

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи



Башкирцева Ирина Адольфовна

**НЕЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ЗОНАХ ПОРЯДКА И
ХАОСА: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, АНАЛИЗ И
УПРАВЛЕНИЕ**

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург – 2020

Работа выполнена на кафедре теоретической и математической физики Института естественных наук и математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Официальные оппоненты:

Ананьев Борис Иванович,

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник, ФГБУН
«Институт математики и механики им. Н.Н.
Красовского» Уральского отделения РАН,
ведущий научный сотрудник отдела
оптимального управления

Дубков Александр Александрович,

доктор физико-математических наук,
доцент, ФГАОУ ВО «Национальный исследова-
тельский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»,
заведующий кафедрой
«Математические методы в радиофизике»

Соловьева Ольга Эдуардовна,

доктор физико-математических наук,
доцент, ФГБУН «Институт иммунологии и
физиологии» Уральского отделения РАН,
директор

Защита диссертации состоится «18» ноября 2020 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета УрФУ 01.01.07, по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина 51, к. 248, Зал заседаний диссертационных советов.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», <https://dissovet2.urfu.ru/mod/data/view.php?d=12&rid=1359>.

Автореферат разослан “___” _____ 2020 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук



Косолюбов Д. А.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы и степень ее разработанности. В настоящее время для изучения динамических процессов, наблюдаемых в разных областях естествознания, широко используются математические модели в форме нелинейных дифференциальных или разностных уравнений. Переход от обработки эмпирических и экспериментальных данных к построению и анализу адекватных математических моделей позволяет существенно продвинуться в понимании механизмов сложных процессов в механике жидкостей и газов, климатических изменений, динамике нейронных и популяционных систем, химической кинетике и т.п., и перейти к решению актуальных задач управления такими процессами.

Присутствие случайных возмущений является неизбежным атрибутом функционирования любой реальной системы. Взаимосвязь нелинейности и стохастичности зачастую приводит к новым явлениям, не имеющим аналогов в исходных детерминированных моделях. В настоящее время насущной задачей математического моделирования является разработка новых подходов и универсальных математических методов, ориентированных на конструктивный анализ таких явлений в нелинейных стохастических моделях современного естествознания.

Если в детерминированном случае такой универсальный математический подход, использующий бифуркационный анализ и теорию устойчивости, в настоящее время достаточно хорошо разработан, то теория и методы нелинейного стохастического анализа еще только формируются.

Первые математические модели, использующие стохастические дифференциальные уравнения, появились в работах С.Н.Бернштейна, И.И.Гихмана, К.Ито, Р.Л. Стратоновича. Развитие стохастического анализа привело к появлению новых моделей с интегралами по мартингалам, точечным и Леви процессам [1, 2, 3].

Современная теория устойчивости и управления стохастическими динамическими системами формировалась в работах таких ученых как Н.Н. Красовский, Р.З. Хасьминский, И.Я. Кац, Н.Ж. Kushner, W.H. Fleming, В.Б. Колмановский, А.Б. Куржанский, Г.Н. Мильштейн, П.В. Пакшин, Ф.Л. Черноусько, Б.И. Ананьев, М. Aoki, L. Arnold, K.J. Astrom, R.S. Bucy, X. Mao, J.L. Willems, W.M. Wonham и многих других.

Воздействия случайных возмущений на автоколебательные режимы, возникающие в нелинейных моделях, исследовались в работах Л.С. Понтрягина, А.А. Андропова, А.А. Витта, Р.Л. Стратоновича, С.М. Рытова, Ю.И. Неймарка, П.С. Ланда, В.В. Болотина, М.Ф. Диментберга, В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасовой, А.А. Короновского, А.Е. Храмова, В.И. Некоркина, Г.В. Осипова, С.П. Кузнецова, А.Б. Неймана, А. Пиковского, А.А. Дубкова, R.A. Ibrahim, W. Horsthemke, R. Lefever, J. Duan, A. Pisarchik, J. Kurths, V. Spagnolo, S. Boccaletti и других.

В настоящее время интенсивно исследуются такие нелинейные стохастические явления, как вызванные шумом переходы, стохастические бифуркации, стохастический и когерентный резонанс, вызванный шумом порядок и хаос, вызванная шумом синхронизация, возбудимость, перемежаемость, мультимодальность, вызванные шумом кризисы.

Подобные явления, свидетельствующие о конструктивном характере шумов,

обнаружены во многих нелинейных стохастических системах, моделирующих реальные процессы, относящиеся к различным областям естествознания. В частности, такие стохастические явления наблюдаются и в обсуждаемых в диссертации направлениях, связанных с механикой потоков, с химической кинетикой, с популяционной динамикой, с нейронной активностью, с климатической и вулканической динамикой. Основным инструментом исследования таких нелинейных стохастических явлений пока остается прямое численное моделирование [4, 5]. В рамках этого чрезвычайно затратного метода сложно получить ясные параметрические описания разнообразных стохастических режимов исследуемых моделей. Для проведения детального параметрического анализа, позволяющего выяснить вероятностные механизмы этих новых стохастических явлений, требуется разработка аналитических подходов.

Сравнительный анализ представленного в литературе широкого круга нелинейных стохастических эффектов позволяет выделить главные причины, их вызывающие. В исследовании индуцированных шумами переходов определяющую роль играет взаимное расположение разброса случайных состояний вокруг аттракторов и сепаратрис, разделяющих их бассейны притяжения. Исчерпывающее вероятностное описание динамики вероятностных распределений в моделях, использующих стохастические дифференциальные уравнения, дается соответствующим уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова. Аналитическое решение этого уравнения возможно только в одномерном случае. В случае систем с малыми шумами здесь возникают известные сложности анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных. В этих обстоятельствах важны подходы, дающие конструктивные аппроксимации для искомых статистических характеристик. В частности, разработан метод, связанный с обрывом бесконечной последовательности уравнений для моментов высших порядков [6], методы стохастического усреднения [7, 8], аппроксимации в переменных амплитуды и фазы [9], метод квазипотенциала [10]. В случае равновесия и цикла квадратичная аппроксимация квазипотенциала была построена в [11]. Параметры соответствующей квадратичной формы задаются матрицей, получившей в дальнейшем название матрицы стохастической чувствительности. Метод функций стохастической чувствительности, использующий другой подход, связанный с системами первого приближения, развивался в цикле совместных работ [12, 13, 14, 15] автора диссертации.

Во многих реальных процессах адекватной математической моделью действующих случайных возмущений являются цветные шумы, имеющие те или иные характерные корреляционные временные характеристики [16]. Важная роль цветных шумов была обнаружена во многих системах самой разной природы, например, в лазерах, сейсмологии, биохимии, динамике популяций, кинетике роста микроорганизмов, динамике роста опухолей. Для анализа вероятностных механизмов этих явлений несомненно актуальным является представленное в диссертации распространение теории стохастической чувствительности на случай систем с цветными шумами.

Изучение взаимного влияния стохастических и периодических возмущений на поведение нелинейных динамических систем также является темой обшир-

ных исследований. Даже в детерминированном случае, динамические системы с периодически меняющимися параметрами являются широко распространенными математическими моделями в естествознании и технике. Например, в анализе динамики популяционных и климатических систем важную роль играют изменения внешних условий, связанные с суточными и сезонными ритмами. Такие системы могут демонстрировать разнообразие динамических режимов с периодическими, аperiodическими и даже хаотическими колебаниями. Детерминированные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами исследовались в работах Ю.А. Митропольского, А.М. Самойленко, Д.И. Мартынюка, В.А. Якубовича и многих других.

Взаимодействие нелинейности, периодичности и стохастичности может привести к различным неожиданным динамическим явлениям, среди которых наиболее известным является стохастический резонанс. Конструктивная роль шума в периодических системах привлекает внимание многих исследователей (см., например, [17, 18]). Представленное в диссертации развитие авторского аналитического метода стохастической чувствительности для исследования нелинейных систем с периодическими и случайными возмущениями является актуальным теоретическим направлением.

Наряду со стохастическими дифференциальными уравнениями, при моделировании случайных процессов в естествознании широко используются дискретные нелинейные отображения, позволяющие даже в одномерном случае моделировать широкий круг динамических режимов, как регулярных, так и хаотических. Исследование этих режимов, в подавляющем большинстве работ, основано на численном моделировании решений стохастических дискретных систем и последующей статистической обработке.

Математическое описание динамики вероятностных распределений в системах с дискретным временем дается функциональными уравнениями с операторами Перрона-Фробениуса. Однако аналитическое решение таких уравнений, даже в одномерном случае, возможно только для специально подобранных примеров. Для аппроксимации вероятностных распределений случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов (равновесий и циклов) дискретных систем, в работах [19, 20] был разработан аналог функции стохастической чувствительности, полученной ранее для непрерывного случая. Исследования показали, что в случае шумов, зависящих от состояния системы, этот метод аппроксимации может занижать значения дисперсии. Здесь построение более точных аппроксимаций, учитывающих специфику параметрических шумов, представляется важной исследовательской задачей.

В дискретных системах, задаваемых отображениями, наряду с равновесиями и дискретными циклами возможен еще один тип регулярного аттрактора – замкнутая инвариантная кривая. Возникновение такого аттрактора связано с бифуркацией Неймарка-Сакера, в результате которой равновесный режим трансформируется в квазипериодический. Хаотические режимы появляются в результате бифуркаций кризиса или удвоения периода. Квазипериодические и хаотические осцилляции являются важными режимами функционирования во многих нелинейных системах с дискретным временем. Присутствие случайных

возмущений вносит дополнительные сложности в их анализ. Разработка методов аппроксимации вероятностных распределений случайных состояний вблизи замкнутых инвариантных кривых и хаотических аттракторов является важным шагом в исследовании динамики стохастических систем с такими аттракторами и понимании внутренних механизмов сложных вероятностных феноменов.

Таким образом, разработка конструктивных аналитических методов аппроксимации вероятностных распределений вокруг регулярных и хаотических аттракторов является несомненно важной задачей современной нелинейной стохастической динамики. Практическая реализация этих теоретических методов в анализе разнообразных индуцированных шумами явлений требует разработки соответствующих алгоритмов и программ.

В настоящее время безусловно актуальной задачей является разработка конструктивных методов управления сложными колебательными режимами нелинейных систем. Здесь можно отметить технические проблемы по устранению вибраций в механических системах, подавлению нежелательных гармоник в электронных системах и т.п. Наряду с подавлением осцилляций, возникают и противоположные задачи генерации требуемых амплитудных и частотных характеристик. Для детерминированных систем такая теория достаточно хорошо развита в работах В.И. Зубова, Л.Д. Акуленко, Г.А. Леонова, И.И. Блехмана, А.Л. Фрадкова и др. В этом кругу особый интерес исследователей вызывает тематика, связанная с управлением хаосом. Объектом активных исследований являются задачи управления колебаниями в нелинейных стохастических системах.

Переход от традиционно рассматриваемых задач стабилизации равновесных режимов к синтезу сложных колебательных процессов с наперед заданными вероятностными характеристиками, особенно в условиях информационных и технологических ограничений, приводит к необходимости постановки и решения новых математических задач. В русле исследований, проводимых в данной диссертации, возникает новая постановка задачи управления, связанная с синтезом назначенной стохастической чувствительности рабочих режимов, связанных с теми или иными аттракторами динамических моделей. Здесь возникает круг новых математических задач по исследованию вопросов управляемости, достижимости и построению регуляторов в условиях полной и неполной информации.

Проводимые автором математические исследования были во многом мотивированы необходимостью решать актуальные задачи, возникающие в нелинейных стохастических моделях из разных разделов современного естествознания, связанных с динамикой сложной жидкости, функционированием проточных химических реакторов, протеканием реакций гликолиза, нейронной и популяционной динамикой, сложными динамическими явлениями в геофизике. Выявление общих закономерностей в моделях разной физической природы, формализация и разработка единого численно-аналитического подхода к исследованию наблюдаемых нелинейных стохастических явлений и решение новых задач управления делает тему диссертационной работы актуальной и важной для современной стохастической теории нелинейных динамических систем ее приложений.

Цели и задачи диссертации. Целью работы является разработка новых методов математического моделирования, анализа и управления сложными стохастическими режимами нелинейных динамических систем в зонах порядка и хаоса, а также приложение этой теории к решению актуальных исследовательских задач в различных разделах естествознания. Для достижения указанной цели были поставлены и решены следующие задачи.

1. Разработка методов асимптотической аппроксимации вероятностных распределений вблизи регулярных (равновесия, циклы, замкнутые инвариантные кривые) и хаотических аттракторов дискретных динамических систем с шумами, зависящими от состояния.

2. Развитие техники стохастической чувствительности для непрерывных динамических систем с цветными шумами и периодическими возмущениями.

3. Построение общей методики и создание комплекса алгоритмов и программ для исследования широкого круга индуцированных шумами явлений, связанных со стохастическими переходами и бифуркациями в математических моделях с непрерывным и дискретным временем.

4. Разработка конструктивных методов управления для решения новых задач синтеза динамических систем с заданными вероятностными характеристиками, в том числе и при неполной информации.

5. Применение разработанных методов математического моделирования, стохастического анализа и управления для решения ряда актуальных исследовательских задач, связанных со сложными стохастическими явлениями в потоках сложной жидкости, проточных химических реакторах, кинетике гликолиза, нейронной и популяционной динамике, геофизике.

Методы исследования. В качестве математических моделей систем в диссертации используются нелинейные системы стохастических дифференциальных и разностных уравнений. Для их анализа используется современная математическая теория локальных и нелокальных бифуркаций, аналитические, асимптотические и численные методы теории случайных процессов, компьютерное моделирование.

В диссертации используются и развиваются авторские методы математического моделирования и анализа нелинейных стохастических феноменов, использующие технику стохастических линейных расширений и аппарат функций стохастической чувствительности. Для пространственного описания вероятностных распределений в диссертации развивается техника доверительных областей, метод главных направлений с привлечением метрики Махаланобиса.

Важно подчеркнуть, что эти подходы и методы автора диссертации позволяют в рамках единой теории охватить как традиционно исследуемые простые случаи аттракторов (равновесия, циклы на плоскости), так и достаточно сложные пространственные аттракторы дискретных и непрерывных систем в зонах перехода от порядка к хаосу, и проводить анализ воздействия не только аддитивных, но и параметрических случайных возмущений.

В решении задач стохастического синтеза используются методы управления с помощью статических регуляторов с обратной связью, а также динамических регуляторов с фильтрацией зашумленных сигналов.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Спектральные критерии существования устойчивых стационарных вторых моментов стохастических линейных расширений нелинейных дискретных систем с параметрическими шумами в случае равновесий и циклов. Конструктивные алгоритмы для отыскания этих моментов.

2. Теория стохастической чувствительности для замкнутых инвариантных кривых двумерных отображений.

3. Теория стохастической чувствительности хаотических аттракторов одно- и двумерных отображений.

4. Теория стохастической чувствительности равновесий непрерывных систем с цветными шумами.

5. Теория стохастической чувствительности циклов неавтономных непрерывных систем с периодическими возмущениями.

6. Техника математического моделирования распределений случайных состояний регулярных и хаотических аттракторов в форме доверительных областей с привлечением техники функций стохастической чувствительности, метрики Махаланобиса и метода главных направлений.

7. Общая методика и комплекс алгоритмов и программ для исследования широкого круга индуцированных шумом явлений на основе разработанной теории стохастической чувствительности:

- стохастические переходы между сосуществующими аттракторами и их частями;
- обратные стохастические бифуркации;
- стохастическая генерация новых режимов в зонах седло-узловых, касательных и кризисных бифуркаций, а также бифуркаций Андронова-Хопфа, Неймарка-Сакера, и удвоения периода;
- стохастическая возбудимость и генерация мультимодальных колебаний в моностабильных системах;
- бифуркация стохастического расщепления предельных циклов;
- индуцированная шумом генерация и подавление хаоса;
- стохастическая генерация фантомного аттрактора.

8. Теория и алгоритмы решения новых задач синтеза динамических систем с заданными вероятностными характеристиками равновесных и осцилляционных режимов, в том числе и при неполной информации. Критерии управляемости и достижимости в зависимости от геометрии управляющих воздействий в задаче синтеза стохастической чувствительности. Конструктивные методы регуляризации в некорректной задаче управления стохастическим циклом. Новая техника управления доверительными областями в задаче структурной стабилизации и подавления хаоса.

9. Конструктивные методы, основанные на разработанной теории стохастической чувствительности, для исследования ряда актуальных задач в нелинейных стохастических моделях современного естествознания:

- анализ индуцированных шумом осцилляций в модели течения сложной жидкости;
- исследование стохастической возбудимости и стабилизации в модели про-

точного химического реактора;

- анализ явления стохастической генерации осцилляций в модели Селькова кинетики гликолиза;

- исследование вероятностных механизмов стохастической возбудимости в непрерывных моделях нейронной активности Фицхью-Нагумо, Юлихера, Ходжкина-Хаксли и дискретных моделях Рулькова;

- анализ вызванных шумами экологических сдвигов и способов их предотвращения в дискретных и непрерывных моделях популяционной динамики;

- анализ вероятностных механизмов нелинейных стохастических явлений в моделях геофизики (динамика климата и вулканическая активность).

Научная новизна заключается в разработке универсальной методики математического моделирования, анализа и управления для широкого круга стохастических явлений, исследуемых в разных областях естествознания. Математической основой этой методики является аппарат аппроксимации вероятностных распределений нелинейных стохастических систем, основанный на авторской технике функции стохастической чувствительности. Этот аппарат позволяет проводить конструктивное исследование новых стохастических явлений вблизи локальных и нелокальных бифуркаций в зонах порядка и хаоса, избегая затратного прямого численного моделирования в параметрическом анализе. Предложен и реализован новый численно-аналитический подход, учитывающий стохастическую чувствительность аттракторов и геометрию их бассейнов притяжения.

Достоверность полученных результатов. Достоверность теоретических результатов обеспечивается строгими математическими выводами и доказательствами. Достоверность численных результатов подтверждается их воспроизводимостью, анализом погрешности, сопоставлением результатов, полученных аналитическими и численными методами, совпадением результатов при использовании различных численных методов, соответствием известным из литературы результатам для аналогичных моделей, а также отсутствием противоречий с известными в научной литературе достоверными общепризнанными результатами.

Теоретическая и практическая значимость работы. Диссертация решает научную проблему, состоящую в разработке общей теории математического моделирования и анализа сложных стохастических явлений в нелинейных стохастических системах. Предложен универсальный подход, позволяющий в рамках единой теории исследовать особенности вероятностных распределений вблизи регулярных и хаотических аттракторов в математических моделях с дискретным и непрерывным временем с общими параметрическими шумами, в том числе цветными. Результаты, полученные в диссертационной работе, позволяют продвинуться в понимании общих закономерностей индуцированных шумами переходов и бифуркаций на основе анализа стохастической чувствительности аттракторов и их бассейнов притяжения. Предложенный подход к описанию сложных вероятностных явлений позволяет в рамках единой методики эффективно прогнозировать стохастические трансформации динамических режимов, проводить их количественный параметрический анализ и решать задачи управ-

ления, что имеет весьма широкую область потенциального применения в различных областях технических и естественных наук.

Теоретические разработки диссертации уже нашли применение в исследовании стохастических процессов в системах различной физической природы. Здесь можно отметить циклы работ по стохастическим явлениям в динамике связанных популяций, нейронной активности, кинетике гликолиза, термохимических реакторах, макроэкономике, климатической динамике, вулканической и гейзерной активности. Результаты этих практических приложений разработанной в диссертации теории опубликованы в авторитетных специализированных научных журналах.

Личный вклад автора. Представленные в диссертации результаты получено автором лично, или при его непосредственном участии. Все результаты, вынесенные на защиту, принадлежат лично соискателю.

Апробация результатов. Материалы диссертационной работы использовались при выполнении НИР, проводимых на кафедре теоретической и математической физики и лаборатории многомасштабного математического моделирования Уральского федерального университета, проектов Российского научного фонда (16-11-10095, 16-11-10098), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 00-01-00076, 02-01-96418урал, 04-01-96098урал, 06-01-00625, 06-08-00396, 07-01-96079-урал, 09-01-00026, 09-08-00048, 10-01-96022урал, 12-01-31210, 13-08-00069, 14-01-00181, 16-08-00388, 20-01-00165), Министерства образования и науки РФ (1.1099.2011, 2.1267.2011, 14.A18.21.0364, 1.849.2017), Уральского математического центра (075-02-2020-1537/1).

Основные результаты диссертации были представлены в форме приглашенных, устных и стендовых докладов на таких международных конференциях как 5th International Conference on Dynamic Systems and Applications (2007, Atlanta); 3rd IFAC Workshop "Periodic Control System" (2007, Санкт-Петербург); 3rd International IEEE Scientific Conference on Physics and Control (2007, Potsdam); 4th International Scientific Conference on Physics and Control (2009, Catania); "Neural, Parallel, and Scientific Computations" (2010, Atlanta); Advanced Workshop on Anderson Localization, Nonlinearity and Turbulence: a Cross-Fertilization (2010, Trieste); 3rd Conference of Computational and Mathematical Population Dynamics (2010, Bordeaux); «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (2008, 2010, Москва); Моделирование, управление и устойчивость» (2012, Севастополь); International Workshop on Chaos-Fractals Theories and Applications (2013, Taiyuan); "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity" (2014, Саратов); XII Всероссийское совещание по проблемам управления (2014, Москва); «Динамика систем и процессы управления» (2014, Екатеринбург); 19th World Congress of the International Federation of Automatic Control (2014, Cape Town); Workshop on Dynamical Systems (2015, Trieste); «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби» (2015, Екатеринбург); International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (2014, 2015, Rhodes); Multistability and Tipping: From Mathematics and Physics to Climate and Brain (2016, Дрезден); Computational Methods in Sciences and Engineering (2016, Афины); Models in Population Dynamics

and Ecology (2017, Cape Town); "Structural and phase transformation in materials: Theory, computer modeling and experiment" (2017, Екатеринбург); 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (2017, Екатеринбург); 5Th International Conference on Complex Dynamical Systems in Life Sciences: Modeling and Analysis (2018, Aveiro); Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (2017, 2018, Albena); Applications of Mathematics in Engineering and Economics (2019, Sozopol); Ural Symposium on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (2020, Екатеринбург).

Представленный в диссертации математический аппарат по анализу стохастических явлений в нелинейных системах стал теоретической основой для международного сотрудничества. В ходе совместных исследований опубликовано 17 статей с учеными из Центра Хаоса и Сложных Сетей Университета Гонконга, из Центра Биомедицинских Технологий Технического Университета Мадрида, из Университета Огайо (США), из Интердисциплинарной группы по теоретической физике Университета Палермо (Италия), из Группы Нелинейной динамики, Хаоса и Сложных систем Университета Мадрида. Авторская техника функций стохастической чувствительности и доверительных областей стала основой в исследованиях и других независимых зарубежных ученых в области математической теории нелинейных стохастических систем [21, 22, 23, 24], гидродинамики [25, 26], микробиологии [27, 28], популяционной динамики [29, 30, 31].

Публикации. Результаты работы опубликованы в реферируемых научных журналах, таких как «Автоматика и телемеханика», «Прикладная математика и механика», «Нелинейная динамика», «Компьютерные исследования и моделирование», «Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки», «Physical Review E», «Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science», «Europhysics Letters», «Physics Letters A», «Physica A: Statistical Mechanics and its Applications», «BioMed Research International», «Fluctuation and Noise Letters», «Journal of Difference Equations and Applications», «International Journal of Bifurcation and Chaos», «European Physical Journal B», «Tellus A», «Discrete Dynamics in Nature and Society», «International Journal of Applied Mathematics and Computer Science», «International Journal of Control», «Nonlinear Dynamics», «Journal of the Franklin Institute», «Kybernetika», «Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation», «Theoretical Population Biology», «Mathematical Modelling of Natural Phenomena», «Chaos, Solitons and Fractals».

Всего по теме диссертации опубликовано 96 статей. Все они индексируются в базах данных WOS или SCOPUS. Результаты, выносимые на защиту, опубликованы в 49 статьях. Все они индексируются в базах данных WOS или SCOPUS, из них 19 опубликованы в журналах, имеющих квартиль Q1. При этом в 13 статьях диссертант является единственным автором.

При выполнении диссертационной работы разработаны алгоритмы и подготовлен комплекс компьютерных программ. На государственную регистрацию были отправлены и получили свидетельства 11 программ.

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, шести глав основного содержания, заключения и списка цитируемой литературы. Общий объем диссертации составляет 388 страниц текста, включая 208 рисунков и список использованных источников, содержащий 341 наименование.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обоснована актуальность научной тематики диссертационной работы, сформулированы ее цель и задачи, отражена научная новизна, приведены основные результаты, выносимые на защиту, дано краткое изложение диссертационной работы, и представлены сведения о достоверности и апробации результатов.

В **Главе 1** развивается математический аппарат аппроксимации вероятностных распределений вблизи аттракторов нелинейных стохастических систем с дискретным временем, имеющим вид

$$x_{t+1} = f(x_t) + \sum_{i=1}^m \sigma_i(x_t) \xi_t^i, \quad (1)$$

где $f(x)$, $\sigma_i(x)$ – достаточно гладкие n -вектор-функции, ξ_t^i – независимые скалярные случайные последовательности с параметрами $E\xi_t^i = 0$, $E(\xi_t^i)^2 = 1$, $i = 1, \dots, m$, $t = 0, 1, \dots$. Функции $\sigma_i(x)$ характеризуют зависимость интенсивности случайных воздействий от состояния системы x .

В п.1.1 исследуется аппроксимация вероятностного распределения вокруг равновесия \bar{x} соответствующей детерминированной системы ($\sigma_i = 0$). Динамика малых отклонений $z_t = x_t - \bar{x}$ случайных состояний x_t системы (1) от равновесия \bar{x} определяется системой линейного приближения

$$z_{t+1} = Fz_t + \sum_{i=1}^m (S_{0,i} + S_{1,i}z_t)\xi_t^i, \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S_{0,i} = \sigma_i(\bar{x}), \quad S_{1,i} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x}(\bar{x}) \quad (2)$$

и уравнениями для моментов $m_t = Ez_t$ и $M_t = Ez_t z_t^\top$:

$$m_{t+1} = Fm_t, \quad (3)$$

$$M_{t+1} = FM_tF^\top + \sum_{i=1}^m (S_{0,i}S_{0,i}^\top + S_{0,i}m_t^\top S_{1,i}^\top + S_{1,i}m_t S_{0,i}^\top + S_{1,i}M_t S_{1,i}^\top). \quad (4)$$

Рассмотрим матрицу $S_0 = \sum_{i=1}^m S_{0,i}S_{0,i}^\top$ и операторы

$$\mathcal{F}[M] = FMF^\top, \quad \mathcal{A}[M] = M - FMF^\top, \quad \mathcal{S}[M] = \sum_{i=1}^m S_{1,i}MS_{1,i}^\top, \quad \mathcal{P} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}.$$

Для экспоненциально устойчивого равновесия \bar{x} вектор $\bar{m} = 0$ является единственным стационарным и устойчивым решением (3).

Тогда для M_t , $\bar{M} = \lim_{t \rightarrow \infty} M_t$ и $\Delta_t = M_t - \bar{M}$ справедливы уравнения

$$M_{t+1} = \mathcal{F}[M_t] + \mathcal{S}[M_t] + S_0, \quad (5)$$

$$\mathcal{A}[\bar{M}] = \mathcal{S}[\bar{M}] + S_0, \quad (6)$$

$$\Delta_{t+1} = \mathcal{F}[\Delta_t] + \mathcal{S}[\Delta_t]. \quad (7)$$

Уравнение (7) задает динамику матрицы вторых моментов $\Delta_t = \mathbb{E}y_t y_t^\top$ решений y_t линейного однородного стохастического уравнения

$$y_{t+1} = Fy_t + \sum_{i=1}^m S_{1,i} y_t \xi_t^i. \quad (8)$$

С помощью теории положительных операторов [32] доказана теорема.

Теорема 1.1. Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) Система (5) имеет единственное стационарное экспоненциально устойчивое решение \bar{M} , удовлетворяющее (6);
- (б) Решение $\Delta_t \equiv 0$ системы (7) является экспоненциально устойчивым;
- (в) Решение $y \equiv 0$ стохастической системы (8) является экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном;
- (г) $\rho(\mathcal{F} + \mathcal{S}) < 1$ (ρ – спектральный радиус);
- (д) $\rho(\mathcal{F}) < 1$ и $\rho(\mathcal{P}) < 1$.

Эта теорема дает спектральный критерий существования устойчивого равновесия \bar{M} матрицы вторых моментов решений системы первого приближения (2). Эта матрица используется при построении гауссовской аппроксимации

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\bar{M})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \bar{x})^\top \bar{M}^{-1}(x - \bar{x})\right)$$

плотности стационарного вероятностного распределения решений нелинейной системы (1) вокруг детерминированного равновесия \bar{x} .

В случае стохастической системы

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sum_{i=1}^m \sigma_i(x_t) \xi_t^i, \quad (9)$$

с малыми шумами (ε – скалярный малый параметр), справедливо разложение

$$M(\varepsilon) = \varepsilon^2 (I - \varepsilon^2 \mathcal{P})^{-1} [W] = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m+2} \mathcal{P}^m [W] = \varepsilon^2 W + \varepsilon^4 \mathcal{P}[W] + \varepsilon^6 \mathcal{P}^2[W] + \dots,$$

где $W = \mathcal{A}^{-1}[S_0]$ – решение системы $W = FW F^\top + S_0$.

Сходимость ряда гарантируется условием $\rho(\mathcal{P}) < 1$ из пункта (д) Теоремы 1.1. В силу равенства $W = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} M(\varepsilon)$, матрица W характеризует стохастическую чувствительность равновесия \bar{x} к воздействию малых шумов. Таким образом, в первом приближении $M(\varepsilon) \approx \varepsilon^2 W$.

Матрица W – *матрица стохастической чувствительности равновесия* – задает доверительный эллипсоид

$$(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x})) = \varepsilon^2 K(P), \quad (10)$$

используемый для геометрического описания разброса случайных состояний вокруг равновесия \bar{x} . Здесь P – доверительная вероятность, а $K(P)$ является обратной к функции $P(K) = \Phi_n(K)/\Phi_n(\infty)$, $\Phi_n(K) = \int_0^{\sqrt{K}} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{n-1} dt$.

В случае, когда шумы в системе (9) не зависят от состояния, справедливо точное равенство $M(\varepsilon) = \varepsilon^2 W$.

В п.1.2 эти результаты распространяются на случай, когда детерминированным аттрактором системы (1) является экспоненциально устойчивый k -цикл $\Gamma = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$ ($f(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1}$, $i = 1, \dots, k-1$; $f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1$).

Динамика отклонений $z_t = x_t - \bar{x}_t$ случайных состояний x_t стохастической системы (1) от точек \bar{x}_t детерминированного цикла Γ задается системой линейного приближения

$$z_{t+1} = F_t z_t + \sum_{i=1}^m (S_{0,i,t} + S_{1,i,t} z_t) \xi_t^i, \quad F_t = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_t), \quad S_{0,i,t} = \sigma_i(\bar{x}_t), \quad S_{1,i,t} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x}(\bar{x}_t)$$

Здесь моменты $m_t = \mathbb{E}z_t$, $M_t = \mathbb{E}z_t z_t^\top$ удовлетворяют уравнениям

$$m_{t+1} = F_t m_t,$$

$$M_{t+1} = F_t M_t F_t^\top + \sum_{i=1}^m (S_{0,i,t} S_{0,i,t}^\top + S_{0,i,t} m_t^\top S_{1,i,t}^\top + S_{1,i,t} m_t S_{0,i,t}^\top + S_{1,i,t} M_t S_{1,i,t}^\top).$$

Рассмотрим k -периодические последовательности матриц и операторов

$$S_{0,t} = \sum_{i=1}^m S_{0,i,t} S_{0,i,t}^\top, \quad \mathcal{F}_t[M] = F_t M F_t^\top, \quad \mathcal{S}_t[M] = \sum_{i=1}^m S_{1,i,t} M S_{1,i,t}^\top, \quad \mathcal{B}_t = \mathcal{F}_t + \mathcal{S}_t.$$

Обозначим $\mathcal{F} = \mathcal{F}_k \cdot \dots \cdot \mathcal{F}_2 \cdot \mathcal{F}_1$, $\mathcal{A} = \mathcal{J} - \mathcal{F}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_k \cdot \dots \cdot \mathcal{B}_2 \cdot \mathcal{B}_1$, где \mathcal{J} – тождественный оператор, и будем использовать разложение $\mathcal{B} = \mathcal{F} + \mathcal{S}$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= (\mathcal{F}_k + \mathcal{S}_k) \cdot \dots \cdot (\mathcal{F}_1 + \mathcal{S}_1) - \mathcal{F}_k \cdot \dots \cdot \mathcal{F}_1 = \\ &= \mathcal{F}_k \cdot \dots \cdot \mathcal{F}_2 \mathcal{S}_1 + \mathcal{F}_k \cdot \dots \cdot \mathcal{S}_2 \mathcal{F}_1 + \dots + \mathcal{S}_k \cdot \mathcal{F}_{k-1} \cdot \dots \cdot \mathcal{F}_1 + \dots + \mathcal{S}_k \cdot \mathcal{S}_{k-1} \cdot \dots \cdot \mathcal{S}_1. \end{aligned}$$

В силу экспоненциальной устойчивости цикла Γ , $\rho(\mathcal{F}) < 1$, существует оператор $\mathcal{P} = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{S}$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} m_t = 0$. Тогда для M_t справедливо

$$M_{t+1} = \mathcal{B}_t[M_t] + S_{0,t}. \quad (11)$$

Пусть \bar{M}_t – k -периодическое решение (11). Тогда для $\Delta_t = M_t - \bar{M}_t$ справедливо

$$\Delta_{t+1} = \mathcal{B}_t[\Delta_t]. \quad (12)$$

Отметим, что $\Delta_t = \mathbb{E}y_t y_t^\top$, где y_t – решение линейного однородного стохастического уравнения

$$y_{t+1} = F_t y_t + \sum_{i=1}^m S_{1,i,t} y_t \xi_t^i. \quad (13)$$

Теорема 1.2. Следующие утверждения эквивалентны:

- (а) Система (11) имеет единственное k -периодическое экспоненциально устойчивое решение \bar{M}_t ;
- (б) Решение $\Delta_t \equiv 0$ системы (12) является экспоненциально устойчивым;
- (в) Решение $y \equiv 0$ стохастической системы (13) является экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном;
- (г) $\rho(\mathcal{B}) < 1$;
- (д) $\rho(\mathcal{F}) < 1$ и $\rho(\mathcal{P}) < 1$.

Эта теорема дает спектральный критерий существования устойчивого периодического решения системы (11) вторых моментов. Однако в общем случае весьма сложно найти точные значения спектральных радиусов $\rho(\mathcal{B})$ и $\rho(\mathcal{P})$, поэтому важным является построение параметрических мажорант.

Теорема 1.3. Для спектральных радиусов $\rho(\mathcal{B})$ и $\rho(\mathcal{P})$ выполняются неравенства: $\rho(\mathcal{B}) \leq \prod_{t=1}^k (\|F_t\|^2 + \|S_t\|)$, $\rho(\mathcal{P}) \leq \rho(\bar{\mathcal{P}})$, где $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{A}^{-1} \bar{\mathcal{S}}$,

$$\bar{\mathcal{S}} = (\mathcal{F}_k + \bar{\mathcal{S}}_k) \cdot \dots \cdot (\mathcal{F}_1 + \bar{\mathcal{S}}_1) - \mathcal{F}_k \cdot \dots \cdot \mathcal{F}_1, \quad \bar{\mathcal{S}}_t[M] = \text{tr}(M) S_t, \quad S_t = \sum_{i=1}^m S_{1,i,t} S_{1,i,t}^\top.$$

Алгоритм построения k -периодического решения системы (11).

Матрица \bar{M}_1 из множества $\{\bar{M}_1, \dots, \bar{M}_k\}$ находится из уравнения

$$\bar{M}_1 = \mathcal{B}[\bar{M}_1] + Q, \quad Q = \mathcal{B}_k \cdot \dots \cdot \mathcal{B}_2[S_{0,1}] + \dots + \mathcal{B}_k[S_{0,k-1}] + S_{0,k}. \quad (14)$$

Существование и единственность решения (14) следует из условия (г) Теоремы 1.2. Остальные матрицы $\bar{M}_2, \dots, \bar{M}_k$ находятся рекуррентно:

$$\bar{M}_2 = \mathcal{B}_1[\bar{M}_1] + S_{0,1}, \quad \dots, \quad \bar{M}_k = \mathcal{B}_{k-1}[\bar{M}_{k-1}] + S_{0,k-1}.$$

В диссертации получены явные формулы для одномерного случая.

Для матриц вторых моментов $M_t(\varepsilon)$ решений системы линейного приближения в случае малых шумов (система (9)) установлена связь с последовательностью матриц $W_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} M_t(\varepsilon)$, определяющих стохастическую чувствительность элементов $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ дискретного цикла. Набор матриц W_1, W_2, \dots, W_k позволяет записать локально гауссовскую аппроксимацию стационарного распределения в следующей форме:

$$\rho(x, \varepsilon) = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^k \frac{1}{\sqrt{(2\pi\varepsilon^2)^n \det W_t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \bar{x}_t, W_t^{-1}(x - \bar{x}_t))}{2\varepsilon^2}\right).$$

В п.1.3 теория стохастической чувствительности распространяется на более сложный осцилляционный аттрактор, задаваемый замкнутой инвариантной кривой. Такой аттрактор появляется в результате бифуркации Неймарка-Сакера в дискретных системах размерности два и выше.

Рассматривается стохастическая система

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t, \quad (15)$$

где $f(x)$ – n -векторная, $\sigma(x)$ – $n \times m$ -матричная функция, ξ_t – некоррелированный m -векторный случайный процесс с параметрами $E\xi_t = 0$, $E(\xi_t \xi_t^\top) = V$, а ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Предполагается, что детерминированная система (15) (при $\varepsilon = 0$) имеет экспоненциально устойчивую замкнутую инвариантную кривую Γ . Зафиксируем произвольную точку $\bar{x} \in \Gamma$ и рассмотрим решение \bar{x}_t ($t = 1, 2, \dots$) этой детерминированной системы с начальным условием $\bar{x}_1 = \bar{x}$. Рассмотрим также решение $x_t(\varepsilon)$ стохастической системы (15) с начальным условием $x_1(\varepsilon) = \bar{x}_1 + \varepsilon z_1$, где z_1 – вектор, ортогональный кривой Γ в точке \bar{x}_1 , и отклонения $\Delta_t(\varepsilon) = x_t(\varepsilon) - x_t^*(\varepsilon)$ случайных состояний $x_t(\varepsilon)$ от кривой Γ при малых ε . Здесь $x_t^*(\varepsilon)$ – точка кривой Γ , ближайшая к $x_t(\varepsilon)$. Обозначим через $\Pi(x)$ гиперплоскость, ортогональную кривой Γ в точке x , а через $P(x)$ – матрицу оператора проектирования на гиперплоскость $\Pi(x)$. Для асимптотики $z_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta_t(\varepsilon)}{\varepsilon}$ справедлива (Лемма 1.3) следующая линейная стохастическая система:

$$z_{t+1} = P_{t+1} [F_t z_t + S_t \xi_t], \quad F_t = F(\bar{x}_t), \quad F(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x), \quad S_t = \sigma(\bar{x}_t), \quad P_t = P(\bar{x}_t).$$

Для моментов $m_t = E z_t$, $M_t = E(z_t z_t^\top)$ справедливы уравнения

$$m_{t+1} = P_{t+1} F_t m_t, \quad M_{t+1} = P_{t+1} [F_t M_t F_t^\top + G_t] P_{t+1}, \quad G_t = S_t V S_t^\top.$$

Построен алгоритм отыскания определенной на Γ функции стохастической чувствительности $W(x)$ для трех наиболее характерных случаев, когда замкнутая инвариантная кривая состоит только из равновесий, k -циклов или квазипериодических решений.

Пусть каждая точка кривой Γ является состоянием k -цикла. Зафиксируем произвольную точку $\bar{x} \in \Gamma$ и рассмотрим соответствующий k -цикл $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$: $\bar{x}_1 = \bar{x}$, $\bar{x}_{t+1} = f(\bar{x}_t)$ ($t = 1, \dots, k-1$), $f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1$. Матрица $W_1 = W(\bar{x}_1)$ стохастической чувствительности точки \bar{x}_1 является единственным решением уравнения

$$W_1 = P_1 [\Phi W_1 \Phi^\top + Q] P_1,$$

где $\Phi = F_k P_k F_{k-1} \dots P_2 F_1$, а матрица Q находится рекуррентно: $Q^{(0)} = 0$, $Q^{(j)} = P_{j+1} [F_j Q^{(j-1)} F_j^\top + G_j] P_{j+1}$ ($j = 1, \dots, k-1$), $Q = F_k Q^{(k-1)} F_k^\top + G_k$.

Используя матрицу $W_1 = W(\bar{x}_1)$ как начальную, из рекуррентной формулы

$$W_{t+1} = P_{t+1} [F_t W_t F_t^\top + G_t] P_{t+1}, \quad t = 1, \dots, k-1$$

можно найти $W_2 = W(\bar{x}_2), \dots, W_k = W(\bar{x}_k)$.

В двумерном случае для матрицы стохастической чувствительности справедливо разложение $W(\bar{x}) = \mu(\bar{x}) p(\bar{x}) p^\top(\bar{x})$, где $p(x)$ – единичный вектор, ортогональный Γ в точке x . Здесь скалярная функция $\mu(\bar{x})$ имеет вид

$$\mu(\bar{x}) = \frac{p^\top(\bar{x}) Q(\bar{x}) p(\bar{x})}{1 - (p^\top(\bar{x}) \Phi(\bar{x}) p(\bar{x}))^2}.$$

В случае, когда Γ формируется семейством квазипериодических решений, следует квазипериодическое решение аппроксимировать k -периодическим и использовать вышеприведенный алгоритм.

В п.1.4 развивается теория стохастической чувствительности хаотических аттракторов дискретных систем вида

$$x_{t+1} = f(x_t, \eta_t), \quad \eta_t = \varepsilon \xi_t, \quad (16)$$

где $f(x, \eta)$ – гладкая по обоим переменным функция, ξ_t – m -мерный некоррелированный случайный процесс с параметрами $E\xi_t = 0$, $E\xi_t \xi_t^\top = V$, ε – скалярный параметр интенсивности шума.

В п.1.4.1 рассматривается случай, когда одномерная детерминированная система имеет однокусочный хаотический аттрактор \mathcal{A} , заполняющий интервал $[a, b]$, $a = \inf \mathcal{A}$, $b = \sup \mathcal{A}$. Предполагается, что функция $f(x, 0)$ – унимодальна и имеет максимум в точке $c \in (a, b)$. С помощью техники стохастических линейных расширений и метода моментов выведены явные формулы стохастической чувствительности M в граничных точках a и b хаотического аттрактора \mathcal{A} :

$$M(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(f(c, 0), 0) \right]^2 s(c) + s(f(c, 0)), \quad M(b) = s(c), \quad (17)$$

где

$$s(x) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, 0) V \frac{\partial f^\top}{\partial \eta}(x, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial f}{\partial \eta_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \eta_m} \right).$$

Эти результаты распространены в п.1.4.2 на случай многокусочных хаотических аттракторов одномерных дискретных систем.

В п.1.4.3 развивается теория стохастической чувствительности хаотических аттракторов двумерных дискретных систем. Для таких аттракторов найдена стохастическая чувствительность границ, полученных с помощью аппарата критических линий.

Все математические результаты главы 1 иллюстрируются на примерах и служат теоретическим фундаментом при разработке методов анализа стохастических эффектов (глава 3) и управления (глава 4) в дискретных системах. На основе этих методов, уже в главе 5, решаются актуальные исследовательские задачи естествознания.

В **Главе 2** излагается математический аппарат по аппроксимации вероятностных распределений вокруг равновесий (п.2.1) и циклов (п.2.2) динамических систем, задаваемых другим классом математических моделей – стохастическими дифференциальными уравнениями Ито. Здесь результаты, выносимые на защиту, представлены в п.2.1.3, где строится математическая теория стохастической чувствительности равновесия системы с цветными шумами, и в п. 2.2.4, где развивается теория стохастической чувствительности циклов в системах с периодическими возмущениями.

В п.2.1.3 рассматривается нелинейная динамическая система

$$\dot{x} = f(x, r), \quad (18)$$

где x – n -вектор, $f(x, r)$ – достаточно гладкая вектор-функция, $r(t)$ – m -вектор случайных возмущений. Предполагается, что невозмущенная система ($r = 0$) имеет экспоненциально устойчивое равновесие $\bar{x} : f(\bar{x}, 0) = 0$. Исследуется поведение системы (18) вблизи \bar{x} под воздействием малых цветных шумов $r(t) = \varepsilon s(t)$, $s = (s_1, \dots, s_m)^\top$, где

$$\dot{s}_i = -a_i s_i + \sigma_i \sqrt{2a_i} \dot{w}_i, \quad a_i > 0. \quad (19)$$

Здесь $w_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) – независимые стандартные винеровские процессы с параметрами $E(w_i(t) - w_i(t')) = 0$, $E(w_i(t) - w_i(t'))^2 = |t - t'|$. Система (19) формирует коррелированный цветной шум с параметрами $E s_i(t) = 0$, $E s_i(t) s_i(t') = \sigma_i^2 \exp(-a_i |t - t'|)$, $\tau_i = 1/a_i$. Параметры a_i задают времена корреляции τ_i координат этого цветного шума. Здесь $E r_i^2(t) = \varepsilon^2 \sigma_i^2$.

Динамика пары $y(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^\varepsilon(t) - \bar{x}}{\varepsilon}$, $s(t)$ задается стохастической системой

$$\dot{y} = Fy + Gs, \quad \dot{s} = -As + C\dot{w}, \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0), \quad G = \frac{\partial f}{\partial r}(\bar{x}, 0),$$

где $A = \text{diag}[a_1, \dots, a_m]$, $C = \text{diag}[\sigma_1 \sqrt{2a_1}, \dots, \sigma_m \sqrt{2a_m}]$, $w = [w_1, \dots, w_m]^\top$. Матрица W стохастической чувствительности \bar{x} удовлетворяет системе

$$FW + WF^\top + GM^\top + MG^\top = 0, \quad FM + GQ - MA = 0, \quad Q = \text{diag}[\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2].$$

Для нелинейных осцилляторов с цветными шумами выведены явные формулы стохастической чувствительности. Показано, что чувствительность равновесия существенно зависит от времени корреляции действующих шумов. Найдена параметрическая зона резонансных значений времени корреляции, в которой вследствие высокой стохастической чувствительности осциллятор переходит в режим возбуждения.

В п. 2.2.4 рассматривается нелинейная стохастическая неавтономная система

$$\dot{x} = f(t, x) + \varepsilon \sigma(t, x) \dot{w}(t) \quad (20)$$

с T -периодическими функциями: $f(t+T, x) = f(t, x)$, $\sigma(t+T, x) = \sigma(t, x)$. Для матрицы $W(t)$ стохастической чувствительности экспоненциально устойчивого T -периодического решения $\bar{x}(t)$ детерминированной системы (20) ($\varepsilon = 0$) с начальным условием $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ получена краевая задача

$$\begin{aligned} \dot{W} &= F(t)W + WF^\top(t) + S(t)S^\top(t), & W(t_0) &= W(t_0 + T), \\ F(t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t)), & S(t) &= \sigma(t, \bar{x}(t)) \end{aligned}$$

и построено ее решение в виде

$$W(t) = \Phi(t, t_0) \left[C + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau, t_0) S(\tau) S^\top(\tau) (\Phi^{-1}(\tau, t_0))^\top d\tau \right] \Phi^\top(t, t_0).$$

Здесь матрица C находится из условия T -периодичности, а $\Phi(t, t_0)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot{\Phi} = F(t)\Phi$, $\Phi(t_0, t_0) = I$.

Эта теория была эффективно использована для анализа стохастических явлений в популяционной системе с периодическими сезонными изменениями размера экологической ниши.

Глава 3 посвящена применению представленного в главах 1, 2 общего математического аппарата по аппроксимации вероятностных распределений вблизи регулярных и хаотических аттракторов систем с дискретным и непрерывным временем к исследованию стохастических переходов и бифуркаций.

В п.3.1 излагаются методы анализа индуцированных шумами переходов между сосуществующими аттракторами, как регулярными, так и хаотическими. Показано, как подобные переходы могут быть конструктивно исследованы с помощью аппарата доверительных областей и анализа их взаимного расположения с сепаратрисами, разделяющими бассейны притяжения аттракторов.

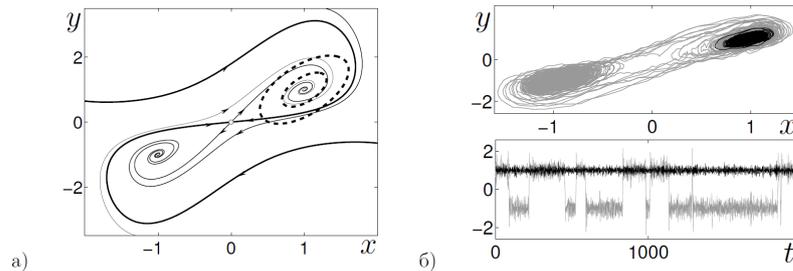


Рис. 1: Индуцированные шумом переходы между равновесиями в системе (21)

В п.3.1.1. техника анализа индуцированных шумом переходов между сосуществующими равновесиями иллюстрируется на примере модели климатической динамики

$$\dot{x} = y - x, \quad \dot{y} = -0.5x + 1.5y - x^2y + \varepsilon \dot{w}. \quad (21)$$

При $\varepsilon = 0$ эта система имеет два устойчивых равновесия $M_1(1, 1)$, $M_2(-1, -1)$, бассейны которых разделены устойчивым многообразием седла $M_0(0, 0)$. Доверительные эллипсы, полученные с помощью матрицы стохастической чувствительности равновесия M_1 показаны на рис. 1а для $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.2$. Выход эллипса за границы бассейна притяжения сигнализирует об индуцированных

шумами переходах между равновесиями и генерации мультимодальных стохастических осцилляций (рис. 1б).

В п.3.1.2. метод доверительных областей в анализе стохастических переходов между равновесием и циклом иллюстрируется на примере осциллятора Ван-дер-Поля с жестким возбуждением

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + (a + x^2 - x^4)y + \varepsilon \dot{w}, \quad (22)$$

у которого при $-0.125 < a < 0$ устойчивое равновесие $M(0, 0)$ сосуществует с устойчивым предельным циклом Γ . Их бассейны притяжения разделены неустойчивым циклом γ . Циклы Γ и γ показаны для $a = -0.12$ на рис. 2а и для $a = -0.05$ на рис. 2в сплошной линией и пунктиром. Полученные с помощью техники стохастической чувствительности из главы 2 доверительные эллипсы вокруг M и доверительные полосы вокруг Γ показаны здесь для $\varepsilon = 0.05$ серым цветом. При $a = -0.12$, доверительная полоса пересекает сепаратрису γ , а доверительный эллипс лежит целиком в бассейне притяжения M . Такое взаимное расположение доверительных областей и сепаратрисы прогнозирует стохастический переход «цикл→равновесие» (см.рис. 2б). При $a = -0.05$, наоборот, доверительная полоса лежит целиком в бассейне притяжения Γ , а доверительный эллипс пересекает сепаратрису γ , что влечет противоположный стохастический переход «равновесие→цикл» (см.рис. 2г). С увеличением шума, когда уже обе доверительные области захватывают «чужие» бассейны притяжения, наблюдаются индуцированные шумом переходы в обоих направлениях.

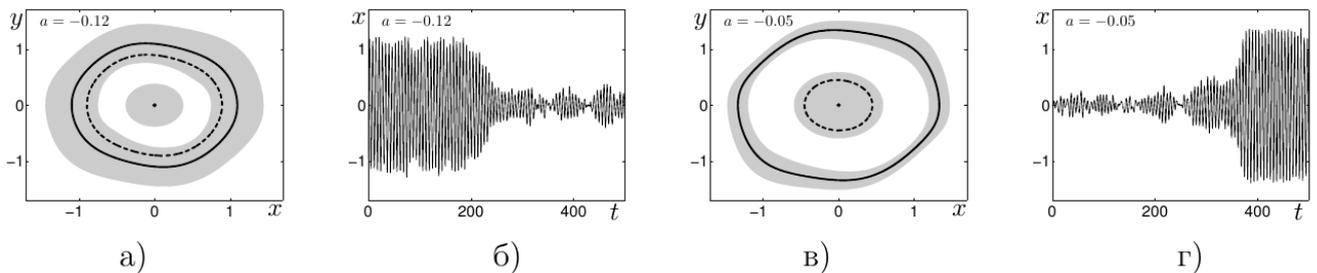


Рис. 2: Индуцированные шумом переходы в системе (22) для $\varepsilon = 0.05$

В п.3.1.3 техника анализа индуцированных шумом переходов между хаотическим аттрактором и равновесием иллюстрируется на примере модели с кубической нелинейностью

$$x_{t+1} = \mu x_t^2(1 - x_t) + \varepsilon \xi_t. \quad (23)$$

В детерминированном случае при $\varepsilon = 0$ эта система демонстрирует сосуществование устойчивого тривиального равновесия M и разнообразных (регулярных и хаотических) аттракторов (см. рис. 3а.) Верхние аттракторы отделяются от нижнего аттрактора M неустойчивым равновесием (пунктир), играющим роль сепаратрисы. В системе под действием шума происходят переходы между аттракторами. На рис. 3б для $\mu = 6.5$ показаны переходы с хаотического аттрактора на равновесие и между равновесием и хаотическим аттрактором. Найденная с помощью техники стохастической чувствительности хаотического аттрактора (п.1.4) нижняя граница доверительной полосы показана на рис. 3в. Пересечение этой границы (штрих-пунктир) с сепаратрисой (пунктир) локализует зону интенсивности возмущений, отвечающих переходу случайных состояний (серые точки) с хаотического аттрактора на равновесие (сплошная линия).

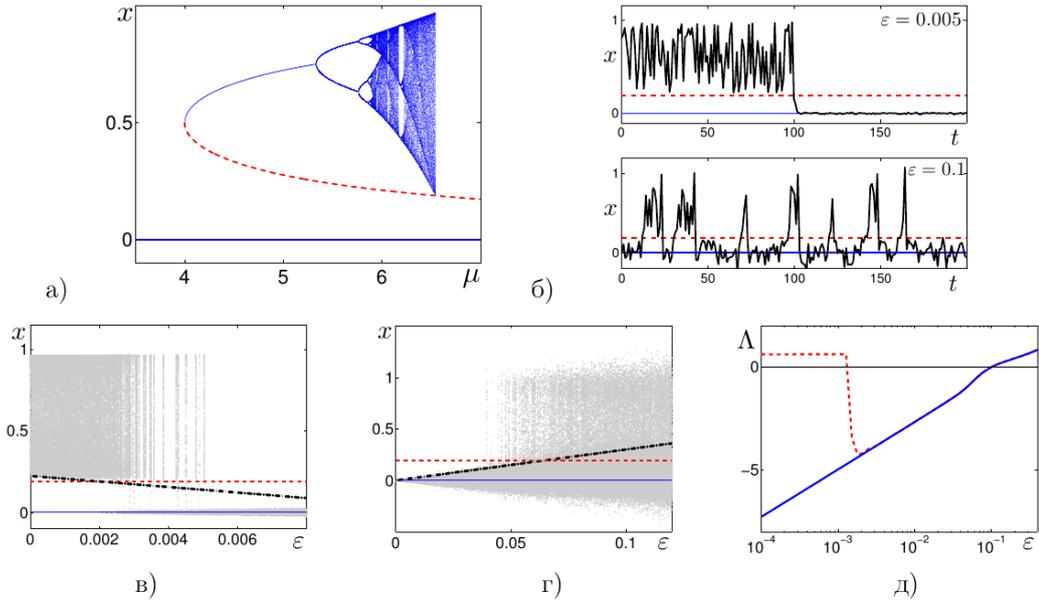


Рис. 3: Индуцированные шумом переходы в системе (23) с $\mu = 6.5$

Наряду с такими пространственными сдвигами случайных состояний в системе (23) происходят изменения внутренних динамических свойств, характеризующихся сменой знака показателя Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$ с плюса на минус (рис. 3д). Такой переход соответствует стохастической D -бифуркации "хаос-порядок". При дальнейшем увеличении интенсивности шума начинаются обратные переходы из зоны равновесия в зону хаотического аттрактора. О начале таких переходов "порядок-хаос" здесь уже сигнализирует пересечение верхней границы доверительного интервала вокруг равновесия M и сепаратрисы (рис. 3г).

В п.3.1.4 техника функции стохастической чувствительности циклов трехмерных систем (п.2.2.3) применяется к анализу индуцированных шумом переходов между сосуществующими циклами в модели Лоренца

$$\dot{x} = \sigma(-x + y) + \varepsilon\dot{w}_1, \quad \dot{y} = rx - y - xz + \varepsilon\dot{w}_2, \quad \dot{z} = -bz + xy + \varepsilon\dot{w}_3. \quad (24)$$

Для $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 300$ два сосуществующих цикла показаны на рис. 4а. Для этих циклов построены доверительные торы, сечения которых (эллипсы) с плоскостью Пуанкаре $y = 0$ показаны на рис. 4 наряду с точками пересечения случайных траекторий. При $\varepsilon = 0.3$ эти эллипсы хорошо отделены - стохастических переходов между циклами не происходит (рис. 4б). При $\varepsilon = 2$ эллипсы пересекаются, при этом два отдельных пучка случайных траекторий сливаются в один (рис. 4в).

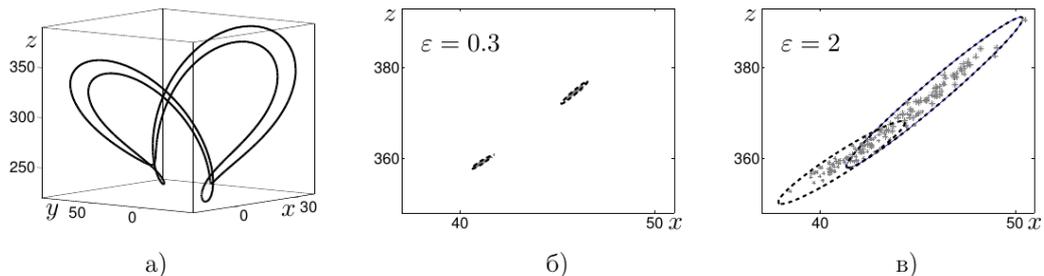


Рис. 4: Индуцированные шумом переходы между циклами в системе (24)

В п.3.2 исследуются переходы между отдельными фрагментами аттракторов, порождающие обратные стохастические бифуркации и трансформации от

порядка к хаосу.

В п.3.2.1 на примере дискретной модели Рутькова

$$x_{t+1} = \frac{\alpha}{1 + x_t^2} + \gamma + \varepsilon \xi_t, \quad \alpha = -4.1 \quad (25)$$

изучаются обратные стохастические бифуркации, вызванные стохастическими переходами между состояниями дискретных циклов. Под действием шума тонкая структура детерминированных аттракторов размывается (рис. 5а). Соответствующие обратные стохастические P -бифуркации, отвечающие изменениям вероятностных распределений (уменьшение числа пиков плотности), показаны на рис. 5б для $\gamma = -3.9$ и на рис. 5в для $\gamma = -3.74$. Кривые плотности распределений получены с помощью аналитических приближений (п.1.2), использующих значения стохастической чувствительности циклов кратности два и четыре.

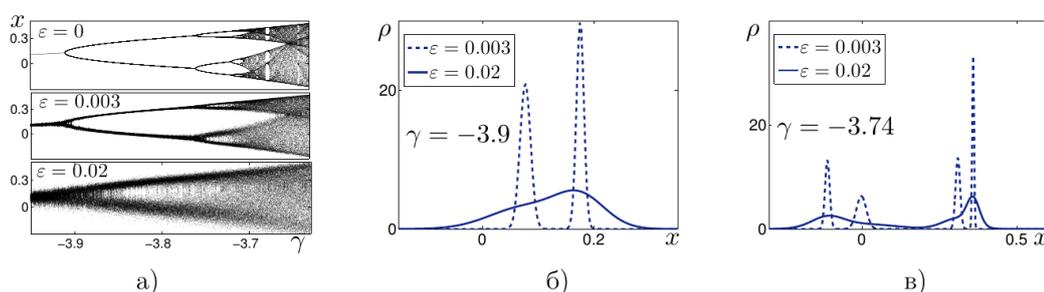


Рис. 5: Обратные стохастические P -бифуркации в системе (25)

В п.3.2.2 показано, как техника стохастического анализа главы 2 используется в исследовании обратных стохастических бифуркаций в трехмерных непрерывных моделях. Цепочка последовательных обратных стохастических бифуркаций "8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1" для стохастически возмущенного 8-цикла системы Лоренца (24) с $r = 215.75$ показаны на рис. 6. Здесь графики плотности распределений случайных траекторий в подходящем сечении Пуанкаре получены с помощью аналитических аппроксимаций, использующих функцию стохастической чувствительности. Показано, как такие обратные бифуркации порождают переходы "порядок-хаос".

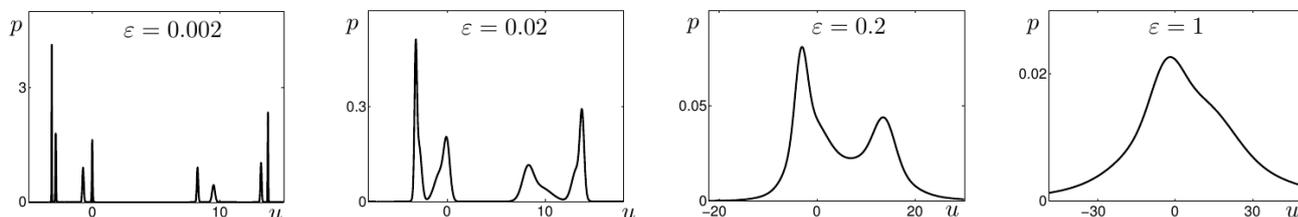


Рис. 6: Обратные стохастические P -бифуркации в системе Лоренца (24) с $r = 215.75$

В п.3.2.3 с помощью техники доверительных эллипсов проведен анализ индуцированных шумами переходов между частями трехмерного цикла и перехода от порядка к хаосу для системы Чена с параметрами $a = 45$, $b = 1.5$, $c = 28$:

$$\dot{x} = a(-x + y) + \varepsilon \dot{w}_1, \quad \dot{y} = (c - a)x + cy - xz + \varepsilon \dot{w}_2, \quad \dot{z} = -bz + xy + \varepsilon \dot{w}_3.$$

На рис. 7а,б в сечении $x = 0$ показаны доверительные эллипсы и случайные состояния. Пересечение эллипсов при $\varepsilon = 0.2$ сигнализирует о стохастических переходах, сопровождающихся D -бифуркацией "порядок-хаос" (рис. 7в).

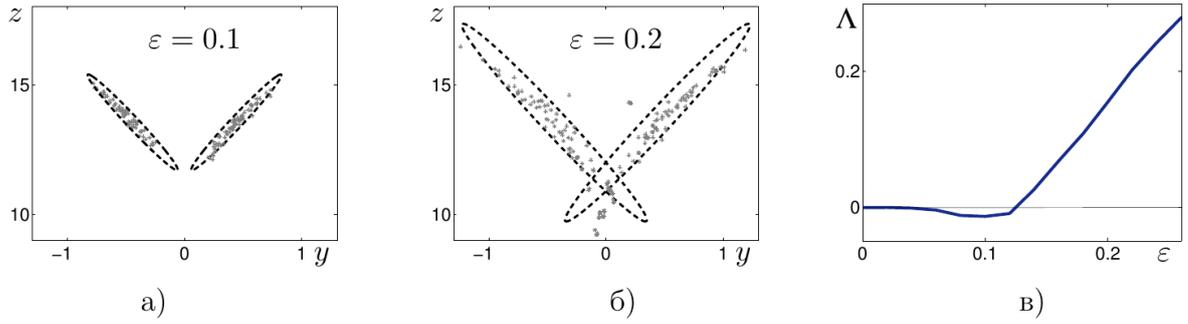


Рис. 7: Стохастические переходы между частями цикла и D -бифуркация в системе Чена

В п.3.2.4 теория стохастической чувствительности, разработанная в п.1.4.2 для многокусочных хаотических аттракторов дискретных систем, применяется для исследования переходов между частями двухкусочного хаотического аттрактора $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$, выделенного для $\mu = 3.6$ на бифуркационной диаграмме (рис. 8а) логистической модели $x_{t+1} = \mu x(1-x) + \varepsilon \xi_t$. Доверительные области (рис.8б, пунктир) не только хорошо описывают зависимость разброса случайных состояний вблизи \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 от ε , но и позволяют спрогнозировать значение $\varepsilon \approx 0.005$, при котором начинаются переходы между ними.

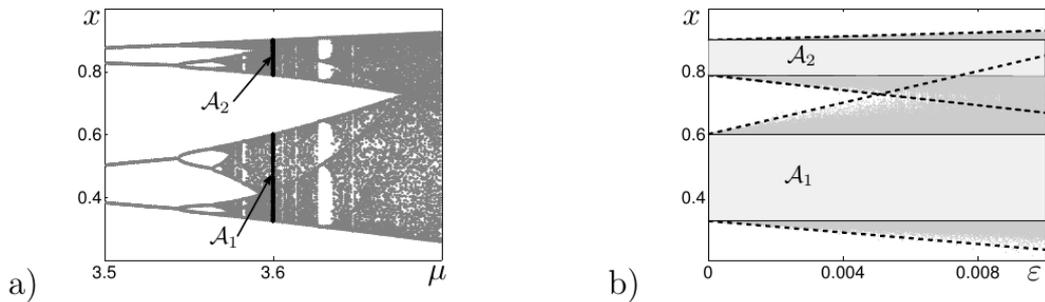


Рис. 8: Стохастические переходы между частями двухкусочного хаотического аттрактора

В п.3.3 исследуются явления генерации новых аттракторов, появляющихся в результате стохастического возбуждения и индуцированных шумом сдвигов вероятностных распределений.

В п.3.3.1 явление стохастического возбуждения в зоне касательной бифуркации изучено на примере дискретной системы

$$x_{t+1} = f(x_t, \mu) + \varepsilon \xi_t, \quad f(x, \mu) = \mu x(1-x)(lx^2 + px + q). \quad (26)$$

При переходе параметра μ через точку касательной бифуркации $\mu_* = 1$, в детерминированной системе появляется хаотический аттрактор (см. рис.9а).

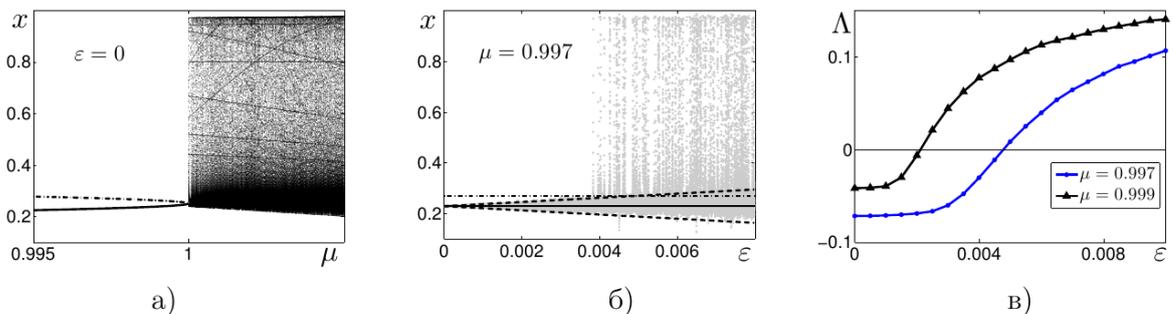


Рис. 9: Стохастическое возбуждение и генерация хаотического аттрактора в системе (26)

Резкое изменение стохастической динамики с ростом интенсивности шума ε для $\mu = 0.997 < \mu_*$ показано на рис.9б. Критическое значение ε_* может

быть найдено из условия пересечения верхней границы доверительного интервала (штрих-пунктир) и сепаратрисы (пунктир). Для общего случая получена аналитическая асимптотика ε_* . Явление стохастического возбуждения сопровождается переходом от порядка к хаосу (рис.9в).

В п.3.3.2 метод доверительных областей в анализе стохастической возбудимости в зоне бифуркации Андронова-Хопфа демонстрируется на примере модели Фитцхью-Нагумо $\delta\dot{x} = x - x^3/3 - y$, $\dot{y} = x + a + \varepsilon\dot{w}$, $\delta = 0.1$. Здесь $a_* = 1$ – точка бифуркации Андронова-Хопфа. При $a > a_* = 1$ равновесие является единственным аттрактором. На рис.10а,б для $a = 1.01$ показано как при возрастании шума малоамплитудные колебания вокруг равновесия трансформируются в стохастические колебания больших амплитуд. Доверительные эллипсы на рис.10в иллюстрируют механизм этого возбуждения.

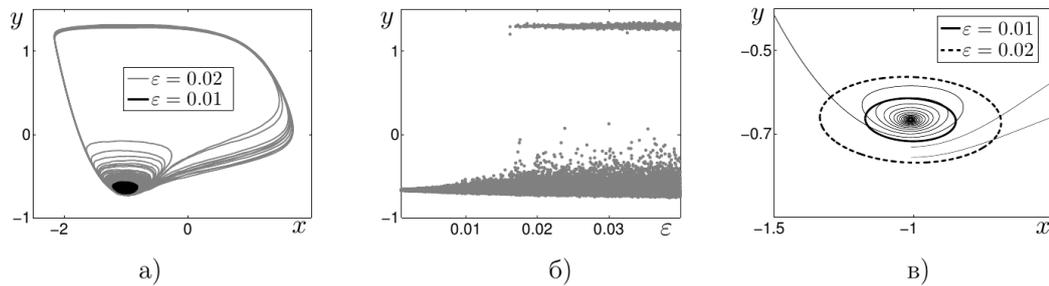


Рис. 10: Стохастическая возбудимость в модели Фитцхью-Нагумо

В п.3.3.3 описан и исследован новый стохастический феномен генерации *фантомного аттрактора*, состоящего в сдвиге распределения случайных состояний в зону, где исходная детерминированная система не имеет никаких аттракторов. Это явление изучено на примере быстро-медленной системы

$$\dot{x} = (y - a)x + \varepsilon\dot{w}, \quad \dot{y} = 0.4 + y - y^3 - x^2. \quad (27)$$

На рис.11 для $a = 0.6$ показана трансформация стационарной плотности распределения. Явление генерации фантомного аттрактора исследовано аналитически с использованием метода «замораживания» медленной переменной.

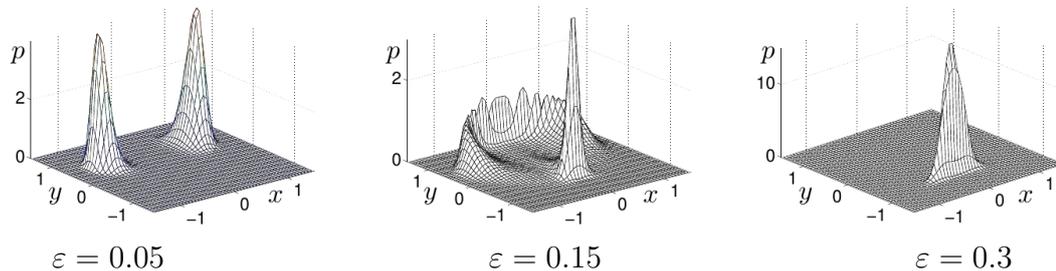


Рис. 11: Стохастическая генерация фантомного аттрактора в системе (27) при $a = 0.6$

Глава 4 посвящена решению задач управления стохастическими режимами в нелинейных динамических системах. Представленные здесь теоретические разработки опираются на результаты глав 1,2, посвященных теории стохастической чувствительности. Целью управления является формирование желаемых вероятностных характеристик с помощью синтеза наперед заданной стохастической чувствительности.

В п.4.1 рассматриваются и решаются задачи построения регуляторов в дискретных системах вида

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) + \varepsilon \sigma(x_t, u_t) \xi_t, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^l, \xi \in \mathbb{R}^m, \sigma \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (28)$$

с достаточно гладкими функциями $f(x, u)$, $\sigma(x, u)$ и некоррелированным дискретным случайным процессом ξ_t с параметрами $E\xi_t = 0$, $E\xi_t \xi_t^\top = I$.

П. 4.1.1 посвящен управлению стохастической чувствительностью равновесия. Предполагается, что управление в (28) формируется регулятором

$$u(x) = K(x - \bar{x}), \quad K \in \mathbb{R}^{l \times n} \quad (29)$$

где \bar{x} – равновесие системы (28) при $u = 0$, $\varepsilon = 0$. Пусть $A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, 0)$, $S = GG^\top$, $G = \sigma(\bar{x}, 0)$, а множество $\mathbb{K} = \{K \in \mathbb{R}^{l \times n}, \rho(A+BK) < 1\}$ – не пусто. Знак \succ (\succeq) в соотношении $Q \succ P$ ($Q \succeq P$) означает, что матрица $Q - P$ является положительно (неотрицательно) определенной. Обозначим через \mathbb{M} множество симметрических $n \times n$ -матриц $M \succ 0$ и $\mathbb{M}_S = \{V \in \mathbb{M} \mid V \succeq S\}$.

В замкнутой системе (28),(29) матрица W стохастической чувствительности равновесия удовлетворяет (п.1.1.2) уравнению

$$W = (A + BK)W(A + BK)^\top + S. \quad (30)$$

Задача синтеза. Для заданной матрицы $\bar{W} \in \mathbb{M}$ требуется подобрать такую матрицу $K \in \mathbb{K}$, чтобы матрица W_K – решение уравнения (30) – удовлетворяла равенству $W_K = \bar{W}$. Здесь *множеством достижимости* является

$$\mathbb{W} = \{\bar{W} \in \mathbb{M} \mid \exists K \in \mathbb{K} \quad W_K = \bar{W}\}.$$

Теорема 4.1. Пусть шумы в системе (28) не вырождены ($S \succ 0$). Если матрица B является квадратной и невырожденной ($\text{rank} B = n = l$), то $\mathbb{W} = \mathbb{M}_S$. При этом для любой матрицы $\bar{W} \in \mathbb{M}_S$ уравнение (30) имеет решение

$$K = B^{-1} \left[(\bar{W} - S)^{\frac{1}{2}} U^\top \bar{W}^{-\frac{1}{2}} - A \right] \in \mathbb{K}, \quad (31)$$

где U – произвольная ортогональная матрица размера $n \times n$.

Теорема 4.2. Пусть шумы в системе (28) не вырождены ($S \succ 0$) и $\text{rank} B < n$. Элемент $\bar{W} \in \mathbb{M}_S$ является достижимым тогда и только тогда, когда матрица \bar{W} является решением уравнения $PA\bar{W}A^\top P = P(\bar{W} - S)P$, где $P = I - BB^+$.

При этом уравнение (30) для матрицы K имеет решение

$$K = B^+ [Q U^\top V^{-1} - A] \in \mathbb{K}, \quad (32)$$

где U – произвольная ортогональная $n \times n$ -матрица, удовлетворяющая уравнению $PAV = PQU^\top$, а Q и V – матрицы разложений $\bar{W} = VV^\top$, $\bar{W} - S = QQ^\top$. Здесь символ «+» означает псевдообращение.

В п.4.1.2 представлены результаты полного параметрического анализа достижимости в двумерном случае. Эти теоретические результаты иллюстрируются на примере синтеза стохастической чувствительности равновесия в модели Эно.

В п.4.1.3 теория синтеза стохастической чувствительности распространяется на более широкий класс систем с неполной информацией

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t, \alpha_t), \quad \alpha_t = \varepsilon \xi_t, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^l, \alpha \in \mathbb{R}^q. \quad (33)$$

Здесь ξ_t – некоррелированный случайный процесс с параметрами $E\xi_t = 0$, $E\xi_t \xi_t^\top = \Pi$, ε – скалярный параметр интенсивности шума. Предполагается, что вся доступная информация содержится в векторе наблюдений

$$v_t = g(x_t, \beta_t), \quad \beta_t = \varepsilon \eta_t, \quad v, g \in \mathbb{R}^m, \beta \in \mathbb{R}^r, \quad (34)$$

где η_t – некоррелированный случайный процесс с параметрами $E\eta_t = 0$, $E\eta_t\eta_t^\top = H$. Пусть \bar{x} – равновесие системы $x_{t+1} = f(x_t, 0, 0)$. Для синтеза стохастической чувствительности равновесия \bar{x} используется регулятор с матрицей обратной связи $K \in R^{l \times m}$:

$$u_t = K [v_t - g(\bar{x}, 0)]. \quad (35)$$

Пусть $F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0, 0)$, $B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, 0, 0)$, $C = \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, 0)$, $\varphi = \frac{\partial g}{\partial \beta}(\bar{x}, 0)$, $\sigma = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\bar{x}, 0, 0)$, и множество $\mathbb{K} = \{K \mid \rho(F + BKC) < 1\}$ – не пусто. В системе (33)-(35) матрица W стохастической чувствительности равновесия удовлетворяет уравнению

$$W = (F + BKC)W(F + BKC)^\top + BK\Phi K^\top B^\top + S, \quad \Phi = \varphi H \varphi^\top, \quad S = \sigma \Pi \sigma^\top. \quad (36)$$

Определим матричные функции

$$G(W) = (CWC^\top + \Phi)^{\frac{1}{2}}, \quad R(W) = FWC^\top (CWC^\top + \Phi)^{-1} CWF^\top - FWF^\top - S + W.$$

Теорема 4.3. Пусть шумы в системе (33) и наблюдениях (34) являются невырожденными ($S \succ 0$, $\Phi \succ 0$).

(а) Если матрица B является квадратной и невырожденной ($\text{rank} B = n = l$), то $\mathbb{W} = \{W \in \mathbb{M} \mid R(W) \succeq 0\}$, и для любой матрицы $W \in \mathbb{W}$ уравнение (36) имеет решение

$$K = B^{-1} \left(R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^\top G^{-1}(W) \right) G^{-1}(W) \in \mathbb{K}; \quad (37)$$

(б) Если $\text{rank}(B) < n$, то множество достижимости \mathbb{W} задается соотношениями

$$R(W) \succeq 0, \quad P(FWF^\top + S - W)P = 0, \quad P \left(R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^\top G^{-1}(W) \right) = 0,$$

и для любой матрицы $W \in \mathbb{W}$ уравнение (36) имеет решение

$$K = B^+ \left(R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^\top G^{-1}(W) \right) G^{-1}(W) \in \mathbb{K}. \quad (38)$$

Здесь J – произвольная ортогональная $n \times n$ -матрица и $P = I - BB^+$.

Для двумерного случая получены явные формулы, связывающие матрицу стохастической чувствительности с коэффициентами обратной связи. Ограничения на эти коэффициенты, связанные с условием достижимости, задаются в виде квадратичных (для управления с двумя входами) или линейных (для одного входа) параметрических неравенств. Эти аналитические результаты применены к стабилизации стохастической нелинейной модели Эно.

В п.4.1.4 представлена теория управления стохастической чувствительностью дискретных циклов для общего класса одномерных систем. Получены условия достижимости, найдены явные формулы для коэффициентов регулятора, синтезирующего заданную стохастическую чувствительность цикла. Конструктивные возможности этой теории иллюстрируются на примере логистической модели

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t) + u_t + \varepsilon \xi_t \quad (39)$$

со случайными возмущениями ξ_t и регулятором

$$u(x)|_{X_1} = k_1(x - \bar{x}_1), \quad u(x)|_{X_2} = k_2(x - \bar{x}_2), \quad (40)$$

где интервалы $X_1 = ((\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2, 1)$, $X_2 = (0, (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2)$ есть бассейны притяжения точек 2-цикла $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ детерминированной системы без управления. Минимально возможная стохастическая чувствительность $w_1 = w_2 = 1$ состояний этого цикла на всем интервале $3 < \mu \leq 4$ достигается с помощью регулятора

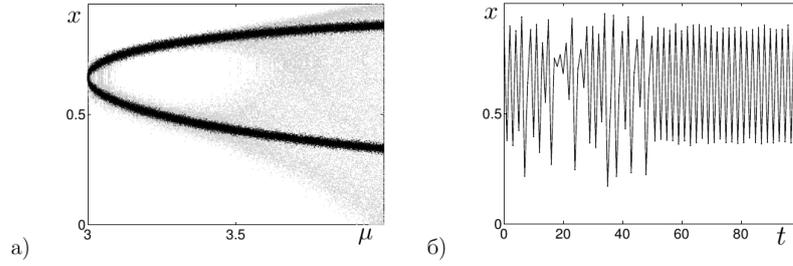


Рис. 12: Стабилизация 2-циклов в стохастической системе (39),(40)

(40) с параметрами $k_1 = 1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}$, $k_2 = 1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}$. Результаты такого управления представлены черным для $\varepsilon = 0.01$ на рис.12а, где серым показаны случайные состояния при $u = 0$. На рис.12б показана случайная траектория системы (39),(40) с $\mu = 3.8$, управление включено при $t = 50$.

П.4.2 посвящен решению задач синтеза стохастической чувствительности в системах с непрерывным временем. Излагаемый в п.4.2.1 математический аппарат по управлению стохастической чувствительностью равновесий в случае полной информации носит обзорный характер и предваряет вынесенные на защиту результаты подробного параметрического исследования вопросов достижимости для случая двумерных систем, представленные в п.4.2.2. Здесь, в двумерном случае, решена важная задача выбора параметров регулятора, синтезирующего заданную стохастическую чувствительность с минимальными затратами на управление. Эти теоретические результаты иллюстрируются на примере синтеза стохастической чувствительности равновесия в модели брюсселятора. В рамках этого примера решена задача минимизации стохастической чувствительности при фиксированных расходах на управление.

В п.4.2.3 излагается теория синтеза стохастической чувствительности систем с неполной информацией для двух случаев. В первом случае решается задача управления статическими регуляторами с шумами. Рассматривается система

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \varepsilon\sigma(x)\xi(t), \quad x, f \in R^n, \quad u \in R^l, \quad g \in R^{n \times l}, \quad \sigma \in R^{n \times m}, \quad (41)$$

где $\xi(t) \in R^m$ – белый гауссовский шум с параметрами $E\xi(t) = 0$, $E\xi(t)\xi^\top(\tau) = \delta(t - \tau)I$, ε – скалярный параметр интенсивности шума. Предполагается известным вектор $y(t) = x(t) + \varepsilon\varphi(x(t))\eta(t)$, где $\eta(t) \in R^q$ – белый гауссовский шум с параметрами $E\eta(t) = 0$, $E\eta(t)\eta^\top(\tau) = \delta(t - \tau)I$, некоррелированный с $\xi(t)$. Пусть \bar{x} – равновесие системы (41) при $u = 0, \varepsilon = 0$. Для синтеза стохастической чувствительности равновесия \bar{x} используется статический регулятор с матрицей обратной связи K :

$$u = K(y - \bar{x}) = K(x - \bar{x}) + \varepsilon K\varphi(x)\eta. \quad (42)$$

Пусть $F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})$, $B = g(\bar{x})$, $R = \varphi(\bar{x})$, $G = \sigma(\bar{x})$ и $\mathbb{K} = \{K | \text{Re}\lambda_i(F + BK) < 0\}$ – не пусто. Для любого $K \in \mathbb{K}$, матрица стохастической чувствительности W равновесия \bar{x} является единственным решением уравнения

$$(F + BK)W + W(F + BK)^\top + BK\Phi K^\top B^\top + S = 0, \quad \Phi = RR^\top, \quad S = GG^\top. \quad (43)$$

Задача синтеза стохастической чувствительности. Для заданной матрицы $W \in \mathbb{M}$ найти матрицу $K \in \mathbb{K}$ такую, что $W_K = W$, где W_K – решение уравнения (43).

Теорема 4.5. Пусть $\text{rank } \sigma(\bar{x}) = \text{rank } \varphi(\bar{x}) = n$.

а) Если $\text{rank}(B) = n$, то множество достижимости состоит из матриц $W \in \mathbb{M}$, удовлетворяющих неравенству

$$Q = W\Phi^{-1}W - FW - WF^\top - S \succeq 0. \quad (44)$$

Для любой достижимой матрицы W уравнение (43) имеет решение

$K = B^{-1} \left(Q^{\frac{1}{2}} Z \Phi^{-\frac{1}{2}} - W \Phi^{-1} \right)$, где Z – произвольная ортогональная $n \times n$ -матрица.

б) Если $\text{rank}(B) < n$, то элемент $W \in \mathbb{M}$ является достижимым, если матрица W удовлетворяет (44) и равенствам

$$P(FW + WF^\top + S)P = 0, \quad P \left(Q^{\frac{1}{2}} Z \Phi^{-\frac{1}{2}} - W \Phi^{-1} \right) = 0, \quad P = I - BB^+.$$

В этих условиях уравнение (43) имеет решение $K = B^+ \left(Q^{\frac{1}{2}} Z \Phi^{-\frac{1}{2}} - W \Phi^{-1} \right)$.

Исследована задача минимизации стохастической чувствительности с критерием $J(W) \rightarrow \min_{W \in \mathbb{W}}$, где $J(W) = \langle W, D \rangle = \text{tr}(WD)$, $D \succ 0$. Для решения этой задачи оптимизации с условием (43) можно использовать метод множителей Лагранжа с функцией $\mathcal{L}(W, K, \Lambda) = \langle W, D \rangle + \langle \Lambda, \mathcal{F}(W, K) \rangle$, где матрица Λ – множитель Лагранжа и $\mathcal{F}(W, K) = (F + BK)W + W(F + BK)^\top + BK\Phi K^\top B^\top + S$.

Теорема 4.6. Система матричных уравнений

$$\begin{aligned} (F + BK)^\top \Lambda + \Lambda(F + BK) + D &= 0, & B^\top \Lambda W + B^\top \Lambda BK\Phi &= 0, \\ (F + BK)W + W(F + BK)^\top + BK\Phi K^\top B^\top + S &= 0, \end{aligned}$$

является необходимым условием минимума J .

Эта общая теория применяется в диссертации к важной практической задаче стабилизации нелинейного стохастического осциллятора.

Далее дается решение задачи синтеза стохастической чувствительности при помощи динамических регуляторов, использующих фильтр для зашумленного сигнала. Рассматривается система $\dot{x} = f(x, u) + \varepsilon \sigma(x) \xi(t)$, информация о состоянии которой задается вектором измерений $y = g(x) + \varepsilon \varphi(x) \eta(t)$. Используется динамический регулятор, состоящий из обратной связи и фильтра:

$$u = -K(\hat{x} - \bar{x}), \quad \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + L(y - g(\hat{x})),$$

где \hat{x} – оценка неизвестного состояния x , \bar{x} – равновесие системы $\dot{x} = f(x, 0)$.

Выведена система алгебраических уравнений, связывающих матрицу стохастической чувствительности равновесия и параметры K и L динамического регулятора. Для стохастической чувствительности в одномерном случае получены явные формулы.

В п.4.2.4 представлена теория управления стохастической чувствительностью предельных циклов, опирающаяся на результаты анализа п.2.2. Излагаемый здесь математический аппарат по синтезу стохастической чувствительности циклов n -мерных систем носит обзорный характер и предваряет вынесенные на защиту и представленные в п.4.2.5 результаты параметрического исследования вопросов достижимости, корректности и регуляризации для случая циклов на плоскости. Эффективность предложенного алгоритма регуляризации иллюстрируется на примере стохастической модели брюсселятора.

В п.4.2.6 для синтеза стохастической чувствительности циклов трехмерных систем используется аппарат сингулярных разложений (п.2.2.3). Благодаря такому разложению, задача формирования требуемой матрицы стохастической чувствительности сводится к синтезу трех скалярных T -периодических гладких функций. Из условия минимальности затрат на управление найдены коэффициенты оптимального регулятора, позволяющего синтезировать любую матрицу стохастической чувствительности. Конструктивные возможности разработанной теории иллюстрируются (рис.13) на примере стабилизации цикла в стохастической модели Лоренца с управлением

$\dot{x} = \sigma(-x + y) + u_1 + \varepsilon\dot{w}_1$, $\dot{y} = rx - y - xz + u_2 + \varepsilon\dot{w}_2$, $\dot{z} = -bz + xy + u_3 + \varepsilon\dot{w}_3$, где $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 300$, $\varepsilon = 10$. На рис.13а показаны траектории системы

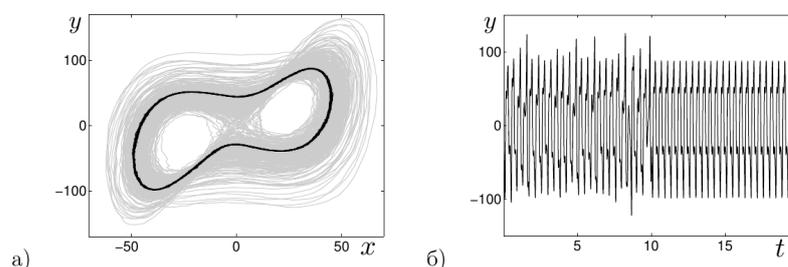


Рис. 13: Стабилизация стохастического цикла в модели Лоренца

без управления (серый) и с управлением (черный), синтезирующим малую стохастическую чувствительность. На рис.13б показан временной ряд, управление включено при $t = 10$.

В п.4.2.7 приведены результаты стабилизации стохастически возмущенных равновесных и колебательных режимов нелинейных осцилляторов в рамках новой концепции управления доверительными областями. Рассматривается случай нелинейного осциллятора с двумя сосуществующими аттракторами – равновесием и предельным циклом. Разработана процедура построения регулятора, обеспечивающего расположение доверительной области в бассейне притяжения аттрактора, отвечающего требуемому режиму.

В п.4.2.8 показано, как общие теоретические результаты по управлению стохастической чувствительностью аттракторов могут быть использованы в задаче структурной стабилизации и подавления хаоса. Здесь на примере трехмерной системы Чена, демонстрирующей большое разнообразие регулярных и хаотических аттракторов, найдены явные формулы для параметров регулятора, синтезирующего малую чувствительность равновесия и тем самым обеспечивающего структурную стабилизацию.

В **Главе 5** показано, как теоретические разработки предыдущих глав по методам математического моделирования, анализа и синтеза стохастических режимов в нелинейных системах могут быть использованы в решении актуальных исследовательских задач, относящихся к разным разделам естествознания.

В п.5.1 исследуются стохастические эффекты в потоках сложной жидкости. Здесь для многомерной дискретизации математической модели с помощью метода блочной декомпозиции построен алгоритм расчета стохастической чувствительности слоев стационарного потока, найдена параметрическая зона с высокой

стохастической чувствительностью, что объясняет переходы в осцилляционные режимы с большими амплитудами. Для двумерной дискретизации проведен детальный анализ стохастической возбудимости равновесий с помощью метода доверительных областей. Найдена параметрическая зона циклов-канардов, имеющих сверхвысокую стохастическую чувствительность.

В п.5.2 исследуется стохастический вариант модели проточного химического реактора. Здесь с помощью результатов главы 2 выясняются вероятностные механизмы стохастического возбуждения большеамплитудных колебаний. Для подавления этих нежелательных стохастических режимов используются методы управления в условиях полной и неполной информации, разработанные в главе 4.

В п.5.3 исследуется кинетика гликолиза в присутствии случайных возмущений на примере стохастического варианта концептуальной модели Селькова. Здесь представлены результаты исследования стохастической чувствительности равновесных и колебательных режимов, позволяющие прояснить вероятностные механизмы генерации мультимодальных гликолитических осцилляций и перехода к хаосу.

П.5.4 посвящен приложению представленных главах 1,2,3 диссертации общих теоретических методов стохастического анализа к исследованию индуцированных шумом явлений в нейронной динамике. Здесь рассматриваются дискретные и непрерывные модели, демонстрирующие качественное разнообразие стохастических режимов нейронной активности.

В п.5.4.1 для одномерной дискретной модели Рутькова с помощью техники функции стохастической чувствительности изучаются такие эффекты как обратные стохастические бифуркации, стохастический берстинг, индуцированные шумом переходы «порядок-хаос-порядок», стохастический сдвиг точек бифуркации кризиса. Для двумерной модели Рутькова такой вероятностный анализ проводится вблизи бифуркации Неймарка-Сакера, где локализована параметрическая зона замкнутых инвариантных кривых канардовского типа и исследован эффект стохастического расщепления.

В модели Фицхью-Нагумо с непрерывным временем (п.5.4.2) исследуется стохастическая возбудимость под действием белых и цветных шумов, найдено значение времени корреляции, отвечающее резонансу.

В п.5.4.3 для модели волоскового пучка, осуществляющего механоэлектрические преобразования звуковых сигналов, изучаются механизмы стохастической возбудимости в параметрических зонах с одним равновесием, двумя равновесиями и сосуществующими равновесием и циклом.

Четырехмерная нейронная модель Ходжкина-Хаксли изучается в п.5.4.4, где экспериментально обнаруженная высокая вариативность в стохастических колебаниях смешанных мод, сочетающих малоамплитудные осцилляции и большеамплитудные спайки, исследуется с помощью техники функции стохастической чувствительности, метода главных направлений и метрики Махаланобиса.

В п.5.5 на базе концептуальных моделей популяционной динамики показано, как разработанная математическая теория из глав 1,2,3 конструктивно используется в анализе вызванных шумами экологических сдвигов и решении задач

предотвращения таких сдвигов с помощью управляющих воздействий.

В п.5.5.1 для дискретной популяционной модели Рикера с Олли эффектом с помощью техники функции стохастической чувствительности исследованы переходы с регулярных (равновесных и периодических) и хаотических режимов в зону вымирания, описан процесс сжатия параметрического региона выживания при усилении демографического шума. Для предотвращения индуцированного шумом вымирания построен регулятор обратной связи, обеспечивающий структурную стабилизацию.

В п.5.5.2 исследован стохастический вариант модели «хищник-жертва» с Олли эффектом и трофической функцией Холлинга II типа, задаваемой стохастическими дифференциальными уравнениями с параметрическими шумами. Теоретические результаты п.4.2.4 по управлению доверительными областями используются здесь для решения задачи предотвращения индуцированного шумом вымирания. Исследована достижимость и найдены коэффициенты стабилизирующей регуляторов для разной структуры управляющих воздействий.

В п. 5.5.3 для модели, описывающей взаимодействие фито- и зоопланктона, со случайными возмущениями размеров экологической ниши с помощью теоретических результатов глав 2,3 исследуются изменения численности популяции, связанные со стохастическими бифуркациями циклов-канардов, переходом к хаосу и генерацией фантомных аттракторов.

П. 5.6 посвящен приложению методов стохастического анализа из глав 2,3 к некоторым процессам из области геофизики. В п. 5.6.1 рассматривается стохастический вариант трехмерной климатической модели Зальцмана, связывающей изменение концентрации углекислого газа в атмосфере с динамикой массы льда и температуры в глубине океана. В этой модели была обнаружена интересная математическая особенность, связывающая анализ климатической динамики с исследованием поведения модели в зоне седло-узловой бифуркации на инвариантной кривой. Здесь для анализа стохастической генерации большеамплитудных осцилляций конструктивно применяется метод доверительных эллипсов в сечениях Пуанкаре, отвечающих главным направлениям доверительных эллипсоидов.

В п.5.6.2 исследуются процессы вулканической активности на основе трехмерной нелинейной динамической модели с переменными, отвечающими за скорость вулканической пробки, давление магмы и объем канала. С помощью методов стохастического анализа, разработанных в диссертации, найдена параметрическая зона, где даже малые случайные возмущения коэффициентов трения в канале вулкана могут вызывать периодически повторяющиеся выбросы магмы значительных объемов.

В **Главе 6** дается описание комплекса программ, реализующих разработанные в рамках диссертационного исследования численные процедуры и алгоритмы, позволяющие эффективно применять оригинальные методы моделирования, анализа и управления стохастическими нелинейными динамическими системами. С помощью этого комплекса в диссертации решен широкий круг актуальных исследовательских задач, возникающих в современных разделах естествознания.

В **Заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы основные результаты, представлены рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы.

Список работ, опубликованных автором по результатам диссертации, вынесенным на защиту

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных ВАК и Аттестационным советом УрФУ

1. Bashkirtseva I., Ryashko L. Constructive analysis of noise-induced transitions for coexisting periodic attractors of Lorenz model. // *Phys. Rev. E*, 2009. V. 79. P.041106. (0.56 п.л. / 0.4 п.л.) (Scopus, WoS)
2. Башкирцева И.А., Зубарев А.Ю., Исакова Л.Ю., Ряшко Л.Б. Регулярные и стохастические автоколебания в модели реологического осциллятора. // *Нелинейная динамика*, 2009. Т. 5, № 4. С. 603-620. (1.12 п.л. / 0.28 п.л.) (Scopus)
3. Башкирцева И.А., Ряшко Л.Б. Об управлении стохастической чувствительностью дискретных систем. // *Автоматика и телемеханика*, 2010. № 9. С. 103-119. (1.06 п.л. / 0.7 п.л.) (Scopus, WoS)
4. Ryashko L., Bashkirtseva I. Analysis of excitability for the FitzHugh-Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique. // *Phys. Rev. E*, 2011. V. 83. P. 061109. (0.5 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
5. Bashkirtseva I., Ryashko L. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect. // *Chaos*, 2011. V. 21. P. 047514. (0.5 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
6. Bashkirtseva I., Chen G., Ryashko L. Analysis of noise-induced transitions from regular to chaotic oscillations in the Chen system. // *Chaos*, 2012. V. 22. P. 033104. (0.56 п.л. / 0.2 п.л.) (Scopus, WoS)
7. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stabilization of stochastic cycles and chaos suppression for nonlinear discrete-time systems. // *Nonlinear Dynamics*, 2012. V. 67. P. 2505-2517. (0.81 п.л. / 0.5 п.л.) (Scopus, WoS)
8. Bashkirtseva I., Chen G., Ryashko L. Stochastic equilibria control and chaos suppression for 3D systems via stochastic sensitivity synthesis. // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2012. V. 17. P. 3381-3389. (0.56 п.л. / 0.19 п.л.) (Scopus, WoS)
9. Башкирцева И.А., Зубарев А.Ю., Исакова Л.Ю., Ряшко Л.Б. Об индуцированных шумами колебаниях в течении концентрированных суспензий. // *Прикл. математика и механика*, 2012. Т.76. Вып. 4. С. 646-657. (0.75 п.л. / 0.18 п.л.) (Scopus, WoS)
10. Башкирцева И.А. Анализ стохастически возмущенных равновесий и индуцированных шумом переходов в нелинейных дискретных системах. // *Компьютерные исследования и моделирование*, 2013. Т. 5, № 4. С. 559-571. (0.81 п.л.) (Scopus)
11. Bashkirtseva I. Analysis of limit cycles response on parametrical noise in one-dimensional discrete-time systems. // *Fluctuation and Noise Letters*, 2013. V. 12, № 3. P. 1350009. (0.75 п.л.) (Scopus, WoS)
12. Bashkirtseva I., Ryashko L., Stikhin P. Noise-induced chaos and backward stochastic bifurcations in the Lorenz model. // *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013. V. 23, № 5. P. 1350092. (0.87 п.л. / 0.4 п.л.) (Scopus, WoS)
13. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced intermittency and transition to chaos in one-dimensional discrete-time systems. // *Physica A*, 2013. V. 392. P. 295-306. (0.75 п.л. / 0.5 п.л.) (Scopus, WoS)

14. Bashkirtseva I., Ryashko L. Attainability analysis in the problem of stochastic equilibria synthesis for nonlinear discrete systems. // *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2013. V. 23, № 1. P. 5–16. (0.75 п.л. / 0.5 п.л.) (Scopus, WoS)
15. Башкирцева И.А., Нурмухаметова Д.Р., Ряшко Л.Б. Об управлении стохастической чувствительностью колебательных систем. // *Автоматика и телемеханика*, 2013. № 6. С. 42–56. (0.93 п.л. / 0.6 п.л.) (Scopus, WoS)
16. Bashkirtseva I., Chen G., Ryashko L. Stabilizing stochastically-forced oscillation generators with hard excitement: a confidence-domain control approach. // *Eur. Phys. J. B*, 2013. V. 86. P. 437. (0.5 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
17. Bashkirtseva I., Neiman A. B., Ryashko L. Stochastic sensitivity analysis of the noise-induced excitability in a model of a hair bundle. // *Phys. Rev. E*, 2013. V. 87. P. 052711. (0.56 п.л. / 0.2 п.л.) (Scopus, WoS)
18. Bashkirtseva I., Ryashko L. Analysis of the noise-induced regimes in Ricker population model with Allee effect via confidence domains technique. // *BioMed Research International*, 2014. V. 2014. P. 346239. (0.44 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
19. Bashkirtseva I. Mean-square analysis of stochastic cycles in nonlinear discrete-time systems with parametric noise. // *Journal of Difference Equations and Applications*, 2014. V.20, № 8. P. 1178–1189. (0.75 п.л.) (Scopus, WoS)
20. Bashkirtseva I. Stabilization of stochastic cycles and control of noise-induced chaos. // *Eur. Phys. J. B*, 2014. V. 87, № 4. P. 79. (0.5 п.л.) (Scopus, WoS)
21. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity of the closed invariant curves for discrete-time systems. // *Physica A*, 2014. V. 410. P. 236–243. (0.5 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
22. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity analysis of the attractors for the randomly forced Ricker model with delay. // *Physics Letters A*, 2014. V. 378, № 48. P.3600–3606. (0.44 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
23. Alexandrov D. V., Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Stochastically driven transitions between climate attractors. // *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*, 2014. V. 66, № 1. P. 23454. (0.7 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
24. Bashkirtseva I., Ryashko L. Approximating chaotic attractors by period-three cycles in discrete stochastic systems. // *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2015. V. 25, № 10. P. 1550138. (0.44 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
25. Bashkirtseva I. Stochastic phenomena in one-dimensional Rulkov model of neuronal dynamics. // *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2015. V. 2015. P. 495417. (0.44 п.л.) (Scopus, WoS)
26. Bashkirtseva I. Attainability analysis in the stochastic sensitivity control. // *International Journal of Control*, 2015. V. 88, № 2. P. 276–284. (0.56 п.л.) (Scopus, WoS)
27. Bashkirtseva I., Neiman A. B., Ryashko L. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced suppression of firing and giant variability of spiking in a Hodgkin-Huxley neuron model. // *Phys. Rev. E*, 2015. V. 91, № 5. P. 052920. (0.7 п.л. / 0.4 п.л.) (Scopus, WoS)
28. Ryashko L., Bashkirtseva I. Stochastic sensitivity analysis and control for ecological model with the Allee effect. // *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2015. V. 10, № 2. P. 130–140. (0.7 п.л. / 0.5 п.л.) (Scopus, WoS)
29. Alexandrov D. V., Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. How a small noise generates large-amplitude oscillations of volcanic plug and provides high seismicity. // *Eur. Phys. J. B*, 2015. V. 88, № 4. P. 106. (0.5 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
30. Bashkirtseva I., Ryashko L. How additive noise generates a phantom attractor in a model with cubic nonlinearity. // *Physics Letters A*, 2016. V. 380, № 41. P. 3359 – 3365. (0.44 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
31. Bashkirtseva I. A., Fominykh P. M. Analysis of the stochastic excitement in a model of flow reactor. // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2016. V. 9, № 3. P. 269–278. (0.62 п.л. / 0.5 п.л.) (Scopus, WoS)

32. Alexandrov D. V., Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B. Stochastic variability and noise-induced generation of chaos in a climate feedback system including the carbon dioxide dynamics. // *EPL*, 2016. V. 115. P. 40009. (0.44 п.л. / 0.2 п.л.) (Scopus, WoS)
33. I. Bashkirtseva. Stochastic sensitivity analysis: theory and numerical algorithms. IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., 2017. V. 192. P. 012024. (0.5 п.л.) (Scopus, WoS)
34. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity of regular and multi-band chaotic attractors in discrete systems with parametric noise. // *Physics Letters A*, 2017. V. 381, № 37. P. 3203–3210. (0.5 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
35. Bashkirtseva I. Method of stochastic sensitivity synthesis in a stabilisation problem for nonlinear discrete systems with incomplete information. // *International Journal of Control*, 2017. V. 90, № 8. P. 1652–1663. (0.75 п.л.) (Scopus, WoS)
36. Bashkirtseva I., Ryashko L., Chen G. Controlling the equilibria of nonlinear stochastic systems based on noisy data. // *Journal of the Franklin Institute*, 2017. V. 354, № 3. P. 1658–1672. (0.93 п.л. / 0.5 п.л.) (Scopus, WoS)
37. Башкирцева И.А. Анализ стохастической возбудимости в простой кинетической модели гликолиза. // *Нелинейная динамика*, 2017. Т. 13, № 1. С. 13–23. (0.7 п.л.) (Scopus)
38. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity and variability of glycolytic oscillations in the randomly forced Sel'kov model. // *Eur. Phys. J. B*, 2017. V. 90. P. 17. (0.62 п.л. / 0.4 п.л.) (Scopus, WoS)
39. Bashkirtseva I., Ryashko L. Analysis of noise-induced chaos-order transitions in Rulkov model near crisis bifurcations. // *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2017. V. 27, № 3. P. 1730014. (0.56 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
40. Bashkirtseva I., Ryashko L. How environmental noise can contract and destroy a persistence zone in population models with Allee effect. // *Theoretical Population Biology*, 2017. V. 115. P. 61–68. (0.5 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)
41. Башкирцева И.А. О влиянии цветного шума на равновесные режимы нелинейных динамических систем. // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2018. Т. 28, вып. 2. С. 133–142. (0.62 п.л.) (Scopus)
42. Bashkirtseva I. Stochastic sensitivity of systems driven by colored noise. // *Physica A*, 2018. V. 505. P. 729–736. (0.5 п.л.) (Scopus, WoS)
43. Bashkirtseva I. Stochastic sensitivity of cycles in periodic dynamical systems. // *Eur. Phys. J. B*, 2018. V. 91. P. 283. (0.37 п.л.) (Scopus, WoS)
44. Bashkirtseva I. Controlling the stochastic sensitivity in thermochemical systems under incomplete information. // *Kybernetika*, 2018. V. 54. P. 96–109. (0.87 п.л.) (Scopus, WoS)
45. Bashkirtseva I., Nasyrova V., Ryashko L. Noise-induced bursting and chaos in the two-dimensional Rulkov model. // *Chaos, Solitons & Fractals*, 2018. V. 110. P. 76–81. (0.37 п.л. / 0.2 п.л.) (Scopus, WoS)
46. Bashkirtseva I., Nasyrova V., Ryashko L. Analysis of noise effects in a map-based neuron model with Canard-type quasiperiodic oscillations. // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 2018. V. 63. P. 261–270. (0.62 п.л. / 0.4 п.л.) (Scopus, WoS)
47. Bashkirtseva I., Ryashko L. Generation of mixed-mode stochastic oscillations in a hair bundle model. // *Phys. Rev. E*, 2018. V. 98, № 4. P. 042414. (0.37 п.л. / 0.2 п.л.) (Scopus, WoS)
48. Bashkirtseva I., Ryashko L. Noise-induced shifts in the population model with a weak Allee effect. // *Physica A*, 2018. V. 491, P. 28–36. (0.56 п.л. / 0.4 п.л.) (Scopus, WoS)
49. Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic sensitivity analysis of chaotic attractors in 2D non-invertible maps. // *Chaos, Solitons & Fractals*, 2019. V. 126. P. 78–84. (0.44 п.л. / 0.3 п.л.) (Scopus, WoS)

Свидетельства о регистрации программ:

1. Башкирцева И. А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013611497 «Стохастическая чувствительность». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 22.01.2013.
2. Башкирцева И. А., Слепухина Е. С. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015616550 «Стохастическая возбудимость модели Фитцхью-Нагумо». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 15.06.2015.
3. Рязанова Т. В., Башкирцева И. А., Екатеринчук Е. Д. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015615523 «Моделирование и анализ модели Гудвина со случайным возмущением». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 20.05.2015.
4. Башкирцева И. А., Кошелев Г. Н. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015663379 «Моделирование детерминированных и стохастических траекторий и аттракторов динамических систем». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 16.12.2015.
5. Башкирцева И. А., Рязанова Т. В., Ряшко Л. Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018616176 «Стохастический анализ равновесных режимов сосуществования двух и трех популяций». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 24.05.2018.
6. Башкирцева И. А., Рязанова Т. В., Ряшко Л. Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018616132 «Индукцированное шумом вымирание в популяционной модели с тремя трофическими уровнями». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 23.05.2018.
7. Башкирцева И. А., Слепухина Е. С. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018616082 «Анализ мультимодальных динамических режимов в двумерной модели Хиндмарш-Роуз со случайными возмущениями». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 22.05.2018.
8. Башкирцева И. А., Зайцева С. С. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019661992 «Анализ стохастической динамики двумерной модели Голдбетера». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 12.09.2019.
9. Башкирцева И. А., Перевалова Т. В., Ряшко Л. Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020614964 «Стохастический анализ осцилляционных режимов трех взаимодействующих популяций». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 29.04.2020.
10. Башкирцева И. А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020615062 «Синтез стохастической чувствительности дискретных систем». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 14.05.2020.
11. Башкирцева И. А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020616063 «Управление стохастическими системами при неполной информации». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 14.05.2020.

Список литературы

- [1] Ватанабэ, С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. — М. : Наука, 1986.
- [2] Metzler, R. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // *Physics Reports*. — 2000. — V. 339. — P. 1–77.
- [3] Dubkov, A. A. Lévy flight superdiffusion: an introduction / A. A. Dubkov, B. Spagnolo, V. V. Uchaikin // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2008. — V. 18, N. 9. — P. 2649–2672.
- [4] Kloeden, P. E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations / P. E. Kloeden, E. Platen. — Berlin : Springer-Verlag, 1999. — 636 P.
- [5] Milstein, G. N. Stochastic Numerics for Mathematical Physics / G. N. Milstein, M. V. Tretyakov. — Berlin : Springer-Verlag, 2004. — 596 P.
- [6] Soong, T. T. Random vibration of mechanical and structural systems / T. T. Soong, M. Grigoriu. — New Jersey : Prentice Hall, 1992. — 352 P.
- [7] Стратонович, Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р. Л. Стратонович. — М. : Сов. радио, 1961. — 600 с.
- [8] Диментберг, М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний / М.Ф. Диментберг. — М.: Наука, 1980.
- [9] Landa, P. S. Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise / P. S. Landa, McClintock P. V. E. // *Phys. Rep.* — 2000. — V. 323. — P. 1–80.
- [10] Вентцель, А. Д. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений / А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин. — М. : Наука, 1979. — 424 с.
- [11] Мильштейн, Г. Н. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями / Г. Н. Мильштейн, Л. Б. Ряшко // *Прикл. математика и механика*. — 1995. — Т. 59, N. 1. — С. 53–63.
- [12] Bashkirtseva, I.A. Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator / I.A. Bashkirtseva, L.B. Ryashko // *Physica A*. — 2000. — V. 278, N. 1-2. — P. 126–139.
- [13] Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity of 3D-cycles / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 2004. — V. 66. — P. 55–67.
- [14] Bashkirtseva, I. Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2005. — V. 26. — P. 1437–1451.
- [15] Ряшко, Л. Б. Стохастические аттракторы нелинейных динамических систем / Л. Б. Ряшко, И. А. Башкирцева. — Екатеринбург. Изд-во Уральского университета, 2010. — 251 с.
- [16] Hänggi, P. Colored noise in dynamical systems / P. Hänggi, P. Jung // *Advances in Chemical Physics*. — 1995. — V. 89. — P. 239–326.
- [17] Large fluctuations in a periodically driven dynamical system / M. I. Dykman, V. N. Smelyanskiy, D. G. Luchinsky et al. // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 1998. — V. 08, N. 04. — P. 747–754.
- [18] Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова et al. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 535 P.
- [19] Башкирцева, И.А. Стохастическая чувствительность равновесий и циклов одномерных дискретных отображений / И.А. Башкирцева, Л.Б. Ряшко, И.Н. Цветков // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. — 2009. — V. 17, N. 6. — P. 74–85.
- [20] Bashkirtseva, I. Sensitivity Analysis of Stochastic Equilibria and Cycles for the Discrete Dynamic Systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov // *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis*. — 2010. — V. 17. — P. 501–515.
- [21] Guo, K. Stochastic sensitivity analysis of periodic attractors in non-autonomous nonlinear dynamical systems based on stroboscopic map / K. Guo, J. Jiang // *Physics Letters A*. — 2014. — V. 378, N. 34. — P. 2518 – 2523.
- [22] Guo, K. Semi-analytical expression of stochastic closed curve attractors in nonlinear dynamical systems under weak noise / K. Guo, J. Jiang, Y. Xu // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2016. — V. 38. — P. 91 – 101.

- [23] Guo, K. Approximation of stochastic quasi-periodic responses of limit cycles in non-equilibrium systems under periodic excitations and weak fluctuations / K. Guo, J. Jiang, Y. Xu // *Entropy*. — 2017. — V. 19. — P. 280.
- [24] Sun, Y. Stochastic sensitivity analysis of nonautonomous nonlinear systems subjected to Poisson white noise / Y. Sun, L. Hong, J. Jiang // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2017. — V. 104. — P. 508 – 515.
- [25] Danylenko, V. Stationary and periodic regimes in relaxing media with fluctuations / V. Danylenko, S. Skurativskiy // *Eur. Phys. J. B*. — 2014. — V. 87. — P. 218.
- [26] Skurativskiy, S.I. Dynamics of traveling waves in fluctuating nonlocal media / S.I. Skurativskiy, I.A. Skurativska // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2017. — V. 49. — P. 9 – 16.
- [27] Xu, C. Stochastic sensitivity analysis for a competitive turbidostat model with inhibitory nutrients / C. Xu, S. Yuan, T. Zhang // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. — 2016. — V. 26. — P. 1650173.
- [28] Xu, C. Sensitivity analysis and feedback control of noise-induced extinction for competition chemostat model with mutualism / C. Xu, S. Yuan, T. Zhang // *Physica A*. — 2018. — V. 505. — P. 891 – 902.
- [29] Wu, D. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced transitions in a predator-prey model with environmental toxins / D. Wu, H. Wang, S. Yuan // *Mathematical Biosciences and Engineering*. — 2019. — V. 16. — P. 2141–2153.
- [30] Xu, C. Probabilistic mechanisms of the noise-induced oscillatory transitions in a Leslie type predator-prey model / C. Xu // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2020. — V. 137. — P. 109871.
- [31] Noise-induced transitions in a nonsmooth producer-grazer model with stoichiometric constraints / S. Yuan, D. Wu, G. Lan, H. Wang // *Bull. Math. Biol.* — 2020. — V. 82. — P. 55.
- [32] Красносельский, М.А. Позитивные линейные системы / М.А. Красносельский, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев. — М.: Наука, 1985.