

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Институт радиоэлектроники и информационных технологий – РтФ
Кафедра информационных технологий и систем управления

На правах рукописи

ЧЕРНОСКУТОВ АЛЕКСАНДР ИГОРЕВИЧ

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ГРАВИМЕТРИИ ПРИ ПОСТРОЕНИИ
ТРЕХМЕРНЫХ ПЛОТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЗЕМНОЙ КОРЫ С УЧЕТОМ
ФОРМЫ ПЛАНЕТЫ

Специальность 05.13.18 –

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН
Мартышко Петр Сергеевич

Екатеринбург 2020

Оглавление

Оглавление	2
Введение	4
Глава 1. Обзор современных подходов к исследованию проблемы	12
Глава 2. Решение прямой задачи гравиметрии для «сферических» моделей	19
Постановка прямой задачи.....	19
Метод многогранников.....	21
Погрешность и сходимость метода.....	24
Замена удаленных гравитирующих элементов сингулярными источниками.....	27
Решение прямой задачи для региональной модели.....	29
Программная реализация алгоритма.....	30
Глава 3. Оценка порядка поправки «за сферичность» для разномасштабных моделей	33
Оценка погрешности для моделей с постоянным и сингулярным распределением плотности	34
Метод проектирования «плоской» плотностной модели в «сферическую»	55
Трехмерные модели с изолированным «сферическим» параллелепипедом.....	56
Оценка погрешности для региональных моделей.....	61
Обсуждение результатов	62

Глава 4. Решение обратной задачи гравиметрии для «сферических» моделей	64
Начальное приближение	64
Постановка задачи оптимизации.....	64
Восстановление региональной модели.....	66
Заключение.....	74
Литература.....	78
Публикации по теме диссертации.....	85
Приложение 1. Инструкция пользователя программного обеспечения «GRAFEN v0.1».....	88

Введение

Интерпретация значений силы тяжести как источника информации о структуре земной коры и подкорового слоя является важным направлением современной геофизики. Всякое аномальное распределение плотности (т.е. отличающееся от некоторого «нормального» референс-распределения) находит свое отражение в гравитационном поле Земли, что позволяет использовать данные гравиметрии для решения широкого круга практических (поиск и разведка полезных ископаемых) и фундаментальных задач (глубинное строение планеты).

Актуальность работы

Благодаря развитию современных вычислительных технологий и их широкому распространению в последнее десятилетие стало возможным производить численное решение прямых и обратных задач гравиметрии для моделей большой размерности (с количеством элементов разбиения порядка 10^8) [Куприенко, 2007; Мартышко, 2013]. Это, в свою очередь, позволяет исследовать территории большой протяженности («региональные» модели). Часто при численном решении прямых и обратных задач рассматриваются модели с кусочно-постоянным распределением плотности, заданном в области, ограниченной параллелепипедом («плоская» модель) [Страхов, 1984; Павленкова, 1991; Куприенко 2007; Дружинин, 2014]. Упрощение геометрической формы рассматриваемого объекта позволяет существенно ускорить процесс расчётов (в виду более простых с вычислительной точки зрения выражений, описывающих гравитационное поле). Однако, такое упрощение вносит в решение ошибку, связанную с неучетом «сферической» формы Земли; с увеличением размеров модели эта погрешность растёт и в ряде случаев точность решения может быть неудовлетворительной поставленным требованиям. Повышенный в последние

годы интерес к проблеме решения обратных задач для региональных моделей и к проблеме учета «сферичности» [Долгаль, 2015; Долгаль, 2017; Uieda, 2015; Grombein, 2013] подчёркивает высокую актуальность рассматриваемой темы.

Цель работы

Цель работы – определить геометрические характеристики моделей, для которых необходим учет сферической формы Земли при решении прямых и обратных задач гравиметрии, провести оценку погрешности за неучет «сферичности» для моделей различной протяженности, предложить вычислительно эффективный способ решения прямой и обратной задачи для региональных моделей с большим числом элементов разбиения.

Задачи исследования

- Определить влияние выбора метода проектирования «плоской» плотностной модели в «сферическую» на разницу в вычисляемом гравитационном поле для ряда двумерных и трехмерных синтетических примеров с сингулярным и постоянным распределением плотности. Обосновать выбор предлагаемого метода проектирования.
- Предложить вычислительно эффективный метод решения прямой задачи гравиметрии для эллипсоидальной модели с кусочно-постоянным распределением плотности, заданным на иррегулярной сетке (в геодезической системе координат). Провести ряд численных экспериментов для синтетических моделей, позволяющих получить оценку погрешности и качество сходимости метода (в зависимости от выбранного диаметра разбиения). Сравнить скорость решения задачи предложенным методом с «классическим» методом интегрирования по кубатурным формулам.

- Получить решение прямой задачи гравиметрии для практической региональной модели высокого разрешения с преобразованием ее в «сферическую». Сравнить вычисленное поле с полем исходной модели. Полученную невязку считать погрешностью за неучет «сферичности». Построить задачу оптимизации, обеспечивающую единственность и стабильность решения обратной задачи гравиметрии для полученной невязки. Решая эту задачу градиентным методом, уточнить исходную плотностную модель.

Положения, выносимые на защиту

1. Предложенное трехмерное отображение «плоской» плотностной модели в «сферическую», основанное на преобразовании Гаусса-Крюгера, сохраняющее расстояние вдоль нормали к поверхности Земли, наследует качественные характеристики модели, внося минимальные искажения в вычисляемое поле.
2. При решении линейной обратной задачи гравиметрии с учетом «сферичности» в качестве начального приближения можно использовать решение обратной задачи в «плоской» постановке. Ошибка в поле «за сферичность» при построении региональных плотностных моделей коры Земли (протяженностью порядка 1000км x 1000км и мощностью 100км) составляет 5%.
3. Предложенный алгоритм численного решения прямой задачи гравиметрии эффективно реализован на сетках большой размерности с использованием современных распределенных вычислительных систем. Для рассмотренных региональных моделей алгоритм требует $\sim 10^3$ раз меньше элементов разбиения (в латеральной плоскости), чем метод численного интегрирования Гаусса-Лежандра при достижении эквивалентной точности.

4. Разработанное программное обеспечение позволяет численно решать прямую и обратную задачу гравиметрии для практических региональных плотностных моделей высокого разрешения. Программное обеспечение оптимизировано для использования на распределенных вычислительных системах (суперкомпьютерах) с графическими ускорителями.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе используется математический аппарат численных методов интегрирования и оптимизации, аппарат теории некорректных задач и геофизического моделирования. При разработке программного обеспечения, реализующего алгоритмы, использованы технологии распределенных высокопроизводительных вычислений на графических ускорителях (Nvidia CUDA, AMD ROCm).

Научная новизна

Проведено комплексное исследование влияние неучета сферической формы планеты на результат решения задач гравиметрии: подробно рассмотрены примеры моделей различной протяженности (от десятков до тысячи километров) с качественно различным способом задания распределения плотности в них. Приведены сравнения результатов вычисления гравитационного поля от исходных («плоских») моделей и их сферических аналогов, согласно которым ввод учета «сферичности» может быть необходим при рассмотрении плотностных моделей протяженностью порядка 1000км x 1000км и мощностью порядка 100км (погрешность «за неучет сферичности» в поле составляет ~5%). Предложен способ преобразования моделей в «сферические», сохраняющий качественные характеристики моделей и дающий малую погрешность в поле. Предложен вычислительно эффективный метод решения прямых и обратных задач гравиметрии для «сферических» моделей.

Теоретическая и практическая значимость

Предложенный метод позволяет получить более точные решения обратной задачи гравиметрии для моделей протяженных территорий Земли. Более эффективное использование вычислительных ресурсов по сравнению с «классическими» методами численного интегрирования делает практически целесообразным восстановление плотностных моделей высокого разрешения (с количеством элементов порядка 10^8). Детализированные плотностные модели коры планеты, построенные с использованием высокоточных алгоритмов, являются основным источником информации о ее строении. Метод также может быть применен для изучения строения других небесных тел.

При соответствующей замене поля элемента разбиения в методе конечных элементов предложенные алгоритмы могут быть использованы для решения прямых и обратных магнитометрии.

Достоверность результатов исследований подтверждается согласованностью результатов проведенных численных экспериментов с применением различных методов. Разработанное в ходе исследования программное обеспечение решения прямой и обратной задачи гравиметрии для «сферических» плотностных моделей, оптимизированное для использования на распределенных вычислительных системах с графическими ускорителями, опубликовано в открытом доступе в сети «Интернет» (исходные коды, исполняемые файлы, примеры моделей). Данное программное обеспечение может быть использовано для воспроизведения результатов исследования.

Апробация работы

Основные положения работы были представлены на следующих международных и российских конференциях:

1. International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (Greece, 2016);

2. Девятые научные чтения памяти Ю.П. Булашевича (Россия, 2017);
3. 3rd International Workshop on Radio Electronics & Information Technologies. CEUR Workshop Proceedings (Russia, 2018);
4. 18th International Conference on Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects (Ukraine, 2019);
5. 46-я сессия Международного семинара им. Д.Г. Успенского. Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей (Россия, 2019);
6. 47-я сессия Международного семинара им. Д.Г. Успенского. Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей (Россия, 2020).

Публикации

Количество работ, опубликованных по теме диссертации:

- публикации в рецензируемых изданиях, определенных ВАК и Аттестационным советом УрФУ – **5** (из них 3 индексируемых Web of Science и Scopus и 2 индексируемых только Scopus);
- прочие публикации – **8** (индексируемых РИНЦ).

Структура и объем работы

В главе 1 приводится обзор современных работ, посвященных проблематике решения прямых и обратных задач гравиметрии для «сферических» плотностных моделей с практическими приложениями.

В главе 2 предлагается эффективный (с вычислительной точки зрения) подход к численному решению прямой задачи гравиметрии для моделей произвольной геометрии (в приложениях нас в основном будут интересовать эллипсоидальные модели). На основе этого метода разработано программное обеспечение для распределенных вычислительных систем, использующее

современные технологии распараллеливания вычислений. В главе приведен ряд численных экспериментов для определения погрешности за неучет «сферической» формы Земли в решении прямой задачи. Полученные результаты показывают, что для территорий протяжённостью порядка 1000x1000км и мощностью порядка 100км погрешность составляет единицы процентов в поле, что позволяет использовать «сферические» методы решения обратных задач лишь для уточнения результата, полученного для «плоской» модели.

В главе 3 рассматривается ряд 2-х и 3-х мерных синтетических моделей с сингулярным и постоянным распределением плотности различной протяженности. Производится сравнение рассчитанного гравитационного поля для «плоских» моделей и их «сферических» аналогов.

В главе 4 предлагается метод построения задачи оптимизации для решения «сферической» обратной задачи гравиметрии. Для имеющихся в распоряжении автора двух плотностных моделей уральского региона и измеренного гравитационного поля было построено решение обратной задачи гравиметрии с учетом «сферичности», что позволило улучшить их точность.

Полный объем диссертации 90 страниц текста с 17 рисунками, 7 таблицами и 1 приложением. Список литературы включает 51 наименование.

Благодарности

Автор диссертационной работы выражает благодарность своему научному руководителю – доктору физико-математических наук, член-корреспонденту РАН, Мартышко Петру Сергеевичу за привлечение интереса к выбранной теме, всестороннюю поддержку в ходе проводимого исследования, а также предоставленную возможность работы в группе талантливых ученых – сотрудников лаборатории математической геофизики Института геофизики имени Ю.П. Булашевича.

Исследование выполнено при поддержке Российского Фонда
Фундаментальных Исследований (проект № 17-05-00916 А), работы по которому
стали основой данной диссертации.

Глава 1. Обзор современных подходов к исследованию проблемы

Существенный прогресс по разработке алгоритмов решения прямых и обратных задач гравиметрии и методов интерпретации наблюдаемых данных был получен в 1970-1980 годах в работах В.Н. Страхова, А.В. Цирульского, В.Н. Старостенко, Е.Г. Булаха, А.А. Никитина.

С использованием уравнения теоретической обратной задачи В.К. Иванова [Иванов, 1956] в двумерном случае получены фундаментальные результаты по исследованию разрешимости обратной задачи в конечном виде и доказательства наличия эквивалентных решений [Цирульский А.В., Никонова Ф.И., Федорова Н.В., 1980]. Подчеркнем, что прогресс по решению двумерных задач был получен с использованием аппарата ТФКП (интегралы типа Коши и конформные отображения). В трехмерном случае не удается разработать аппарат для аналитического решения обратных задач. Поэтому интерпретация практических данных выполняется на основе численных алгоритмов. При этом предполагается, что имеются гравитационные данные на планшете с учетом рельефа [Страхов В.Н., Романюк Т.В., 1984; Никитин А.А., 1997; Кобрунов А.И., 1982; Петров А.В., 2000; Страхов В. Н., 2004; Мартышко, 2013; Ладовский И.В., 2017а; Старостенко В.И., 1998; Балк П.И., Долгаль А.С., 2009; Glaznev V.N., 2015; Степанова И.Э., 2011].

В последнее десятилетие существенно вырос интерес к проблеме учета «сферичности» (при интерпретации данных гравитационных измерений) среди российских и зарубежных авторов, о чем можно судить по количеству публикаций в базах данных WoS и Scopus при поиске по соответствующим

ключевым словам¹. В большинстве работ авторы признают существенную вычислительную сложность общеизвестных методов численного решения прямых и обратных задач гравиметрии для «сферических» моделей, которая не позволяет производить практически обоснованные расчеты для моделей высокого разрешения. В связи с этим, предлагаются различные подходы к оптимизации процесса вычисления прямой задачи, основанные на уменьшении количества переменных интегрирования (однако, численное интегрирование все равно необходимо), либо использовании симметрии элементов разбиения модели.

В данной главе приведен краткий обзор методов, направленных на преодоление высокой вычислительной сложности прямой задачи, предлагаемых различными авторами. Рассмотрены сильные и слабые стороны различных подходов.

В работе [Uieda, 2011] вычисление потенциала тессероида предлагается производить с помощью стандартного кубатурного метода Гаусса-Лежандра. Основа оптимизации: динамическое построение сетки разбиения. Для точек наблюдения, близкорасположенных элементу некоторому разбиения, этот элемент рекурсивно разбивается на более мелкие тессероиды до достижения необходимой (заданной) погрешности. Несмотря на существенное ускорение вычислений, этого пока недостаточно для практического решения задач больших размерностей.

В работах [Старостенко, 2013а; Старостенко, 2013б] авторы утверждают, что учет «сферичности» не вносит существенного влияния при решении обратных задач гравиметрии для моделей «с линейными размерами порядка десятков и первых сотен км».

¹ Ключевые слова: the earth's crust, gravity data modeling, gravity problem, gravimetry, accounting for the earth's sphericity, gravitational potential, tesseroid, marussi tensor, topographic reductions, mass elements, topographic reduction, point-mass modelling, ellipsoidal coordinates.

Для вычисления гравитационного потенциала от «сферической» модели используется разбиение модели на сферические многогранники. Получено интегральное представление потенциала для сферического многогранника, в котором тройной интеграл (по ϕ, λ, r) сведен к одинарному интегралу по λ . Такое выражение позволяет существенно увеличить точность и уменьшить время счета: требуется производить численное интегрирование только по одной из координат.

Получены выражения потенциала для переменной по r плотности и для элемента, у которого верхняя и нижняя границы заданы как линейные функции ϕ, λ . Однако, для решения практических задач данные случаи не являются существенными.

Для численного решения задачи используются кубатурные формулы Гаусса-Лежандра. Несмотря на сведение тройного интеграла к одинарному, метод все еще не может быть применен для решения задач с региональными моделями (линейные размеры элемента разбиения порядка $1 \times 1 \times 1$ км). Каждый из таких элементов модели потребуется дополнительно разбивать на не менее, чем 10^3 элементов до достижения погрешности порядка процента.

Не выведена формула для градиента потенциала, который представляет основной интерес при решении практических прямых и обратных задач гравиметрии.

В численных экспериментах, рассмотренные примеры плотностных моделей представляют из себя изолированные единичные многогранники с линейно-переменной по глубине плотностью. Расчеты для практических плотностных моделей, в которых распределение плотности задаётся как кусочно-постоянная функция, требуют вычисления поля от порядка 10^8 таких многогранников в количестве точек порядка 10^6 . Расчет моделей такого разрешения предложенным методом будет непрактичным из-за слишком большого времени вычисления.

Авторы работы [Сеначин, 2015] приводят примеры, согласно которым при трехмерном региональном моделировании эффекты, связанные с неучетом сферической формы Земли, начинают проявляться только при изучении площадей более 20 млн. км² (мощность модели - 30км). В приведенном примере для оценки погрешности «за сферичность», как модельные эквиваленты рассматриваются "горизонтальный плоский диск" и "сферический сегмент". Отображение между этими объектами не удовлетворяет одному из основных требований для картографических проекций: условию сохранения расстояний. В публикации не приведены координаты точек в которых сравнивается поле модельных примеров, что не позволяет воспроизвести результаты эксперимента.

В работе [Кузнецов, 2017] отмечается, что согласно "принципу эквивалентности", гравитационный эффект широтного пояса может быть записан в виде круговой дискретной свертки функции плотности и гравитационного эффекта элемента. Предлагается использовать алгоритмы прямого и обратного БПФ для ускорения вычисления данной свертки. Как и в ранее рассмотренных работах, использование равномерной сетки в сферических координатах ограничивает применимость алгоритма; метод не упрощает вычисление гравитационного эффекта элемента разбиения; применение алгоритмов БПФ ведет к неизбежной потере точности вычислений. Также стоит отметить невозможность использования метода для участка земной коры, ограниченного меридианами (из-за отсутствия периода у рассматриваемых функций и сложностей, связанных с их продолжением).

Предлагаемая в работе [Zhao, 2019] оптимизация решения прямой задачи основана на том факте, что вклад в гравитационный потенциал от элемента разбиения единичной плотности зависит только от относительного положения вершин тессероида и точки наблюдения ("принцип эквивалентности"). Вдоль орт сферической системы координат вводится равномерное разбиение для плотностной модели и поверхности наблюдения. Таким образом, построенная

модель обладает рядом симметрий, позволяющих использовать описанный принцип эквивалентности для существенного снижения (десятичный порядок) количества вычислений ядровой функции интеграла и снижения объема памяти, необходимого для решения задачи (на тот же порядок). Приводится решение практической обратной задачи (восстановление плотности участка лунной коры) с использованием предложенного метода.

Равномерная сетка в сферических координатах не подходит для моделирования областей, удаленных от экватора и имеющих существенную меридианную протяженность. Различие объемов элементов разбиения в такой модели негативно скажется на точности решения близ экватора.

Приведенная в работе практическая модель имеет общее количество элементов разбиения и точек наблюдения поля порядка 10^{10} , однако при рассмотрении региональных моделей возникают значения порядка 10^{14} . Метод не является достаточно оптимальным для практического решения задач больших размерностей.

Продемонстрирован расчет поля на высоте 10км от поверхности модели - для задач точного гравитационного моделирования требуется расчет поля непосредственно на поверхности модели.

При решении обратной задачи не используются априорные данные для модели начального приближения, что приводит к тому, что распределение плотности по глубине полностью определяется заданием свободных коэффициентов целевого функционала. Из-за эффекта "растягивания" плотностных аномалий по глубине, полученные значения плотности существенно (порядка 100%) отличаются от реальных (заданных в модельном примере).

Подводя итоги по рассмотренным работам, можно заключить, что относительно небольшое количество авторов задаются вопросами о необходимости учета «сферичности» для практических моделей: какой порядок

протяженности или разбиения приведет к существенным погрешностям при замене «сферического» сегмента на «плоский» и каков порядок этих погрешностей. Представленные же результаты не полны: отдельные авторы рассматривают узкие классы примеров (например, только для сингулярных распределений [Бычков, 2015] или для правильных геометрических объектов постоянной плотности [Сеначин, 2015]). Разнятся и выводы этих исследований, не дается конкретной методологии определения необходимости учета «сферичности» для конкретного частного случая. Все это приводит к необходимости воспроизвести продемонстрированные авторами эксперименты, дополнить их примерами региональных моделей и на основании полученных результатов сделать выводы о связи характеристик плотностной модели с получаемой «погрешностью за неучет сферичности».

Особый интерес будет представлять исследование влияния учета «сферичности» на практические региональные модели высокого разрешения. Для возможности сопоставления «плоских» и «сферических» трехмерных моделей (с произвольно заданной функций распределения плотности) необходимо выбрать непрерывное обратимое отображение между ними, сохраняющее морфологические особенности (и, как следствие, геологическую содержательность) модели. Многие из упомянутых выше авторов не ставили задачу о нахождении такого преобразования, ограничившись сравнением моделей постоянной плотности (параллелепипеда и тессероида), либо моделей с точечными источниками. Приведенные подходы невозможно применить для преобразования практических трехмерных моделей, в которых распределение плотности задано кусочно-постоянной функцией. Таким образом, для возможности рассмотрения данных моделей необходимо будет выбрать преобразование, отвечающее поставленным критериям.

Несмотря на явное выделение авторами необходимости снижения вычислительной сложности решения прямой задачи гравиметрии для

«сферических» тел, рассматриваемые практические приложения не могут в полной мере использовать современные гравиметрические данные высокого разрешения. Общая проблема, которая свойственна всем приведенным исследованиям, заключается в недостаточной оптимизации процесса вычисления гравитационного поля элемента разбиения модели. Для практической применимости методов и изучения региональных моделей требуется ускорить вычисления на 1-2 десятичных порядка, даже с учетом использования современных распределенных вычислительных систем - суперкомпьютеров. Также некоторые подходы накладывают дополнительные условия на рассматриваемую модель, такие как периодичность функции распределения плотности (что не позволяет рассматривать ограниченные по широте и долготе сферические сегменты) или равномерное разбиение по сферическим (географическим) координатам (что приводит к потере детализации модели близ экватора или к излишне плотному разбиению близ полюсов). В то же время, нельзя сказать, что предложенные подходы проработаны недостаточно «глубоко», напротив, в рассмотренных направлениях сложно получить существенно лучшие результаты с точки зрения оптимизации вычислений. Это приводит к необходимости поиска других способов и алгоритмов численного счета гравитационного поля для моделей сферической геометрии.

Глава 2. Решение прямой задачи гравиметрии для «сферических» моделей

Постановка прямой задачи

Определим «эллипсоидальную» трехмерную плотностную модель до глубины H . Пусть ее «верхняя» граница S (со стороны раздела земля-воздух) – часть поверхности эллипсоида вращения (например, референц-эллипсоида Красовского), все точки, расположенные на расстоянии не более H вдоль внутренней нормали к S , включены в модель. В указанной области $D \subset \mathbb{R}^3$ задано распределение плотности $\rho(p)$, $p \in D$. Визуальное представление модели показано на Рисунке 2.1.

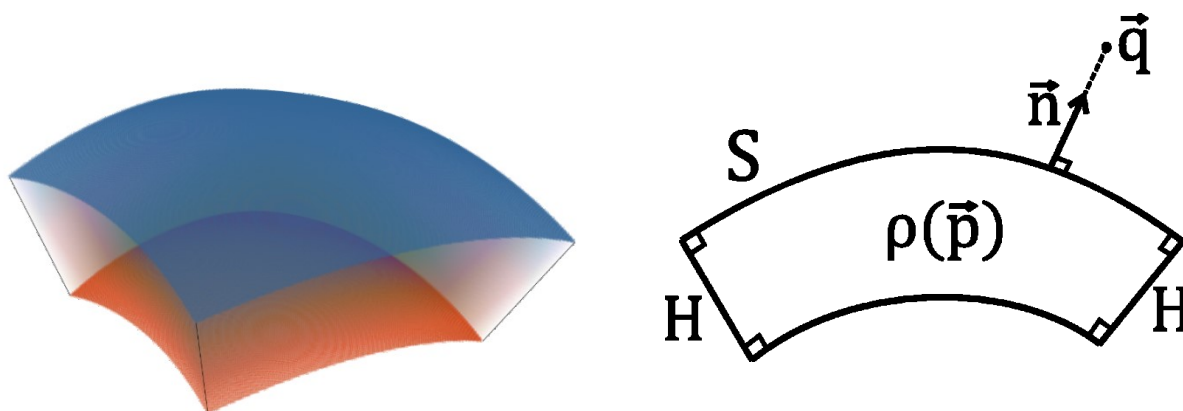


Рисунок 2.1. Визуальное представление «сферической» модели.

«Вертикальная» составляющая Δg напряженности гравитационного поля, создаваемого областью D , во внешней точке $q \notin D \setminus \partial D$ определяется интегралом:

$$\Delta g(q) = -\gamma \frac{\partial}{\partial \vec{n}_q} \int_D \frac{\rho(p) dV_p}{|\vec{p} - \vec{q}|}, \quad (2.1)$$

где γ – гравитационная постоянная, \vec{p} и \vec{q} – радиус-векторы соответствующих точек, dV_p – элемент объема интегрирования, \vec{n}_q – внешняя нормаль к S в ортогональной проекции точки q на S (т. е. в случае «сферической» модели \vec{n}_q

совпадает нормалью к поверхности эллипсоида, в случае «плоской» модели – с нормалью к горизонтальной поверхности). Стоит отметить, что данная формула описывает проекцию полного вектора напряженности гравитационного поля на единичный вектор \vec{n}_q , тем самым Δg – часть полного поля в направлении \vec{n}_q .

Пусть «базовый» эллипсоид вращения (т.е. эллипсоид, частью поверхности которого является верхняя граница S' модели) для нашей «сферической» модели D' имеет экваториальный и полярный радиусы равные a и b . Положение точки на поверхности эллипсоида вращения однозначно определяют геодезические широта $B \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и долгота $L \in (-\pi; \pi]$ (за исключением «полюсов», где долгота не определена). В качестве третьей координаты примем расстояние от точки до поверхности эллипсоида взятое со знаком «+», если точка лежит вне эллипсоида, со знаком «-», если точка лежит внутри него. Положение точки в пространстве однозначно определяется тремя величинами: (L, B, H) , если положить $H > -N(1 - e^2)$. Здесь $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$ – радиус кривизны первого вертикала, $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ – эксцентриситет эллипсоида. При выборе строгого неравенства в ограничении на глубину H данная тройка параметров не определяет область круга радиусом ae^2 с центром в центре эллипсоида, расположенного в «экваториальной» плоскости; если выбрать нестрогое неравенство – для внутренней области того же круга теряется однозначность. На оси вращения долгота не определена.

Построим разбиение области D на элементы $D_{i,j,k}$ таким образом, что $D = \cup_{i,j,k} D_{i,j,k}$ $i = 1, 2, \dots, N_i$; $j = 1, 2, \dots, N_j$; $k = 1, 2, \dots, N_k$. Поле Δg в точке q от всей модели D можно записать через сумму, как и для случая «плоской» модели [Мартышко, 2013], но от «сфероидальных» элементов разбиения:

$$\Delta g(q) = \gamma \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} \sum_{k=1}^{N_k} \rho_{i,j,k} G_{i,j,k}(q), \quad (2.2)$$

где $G_{i,j,k}(q)$ – поле в точке q с точностью до коэффициента γ области $D_{i,j,k}$ с единичной плотностью. Для вычисления $G_{i,j,k}(q)$ введем в пространстве эллипсоидальной модели прямоугольную геоцентрическую систему координат $Oxyz$: центр O поместим в центр «базового» эллипсоида, ось Oz совместим с его осью вращения и направим от «южного полюса» к «северному» (т.е. точки с $B = \frac{\pi}{2}$ имеют $z > 0$), ось Ox направим в точку $(0,0,0)$ пересечения «экватора» и нулевого меридиана, ось Oy дополняет систему до правой. Формулы перехода от координат (L, B, H) к (x, y, z) следующие:

$$\begin{cases} x = (N + H) \cos B \cos L \\ y = (N + H) \cos B \sin L \\ z = (N(1 - e^2) + H) \sin B \end{cases}, \quad (2.3)$$

при этом

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos B \cos L \\ \cos B \sin L \\ \sin B \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

есть вектор единичной внешней нормали к эллипсоиду в точке $(L, B, 0)$.

Метод многогранников

Интеграл (2.1) для поля $G_{i,j,k}(q)$, очевидно, аналитически не выражается. Численно по кубатурным формулам его посчитать также проблематично (как будет показано в дальнейшем), поскольку на границы $D_{i,j,k}$ мы не накладываем никаких дополнительных ограничений с целью сохранить возможность выбора произвольного разбиения, а с формулами численного интегрирования первого – второго порядка для достижения приемлемой точности потребуется большое число узловых точек. Поэтому мы предлагаем вычислять интеграл (2.1) не от самих элементов $D_{i,j,k}$, а от близких им по форме аппроксимирующих многогранников $\hat{D}_{i,j,k}$ [Мартышко, 2018]. Построить такой многогранник можно

проведя триангуляцию $D_{i,j,k}$ в пространстве $Oxyz$. Множество всех треугольников образует множество граней $\widehat{D}_{i,j,k}$, обозначим его $\mathbb{S}(\widehat{D}_{i,j,k})$. Таким образом,

$$G_{i,j,k}(q) \approx \widehat{G}_{i,j,k}(q) = -\frac{\partial}{\partial \vec{n}_q} \int_{\widehat{D}_{i,j,k}} \frac{dV_p}{|\vec{p} - \vec{q}|}, \quad (2.5)$$

где q – точка вычисления поля в геоцентрической системе прямоугольных координат (2.3); \vec{n}_q – внешняя нормаль к поверхности «базового» эллипсоида в ортогональной проекции точки q на нее, вычисляемая по формуле (2.4); по точке p ведется интегрирование, в том же преобразованном пространстве координат $Oxyz$.

Перейдем в (2.5) к интегрированию по поверхности, воспользовавшись формулой Остроградского:

$$\widehat{G}_{i,j,k}(q) = \left(\vec{n}_q, \int_{\widehat{D}_{i,j,k}} \nabla_p \left(\frac{1}{|\vec{p} - \vec{q}|} \right) dV_p \right) = \left(\vec{n}_q, \oint_{\partial \widehat{D}_{i,j,k}} \frac{\vec{n}_p}{|\vec{p} - \vec{q}|} dS \right).$$

Далее разобьем поверхностный интеграл на части по граням $\widehat{D}_{i,j,k}$, принимая во внимание, что внешняя нормаль \vec{n}_p в точке интегрирования постоянна для каждой грани:

$$\widehat{G}_{i,j,k}(q) = \sum_{S_{i1} \in \mathbb{S}(\widehat{D}_{i,j,k})} (\vec{n}_q, \vec{n}_{i1}) \int_{S_{i1}} \frac{dS}{|\vec{p} - \vec{q}|}, \quad (2.6)$$

где \vec{n}_{i1} – внешняя нормаль к грани S_{i1} . Осталось записать формулу для внутреннего интеграла в (2.6) от треугольника S_{i1} .

Обозначим: \vec{r}_i ($i = 1, 2, 3$) – радиус-вектора вершин треугольника $\langle p_1, p_2, p_3 \rangle$, $\vec{a}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_0$ – расстояние от точки q до этих вершин. Каждый из треугольников можно задать через направляющие вектора $\vec{a}_{j,i} = \vec{a}_i - \vec{a}_j = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ и определить нормаль через векторное произведение $\vec{N} = [\vec{a}_{i-1,i}; \vec{a}_{i,i+1}]$, при этом $|\vec{N}|$ равен удвоенной площади треугольника. Расстояние (со знаком) от точки наблюдения q

до плоскости треугольника вычисляется через скалярное произведение $(\vec{a}_i; \vec{n})$, где $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ – единичная нормаль. Интеграл по треугольной грани S_{i1} вычисляется в явном (аналитическом) виде [Мартышко, 2018]:

$$\int_{\langle \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3 \rangle} \frac{dS}{|\vec{p} - \vec{q}|} = -\frac{\pi}{2} |(\vec{a}_1; \vec{n})| +$$

$$+ \sum_{i=1}^3 (\vec{a}_i; [\vec{A}_{i-1,i}; \vec{n}]) \ln \frac{(\vec{A}_{i-1,i}; \vec{a}_i) + |\vec{a}_i|}{(\vec{A}_{i-1,i}; \vec{a}_{i-1}) + |\vec{a}_{i-1}|} -$$

$$-(\vec{a}_i; \vec{n}) \operatorname{arctg} \frac{([\vec{a}_{i-1,i}; \vec{a}_i]; [\vec{a}_{i,i+1}; \vec{a}_i])}{(\vec{a}_i; \vec{N}) |\vec{a}_i|}, \quad (2.7)$$

где $\vec{A}_{j,i} = \frac{\vec{a}_{j,i}}{|\vec{a}_{j,i}|}$.

Резюмируем процесс вычисления вертикальной компоненты поля $\Delta g(q)$ от «сферической» модели D :

1. выбираем триангуляцию элемента разбиения $D_{i,j,k}$, таким образом аппроксимируя его многогранником $\widehat{D}_{i,j,k}$, и получаем множество граней $\mathbb{S}(\widehat{D}_{i,j,k})$, все координаты при этом – в декартовой системе $Oxyz$;
2. при помощи формул (2.6) и (2.7) считаем вертикальную компоненту поля $\widehat{G}_{i,j,k}(q)$ многогранника $\widehat{D}_{i,j,k}$ в точке q , вектор нормали \vec{n}_q вычисляем по формуле (2.4);
3. принимаем $G_{i,j,k}(q) \approx \widehat{G}_{i,j,k}(q)$ и, суммируя поля всех $\widehat{D}_{i,j,k}$ по формуле (2.2), находим искомое $\Delta g(q)$.

Погрешность и сходимость метода

Перед решением прямой задачи предложенным методом для реальной плотностной модели определим, какого разбиения модели будет достаточно для получения желаемой точности счета поля, и сравним его с численным вычислением поля пятиточечным методом Гаусса-Лежандра.

Рассмотрим тестовую плотностную модель для «сферической» Земли в виде «вертикальной призмы» мощностью 80 км и трапецией с примерными координатами 60° - 68° с.ш.; 48° - 72° в.д. в основании (точные координаты в проекции Гаусса-Крюгера с осевым меридианом 63° в.д. (11 зона): $x \in [10667, 12002]$ км, $y \in [6654, 7622]$ км). Размер тестовой модели воспроизводит реальную геометрию плотностной модели Уральского региона и его платформенного обрамления (далее «модель Урала»), параметры которой опубликованы в [Мартышко, 2016б]. Для ускорения тестовых расчётов и возможности сравнения различных методик вычислений, примем плотность всей модели равной $2,67$ г/см³. Поле на эллиптической поверхности Земли будем рассчитывать на сетке 32×32 с равномерным шагом по x , y (координаты в проекции Гаусса-Крюгера), координаты границ планшета вычисления поля совпадают с координатами границ модели. Разбиение самой модели производится равномерно по x , y , H . Точность вычисления гравитационных интегралов (точность решения прямой задачи) зависит от шага сеточного разбиения, обеспечивающего триангуляцию криволинейной поверхности с заданной степенью близости. При прочих равных условиях была посчитана прямая задача для трех разбиений вертикальной призмы: $668 \times 484 \times 1$, $1335 \times 968 \times 1$ и $2670 \times 1936 \times 1$ (по x , y , H , соответственно). Шаг разбиения по H выбран равным 80 км (кол-во элементов разбиения равно единице), т. к. для данного метода если плотность многогранников $\hat{D}_{i,j,k}$, приближающих объем однородной плотностной модели не меняется по глубине, то и точность счета поля не зависит от разбиения по глубине. Сравнение полей приведено в Таблице 2.1.

Таблица 2.1. Сравнение полей для различных разбиений тестовой «сферической» плотностной модели. $\Delta g_1^{i,j}$ – поле при меньшем разбиении, $\Delta g_2^{i,j}$ – поле при большем разбиении.

Сравнение разбиений	668x484/ 1335x968	1335x968/ 2670x1936
Абсолютная погрешность, мГал $\max_{i,j} \Delta g_2^{i,j} - \Delta g_1^{i,j} $	0,33	0,0028
Относительная погрешность, % $\max_{i,j} \frac{ \Delta g_2^{i,j} - \Delta g_1^{i,j} }{ \Delta g_2^{i,j} } * 100\%$	0,01	$3*10^{-5}$

Как видно из таблицы, при переходе от разбиения 1335x968 к 2670x1936, абсолютная и относительная погрешности падают до совершенно несущественных величин, поэтому во всех дальнейших вычислениях, для моделей данной геометрии, будем использовать разбиение 1335x968.

Сравним скорость и погрешности счета поля для данной модели методом аппроксимирующих многогранников с пятиточечным методом Гаусса-Лежандра (далее по тексту – метод GL). В Таблице 2.2 приведены результаты сравнений поля, вычисленного предложенным методом для разбиения 1335x968 и вычисленного методом GL для различных разбиений.

Таблица 2.2. Сравнение полей для различных разбиений тестовой «сферической» плотностной модели и методов. $\Delta g_{GL}^{i,j}$ – поле для текущего (для данного столбца) разбиения, метод GL; $\Delta g_{GL-1}^{i,j}$ – поле для меньшего (в 2 раза по x и y) разбиения, метод GL; $\Delta g_P^{i,j}$ – поле, посчитанное предложенным методом для разбиения 1335x968.

Разбиение модели (метод GL)	4096x4096/ 2048x2048	8192x8192/ 4096x4096	16384x16384 / 8192x8192
Абсолютная погрешность, мГал $\max_{i,j} \Delta g_{GL}^{i,j} - \Delta g_{GL-1}^{i,j} $	72,80	34,60	17,30
Разница методов, мГал $\max_{i,j} \Delta g_P^{i,j} - \Delta g_{GL}^{i,j} $	31,70	14,71	5,20
Относительная погрешность, % $\max_{i,j} \frac{ \Delta g_{GL}^{i,j} - \Delta g_{GL-1}^{i,j} }{ \Delta g_{GL}^{i,j} } * 100\%$	0,83	0,42	0,23
Разница методов, % $\max_{i,j} \frac{ \Delta g_P^{i,j} - \Delta g_{GL}^{i,j} }{ \Delta g_{GL}^{i,j} } * 100\%$	0,38	0,20	0,06

Из приведенных в Таблице 2.2 результатов можно сделать вывод, что методы «многогранников» и GL дают примерно одинаковую погрешность при разбиениях 1335x968 и 16384x16384 соответственно. Однако метод GL сходится, т.е. достигает требуемую точность при уменьшении диаметра разбиения, гораздо медленнее, чем метод «многогранников» (для одинакового разбиения модели), при том, что требует значительно больших вычислительных ресурсов на расчёт

поля от элемента разбиения. Мы ограничились максимальным разбиением 16384×16384 в силу исчерпания доступных вычислительных ресурсов. Заметим, что метод «многогранников» имеет потенциал на увеличение элементов разбиения модели и (или) количества точек вычисления поля. Таким образом, для моделей площадью порядка $1000 \times 1000 \text{ км}^2$ использование метода GL становится нецелесообразным в силу слишком неэффективного использования вычислительных ресурсов (см. Таблицу 2.3).

Таблица 2.3. Сравнение времени счета методом GL и методом «многогранников» при использовании одинаковых вычислительных мощностей (два Intel CPU E5-2620).

Метод, разбиение	GL, 8192x8192	GL, 16384x16384	«многогран ников», 1335x968	«многогран ников», 2670x1936
Относительная погрешность, %	0,42	0,23	0,01	$3 \cdot 10^{-5}$
Время	~3 ч.	~12 ч.	143 сек.	~10 мин.

Замена удаленных гравитирующих элементов сингулярными источниками

В [Wild-Pfeiffer, 2007] было предложено заменить формулу гравитационного потенциала элемента разбиения на формулу точечного потенциала для элементов, расположенных за пределами некоторого радиуса R_c точки счета поля. Данный подход позволяет существенно сократить время вычислений за счет уменьшения вычислительной сложности формулы элемента разбиения.

Применим аналогичный подход в нашем алгоритме: выбрав некоторый радиус R_c , заменим все элементы разбиения (многогранники) шарами эквивалентной плотности $\rho_{i,j,k}$. Радиус шара выберем исходя из принципа сохранения масс M элементов разбиения. Центр шара $\vec{r}_{i,j,k}^c$ поместим в центр масс многогранника.

$$\vec{r}_{i,j,k}^c = \frac{1}{V_{i,j,k}} \int_{D_{i,j,k}} \vec{p} dV,$$

где $V_{i,j,k}$ – объем элемента $D_{i,j,k}$, \vec{p} – радиус-вектор точки интегрирования.

R_c выбирается индивидуально для выбранного разбиения модели и зависит (при зафиксированных координатах точек счета поля) от размеров элементов разбиения и соотношения их сторон. В качестве «отправной точки» можно использовать следующее условие выбора R_c :

$$R_c = |\vec{r}^c - \vec{r}_q|, \quad |\hat{G}(q) - \tilde{G}(q)| < \epsilon_c, \quad \tilde{G}(q) = \left(\frac{M(\vec{r}^c - \vec{r}_q)}{|\vec{r}^c - \vec{r}_q|^3}, \vec{n}_q \right),$$

где $\tilde{G}(q)$ – поле шара с точностью до γ , ϵ_c – требуемая погрешность вследствие замены, M – масса шара. Данное выражение позволяет найти расстояние R_c , на котором погрешность замены одного элемента разбиения не превысит ϵ_c . Итоговая погрешность для всей модели не превысит это значение, если все элементы разбиения одинаковы.

Результаты экспериментов (см. Таблицу 2.4) показывают уменьшение время счета на 2 десятичных порядка для рассматриваемых в работе практических моделей при несущественной погрешности. Такое значительное ускорение расчетов – естественно, так как радиус замены очень мал по сравнению с размерами модели и сопоставим с размерами элемента разбиения. Так, для второй модели из таблицы, количество элементов для которых расчет велся по точным формулам не превышало 48 для каждой точки счета поля, в то время как общее количество элементов – 67,6 млн.

Таблица 2.4. Сравнение метода многогранников с и без замены «удаленных» элементов на точечные источники.

	Модель 1	Модель 2
Размеры модели, км	1055 x 792 x 81	
Размеры элемента разбиения, км	3 x 4 x 1	1 x 1 x 1
ϵ_c , мГал	0,001	
R_c , км	55,5	2,9
Мин./макс. амплитуды поля, мГал	-79,68 / 101,92	-78,89 / 140,94
Мин./макс. абсолютной погрешности в поле, мГал	-0,016 / 0,01	-0,0051 / 0,0057
Относительная среднеквадратичная погрешность	0,00023	0,000089
Время счета. с заменой / без замены, мин	1,2 / 50,5	3,8 / 648

Решение прямой задачи для региональной модели

Для двух «плоских» региональных плотностных моделей, построенных в Институте геофизики ИГФ УрО РАН в результате решения линейной обратной задачи гравиметрии по наблюдаемому полю с невязкой менее 1% [Дружинин, 2014; Martyshko, 2015; Мартышко, 2016б]: Тимано-Печорской плиты (793км × 1057км × 80км с элементом разбиения 3,1км × 4,13км × 1км) и плотностной модели Уральского региона (1336км × 969км × 80км с элементом разбиения 1км × 1км × 1км), получены соответствующие им сфероидальные модели. В качестве «базового» взят эллипсоид Красовского с параметрами $a=6378,245$ км, $b=6356,863$

км, центральные меридианы для проекции Гаусса-Крюгера проходят примерно через географические центры территорий. На верхних границах моделей на равномерной сетке (256×256 точек поля для первой модели и 1336×969 точек для второй) посчитана вертикальная составляющая гравитационного поля. Визуальное представление посчитанного поля для второй модели приведено на Рисунке 2.2.

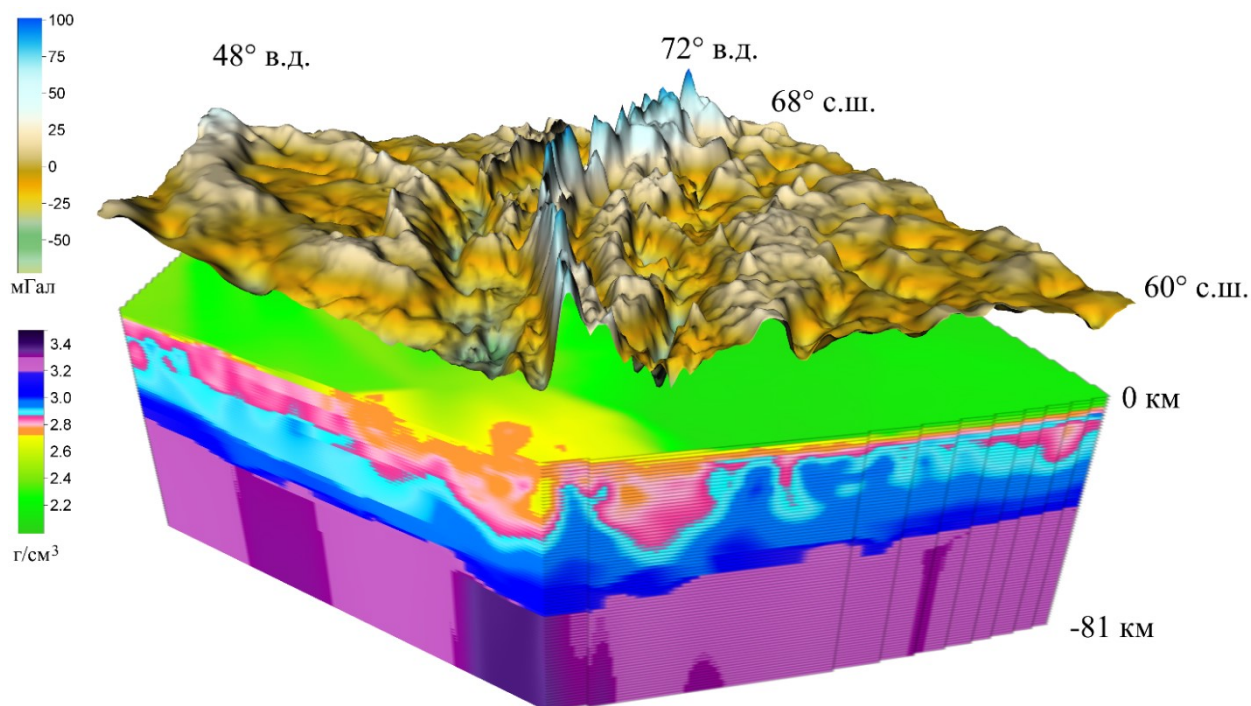


Рисунок 2.2. Плотностная модель Уральского региона (вторая модель) и посчитанное гравитационное поле.

Программная реализация алгоритма

Алгоритм преобразования «плоской» модели в «сферическую», метод решения прямой задачи гравиметрии для эллипсоидальных моделей и вычисление транспонированного оператора прямой задачи (необходим для процесса решения обратной задачи) реализованы как часть разработанного программного

обеспечения GRAFEN². Программа написана на языке C++17 с применением следующих технологий распараллеливания: Nvidia CUDA, AMD ROCm (технологии разработки программного обеспечения для вычислений общего назначения на графических ускорителях производства Nvidia и AMD, соответственно), OpenMP (стандарт распараллеливания процесса программы), MPI (интерфейс передачи данных и синхронизации для распределенных вычислений).

На Рисунке 2.3 изображена последовательность этапов работы программы и принцип распределения данных по узлам. Каждый из этапов имеет обозначение MPI процесса - $N_{k,l}$, показывающее в каких процессах происходит вычисление данного этапа. $l = 0..L, k = 0..K_l$, где L – количество вычислительных узлов, K_l – количество запущенных на узле l процессов MPI, которое должно совпадать с количеством графических ускорителей, доступных на данном узле. Например, этап обозначенный как $N_{0,0}$ выполняется только в одном процессе с индексом 0, одного узла с индексом 0; этап с обозначением $N_{0,l}$ выполняется в одном процессе с индексом 0, на каждом из L узлов параллельно.

Примененный алгоритм балансировки позволяет эффективно использовать различные по вычислительной мощности графические ускорители в составе одного суперкомпьютера, количество ускорителей на каждом из узлов также может быть различным.

Исходный код программы не использует специальные для определенной операционной системы API или зависимости и может быть скомпилирован под ОС семейства Windows и Linux. Скомпилированная версия ПО доступна для ОС Windows 10 с использованием Microsoft MPI.

В Приложении 1 приведен текст инструкции пользователя.

² URL: <https://github.com/alexIII/GRAFEN>

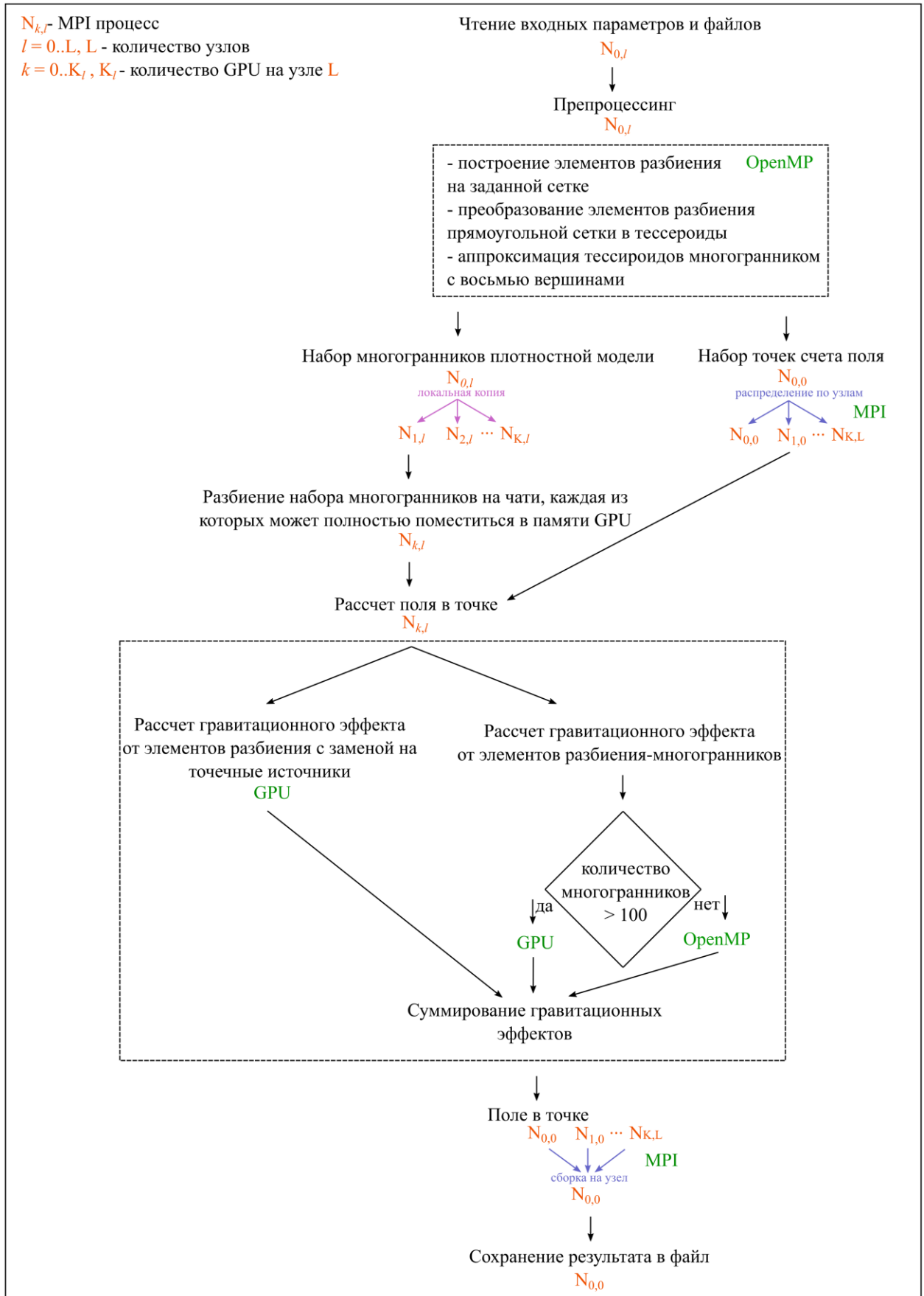


Рисунок 2.3. Последовательность этапов работы программы.

Глава 3. Оценка порядка поправки «за сферичность» для разномасштабных моделей

Соотношение между геоцентрической глобальной системой координат точки на поверхности сфероид и (относительной) системой прямоугольных координат точки на горизонтальной плоскости определяется прямым преобразованием координат Гаусса-Крюгера. Расстояния между двумя точками на плоскости вычисляются вдоль прямой линии; на сфероиде – вдоль дуги (геодезической линии). В пределах шестиградусной зоны картографической проекции искажения длин на максимальном удалении от осевого меридиана (три долготных градуса) не превышают 0,1%, а искажения площадей – не более 0,2%. Вдоль осевого меридиана линейные искажения отсутствуют.

При вычислении объемов аномальных масс и соответствующих им аномалий гравитационного поля использовались два основных принципа [Ладовский, 2017б]. Первый следует непосредственно из формул преобразований координат Гаусса-Крюгера: в пределах шестиградусной зоны расстояния на плоскости и на поверхности сфероид принимаются одинаковыми (или отличаются не более допустимой погрешности 0,1%). Второй не является настолько очевидным, но вытекает из топологии преобразований координат и, по крайней мере, соответствует здравому смыслу непредвзятого стороннего наблюдателя: превышения (высоты или глубины) над плоской земной поверхностью $z=0$ в некоторой точке с координатами x, y совпадают с отметками высот (или глубин) относительно поверхности сфероид $R(\phi, \lambda)$ в соответствующей точке с географическими координатами ϕ и λ .

Таким образом, для надлежащего учета поправки за криволинейность поверхности Земли при расчетах и сопоставлении гравитационных эффектов от всех элементов плотностной модели в различных системах координат нужно

обеспечить равенство расстояний на соответствующих поверхностях относимости и равенство превышений относительно плоской и сфероидальной поверхности, отсчитываемых по направлению нормалей в одних и тех же взаимно-однозначных проективных точках. Нарушение данных принципов приводит к необоснованному завышению погрешностей при сопоставлении полей для плоской и сфероидальной моделей и тем больше, чем больше размер планшета градусной сетки, и чем больше мощность сфероидального сегмента модельной области.

Оценка погрешности для моделей с постоянным и сингулярным распределением плотности

Гравитационный потенциал и системы криволинейных координат

Определим конфигурацию сфероидального элемента D трехмерной плотностной модели до некоторой глубины H . Пусть внешняя граница S сфероидального элемента – часть поверхности референц-эллипсоида (например, эллипсоида вращения Красовского). В модель включены все точки, ниже лежащие S и расположенные на расстояниях не более, чем H по направлению внутренней нормали к поверхности эллипсоида. В образовавшемся объеме сфероидального параллелепипеда области D $\tau_D = (S \times H)$: задано распределение плотности $\sigma(\vec{r})$, ($\vec{r} \in D$). Аналогично определяется объем трехмерного элемента вертикальной призмы для модели «плоской» Земли при условии того, что S – часть плоскости.

Геодезические координаты относятся к общеземному эллипсоиду, размеры и форма которого заданы параметрами стандартизованных моделей, например, параметрами модели [ПЗ-90.11], принятой на территории Российской Федерации. В задачах картографического проектирования используется референц-эллипсоид Красовского. Положение точки на поверхности эллипсоида вращения однозначно

задается геодезической широтой $B \in [-\pi/2; \pi/2]$ и долготой $L \in (-\pi; \pi]$ (за исключением географических полюсов эллипсоида, где долгота не определена).

Расстояние на поверхности сферической Земли измеряется вдоль геодезической линии: по дугам больших кругов вдоль меридианов и по дугам малых кругов – вдоль параллелей; на плоской поверхности расстояния меряются по прямой. Отображение поверхности эллипсоида на какую-либо поверхность, с последующим разворачиванием ее на плоскость и преобразование географических координат в прямоугольные координаты соответствующих точек, носит название картографической проекции. Разумеется, не существует отображения поверхности эллипсоида на плоскость, сохраняющего линейные расстояния в целом, но есть большое количество отображений, для которых это условие выполняется с достаточной точностью в рамках ограниченных областей. Наиболее часто применяемая в России картографическая проекция представляет собой конформное изображение части поверхности земного эллипсоида на часть плоскости с постоянным масштабом на прямолинейном изображении одного из меридианов. Конформное (равноугольное) отображение меридионального двугольника (долготной зоны) на градусную трапецию в проективной плоскости было предложено Гауссом, а более обстоятельное математическое обоснование с изложением рабочих формул преобразования координат получило в работе Крюгера [Krüger, 1912].

Исходя из требований к созданию российской опорной геодезической сети 1-го класса, относительное искажения длин при проекции поверхности сфероида на плоскость не должно превышать 0,1%. По этой причине в картографии долготный угол ΔL при вершине меридионального двугольника ограничивают 6-ю градусами, что обеспечивает необходимую точность проведения топографической съемки в масштабе 1:500 000. Вдоль центрального осевого меридиана линейные искажения отсутствуют. На краях шестиградусной зоны Гаусса-Крюгера, т.е. на максимальном удалении от осевого меридиана (до трех долготных градусов)

искажения длин укладываются в требуемый норматив 0,1%, а искажения площадей не превышает 0,2%. [Морозов, 1979].

Функции преобразования координат задаются в виде рядов по степеням малого параметра разности долгот граничных меридианов шестиградусной зоны. При прямом преобразовании Гаусса-Крюгера (ГК) географические координаты на поверхности эллипсоида посредством (прямых) степенных рядов пересчитываются в прямоугольные координаты на проективной плоскости: $(x, y) = GK(L, B)$. При обратном преобразовании Гаусса-Крюгера (GK^{-1}) требуется обращение степенных рядов, посредством которых прямоугольные координаты шестиградусной зоны пересчитываются обратно в географические координаты на эллипсоиде: $(L, B) = GK^{-1}(x, y)$. Прямое и обратное преобразование координат задают взаимно-однозначное соответствие точек проекции Гаусса-Крюгера с эллипсоида на плоскость. Отображение геодезических координат L, B в плоские прямоугольные координаты x, y и обратно с точностью до 0,001 м в линейной мере осуществляется по стандартным формулам, рекомендованными [ГОСТ 32453-2013].

Для введения поправки «за сферичность» в расчетное поле гравитационных аномалий от трёхмерных плотностных моделей необходимы формулы решения прямой задачи гравиметрии для типовых аппроксимирующих элементов в сфероидальной и прямоугольной системе координат. Представления о форме сфероидальной планеты «уже могут потребоваться при количественной интерпретации материалов среднемасштабных гравиметрических съемок» [Долгаль, 2015, с. 57]. Но, если на данном этапе пренебречь полярным сжатием Земли, полагая ее радиус $R=6371$ км, то ряд результатов может быть получен в явном аналитическом виде и в сферической системе координат. Последнее обстоятельство использовалось нами для тестирования численных алгоритмов решения задач гравитационного моделирования на «сферической» и «плоской» Земле.

Итак, вместо географических координат B и L на поверхности эллипсоида будем рассматривать геоцентрические координаты φ и λ на поверхности сферы (Рисунок 3.1). Полярный угол $\theta \in (0, \pi)$ сферической системы координат заменяет дополняющий его широтный угол $\varphi \in (-\pi/2, +\pi/2)$, отсчитываемый от экваториальной плоскости $\varphi = 0$.

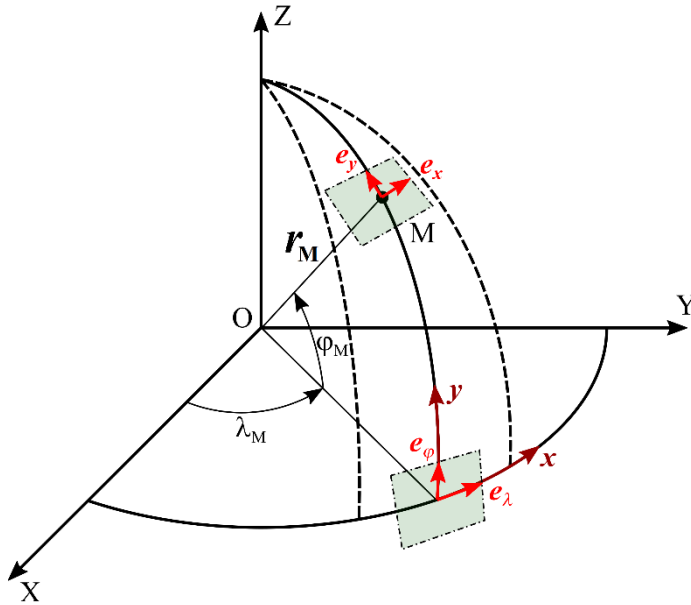


Рисунок 3.1. Геоцентрическая сферическая система координат точки M и соотнесенная с ней поверхностная прямоугольная система координат (тоновая заливка) для сферического двуугольника – шестиградусной зоны проекции Гаусса-Крюгера с осевым меридианом точки M (выделена пунктиром).

В основу метода гравитационного моделирования заложена интегральная формула Ньютона для потенциала: гравитационный эффект области D вычисляется по плотности аномальных масс, распределенных внутри этой области [Шванк, 1947]:

Пусть D – область распределения аномальных масс, $\sigma(p)$ – их плотность; $p(\vec{r})$, $\vec{r} \in D$ – текущая точка внутри масс (переменная точка интегрирования);

$q(\vec{r}_0), \vec{r}_0 \notin D$ – заданная точка вычисления поля на некоторой условной поверхности наблюдений. Тогда гравитационный потенциал области D :

$$V(q) = \gamma \int_D \frac{\sigma(p) d\tau_p}{|\vec{p} - \vec{q}|}$$

Здесь: γ – гравитационная постоянная; $d\tau_p$ – элемент объема интегрирования, \vec{p} и \vec{q} – радиус-векторы соответствующих точек.

Напряженность гравитационного поля равна градиенту скалярного потенциала:

$$\vec{g}(q) = \nabla_q V = \gamma \int_D \frac{\vec{p} - \vec{q}}{|\vec{p} - \vec{q}|^3} \sigma(p) d\tau_p. \quad (3.1)$$

Формула (3.1) будет инвариантна относительно перехода к любой системе координат, в том числе и в системе поверхностных прямоугольных координат Гаусса-Крюгера. Если \vec{n}_q – внешняя нормаль к некоторой поверхности «наблюдения S в ортогональной проекции точки q на S , то нормальная составляющая поля в этой точке вычисляется через скалярное произведение:

$$g_n = (\vec{n}_q \cdot \nabla_q V).$$

Таким образом, чтобы получить составляющую поля по направлению внешней нормаль к поверхности наблюдений S , достаточно в любой системе координат определить расстояние между точками $|\vec{p} - \vec{q}|$, элемент объема интегрирования $d\tau_p$ и нормальную составляющую градиента потенциала ∇V в точке q .

В качестве исходной, базовой системы будем рассматривать геоцентрическую систему декартовых координат $\Sigma(X, Y, Z)$ и ассоциированные с

ней системы цилиндрических (полярных) $\Sigma(\rho, \lambda, Z)$ и сферических координат $\Sigma(r, \varphi, \lambda)$ (Рисунок 3.1):

1. Если $\vec{p} = (X, Y, Z)$ и $\vec{q} = (X_0, Y_0, Z_0)$, то

$$|\vec{p} - \vec{q}| = \sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2} \quad (3.2)$$

2. Цилиндрическая система координат $\Sigma(\rho, \lambda, Z)$ с основанием в экваториальной плоскости $Z = 0$

$$\begin{cases} X = \rho \cos \lambda \\ Y = \rho \sin \lambda \\ Z = Z \end{cases}$$

Если $\vec{p} = (\rho, \lambda, Z)$ и $\vec{q} = (\rho_0, \lambda_0, Z_0)$, то

$$|\vec{p} - \vec{q}| = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\lambda - \lambda_0) + (Z - Z_0)^2} \quad (3.3)$$

3. Геоцентрической системе сферических координат $\Sigma(r, \varphi, \lambda)$:

$$\begin{cases} X = r \cos \varphi \cos \lambda \\ Y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ Z = r \sin \varphi \end{cases}$$

Если $\vec{p} = (r, \varphi, \lambda)$ и $\vec{q} = (r_0, \varphi_0, \lambda_0)$, то

$$|\vec{p} - \vec{q}| = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \omega}, \quad (3.4)$$

где

$$\cos \omega = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0).$$

Направление «горизонтальных» осей прямоугольной системы координат (x, y) на поверхности сферы задается единичными ортами $\vec{e}_\lambda, \vec{e}_\varphi$ в точке пересечения дуги осевого меридиана шестиградусной зоны Гаусса-Крюгера и дуги экватора. Эта же точка принимается за начало поверхностной прямоугольной системы координат $\Sigma(x, y, z)$. Допускается параллельный перенос

начала прямоугольных координат вдоль осевого меридиана в точку М. Однако в этой точке на сфере направление осей, заданных ортами \vec{e}_x, \vec{e}_y не будет совпадать с направлением осей в плоскости экватора. Другими будут и отметки высот по направлению координаты «z». Прямоугольная система декартовых координат $\Sigma(x, y, z)$ привязана к поверхности сферы и преобразуется, как тройка ортогональных направляющих векторов при перемещении вдоль осевого меридиана [Неск, 2007; Bouman, 2015]. Это означает, что высота (глубина) некоторой отметки относительно точки М на плоскости будет совпадать с превышением относительно точки М на сфере.

При условии существования определенного интеграла (3.1), решение прямой задачи гравиметрии является единственным: поле \vec{g} однозначно вычисляется по заданному распределению суммируемой плотности σ . Не возникает и особых технических проблем с вычислением объемного интеграла. А во многих интересных приложениях и практически важных случаях первообразная функция массового интеграла вычисляется аналитически.

Двумерные плотностные модели

Несомненно, что максимальную точность и быстродействие расчетных алгоритмов удаётся получить в тех случаях, когда для составляющих градиента потенциала оказывается возможным получить явные аналитические выражения в элементарных трансцендентных функциях. Для типовых аппроксимирующих элементов двумерных плотностных моделей решение прямой задачи гравиметрии выписывается в явном аналитическом виде. В качестве таких элементов удобно использовать двухмерный угловой сектор горизонтального цилиндра и, соответствующий ему бесконечный горизонтальный пласт (Рисунок 3.2). Плотность тел принимается постоянной $\sigma = 1 \text{ г/см}^3$

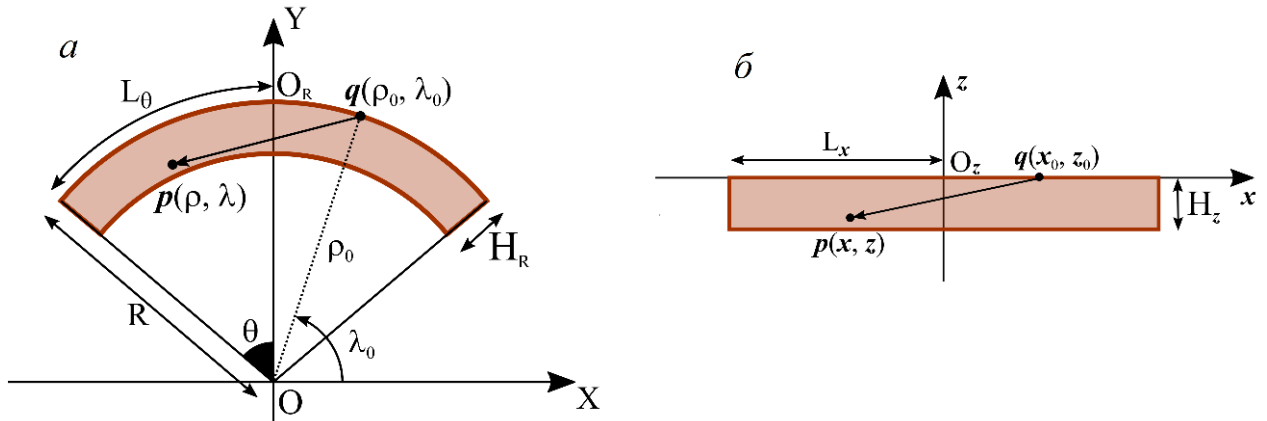


Рисунок 3.2. Цилиндрический сегмент в полярной геоцентрической системе координат (а) и соответствующий ему горизонтальный пласт бесконечного простираения в системе плоских прямоугольных координат(б). Условные обозначения и пояснения здесь и далее в тексте.

Сравним поле V_z на поверхности «плоской» Земли от горизонтального пласта бесконечного простираения мощностью H_z и шириной $2L_x$ с полем V_R на поверхности сферической Земли ($R=6371$ км) от углового цилиндрического сектора той же мощности ($H_R=H_z$) и длиной дуги $2L_\theta$, равной ширине пласта ($2L_\theta = 2L_x$). Мощность пласта фиксирована и составляет $H_z = H_R = 80$ км. Ширина пласта и длина дуги цилиндрического сектора варьируются в зависимости от угла раствора последнего $2L_\theta = 2R\theta$ (см. Рисунок 3.2а). Так при угле раствора $2\theta = 6^\circ$ длина дуги сектора и, соответственно, равная ей ширина горизонтального пласта $2L_\theta = 2L_x = 667$ км; при угле $2\theta = 24^\circ$ – в четыре раза больше $2L_\theta = 2L_x = 2668$ км.

Определим геометрические параметры области D для цилиндрического сектора, симметричного относительно вертикальной оси OY :

$$D = \{(\rho, \lambda, Z) \mid \rho \in (R - H_R, R), \lambda \in (\pi/2 - \theta, \pi/2 + \theta), Z \in (-\infty, +\infty)\}.$$

Напряженность гравитационного поля равна градиенту потенциала. Чтобы найти составляющую двумерного поля по нормали к образующей цилиндра в

полярных координатах $\Sigma(\rho, \lambda)$ достаточно подставить расстояние (3.3) формулу (3.1), и проинтегрировать радиальную составляющую поля по переменной Z в бесконечных пределах [Шванк, 1947]:

$$V_\rho = g_\rho(\rho_0, \lambda_0) = \gamma\sigma \int_{R-H_R}^R \rho d\rho \int_{\pi/2-\theta}^{\pi/2+\theta} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\rho \cos(\lambda - \lambda_0) - \rho_0) dZ}{(\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\lambda - \lambda_0) + (Z - Z_0)^2)^{3/2}}$$

После интегрирования по Z в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получаем:

$$g_\rho(\rho_0, \lambda_0) = 2\gamma\sigma \int_{R-H_R}^R \rho d\rho \int_{\pi/2-\theta}^{\pi/2+\theta} \frac{(\rho \cos(\lambda - \lambda_0) - \rho_0) d\lambda}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\lambda - \lambda_0)}$$

Двумерный интеграл для углового сектора 2θ в полярной системе координат (ρ, λ) вычисляется в явном виде.

$$g_\rho(\rho_0, \lambda_0) = \frac{2\gamma\sigma}{\rho_0} \int_{R-H_R}^R \rho \operatorname{arctg} \left(\frac{\rho + \rho_0}{\rho - \rho_0} \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{2} \right) \right) \Big|_{\lambda = \pi/2 - \theta}^{\lambda = \pi/2 + \theta} d\rho - \frac{\gamma\sigma\rho^2(\lambda - \lambda_0)}{2\rho_0} \Big|_{\lambda = \pi/2 - \theta}^{\lambda = \pi/2 + \theta} \Big|_{\rho = R-H_R}^{\rho = R}$$

Или, полагая $k = \rho/\rho_0$; $\psi = \lambda - \lambda_0$:

$$g_\rho(\rho_0, \lambda_0) = \gamma\sigma\rho_0 \left(k^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{k+1}{k-1} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right) + \cos(2\psi) \operatorname{arctg} \left(\frac{k - \cos \psi}{\sin \psi} \right) + \sin(2\psi) \ln \sqrt{1 + k^2 - 2k \cos \psi} + k \sin \psi - k^2 \frac{\psi}{2} \right) \Big|_{\pi/2 - \theta - \lambda_0}^{\pi/2 + \theta - \lambda_0} \Big|_{(R-H_R)/\rho_0}^{R/\rho_0} \quad (3.5)$$

Здесь первообразная по ψ и k последовательно задана в 4-х граничных точках пределов интегрирования.

Вертикальная составляющая поля от однородного горизонтального пласта бесконечного простираения (горизонтальной полосы) вычисляется аналогично. Зададим параметры области D в декартовых прямоугольных координатах (x, y, z) . (см. Рисунок 3.2б):

$$D = \{(x, y, z) \mid x \in (-L_x, +L_x); y \in (-\infty, +\infty); z \in (-H_z, 0)\}.$$

Если в формуле для расстояния (3.2) все прописные символы координат точек p и q заменить на строчные $\vec{p} = (x, y, z)$ и $\vec{q} = (x_0, y_0, z_0)$, то следующие формулы будут справедливы.

Подставляя расстояние (3.2) в формулу (3.1) и интегрируя по простираению y в бесконечных пределах, получаем:

$$\begin{aligned} V_z &= g_z(x_0, y_0, z_0) \\ &= \gamma\sigma \int_{-H_z}^0 (z - z_0) dz \int_{-L_x}^{L_x} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^3}} \\ &= \gamma\sigma \int_{-H_z}^0 (z - z_0) dz \int_{-L_x}^{L_x} \frac{dx}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Двойной интеграл для горизонтальной полосы также имеет первообразную в виде явно заданной аналитической функции [Гравиразведка, 1990]:

$$\begin{aligned} g_z(x_0, z_0) &= 2\gamma\sigma \left((\xi - x) \ln \left(\sqrt{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \right) \right. \\ &\left. + 2(\zeta - z) \operatorname{arctg} \left(\frac{\xi - x}{\zeta - z} \right) \right) \Big|_{\xi = -L_x}^{\xi = L_x} \Big|_{\zeta = -H_z}^{\zeta = 0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вычисленные значения поля g_z «плоской» и g_ρ «секторной» модели будут сравниваться во всех соответствующих точках профилей на одних и тех же расстояниях относительно начала поверхностных координат O_z и O_R – точек пересечения профилей с осями симметрии. Это следует из того, что, при

проецировании координат точек счета с дугообразного профиля на прямую линию, расстояния между ними сохраняются. Но поскольку составляющие поля (3.5) и (3.6) сориентированы по направлению внешней нормали, то числовые значения, необходимые для интерпретации силы притяжения следует брать с противоположным знаком.

На Рисунке 3.3а показаны графики полей в центральных точках O_z и O_R ($\lambda = \pi/2$) для «плоской» и «сферической» модели в функции угла раствора (длины дуги) цилиндрического сектора; на Рисунке 3.3б – их разность в единицах мГал. Напомним, что мощности пластов одинаковы и составляют $H_R=H_z = 80$ км; объемная плотность масс $\sigma = 1$ г/см³.

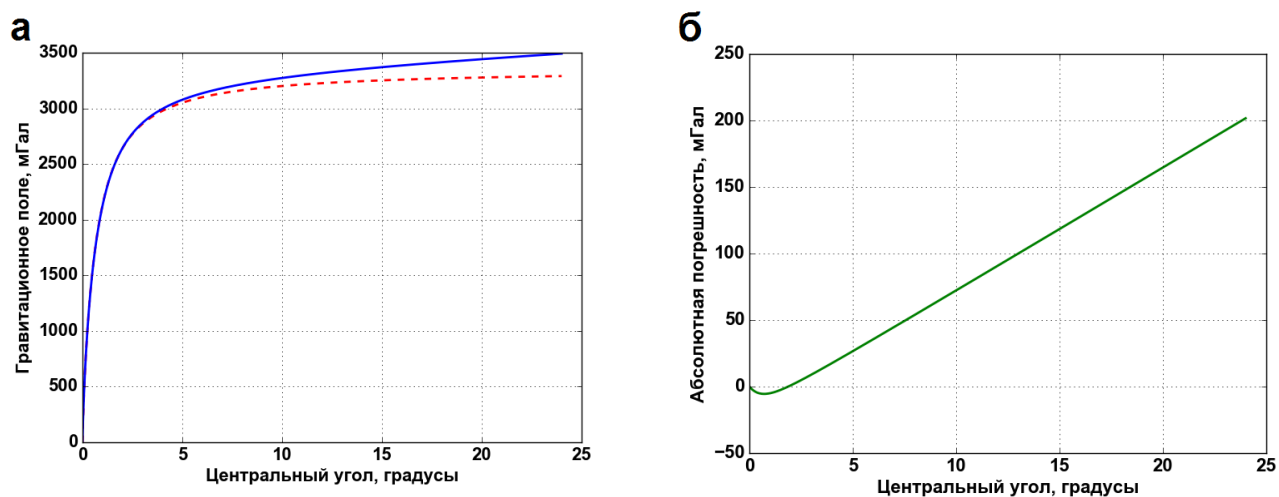


Рисунок 3.3. Графики изменения нормальной составляющей модельного поля в центральных точках цилиндрического сектора и горизонтального пласта: а) поле сектора в точке O_R (сплошная линия) и поле горизонтального пласта в точке O_z (пунктирная линия); б) разность поля сектора и поля пласта в абсолютных единицах (мГал).

Здесь и далее символом «*s*» (spherical) будем обозначать аномалии поля, рассчитанные на поверхности сферической Земли; символом «*f*» (flat), аномалии

поля, рассчитанные на плоскости. Поправка «за сферичность» вводится как разность полей $(s - f)$ «сферической» и «плоской» геометрии. Относительная (по отношению к полю на сфере) поточечная погрешность выражается в процентах $(s - f)/s \times 100\%$.

Как видим из Рисунка 3.3, аномалии в точке симметрии O_R на поверхности кругового сектора всегда больше, чем в соответствующей проективной точке O_z на поверхности пласта. Тенденция нарушается лишь при малых углах раствора θ . Разность аномалий в эпицентральных точках $(s - f)$ линейно растет с увеличением ширины пласта (углового расстояния) (см. Рисунок 3.3б), но в относительной мере составляет единицы процентов. Для шестиградусной зоны, т.е. при ширине пласта 667 км, относительная поправка «за сферичность» в центральной точке менее 1%. Для сравнения, относительная поправка в центре широкой полосы 2668 км ($2\theta = 24^\circ$) достигает 6%.

На Рисунке 3.4 показаны уже профильные значения вычисленных полей для «сферической» и «плоской» моделей, а также их поточечная разность в абсолютных (в «мГал») и относительных единицах (в процентах). Эти примеры построены по Рисунку 3.3 и относятся к двум углам раствора 6 и 24 градуса. В первом случае – это угол раствора одной шестиградусной зоны Гаусса-Крюгера; в другом – угол раствора для четырех зон.

Среднеквадратичная относительная погрешность составила для 6-ти градусного раствора 1,26%, для 24-х градусного – 5,94%. Относительная разница объемов тел «сферической» и «плоской» модели не более 0,63%.

Полученные аналитические оценки поправки «за сферичность» в поле двумерных моделей, безусловно, являются предварительными, но характеризуют порядок возможные искажения полей при переходе с криволинейной поверхности на плоскость.

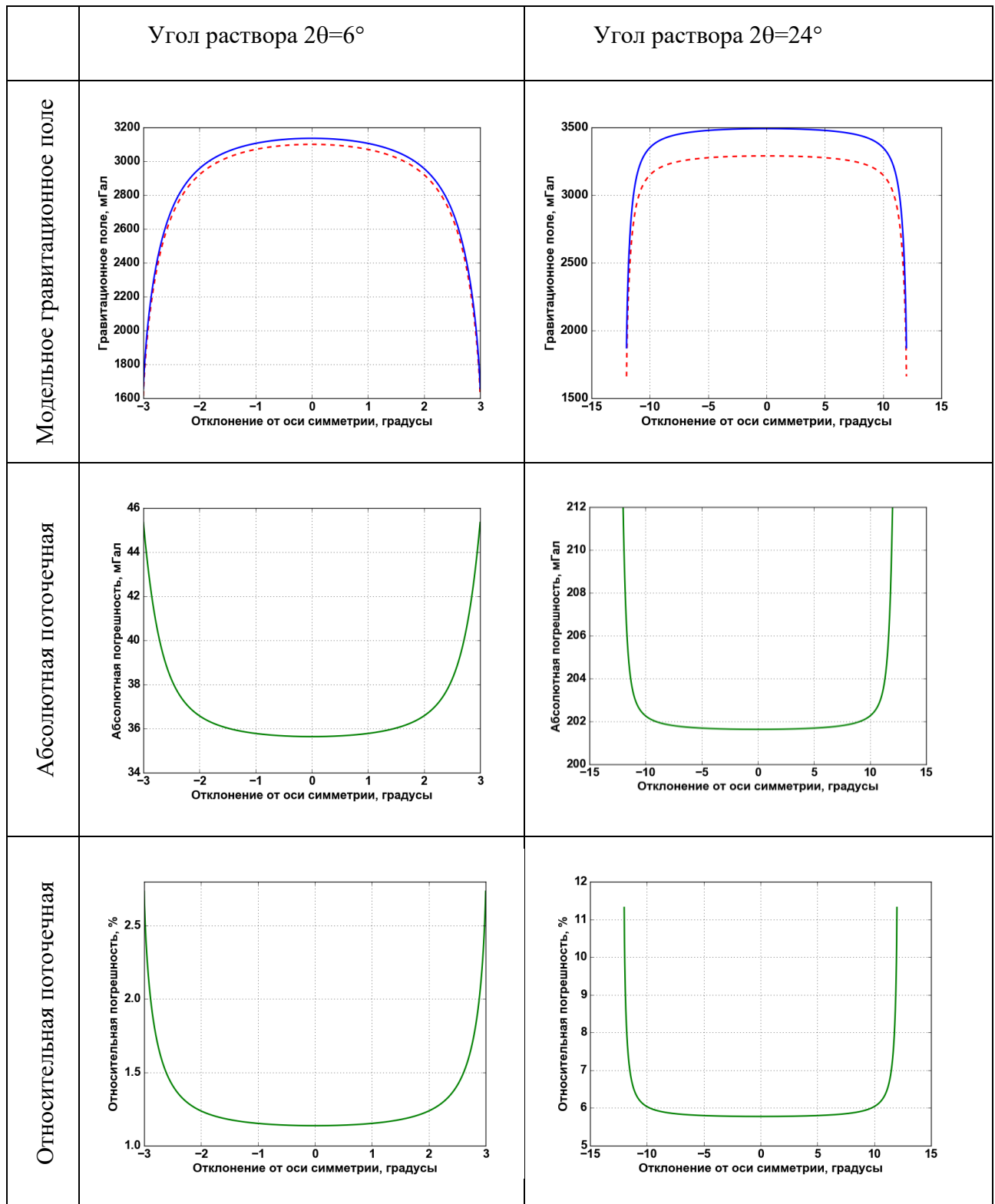


Рисунок 3.4. Графики нормальной составляющей модельного поля для сектора горизонтального цилиндра и горизонтального пласта бесконечного простираения для 6-ти и 24-х градусных растворов.

Трехмерные модели с сингулярным распределением плотности

В рамках более сложной, трехмерной модели сопоставим на поверхности «сферической» и «плоской» Земли гравитационные аномалии от нескольких изолированных шаров разных размеров и разной плотности. Будем исходить из двух условий, накладываемых на преобразования поверхностных координат и глубин:

1. в пределах одной шестиградусной зоны Гаусса-Крюгера при отображении сферы на плоскость линейные расстояния сохраняются вдоль осевого меридиана и почти не меняются (с погрешностью, не более 0,1%) вдоль параллели;

2. глубина залегания центра шаров, отсчитываемая от поверхности сферы по направлению внутренней нормали, и глубина до центра отображаемых шаров от верхней граничной плоскости в соответствующих точках отображения приравниваются друг к другу.

Пусть OA расстояние вдоль некоторой дуги S_R большого круга, OA' – расстояние по прямой в плоскости S_z . AC – глубина до центра залегания реального шара радиуса a , $A'C'$ – глубина до центра отображаемого тела, форма которого (с учетом допустимых искажений) близка к исходному шару (см. Рисунок 3.5). Согласно условиям 1 и 2, накладываемых на отображение $S_R \Rightarrow S_z$ сферы на плоскость, $OA = OA'$ и $AC = A'C'$.

Чтобы получить нормальную составляющую поля на поверхности сферы S_R , достаточно в векторной формуле (3.1) для напряженности поля выразить расстояние (3.4) в сферических координатах $\Sigma(r, \varphi, \lambda)$, и для радиальной составляющей на сфере положить $r_0 = R$:

$$V_R = g_R(R, \varphi_0, \lambda_0) = \gamma \int_D \sigma(r, \varphi, \lambda) \frac{(r \cos \omega - R)r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\lambda}{\sqrt{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \omega)^3}},$$

где $\cos \omega = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos(\lambda - \lambda_0)$; ω – угол видимости отрезка $|\vec{p} - \vec{q}|$.

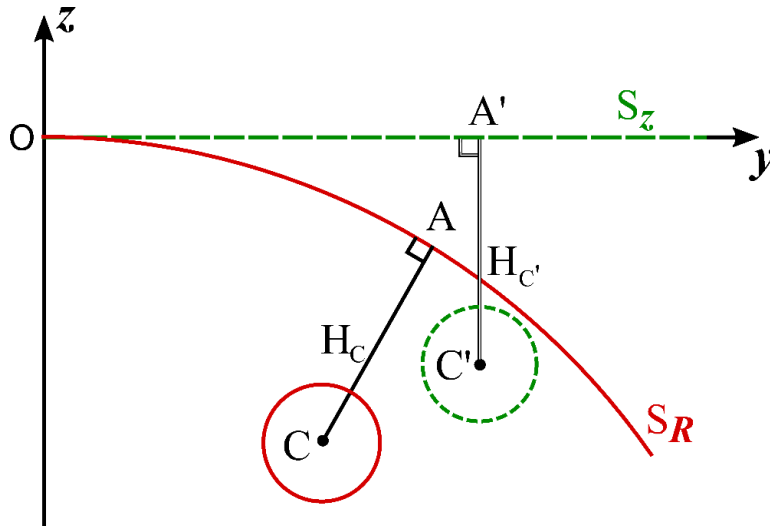


Рисунок 3.5. Смещение положения аномалеобразующих объектов при вводе «сферической» модели.

Известно, что поле во внешности однородного шара с плотностью σ_a вычисляется, как поле точечной массы, равной полной массе шара [Шванк, 1947]. Это означает, что объемное распределение плотности внутри шара приравнивается к сингулярной δ -функции, сосредоточенной в его центре [Владимиров, 2000]:

$$\sigma(r, \varphi, \lambda) = \frac{M}{r^2 \cos \varphi} \delta(r - r_c) \times \delta(\varphi - \varphi_c) \times \delta(\lambda - \lambda_c),$$

где $M = 4/3 \times \pi a^3 \sigma_a$ – масса шара.

Следовательно,

$$g_R(R, \varphi_0, \lambda_0) = \gamma M \frac{(r_c \cos \omega_c - R)}{\sqrt{(r_c^2 + R^2 - 2r_c R \cos \omega_c)^3}}. \quad (3.7)$$

Или в более компактной векторной записи:

$$g_R = (\vec{n}_R, \vec{g}) = (\vec{n}_q \cdot \nabla_q V), \quad \text{где} \quad \nabla_q V = \gamma M \frac{\vec{p}_C - \vec{q}}{|\vec{p}_C - \vec{q}|^3}. \quad (3.8)$$

Поскольку при отображении шаров реальный центр (точка C) переходит в точку отображения C' , а полная масса шара сохраняется, то формула (3.8) будет инвариантна относительно перехода к системе поверхностных прямоугольных координат Гаусса-Крюгера. Следовательно, для вертикальной составляющей поля вдоль оси «z» получим аналогичную формулу:

$$g_z(x_0, y_0, 0) = (\vec{n}_z, \vec{g}) = \gamma M \frac{z_C^2}{\sqrt{((x_C - x_0)^2 + (y_C - y_0)^2 + z_C^2)^3}}. \quad (3.9)$$

Формулы (3.7) – (3.9) являются выражением закона Ньютона притяжения точечных материальных масс и, в своем простейшем варианте, были использованы нами для аналитической оценки на сфере и плоскости аддитивных аномалий гравитационного поля для семейства шарообразных тел с однородной плотностью. Результаты аналитических расчётов для точечных материальных масс были сопоставлены с ранее опубликованными данными количественной интерпретации, выполненной коллегами из Пермского горного института по результатам численного гравитационного моделирования. На примерах аналогичных моделей однородных шаров с постоянной плотностью сравнивались значения гравитационных аномалии, вычисленных численными и аналитическими методами, а также анализировалась поправка за влияние «сферичности» Земли в профильном и площадном вариантах.

Пример 1: Цитата [Долгаль, 2015, с. 58]: «Профиль гравиметрических измерений длиной 300 км проходит по меридиану от северного полюса к югу и включает в себя 151 точку измерений. В нижнем полупространстве располагаются 2 аномалиеобразующих объекта – шары диаметром 8 и 12 км, обладающие избыточной плотностью 0,1 и 0,15 г/см³, соответственно. Центры шаров в

системе $\Sigma(x, y, z)$ имеют координаты $x_1=100$, $z_1=20$; $x_2=200$, $z_2=30$ (в км), профиль проходит непосредственно над ними ..»

Пример 2: Цитата [Долгаль, 2015, с. 58]: «Площадь гравиметрических измерений имеет форму квадрата со стороной 200 км, сеть измерений 2×2 км. Аномалии силы тяжести обусловлены пятью шарами, параметры которых приведены в Таблице 3.1. Глубины центров сфер H отсчитываются от поверхности измерений.»

Для большей наглядности и простоты анализа обоих модельных примеров в Таблице 3.1 указаны геометрические параметры залегания и плотности шаров в профильном и площадном вариантах. Линейные расстояния и глубины указаны в пространственных прямоугольных координатах для плоской модели « f » (flat) земной поверхности. На сферической поверхности « s » (spherical): линейные расстояния и превышения пересчитываются по параметрическим формулам Гаусса-Крюгера обратным преобразованием координат при выполнении основных принципов (см. выше условия 1–2): линейные расстояния и превышения относительно сферы и плоскости остаются практически неизменными.

Примечание: начало системы прямоугольных координат $\Sigma(x, y, z)$ – левый нижний угол модельной площади, ось Oz правой системы координат направлена вверх. Поэтому интерпретируемые значения гравитационных аномалий следует брать с противоположным знаком.

В Таблице 3.2 приведены расчетные параметры полных масс по каждому из шаров и, в соответствие с величиной масс, коррелируемые им значения эпицентральных аномалий на сферической « s » (spherical) и плоской поверхности « f » (flat). Результаты даны для профильного и площадного вариантов вычислений, согласно исходным данным Таблицы 3.1.

Таблица 3.1. Параметры аномалиеобразующих тел в профильном и площадном вариантах.

Точки расчета модельного поля	Номера тел (шаров)	Параметры расчетных моделей				
		Широта х, км	Долгота у, км	Глубина Н, км	Радиус шара г, км	Плотность, σ , г/см ³
Профиль 300 км	1	-	100	20	8	0,1
	2	-	200	30	12	0,15
Площадь 200x200 км ²	3	150	25	5	3	0,5
	4	100	100	12	8	0,3
	5	35	175	8	5	0,25
	6	125	45	7,2	4,5	0,15
	7	15	50	10	5	0,2

На Рисунке 3.6 приведены сравнительные графики вычисленных полей g_R и g_z в профильном (слева) и площадном вариантах (справа), а также и абсолютная и относительная погрешность их разности. На небольших расстояниях (в пределах одной шестиградусной зоны) аномалии полей на сфере « s » и плоскости « f » для обоих примеров практически не различимы и совпадают в масштабе рисунков верхнего ряда. Во втором ряду Рисунка 3.6 указаны разности полей ($s - f$) («сфера-плоскость») в тех же абсолютных единицах (мГал), но более, чем в стократно увеличенном масштабе по вертикальной оси. Поточечная относительная (к полю на сфере) погрешность дана в процентах.

Таблица 3.2. Расчетные параметры по каждому из тел.

Размерность модельного решения	Номера тел (шаров)	Масса шара в 10^{15} г	Значения эпицентральных аномалий			
			Гравитационное поле, мГал		Абсолютная погрешность, $(s - f) \times$ 10^{-3} мГал	Относительная погрешность $\frac{(s-f)}{s} \times 100\%$
			«Сферическая» модель “s”	«Плоская» модель “f”		
Пример1 Профиль 300 км	1	214,47	3,7747	3,7685	6,2546	0,17
	2	1085,73	8,0775	8,0763	1,1838	0,015
Пример2 Площадь 200x200 км ²	3	56,55	14,3937	14,3866	7,0796	0,049
	4	643,4	29,8434	29,8413	2,1095	0,0071
	5	130,9	13,095	13,0897	5,3408	0,041
	6	57,26	7,2623	7,2536	8,7541	0,12
	7	104,72	6,9487	6,944	4,7894	0,069

В этих примерах (см. Таблицу 3.2) максимальная поправка «за сферичность» Земли в абсолютные значения «плоских» аномалий в эпицентральных точках не превосходит 0,01 мГал, а относительная погрешность «эффекта кривизны» в тех же точках составляет менее 0,2%. По мере удаления от эпицентров шаров относительная погрешность увеличивается, и по краям планшетов (в профильном или площадном вариантах) может достигать 12%. Учитывая рафинированность постановки данной задачи для модели изолированных локальных тел в пустом пространстве, и, следовательно, имеющуюся тенденцию нулевых асимптотических значений поля при удалении от источников, такая оценка относительной погрешности не может рассматриваться как состоятельная. Из-за

небольшого различия в скорости затухания полей вдали от источников локализованных масс на сфере и плоскости частное двух малых величин " f/s ", как функция расстояний, имеет неопределенное значение. В таких моделях (при необходимости) целесообразнее использовать отношение среднеквадратических величин изменения полей. При этом, надлежащим образом будут учитываться не только области залегания аномальных масс, но также и все окружающее пустое пространство. Так для рассматриваемых примеров относительная среднеквадратичная погрешность составила 0,38% в профильном и 0,39% и площадном варианте.

Замечание. В рамках данной модели также были посчитаны поля от изолированных тел (шаров) на «эллипсоидальной» поверхности Земли с параметрами эллипсоида Красовского. Все действия по переносу координат центров шаров (глубин) и точек счета поля с плоскости на поверхность эллипсоида были выполнены аналогично предыдущим примерам по параметрическим формулам обратного преобразования Гаусса-Крюгера [Морозов, 1979]. Программные модули численной реализации алгоритма прямого и обратного преобразования поверхностных координат имеются в открытом доступе³ в сети Интернет, а также в геоинформационной системе «ArcGIS» и «Global Mapper».

³ URL: <https://geographiclib.sourceforge.io/html/>

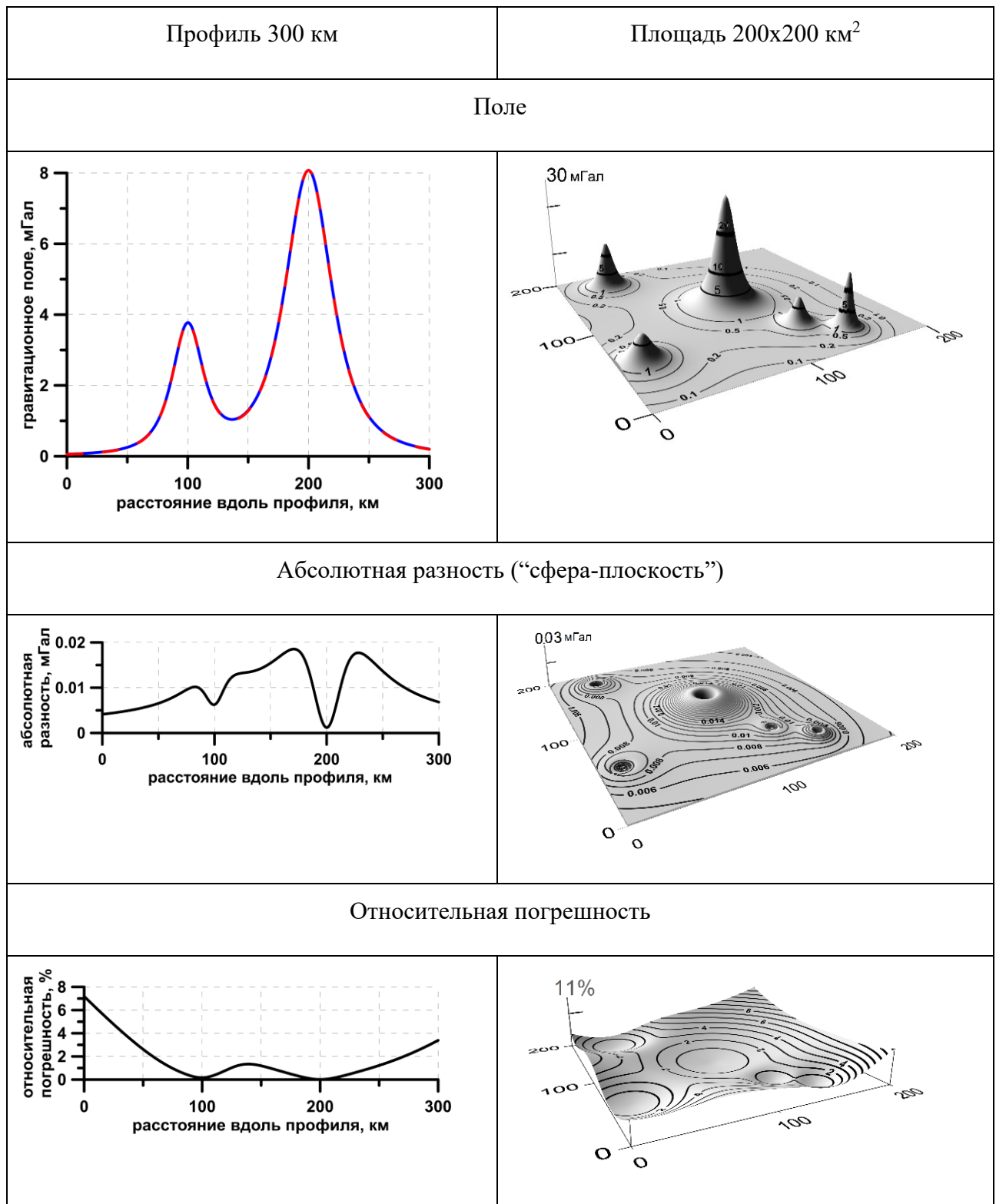


Рисунок 3.6. Профильные и площадные аномалии от изолированных шаров для сфероидальной (сферическая система координат) и плоской геометрии (прямоугольная система).

Полученные результаты для эллипсоидальной модели практически не отличаются от модели шарообразной Земли, с радиусом 6371 км. Поправки за «эллипсоидальность» формы поверхности Земли получились такими же, как и для «сферической». И это не случайно. Для площадей, в несколько десятков тысяч квадратных километров (градусной трапеции порядка $3^\circ \times 3^\circ$ и более, но в пределах одной шестиградусной зоны Гаусса-Крюгера), разницей в топографии превышения высот и изменением длин геодезических линий на эллипсоиде и шаре можно пренебречь [Макаров, 1968]. Однако, следует подчеркнуть, что относительно модели «плоской» Земли поправка за эллипсоидальную форму земной поверхности принципиально меньше, чем за сферическую. Эта разница не заметна на моделях малых и средних размеров, но будет значимой на площади более десятка градусов по широте или долготе, особенно в приполярной области. Поэтому, если и учитывать поправку «за сферичность», при высокоточном региональном плотностном моделировании, то следует пользоваться точными формулами Гаусса-Крюгера прямого и обратного преобразования координат на поверхности эллипсоида вращения. Тем более, что существующее программное обеспечение и мощность современных компьютеров вполне это позволяют.

Метод проектирования «плоской» плотностной модели в «сферическую»

Пусть область D^f плоской модели есть прямоугольный параллелепипед. Введем правую декартову прямоугольную систему координат так, чтобы «верхняя» граница S модели лежала в плоскости Oxy , ось Oz была направлена по внешней нормали к S (т.е. ординаты всех внутренних точек модели отрицательны).

Интуитивно понятно, что область D «сферической» модели должна получаться из D^f путем «изгибающего» непрерывного взаимно-однозначного

отображения $\mathcal{F}: \Omega^f \rightarrow \Omega$, $D^f \subseteq \Omega^f, D \subseteq \Omega$, $\Omega^f \subset \mathbb{R}^3, \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Построим это отображение.

Глубина (или высота над верхней границей) точки в «плоской» модели есть z , в «сферической» – H . Для искомого отображения \mathcal{F} положим $z \rightarrow H = z$ (масштаб искажения глубин при этом будет равен 1). Осталось выбрать отображение верхних границ моделей $S \rightarrow S'$ при $z = H = 0$. Поскольку гравитационное поле масс обратно пропорционально квадрату расстояния до точки наблюдения, то хорошо бы, чтобы \mathcal{F} это расстояние сохраняло. Разумеется, не существует отображения плоскости на поверхность эллипсоида, сохраняющего расстояния в точности, но есть большое количество отображений, которые осуществляют это для ограниченных областей с достаточной точностью. В России принято использовать равноугольную проекцию Гаусса-Крюгера [Krüger, 1912]. Пусть GK – проекция Гаусса-Крюгера, отображающая $S \rightarrow S^f$ (при некотором центральном меридиане, с точностью до параллельного переноса $Oxyz$, $x_{max} - x_{min} < \pi a$, $y_{max} - y_{min}$ меньше полупериметра эллипса с полуосями a и b), т.е. $(x, y) = \text{GK}(L, B)$, $(x, y, 0) \in S^f$, $(L, B, 0) \in S$. Искомое отображение $\mathcal{F}: D^f \rightarrow D$ (и $\mathcal{F}: \vec{r}^f \rightarrow \vec{r}$) будет:

$$\begin{cases} (x, y) \rightarrow (L, B) = \text{GK}^{-1}(x, y) \\ z \rightarrow H = z \end{cases} \quad (3.10)$$

Следует отметить, что существует способ вывода формул (через ряды) для вычисления прямой GK и обратной GK^{-1} проекции Гаусса-Крюгера с произвольной заданной точностью [Морозов, 1979].

Трехмерные модели с изолированным «сферическим» параллелепипедом

Пример 3. Вычисление нормальной составляющей поля g_R на поверхности Земли для «малого» сферического параллелепипеда. Цитата [Долгаль, 2015, стр. 60]: «...вычисление V_R для объекта, ограниченного координатами $50^\circ \leq \varphi \leq 50,5^\circ$,

$40^\circ \leq \lambda \leq 40,2^\circ$ и глубинами оснований 5 км и 15 км, обладающего избыточной плотностью $0,2 \text{ г/см}^3$, на сферической Земле в 14641 точке квадратной сети размером $0,02^\circ \times 0,02^\circ$ (в линейной мере $\sim 1,4 \text{ км} \times 2,2 \text{ км}$)...».

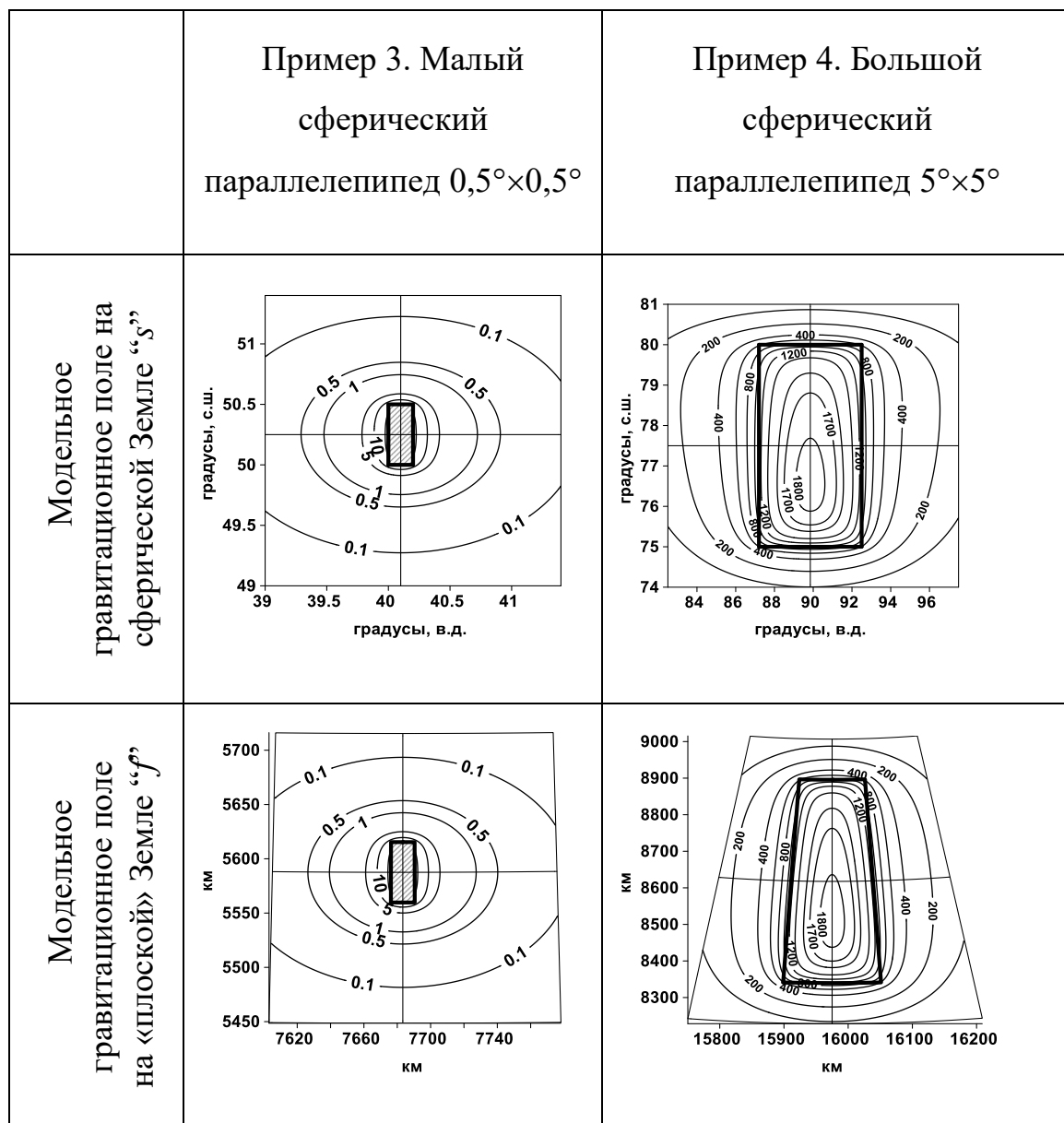
Пример 4. [Старостенко, 1986] Вычисление нормальной составляющей поля g_R на поверхности Земли для «большого» сферического параллелепипеда $\varphi \in (75^\circ; 80^\circ)$ и $\lambda \in (87,5^\circ; 92,5^\circ)$, т.е. с углом раствора $5^\circ \times 5^\circ$ по широте и долготе. Мощность параллелепипеда – 70 км. Верхняя поверхность выбрана произвольно, на глубине 10 км.

Результаты вычисления для обоих однотипных примеров объединены в общий иллюстративный макет с изображением геометрии полей в изолиниях. Поля на сфере «*s*» и на плоскости «*f*» показаны отдельно, поскольку искажение формы градусной трапеции весьма заметно для «большого» тессероида. На Рисунке 3.7 в первом и втором ряду показаны поля g_R и g_Z от сферических параллелепипедов и эквивалентных им вертикальных призм, рассчитанных на сферической и «плоской» Земле.

Следует отметить, что относительное искажение площадей в пределах одной шестиградусной зоны укладывается в норматив не более 0,2%. Это означает, что при отображении дефект объема масс тессероидов будет весьма незначительным, поскольку отметки нормальных высот (мощность элементов) остаются прежними. Иногда этот дефект компенсируют изменением объемной плотности масс [Uieda L., 2015].

Таким образом, изменение амплитуд и геометрии вычисленных полей g_R и g_Z обусловлено только различием в характере затухания поля во внешности тел в сферической и прямоугольной геометрии. Прежде всего, это проявляется в небольшой (сравнительно с амплитудными значениями полей) величине абсолютной поправки «за сферичность», т. е. в разнице $(s - f)$, или в относительной погрешности, выраженной в процентах (по отношению к полю на

сфере). Ниже в третьем и четвертом ряду Рисунка 3.7 приведены поточечные разности полей «сфера» - «плоскость» в абсолютных единицах (мГал) и в относительных (%).



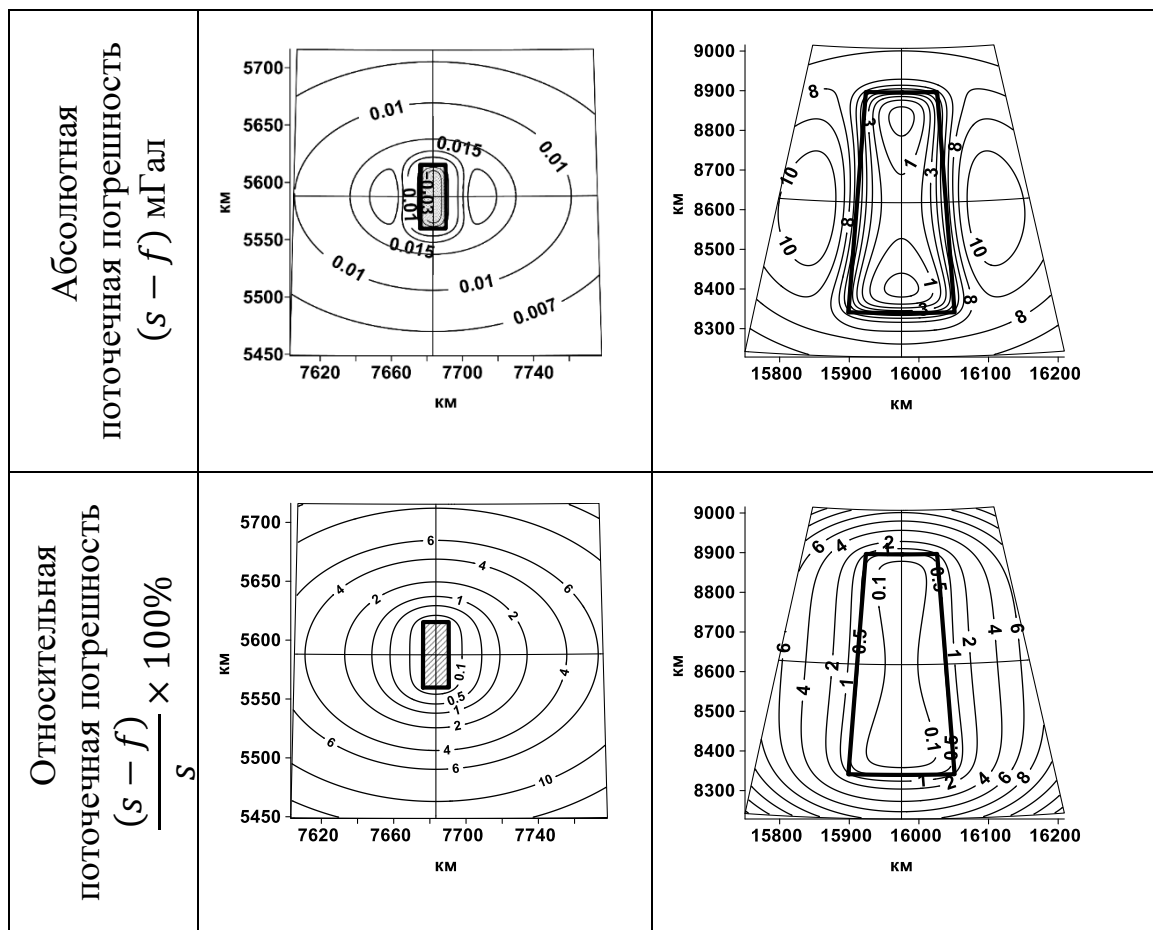


Рисунок 3.7. Площадные аномалии от сферических параллелепипедов для сфероидальной « s » и плоской « f » геометрии (см. 1 и 2 ряды рисунков таблицы). Поточечные разности (поправки «за сферичность» земной поверхности) в абсолютных единицах (мГал) и в относительных (%) (см. 3 и 4 ряды рисунков таблицы).

Как мы видим из Рисунка 3.7, характер искажений, т.е. форма разностного поля поправки «за сферичность» для однородного сферического параллелепипеда практически остается такой же, что для двумерных моделей секторально-цилиндрических горизонтальных пластов, что и для трехмерных моделей «точечных» масс: искажения над центром тела минимальны, но увеличиваются на краях области заполнения масс и, проходя через максимум, затухают по мере удаления от источников. На Рисунке 3.8 даны профильные сечения по широте и

долготе, проходящие над центрами «малого» и «большого» сферических параллелепипедов. Форма кривых отчетливо обрисовывает характер профильных изменений и подчеркивает их симметрию относительно центра аномалиеобразующих масс.

Наблюдаемое гравитационное поле Δg редуцируется на поверхность земного эллипсоида. В картографической проекции Гаусса-Крюгера оно отображается на горизонтальную плоскость. В той же проекции должны быть преобразованы и геометрические параметры аномалиеобразующих объектов для корректного решения прямой задачи гравиметрии. Деформирование сфероидальных объектов при отображении поверхности эллипсоида на плоскость в меньшей степени влияет на величину расчетных аномалий в эпицентрах тел, но сказывается на латеральных градиентах и степени затухания аномального поля. Погрешность вычисления гравитационного поля на криволинейной поверхности Земли (сфере или эллипсоиде) сравнительно с плоскостью зависит от пространственных размеров (объема) области заполнения аномальных масс. При тщательно выверенном соотношении координат на сфере и плоскости, поправка «за сферичность» формируется только за счет различия между компонентами поля g_z и g_R . И, как показывают вычисления, для сравнительно небольших по размерам площадей эта поправка не играет заметной роли.

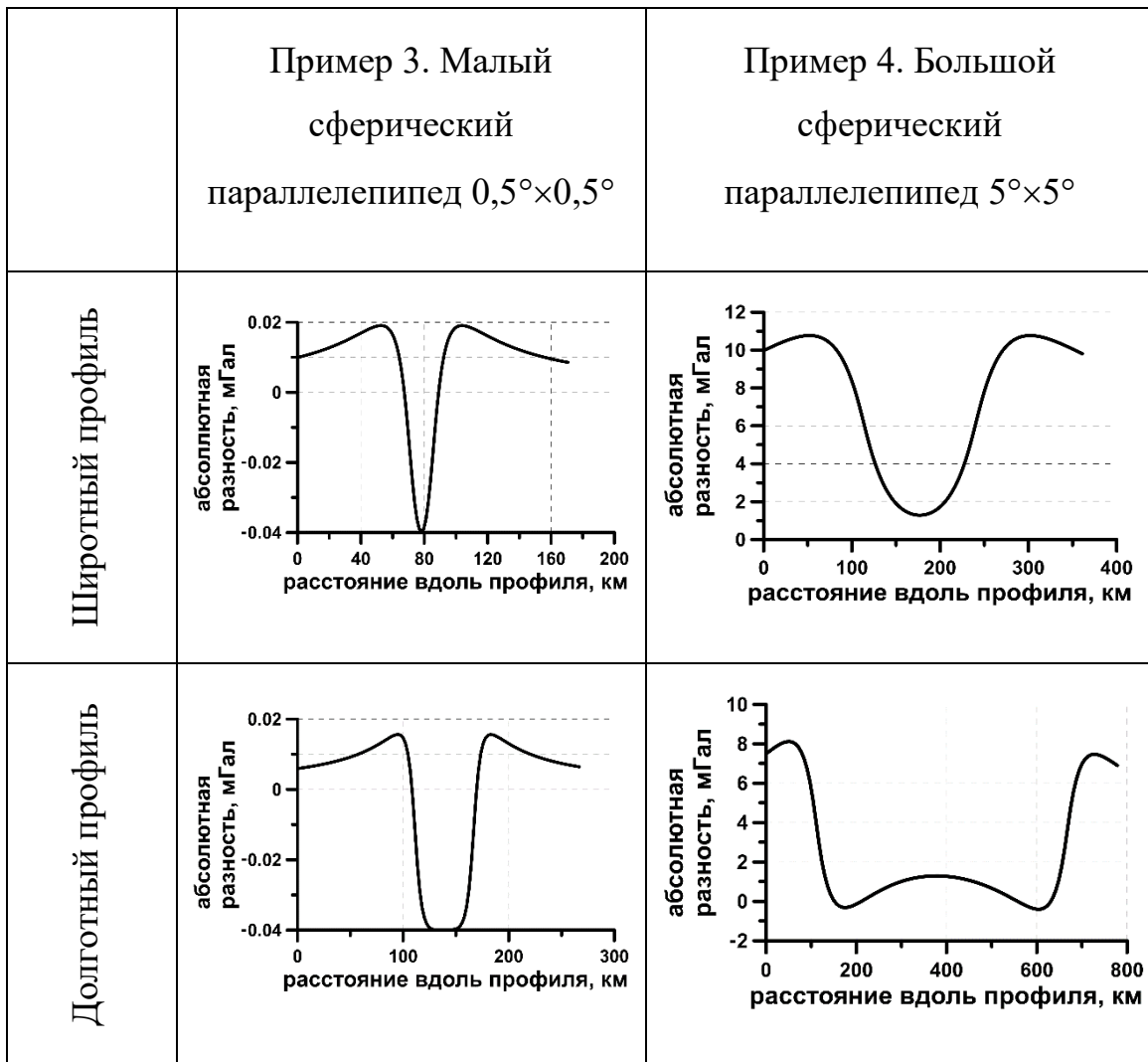


Рисунок 3.8. Графики поточечной разности (поправки «за сферичность» земной поверхности) для широтного и долготного профилей, проходящих над геометрическими центрами большого (по широте $77,5^\circ$ и долготы $89,85^\circ$) и малого (по широте $50,25^\circ$ и долготы $40,1^\circ$) сферических параллелепипедов.

Оценка погрешности для региональных моделей

После отображения Гаусса-Крюгера (3.10) точек счета поля с плоскости на эллипсоид в них было посчитано поле от соответствующих сфероидальных сегментов в геоцентрической системе координат (2.3). При этом относительная невязка полей в соответствующих точках не превышает 1,27 % для модели Тимано-Печорской плиты и 4,04 % для модели Уральского региона

(характеристики моделей приведены в предыдущей главе). В абсолютном выражении разница находилась в пределах $[-0,98; 0,61]$ мГал и $[-1,44; 0,01]$ мГал при изначальном разбросе поля в «плоском» варианте $[-80; 100]$ мГал. Также было проведено сравнение полей от введенной ранее тестовой модели постоянной плотности, посчитанных в сфероидальной и «плоской» геометрии. Относительная невязка полей для тестового примера составила 3,6%.

Заметим, что площади территорий, для которых построены две плотностные модели, (обратная задача для «плоской» Земли) отличаются в 1,5 раза, тогда как невязки полей (прямая задача для сфероидальной Земли) – в 3 раза, также первая модель Тиманской плиты «вытянута» вдоль меридианов, вторая модель Урала – вдоль параллелей. Это иллюстрирует тот факт, что в проекции Гаусса-Крюгера по мере удаления от центрального меридиана реальный масштаб быстро увеличивается. То есть, при переходе от «плоской» модели к «сферической» расстояния между ее элементами по мере удаления от центрального меридиана уменьшаются. Соответственно, на больших расстояниях от центрального меридиана искажения в поле будут получаться больше, причем поле сфероидальной модели будет все меньшим по сравнению с полем «плоской» модели.

Обсуждение результатов

По результатам проведенных экспериментов можно заключить, что при построении плотностных моделей земной коры и верхней мантии мощностью до 100 км среднеквадратичная ошибка в поле, связанная с неучетом «сферичности», не превышает 5% для моделей протяженностью порядка 1000x1000 км. Заметим, что данный результат для трехмерной эллипсоидальной модели хорошо согласуется с первым представленным двумерным примером, что позволяет использовать более простую постановку для грубой оценки погрешности. При таких значениях ошибки имеет смысл вводить учет «сферичности» в постановку обратных задач гравиметрии, так как уже могут начать проявляться видимые

влияния в решении (что будет показано в Главе 4 на примере). Для моделей меньшей протяженности ввод «сферичности» может иметь смысл лишь в случае, когда идет работа с практическими данными высокого разрешения, в которых погрешность измерений меньше ошибки в следствие неучета «сферичности». Так, например, для моделей протяженностью 500x500 км (и мощностью 70 км) неучет «сферичности» порождает максимальную абсолютную погрешность в поле над гравитирующим объектом порядка 1-2 мГал (~1%). Для модели в 10 раз меньше ошибка падает уже до ~0.05 мГал (~0.3%).

Глава 4. Решение обратной задачи гравиметрии для «сферических» моделей

Начальное приближение

В силу относительно малых значений поправки «за сферичность» для рассматриваемых региональных моделей имеет смысл сначала решать обратную задачу в «плоской» постановке, а лишь затем переходить к решению задачи для «сферической» модели. Поэтому для ускорения процесса вычислений в качестве нулевого приближения возьмем модель, построенную в ходе решения «плоской» обратной задачи [Мартышко, 2019]. В качестве метода проектирования «плоской» модели в «сферическую», используем (3.10). Таким образом, будет произведено уточнение решения в пределах погрешности за неучет «сферичности» до достижения малых значений невязки по полю в сферической геометрии (для рассматриваемых региональных моделей уточнение проводится в пределах 5%).

Постановка задачи оптимизации

Задача восстановления функции распределения плотности по аномальному гравитационному полю является некорректной: ее решение не единственно и неустойчиво относительно входных данных [Тихонов, 1943; Оганесян, 1985]. В связи с этим возникает необходимость наложения ограничений на решение для того, чтобы оно оставалось геологически содержательным. Для получения таких решений, отвечающих реальному распределению плотности в практических задачах, накладываемые ограничения должны соответствовать некоторой априорной информации. Как и в [Мартышко, 2010; Мартышко, 2012], рассмотрим задачу «уточнения» региональной модели. На сеточную функцию, которая ищется как решение линейной обратной трёхмерной задачи гравиметрии для разностного поля, наложим лишь одно дополнительное условие (помимо

соответствия гравитационного эффекта решения заданному полю): минимальное отклонение от начальной модели по некоторой норме.

Обозначим набор всех $\rho_{i,j,k}$ из области D как вектор $\mathbf{x} = (\rho_{i,j,k} : i = 1, 2, \dots, N_i; j = 1, 2, \dots, N_j; k = 1, 2, \dots, N_k)$. Также введем дискретизацию Δg и обозначим набор его значений в узлах сетки как вектор $\mathbf{f} = (g_{l,m} : l = 1, 2, \dots, N_l; m = 1, 2, \dots, N_m)$. Тогда прямую задачу гравиметрии можно записать как $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, где A – дискретизированный оператор прямой задачи гравиметрии.

Как было сказано выше, цель – найти решение обратной задачи $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ с дополнительным условием минимального отклонения от модели начального приближения. Это приводит к следующей задаче минимизации:

$$\begin{cases} \|A\mathbf{x} - \mathbf{f}\|_2 \rightarrow \min \\ \text{при условии, что } \|\mathbf{x}\|_\infty \rightarrow \min \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь $\mathbf{f} = \mathbf{f}_r - \mathbf{f}_0$ – остаточное поле, \mathbf{f}_r – измеренное поле, \mathbf{f}_0 – поле модели начального приближения.

Попытка непосредственно перейти к задаче минимизации привела бы к необходимости построения множества эквивалентных решений (в смысле функционала $\|A\mathbf{x} - \mathbf{f}\|_2$), что при численном решении не представляется возможным. Чтобы преодолеть эти препятствия, составим взвешенный функционал, заменив минимакс на минимум квадрата евклидовой нормы. Таким образом, приходим к задаче минимизации:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad u(\mathbf{x}) = \alpha \|A\mathbf{x} - \mathbf{f}\|^2 + \beta \|\mathbf{x}\|^2 \rightarrow \min \quad (4.2)$$

Для квадратичного функционала u решение задачи можно записать в виде

$$\mathbf{x} = -H_u^{-1}(\mathbf{0})\nabla u(\mathbf{0}),$$

где H_u и ∇u – матрица Гессе и градиент u , соответственно. Обращение H является нестабильной задачей и, вообще говоря, может не существовать, поэтому перейдем к системе линейных уравнений и подставим в нее u из (4.2).

$$H_u(\mathbf{0})\mathbf{x} = -\nabla u(\mathbf{0})$$

$$\nabla u = 2\alpha A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{f}) + 2\beta\mathbf{x}$$

$$H_u = 2\alpha A^T A + 2\beta E$$

$$(A^T A + \lambda E)\mathbf{x} = A^T \mathbf{f}, \quad \lambda = \beta/\alpha, \quad (4.3)$$

где E – единичная матрица. Параметр λ , помимо своего основного назначения («регулировка» вклада частей целевого функционала в его сумму), также выполняет роль параметра регуляризации.

Систему (4.3) можно эффективно (с точки зрения вычислительных ресурсов) решать с помощью метода сопряженных градиентов. Итерационный процесс описывается следующим образом [Henk, 2003]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^k &= \mathbf{x}^{k-1} + \alpha_k \mathbf{z}^{k-1} & \alpha_k &= \frac{(\mathbf{r}^{k-1}, \mathbf{r}^{k-1})}{(G\mathbf{z}^{k-1}, \mathbf{z}^{k-1})} & \mathbf{r}^0 &= \mathbf{z}^0 = \mathbf{b} - G\mathbf{x}^0 \\ \mathbf{r}^k &= \mathbf{r}^{k-1} - \alpha_k A\mathbf{z}^{k-1} \\ \mathbf{z}^k &= \mathbf{r}^k + \beta_k \mathbf{z}^{k-1} & \beta_k &= \frac{(\mathbf{r}^k, \mathbf{r}^k)}{(\mathbf{r}^{k-1}, \mathbf{r}^{k-1})} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь, k – номер итерации, $G = (A^T A + \lambda E)$, $\mathbf{b} = A^T \mathbf{f}$. Начальное приближение было выбрано нулевым ($\mathbf{x}^0 = \mathbf{0}$), так как поставлена задача минимального отклонения от нуля. Условие останова: $\frac{\|\mathbf{r}^{k-1}\| - \|\mathbf{r}^k\|}{\|\mathbf{b}\|} < 0,001$ в течение двух последовательных итераций.

Восстановление региональной модели

Для решения практической обратной задачи гравиметрии был написан скрипт на языке python 3.7, непосредственно реализующий итерационный процесс (4.4) решения задачи оптимизации (4.2). Для вычисления операторов A и A^T на каждой итерации запускается ранее разработанная программа GRAFEN. Ее

работа занимает практически все время итерации. Вычисление транспонированного оператора занимает примерно на 15-20% больше времени, чем прямого (в Таблице 2.4 приведен лучший достигнутый результат по времени вычисления прямого оператора). Производительность других операций не играет существенной роли (все ключевые оптимизации реализованы в программе GRAFEN), они исполняются только на корневом узле. Операции линейной алгебры реализованы с использованием библиотеки NumPy. Текст скрипта доступен⁴ в сети Интернет и может быть использован как пример реализации предложенного алгоритма и/или для воспроизведения результатов исследования.

В качестве входных данных для численных экспериментов были использованы описанные ранее модель Тимано-Печорской плиты и модель Уральского региона. Распределение плотности восстанавливалось для разностного поля «плоской» и «сферической» модели. Начальные эксперименты проводились с относительно крупным разбиением (сетка модели порядка $256 \times 256 \times 81$), что обусловлено необходимостью многократного повторения процесса вычислений для определения влияния параметра λ на морфологию решения, скорость сходимости и результирующую относительную ошибку по полю, которая равна $\|Ax - f\| / \|f\|$. После того, как параметр λ был определен, задача пересчитывалась для оригинального разрешения модели.

Заметим, что при выборе функционала u в виде (4.2) мы сталкиваемся со следующей проблемой: требования минимизации ошибки по полю при одновременно минимальном отклонении элементов x от нуля в некотором смысле противоречат друг другу. То есть, при увеличении λ мы получаем малые отклонения x от нуля, но при этом уменьшение невязки по полю останавливается при продолжении итерационного процесса. Таким образом, при решении практических задач, всегда будет некая граница минимально достижимой невязки поля при ограничении на допустимые значения плотности гравитирующих

⁴ URL: <https://github.com/AlexIII/GRAFEN-inversion>

элементов, и эта граница не всегда может удовлетворять желаемой точности. Ниже излагается способ преодоления этих трудностей.

Для экспериментального определения значения λ в обратной задаче будем использовать начальное приближение, заведомо сильно отличающееся от конечного решения (интерполяция данных сейсмического профилирования, относительная погрешность в поле $\sim 100\%$). Это необходимо для получения более выраженных особенностей при визуализации модели. Как только удовлетворительный λ будет подобран, решение задачи перезапустим как поиск поправки «за сферичность» для уже имеющейся «плоской» модели.

В Таблице 4.1 приведены результаты численных экспериментов для различных значений параметра λ . Величина P_n^k – статистический показатель «проценталь» для слоя k и n -процентной границы. При малых значениях параметра λ , все высокоамплитудные значения в x концентрируются в верхнем (ближайшем к плоскости измерения поля) слое. С увеличением λ наблюдаем эффект «разделения высокочастотных компонент» функции распределения плотности (остаются в верхних слоях) и низкочастотных («опускаются» в нижние слои). Данный эффект схож с результатами, полученными при решении обратной задачи методом, основанном на процессе разделения поля по глубине [Мартышко, 2016а]. Однако в приведённом примере, при достижении желаемых значений отклонения x от нуля, была получена неудовлетворительная невязка по полю.

Для компенсации этого эффекта, перейдем к более «гибкому» заданию λ : в выражении (4.3) заменим λE на диагональную матрицу L (с диагональными элементами $\lambda(z_i)$), позволяющую задать значение параметра индивидуально для каждого слоя модели (т. е. переменное по глубине). Построим $\lambda(z)$ по принципу наложения большого «штрафа» за большие амплитуды в верхних слоях (Рисунок 4.1). При таком задании λ мы получили относительную погрешность по полю

3,3% при средних плотностях в горизонтальных слоях модели, отвечающих априорным данным (Рисунок 4.2).

Используем полученную $\lambda(z)$ для решения изначально поставленной задачи: уточнение решения «плоской» обратной задачи в пределах погрешности «за неучет сферичности». Визуальное представление найденной поправки для модели Тимано-Печорской плиты показано на Рисунке 4.4. Естественно наблюдать гораздо меньшие амплитуды в решении, чем в предыдущих примерах, так как мы заведомо искали решение, вклад которого в поле модели не превышает 10%.

На Рисунке 4.5 показана изначально модель (решение «плоской» обратной задачи) и результирующая. Визуальные отличия – слаборазличимы в приведенном масштабе (что отражает выбор нашего целевого функционала). Ошибка в поле (см. Рисунок 4.6) до уточнения - 9%, после - 3%. Решение заняло 19 итераций метода и 35 час. работы программы.

Таблица 4.1. Влияние параметра λ на получаемое решение

Значение λ	Кол-во итераций	Относительная ошибка задачи (4.2), %	Относительная ошибка задачи (4.1) [по полю], %	$\max_k (P_1^k)$; $\max_k (P_{99}^k)$	Морфологические особенности решения
50	37	0,07	0,5	-0,1; 0,45	В верхних слоях сконцентрировано много высокоамплитудных значений. В центре объема значения близки к нулю. См. Рисунок 4.3, а.
500	32	0,09	3,5	-0,13; 0,23	Плотностные аномалии начинают «проникать» в толщу среды, существенное уменьшение амплитуд в верхних слоях. См. Рисунок 4.3, б.
2000	13	0,5	11	-0,17; 0,18	Визуально поле практически не отличается от предыдущего варианта. Итерационный процесс остановлен, т. к. ошибка по полю перестала уменьшаться. См. Рисунок 4.3, б.
$\lambda(z)$	36	0,02	3,3	-0,1; 0,19	Высокоамплитудные значения распределены по горизонтальным слоям модели. Средняя плотность каждого слоя согласуется с априорными данными. См. Рисунок 4.3, в.

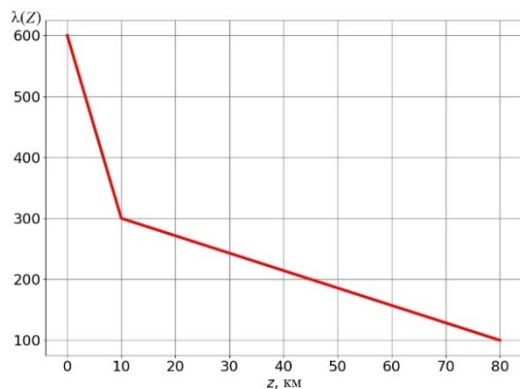


Рисунок 4.1. Переменная λ , использованная при построении финального решения.

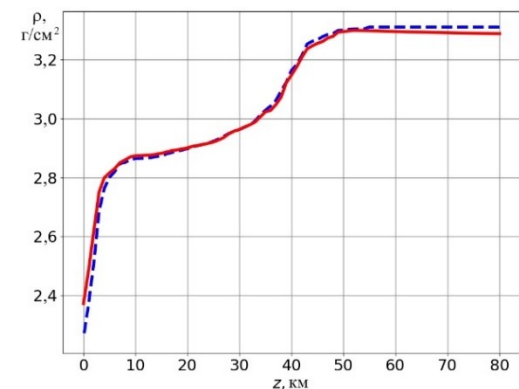
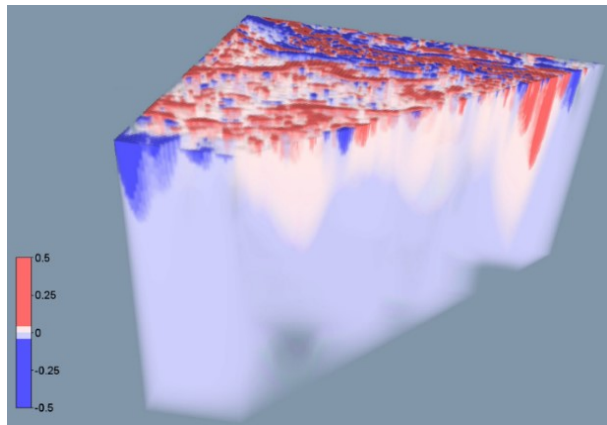
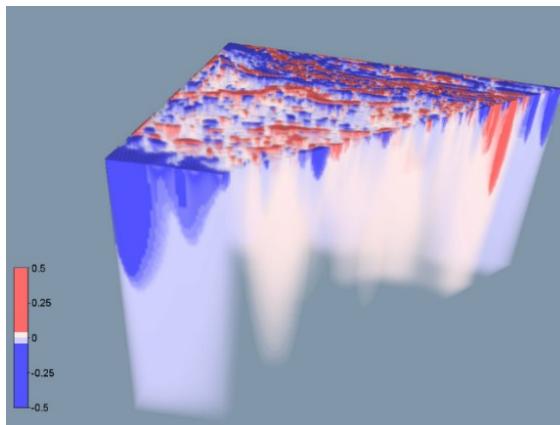


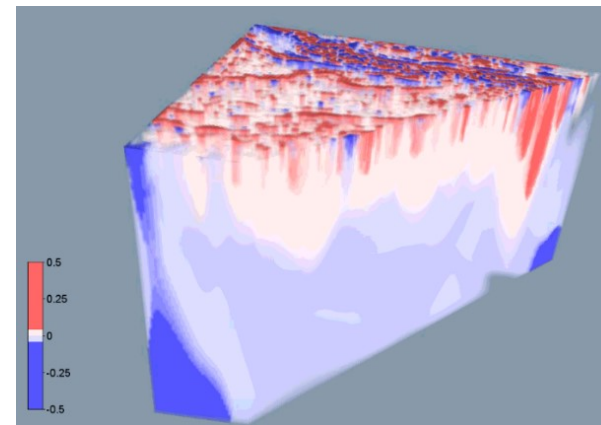
Рисунок 4.2. Графики среднего значения плотности по слоям: синий – референс-распределение [Мартышко, 2013], красный – результат решения.



a)



б)



в)

Рисунок 4.3. Найденная поправка к тестовой модели (решение без учета «сферичности») при: *a)* $\lambda = 50$; *б)* $\lambda = 500$; *в)* переменная $\lambda(z)$.

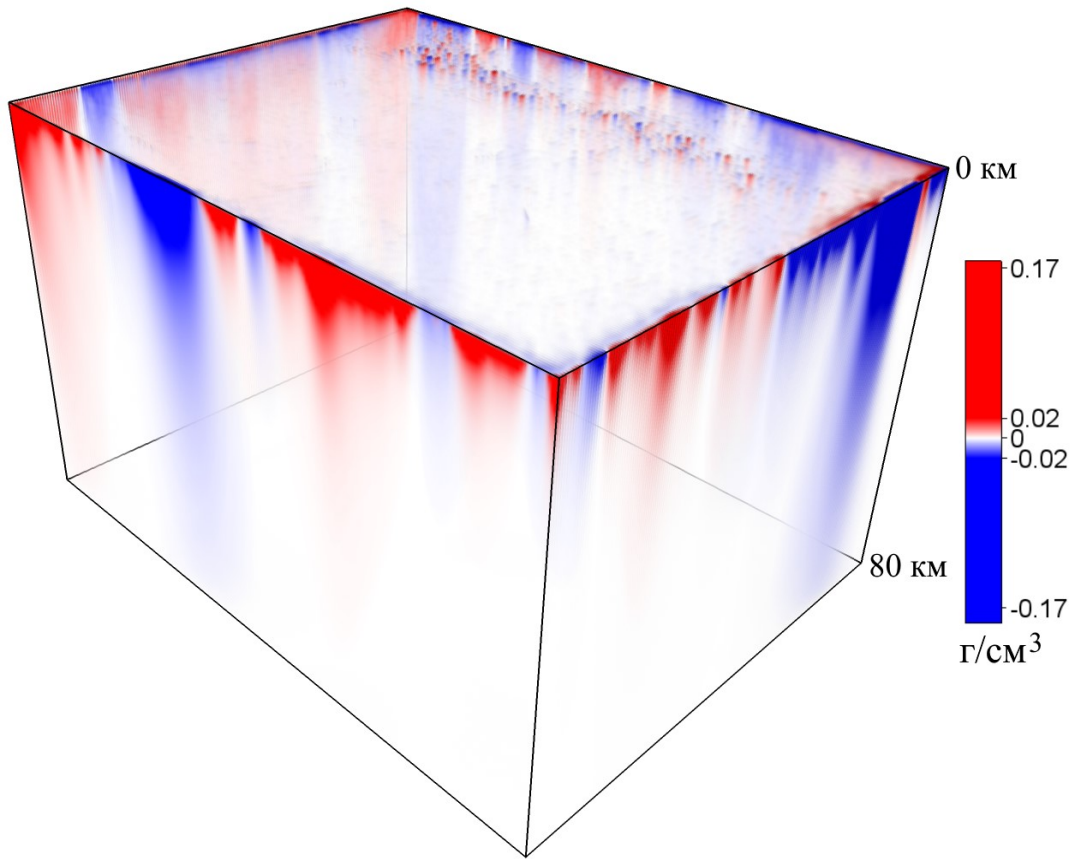


Рисунок 4.4. Найденная поправка «за сферичность» к модели Тимано-Печорской плиты.

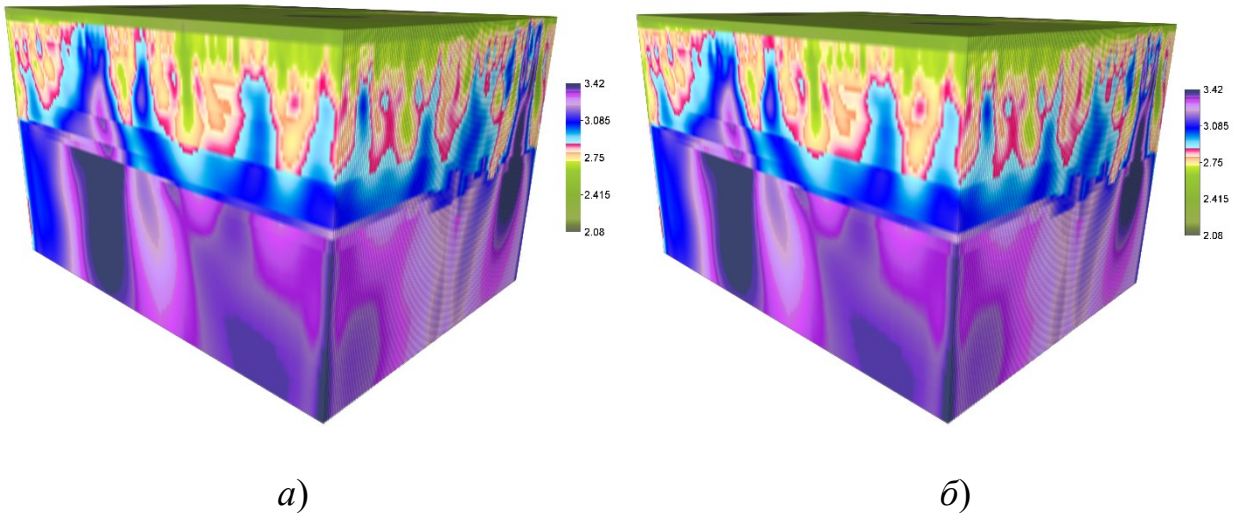


Рисунок 4.5. Модель Тимано-Печорской плиты, *a)* без и *б)* с поправкой «за сферичность» (г/см^3).

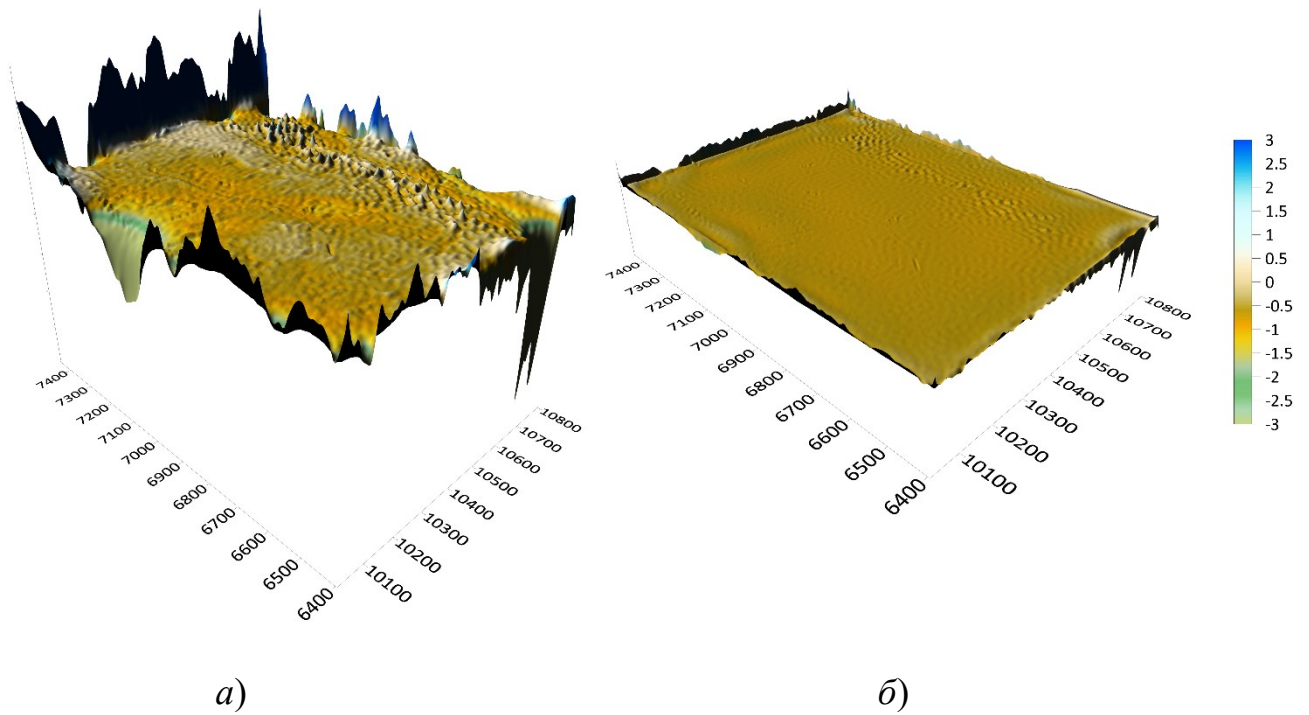


Рисунок 4.6. Ошибка в поле (абсолютная, мГал) модели Тимано-Печорской плиты, *a)* без и *б)* с поправкой «за сферичность».

Заключение

Основные результаты проведенного исследования.

- Предложено непрерывное обратимое преобразование «плоской» трехмерной плотностной модели в «сферическую» и наоборот, основанное на преобразовании Гаусса-Крюгера. Свойство сохранения углов пересекающихся линий на эллипсоидальных поверхностях сечения модели при преобразовании позволяет сохранять геометрические формы особенностей плотностного распределения. Принцип сохранения превышения точек модели над поверхностью Земли позволяет сохранить соответствие положения данных точек в географических координатах.
- Предложен и программно реализован вычислительно эффективный метод решения прямой задачи гравиметрии для эллипсоидальной модели с кусочно-постоянным распределением плотности, заданным на иррегулярной сетке (в геодезической системе координат). По результатам проведенных численных экспериментов, метод обеспечивает погрешность в поле менее 0,01% при ~1000-кратном ускорении вычислений по сравнению с методом Гаусса-Лежандра для моделей с количеством элементов порядка 10^8 и точек счета поля порядка 10^6 .
- Проведен ряд численных экспериментов, который позволил произвести сравнение вычисленных полей «плоских» и «сферических» моделей различной протяженности. Установлено, что для моделей протяженностью порядка 1000×1000 км и мощностью порядка 100 км может потребоваться учет «сферичности» при решении прямых и обратных задач гравиметрии, так как погрешность «за сферичность» может превысить 5%. При решении

линейных обратных задач гравиметрии для «сферических» моделей в качестве начального приближения можно брать результат, полученный в ходе решения задачи в «плоской» постановке. (Начиная процесс решения с довольно низкой невязки и наследовав все априорные данные, заложенные в модель.)

- Разработано пользовательское программное обеспечение для решения прямой задачи гравиметрии для эллипсоидальных моделей со встроенным преобразованием (из «плоской» модели в «сферическую»). Приложение использует современные технологии параллельных вычислений (Nvidia CUDA) и рассчитано для использования на гетерогенных распределенных вычислительных системах (суперкомпьютерах), что позволяет производить вычисления для региональных моделей высокого разрешения. Исходные коды, исполняемые файлы и инструкции разработанного ПО доступны по свободной лицензии в сети «Интернет»⁵.
- Предложенный алгоритм и разработанное программное обеспечение применены для решения обратной задачи гравиметрии методом сопряженных градиентов. Введенная модификация целевого функционала позволяет с высокой точностью находить решение обратной задачи с использованием дополнительных априорных данных: модели начального приближения и распределения среднего значения плотности по глубине. Метод имеет малое количество настроечных параметров, основным из которых является вектор коэффициентов штрафной функции, позволяющий нейтрализовать эффект «скопления» плотностных аномалий в верхних слоях модели. Для реализации метод требует только независимо имплементированный оператор прямой задачи и его

⁵ URL: <https://github.com/alexIII/GRAFEN>

«транспонированную версию» (которые совпадают при определенных постановках [Мартышко, 2013; Martyshko, 2015]). Вычислительная эффективность непосредственно зависит только от качества реализации оператора прямой задачи, т. к. его вычислительная сложность существенно выше сложности операций, используемых в итерационном методе.

- Для «плоской» региональной плотностной модели, построенной в Институте геофизики ИГФ УрО РАН в результате решения линейной обратной задачи гравиметрии по наблюдаемому полю, было найдено уточненное решение с поправкой «за сферичность». Ошибка в поле для «сферической» модели сокращена с 9% до 3%.

Разработанный метод «многогранников» можно применять при решении прямых и обратных задач гравиметрии для плотностных моделей, ограниченных не только элементом поверхности эллипсоида, но и произвольной поверхностью (которая должна хорошо поддаваться триангуляции). При решении практических задач естественно рассматривать рельеф в качестве этой поверхности. Такой подход позволит точно вычислять топографическую поправку с учетом сферичности и без использования техник аппроксимации (таких как приближение гравитационного эффекта масс, заключенных между референц-поверхностью и поверхностью рельефа поправкой за промежуточный плоскопараллельный слой). Также, становится возможным проведение интерпретации наблюдаемых гравитационных данных с учетом «сферичности» без предварительного вычисления поправок за рельеф, используя для построения плотностных моделей измеренные на рельефе значения поля.

При замене функции гравитационного поля элемента разбиения в методе конечных элементов (2.2) на выражение для магнитного поля можно перейти к решению прямой задачи магнитометрии для тел сложной формы (их

поверхность также должна хорошо аппроксимироваться триангуляцией). Благодаря высокой эффективности алгоритма становится практически целесообразным производить расчет «эффекта размагничивания».

Описанные направления развития темы активно исследуются автором и сотрудниками лаборатории математической геофизики ИГФ УрО РАН. По результатам данных исследований имеются соответствующие публикации.

Литература

Куприенко П.Я., Макаренко И.Б., Старостенко В.И., Легостаева О.В. Трехмерная плотностная модель земной коры и верхней мантии Украинского щита // Геофизический журнал. 2007. Т. 29. № 5. С. 3–27.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д. О решении обратной задачи гравиметрии на сетках большой размерности // Доклады Академии Наук. 2013. Т. 450. № 6. С. 702-707.

Страхов В.Н., Романюк Т.В. Восстановление плотностей земной коры и верхней мантии по данным ГСЗ и гравиметрии // Физика Земли. 1984. № 6. С. 44–63.

Павленкова Н.И., Егорова Т.П., Старостенко В.И., Козленко В.Г. Трехмерная плотностная модель литосферы Европы // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. №4. С. 3–23.

Дружинин В.С., Мартышко П.С., Начапкин Н.И., Осипов В.Ю. Строение верхней части литосферы и нефтегазоносность недр Уральского региона. Монография. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 2014. 226 С.

Долгаль А.С., Симанов А.А., Хохлова В.В. Решение геокартировочных и прогнозно-поисковых геологических задач методом гравirazведки с учетом сферичности Земли // Георесурсы. 2015. Т. 2. № 4 (63). С. 56-61.

Долгаль А.С., Бычков С.Г. Оценка различий аномалий силы тяжести для плоской и сферической моделей земли. // Международная конференция «Девятые научные чтения Ю.П., Булашевича». Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле Земли, интерпретация геофизических полей. Екатеринбург. 2017. С. 169-173.

Uieda L., Valéria C. F. Barbosa, Braitenberg C. Tesseroids: Forward-modeling gravitational fields in spherical coordinates // *Geophysics*. Vol. 81. № 5 (September - October 2015). F41–F48 pp.

Grombein T., Seitz K., Heck B. Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroid // *Journal of Geodesy*. 2013. № 87. 645–660 pp.

Иванов В.К. О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде // *ДАН СССР*. 1956. Т. 106. № 4.

Страхов В.Н., Романюк Т.В. Восстановление плотностей земной коры и верхней мантии по данным ГСЗ и гравиметрии // *Физика Земли*. 1984. №6. С. 44-63

Цирульский А.В., Никонова Ф.И., Федорова Н.В. Метод интерпретации гравитационных и магнитных аномалий с построением эквивалентных семейств решений // *Свердловск: УНЦ АН СССР*. 1980.

Никитин А.А. Комплексная интерпретация геофизических полей при изучении глубинного строения земли // *Геофизика*. 1997. №4. С. 3-12

Петров А.В., Трусов А.А. Компьютерная технология статистического и спектрально-корреляционного анализа трехмерной геоинформации - КОСКАД 3D // *Геофизика*. 2000. №4. С. 29-33.

Кобрунов, А.И. Денисюк, Р.П. Решение обратной задачи гравиразведки в классе плотностных границ с переменной плотностью на контакте // *Изв. Вузов. Геология и разведка*. 1982. №9. С. 108-117

Страхов В. Н., Степанова И. Э. Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // *Физика Земли*. 2002. №. 2. С. 3-19.

Ладовский И. В., Мартышко П. С., Бызов Д. Д., Колмогорова В. В. О выборе избыточной плотности при гравитационном моделировании неоднородных сред // Физика Земли. 2017а. № 1. С. 138-147.

Старостенко В.И., Легостаева О.В. Прямая задача гравиметрии для неоднородной произвольно усеченной вертикальной прямоугольной призмы // Физика Земли. 1998. № 12. С. 31-44.

Балк П.И., Долгаль А.С. Трехмерные монтажные технологии интерпретации гравиметрических данных // ДАН. 2009. Т. 427. № 3. С. 380-383

Глазнев В.Н., Муравина О.М., Воронова Т.А., Холин В.М. Оценка мощности гравиактивного слоя земной коры воронежского кристаллического массива // Вестник воронежского государственного университета. Серия: Геология. 2014. №4. С.78-84.

Glaznev V.N., Mints M.V., Muravina O.M. et al. Complex geological-geophysical 3D model of the crust in the southeastern Fennoscandian Shield: Nature of density layering of the crust and the crust-mantle boundary // Geodynamics and Tectonophysics. 2015. Vol. 6. № 2. 133-170 pp. DOI: 10.5800/GT-2015-6-2-0176

Степанова И.Э. Построение линейных трансформаций аномальных потенциальных полей с использованием S- и R- аппроксимаций // Физика Земли. 2011. №8. С. 81-96.

Uieda L., Bomfim E.P., Braitenberg C., et al. Optimal forward calculation method of the marussi tensor due to a geologic structure at GOCE height // Proc. of '4th International GOCE User Workshop', Munich, Germany, 31 March – 1 April. 2011.

Старостенко В.И., Пятаков Ю.В. Решение прямых задач гравиметрии для сферических аппроксимирующих тел. Алгоритмы // Известия томского политехнического университета. 2013а. Т. 322. № 1. С. 28-34.

Старостенко В.И., Пятаков Ю.В., Исаев В.И. Решение прямых задач гравиметрии для сферических аппроксимирующих тел. Тестирование алгоритмов // Известия томского политехнического университета. 2013б. N 322, № 1. С. 28-34.

Сеначин В.Н., Лютая Л.М., Сеначин М.В. Некоторые вопросы гравитационного моделирования на сферической поверхности Земли // Геология, геофизика Вестник ДВО РАН. 2015. №2.

Кузнецов К.М., Лыгин И.В., Булычев А.А. Алгоритм численного решения прямой задачи гравиметрии от сферического слоя переменной плотности // Геофизика 2017. №1. С. 22-27,

Zhao, G., Chen, B., Uieda, L., et al. Efficient 3D large-scale forward-modeling and inversion of gravitational fields in spherical coordinates with application to lunar mascons. // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. 2019. Vol. 124. № 4. DOI:10.1029/2019jb017691.

Бычков С.Г., Долгаль А.С., Симанов А.А. Вычисление аномалий силы тяжести при высокоточных гравиметрических съемках. // Пермь: УрО РАН, 2015. 142 С.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д., Чернокутов А.И. О решении прямой задачи гравиметрии в криволинейных и декартовых координатах: эллипсоид Красовского и “плоская” модель // Физика Земли. 2018. №4. С. 31-39. DOI: 10.1134/S0002333718040075 [Eng. On Solving the Forward Problem of Gravimetry in Curvilinear and Cartesian Coordinates: Krasovskii's Ellipsoid and Plane Modeling. Izvestiya-physics of the solid earth, Vol. 54. № 4. 565-573 pp. DOI: 10.1134/S1069351318040079]

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Федорова Н.В., Бызов Д.Д., Цидаев А.Г. Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных. Екатеринбург: УрО РАН. 2016б. 94 С. ISBN 978-5-7691-2463-1.

Wild-Pfeiffer F., Augustin W. und Heck B. Optimierung der Rechenzeit bei der Berechnung der 2. Ableitungen des Gravitationspotentials von Massenelementen // Zeitschrift für Geodäsie. 2007. №6 (132). 377-384 pp.

Martyshko P.S., Byzov D.D., Ladovskii I.V., Tsidaev A.G. 3D density models construction method for layered media // 15th International Multidisciplinary Scientific GeoConference SGEM 2015, www.sgem.org, SGEM2015 Conference Proceedings, ISBN 978-619-7105-33-9 / ISSN 1314-2704, June 18-24, 2015, Albena. Bulgaria. Book 2. Vol. 1. 425-432 pp.
DOI: 10.5593/SGEM2015/B21/S8.053

Ладовский И.В., Бызов Д.Д., Чернокутов А.И. О проблеме построения среднемасштабных плотностных моделей для сфероидальной земли // Уральский геофизический вестник. 2017. №1. С. 73–95.

Параметры земли 1990 года (ПЗ-90.11). Справочный документ. М.: Военно-топографическое управление генерального штаба вооруженных сил российской федерации. 2014. 52 С.

Krüger L. Konforme Abbildung des Erdellipsoids in die Ebene. // Veröff. Kgl. Preuß. Geod. Inst. N. F. 52. 1912. 181 P.

Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. Изд. 2, пер. и доп., М., Недра. 1979. 296 С.

ГОСТ 32453-2013. Глобальная навигационная спутниковая система. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. 2000. 20 С.

Шванк О.А., Люстих Е.Н. Интерпретация гравитационных наблюдений. Теория и практика решения прямой и обратной задачи гравиметрической разведки. // Москва – Ленинград, ГНТИ нефтяной и горно-топливной литературы. 1947. 400 С.

Heck B., Seitz K. A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling // *Journal of Geodesy*. 2007. №81. 121-136 pp. DOI 10.1007/s00190-006-0094-0

Bouman J., Ebbing J., Meekes S., Fattah R.A., et al. GOCE gravity gradient data for lithospheric modeling // *International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation*. 2015. Vol. 35A. 16-30 pp.

Гравиразведка. Справочник геофизика. Под ред. Е.А. Мудрецовой, К.Е. Веселова. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Недра. 1990. 607 С.

Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: «Физматлит». 2000. 398 С.

Макаров Н.П. Геодезическая гравиметрия. М.: Недра. 1968. 408 с.

Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Черноскутов А.И. Решение трехмерной линейной обратной задачи гравиметрии для сферических и эллипсоидальных плотностных моделей высокого разрешения // *Уральский геофизический вестник*. 2019. №3. С. 19-26.

Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // *Докл. АН СССР*. 1943. 39, №5. С. 195-198.

Оганесян С.М., Старостенко В.И. Тела нулевого внешнего гравитационного потенциала: о забытых работах и современном состоянии теории // *Изв. АН СССР. Физика Земли*. 1985. № 3. С. 49–63.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Цидаев А.Г. Построение региональных геофизических моделей на основе комплексной интерпретации гравитационных и сейсмических данных // *Физика Земли*. 2010. № 11. С. 23–35. DOI англ. версии: 10.1134/S1069351310110030.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Колмогорова В.В., Цидаев А.Г., Бызов Д.Д. Применение сеточных функций в задачах трехмерного плотностного моделирования // Уральский геофизический вестник. 2012. № 1(19). С. 30–34.

Henk A. van der Vorst. Iterative Krylov Methods for Large Linear System. Cambridge University Press. 2003. 221 P.

Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д. Об устойчивых методах интерпретации данных гравиметрии // Доклады академии наук. 2016а. Том 471. № 6. С. 725–728.

Публикации по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых изданиях, определенных ВАК и Аттестационным советом УрФУ

1. *Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Черноскотов А.И.* Об учете влияния сферичности земли при трехмерном плотностном моделировании // Доклады Академии Наук. 2017. Том 477. № 2. С. 221-225. DOI: 10.7868/S0869565217320184. [Eng. Accounting for the influence of the Earth's sphericity in three-dimensional density modelling. Doklady Earth Sciences, 477(1), 1325-1329 DOI: 10.1134/S1028334X17110150; <http://link.springer.com/article/10.1134/S1028334X17110150>] (WoS, Scopus)
2. *Мартышко П.С., Ладовский И.В., Бызов Д.Д., Черноскотов А.И.* О решении прямой задачи гравиметрии в криволинейных и декартовых координатах: эллипсоид Красовского и “плоская” модель // Физика Земли. 2018. №4. С. 31-39. DOI: 10.1134/S0002333718040075 [Eng. On Solving the Forward Problem of Gravimetry in Curvilinear and Cartesian Coordinates: Krasovskii's Ellipsoid and Plane Modeling. Izvestiya-physics of the solid earth, Volume: 54, Issue: 4, 565-573. DOI: 10.1134/S1069351318040079] [<https://elibrary.ru/item.asp?doi=10.1134/S0002333718040075>] (WoS, Scopus)
3. *Martyshko P.S., Ladovskii I.V., Byzov D.D., Chernoskutov A.I.* Forward-modeling Gravitational Fields in Curvilinear and Cartesian Rectangular Coordinates // International Conference On Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM-2018), AIP Conference Proceedings, Volume 2116, Article number 450104. 2019. DOI: 10.1063/1.5114571 [<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5114571>] (WoS, Scopus)

4. *Martyshko P.S., Ladovskii I.V., Byzov D.D., Chernoskutov A.I.* Performance-Effective Algorithm for Solving Large-Scale Forward Gravity Problem for Elliptical Objects // Proceedings of the 3rd International Workshop on Radio Electronics & Information Technologies. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 2076. 2018. pp. 96-102 [<http://ceur-ws.org/Vol-2076/paper-11.pdf>] (Scopus)
5. *Martyshko P.S., Ladovskii I.V., Byzov D.D., Chernoskutov A.I.* On numerical solution of forward gravity problem for ellipsoidal models // 18th International Conference on Geoinformatics: Theoretical and Applied Aspects, Geoinformatics 2019; Institute of Geology of Taras Shevchenko Kyiv National University Vasilkivska Str. Kyiv, Ukraine, 13 May 2019 through 16 May 2019. Article number 15912. (Scopus)

Прочие публикации

6. *Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Черноскутов А.И.* О решении линейной обратной задачи гравиметрии методом сопряженных градиентов с выбором условий оптимизации // Уральский геофизический вестник. 2018. №2. С. 52–55. [<http://igeoph.net/Vestnik/2018/02/pdf>]
7. *Ладовский И.В., Бызов Д.Д., Черноскутов А.И.* О проблеме построения среднемасштабных плотностных моделей для сфероидальной земли // Уральский геофизический вестник. 2017. №1. С. 73–95.
8. *Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Черноскутов А.И.* О численном решении прямой задачи гравиметрии для эллипсоидальных моделей // Уральский геофизический вестник. 2018. №3. С. 38–41. [<http://igfuran.ru/images/ugv/2018/2018-03.pdf>]
9. *Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Черноскутов А.И.* Решение трехмерной линейной обратной задачи гравиметрии для сферических и эллипсоидальных плотностных моделей высокого разрешения //

- Уральский геофизический вестник. 2019. №3. С. 19-26.
DOI:10.25698/UGV.2019.3.3.19
[<http://igfuroan.ru/images/ugv/2019/2019-03.pdf>]
10. Ладовский И.В., Бызов Д.Д., Чернокутов А.И. Об учете "сферичности" Земли при построении трехмерных плотностных моделей различной поверхностной протяженности // Глубинное строение, геодинамика, тепловое поле земли, интерпретация геофизических полей. Девятые научные чтения памяти Ю.П. Булашевича. Материалы конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2017. С. 245-249.
11. Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Чернокутов А.И. О численном алгоритме решения прямой задачи гравиметрии для эллипсоидальных моделей // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. Сборник научных трудов по материалам 46-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского. 2019. С. 260-264. [<https://elibrary.ru/item.asp?id=41103254>]
12. Мартышко П.С., Бызов Д.Д., Чернокутов А.И. О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии для сферических и эллипсоидальных плотностных моделей // Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей. Материалы 47-й сессии Международного научного семинара Д. Г. Успенского - В. Н. Страхова. Воронеж. 2020. С. 180-184. [<https://elibrary.ru/item.asp?id=41103254>]
13. Чернокутов А.И., Бызов Д.Д. Учет формы планеты при численном решении линейной обратной задачи гравиметрии // XXI Уральская молодежная научная школа по геофизике. Сборник науч. Материалов. Екатеринбург: ИГФ УрО РАН. 2020. 118 С.

Приложение 1. Инструкция пользователя программного обеспечения «GRAFEN v0.1»

GRAFEN v0.1 - GRAvity Field Ellipsoidal density model Numerical computations for CUDA-enabled distributed systems

Description

A performance-effective program for gravity field* calculation for layered ellipsoidal density model. The program can calculate gravity field in arbitrary points outside the density model. Input density model discretization is assumed to be regular in Gauss-Kruger (aka Transverse Mercator) projection (thus, irregular in geodetic coordinates).

The program is intended to work on distributed systems with CUDA accelerators.

*normal derivative of gravity potential

Build dependencies (Windows + CUDA)

You will need these only if you want to build the program yourself. If you just want to run the binaries, see «How to run the example» section below.

- Visual Studio 2017+ (Community version will do, select "Release" Configuration before building)
- [CUDA 10.1](#)
- [MS MPI](#)
- [GeographicLib 1.49](#)
- [Boost 1.71.0](#)

The program primarily designed to work with Surfer (© Golden Software) [Grid File Format](#)

Build dependencies (Linux + ROCm)

- Ubuntu 20.04 (or anything that can run ROCm)
- mpich (or any other MPI implementation)
- ROCm 3.7+, see the [installation guide](#)
- [GeographicLib 1.49](#)
- [Boost 1.71.0](#)

Specify paths to GeographicLib, Boost and MPI in `src/rocm.makefile` and run `cd src && make` to build. You can use `example/timan.sh` to run the example (it is required to download and unpack `resmodel_timan/` from *Releases*)

Hardware requirements

- GPU
 - Nvidia GPU with CUDA compute capability 3.5 or higher (any modern 2015+ Nvidia GPU will do)

OR

- AMD GPU [with ROCm support](#)
- At least 2GB GPU memory to run the example

Program arguments

Specify file for the output field:

`-dat2D dat2DfiledExample.dat` - XYV file, where V is the gravity filed value (in [milligals](#)). XY - arbitrary points in Gauss-Kruger projection (km). V is ignored as input. See example `example/timan.dat`

or

`-dat3D dat3DfiledExample.dat` - XYZV file, where V is the gravity filed value. XY - arbitrary points in Gauss-Kruger projection (km). Z and V are ignored as input. Z will be set to H (see bellow).

or

`-grd7 grdField.grd` - Surfer grd7 file. Grid dimensions are used as file input. All coordinates in Gauss-Kruger projection (km). Old grid values are ignored and will be rewritten.

Specify input parameters:

`-Hf 0.00001` - Height over the Ellipsoid on which the field is being calculated (km). (It is not recommended to pass exactly 0)

`-dens dens_model` - Directory with layered density model (set of grd7 files)

`-Hfrom -81` - Depth of the lower grid layer (density model)

`-Hto 0` - Depth of the upper grid layer (density model)

`-Hn 81` - Number of layers of the density model (must be same as amount of files in `dens_model`)

`-l0 57` - Central meridian for Gauss-Kruger projection

-DPR 180 -(optional) Radius of point-field replacement (in km). If you don't specify this option, replacement radius will be automatically deduced, based on condition that the output field accuracy won't be reduced more than by 0.1%.

-toRel - (optional) Convert input density model to relative values

-noInvFileOrder - (optional) Don't invert the file order of density model

-transposeSolver - (optional) Solve gravity problem with transposed forward gravity field operator. Files in dens_model will be rewritten, "output field" is now treated as input.

How to run the example (Windows)

1. Install [MS MPI](#)
2. Go to `exapmle/`.
3. Put `cuda64_101.dll`, `grafen_cu101.exe` and uncompressed folder with model `resmodel_timan/` here (all files are in *releases*).
4. Fix `hosts.txt`. You need to put here hosts that will execute the program. First host is 'root' host - it does not do actual computations. All other hosts perform computations using one GPU per host. You can utilize several GPUs on a single host by putting the same host entry several times in the file. For example, if you have 2 GPUs on host 192.168.5.1 and 4 GPUs on host 192.168.5.2. Your `hosts.txt` should be as follows:

```
192.168.5.1
192.168.5.1
192.168.5.1
192.168.5.2
192.168.5.2
192.168.5.2
192.168.5.2
```

Note, that the first host has one extra entry compared to the amount of its GPUs. **If you have one GPU on the same machine you're running the program on, you can leave default `hosts.txt` without changes.**

5. Fix path to `mpiexec` in `mpirun.cmd` if needed. Change `C:\` in `C:\%cd:~3%` to your network drive (e.g. `\\MYHOST\SHARED_FOLDER\`) or, if you're running the program locally, change it to your drive letter.
6. Run `timan.bat`. After the program is done you will have calculated field in `timan.dat`.

Running on multiple nodes

1. Make sure you have NFS between the nodes (the files of the program and the data should be available via the same path).
2. Make sure you have `smpd` running on all hosts under the same user.
3. Make sure your firewall doesn't interfere with MPI connections.

License

This software is distributed under MIT License. © Alexander Chernskutov, Denis Byzov

The files of `resmodel_timan` are distributed under MIT License. © Bulashevich Institute of Geophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia

Acknowledgements

Development of this software was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 17-05-00916_a).