0.37 п.л./0.25 п.л. (Scopus, WoS)

Прочие публикации:

14 Григорьев А.М., Иванко Е.Е., Ченцов А.Г. К вопросу о применении параллельных алгоритмов для решения задач маршрутизации

по методу динамического программирования // Анализ моделирование, развитие экономических систем : V междунар. шк.-симп. АМУР-2011,г. Севастополь: тез. докл. Симферополь: ТНУ им. В.И. Вернадского, – 2011. – С. 14.

15 Григорьев А.М., Иванко Е.Е., Ченцов А.Г., Сесекин А.Н., Ташлыков О.Л., Щеклеин С.Е. Решение задач маршрутизации применительно в радиационно опасным объектам с использованием суперкомпьютера "Уран" // Безопасность АЭС и подготовка кадров: тез. докл. 12-й Междунар. конф.- Обнинск, 2011.– Т.2.– С.103–105.

16 Григорьев, А. М. Решение минимаксной распределительной задачи методом динамического программирования с применением параллельных вычислений // Научный сервис в сети Интернет: экзафлопсное будущее: труды Междунар. суперкомпьютерной конф. - М.: Изд-во МГУ, – 2011. – С. 580–586.

17 Григорьев А.М., Иванко Е.Е., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Параллельная реализация метода динамического программирования в обобщенной задаче курьера // Междунар. суперкомпьютер. конф. "Научный сервис с сети Интернет: поиск новых решений Абрау-Дюрсо,– 2012: труды. С.315–319.

18 Григорьев, А.М., Ташлыков О.Л. Решение задачи маршрутной оптимизации работ в радиационных полях с использованием супервычислителя // V Междунар. молодеж. науч. конф., посвящ. памяти Почет. проф. УрФУ В. С. Кортова : тез. докл. Екатеринбург: УрФУ, – 2018. – Секц.5. – С. 27–28.

19 Григорьев, А.М., Ташлыков О.Л. Решение задачи маршрутной оптимизации работ в радиационных полях с учетом обхода препятствий // Безопасность АЭС и подготовка кадров : XV Междунар. конф. 26-28 нояб. – 2018. – Обнинск. – С. 302–304.

20 Ченцов А.Г., Григорьев А.М., Ченцов А.А. Экстремальная маршрутизация с выбором точки старта и ее применение в задаче о демонтаже излучающих элементов // Анализ, моделирование, управление, развитие социально-экономических систем (АМУР-2018): XII Междунар. шк.-симп.: сб. науч. трудов. Симферополь, – 2018. – С. 488–496.

21 Chentsov A.G., Grigoryev A.M., Chentsov A.A. Procedures of local optimization in routing problems with constraints // Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR 2019): abstr. XVIII Intern. Conf., July 8-12, 2019, Ekaterinburg, Russia. Ekaterinburg: IMM UB RAS, 2019.

22 Григорьев, А.М., Ташлыков О.Л. Оптимизация маршрута перемещений при проведении работ в нестационарных радиационных полях с учетом обхода препятствий // Физика. Технологии. ИнновациФТИ-2019 :VI Междунар. молодеж. науч. конф., посвящ. 70-летию основания Физико-технологического института, Екатеринбург, 20-24 мая 2019. Екатеринбург, – 2019. – С. 863–864.

23 Ченцов А.Г., Григорьев А.М. Оптимизирующие мультивставки в экстремальных задачах маршрутизации // Материалы XII мультиконференции по проблемам управления (МКПУ-2019), 23-28 сентября 2019, Дивноморское, Геленджик. 5 с.

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

1. А.М. Григорьев, Программа для параллельной реализации динамического программирования в задачах маршрутизации с ограничениями ParallelFindRoute // ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ, (12) ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ. — № 2017661077. — дата регистрации 03.10.2017.
2. А.М. Григорьев, Программа для нахождения оптимального маршрута исполнителем в нестационарных радиационных полях // ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ, (12) ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ. — № 2019663513. — дата регистрации 17.10.2019.
3. А.М. Григорьев, Программа для параллельной реализации ДП в задачах об оптимальном распределении заданий // ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СОБСТВЕННОСТИ, (12) ГОСУДАРСТВЕННАЯ РЕГИСТРАЦИЯ ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ. — № 2019663471. — дата регистрации 17.10.2019.