Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»
Институт естественных наук и математики
Кафедра теоретической и математической физики

На правах рукописи

БАШКИРЦЕВА ИРИНА АДОЛЬФОВНА

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ В ЗОНАХ ПОРЯДКА И ХАОСА: МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, АНАЛИЗ И УПРАВЛЕНИЕ

Специальность 05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

Диссертация
на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург 2020

Оглавление

Введение

Актуальность темы и степень ее разработанности. В настоящее время для изучения динамических процессов, наблюдаемых в разных областях естествознания, широко используются математические модели в форме нелинейных дифференциальных или разностных уравнений. Переход от обработки эмпирических и экспериментальных данных к построению и анализу адекватных математических моделей позволяет существенно продвинуться в понимании механизмов сложных процессов в механике жидкостей и газов, климатических изменений, динамике нейронных и популяционных систем, химической кинетике и т.п., и перейти к решению актуальных задач управления такими процессами.

Присутствие случайных возмущений является неизбежным атрибутом функционирования любой реальной системы. Взаимосвязь нелинейности и стохастичности зачастую приводит к новым явлениям, не имеющим аналогов в исходных детерминированных моделях. В настоящее время насущной задачей математического моделирования является разработка новых подходов и универсальных математических методов, ориентированных на конструктивный анализ таких явлений в нелинейных стохастических моделях современного естествознания.

Если в детерминированном случае такой универсальный математический подход, использующий бифуркационный анализ и теорию устойчивости, в настоящее время достаточно хорошо разработан, то теория и методы нелинейного стохастического анализа еще только формируются. Основным инструментом исследования нелинейных стохастических систем пока остается прямое численное моделирование, что является чрезвычайно затратным в задачах параметрического анализа.

Первые математические модели, использующие стохастические дифференциальные уравнения, появились в работах С.Н.Бернштейна [1], И.И.Гихмана [2] и К.Ито [3]. В настоящее время стохастические уравнения Ито и их модификация, предложенная Р.Л. Стратоновичем [4], служат базовой моделью при исследовании влияния случайных возмущений на поведение динамических систем [5]. Развитие стохастического анализа привело к появлению новых моделей с интегралами по мартингалам, точечным и Леви процессам [6–8].

Современная теория устойчивости и управления стохастическими динамическими системами формировалась в работах таких ученых как Н.Н. Красовский, Р.З. Хасьминский, И.Я. Кац, H.J. Kushner, W.H. Fleming, В.Б. Колмановский, А.Б. Куржанский, Г.Н. Мильштейн, П.В. Пакшин, Ф.Л. Черноусько, Б.И. Ананьев, M. Aoki, L. Arnold, K.J. Astrom, R.E. Kalman, R.S. Bucy, X. Mao, J.L. Willems, W.M. Wonham и многих других (см. [9–21] и библиографию в них).

Основы анализа результатов воздействия стохастических возмущений на осцилляционные режимы нелинейных динамических систем были заложены в работе Л.С. Понтрягина, А.А. Андронова и А.А. Витта [22]. В дальнейшем, эти исследования продолжились в работах Р.Л. Стратоновича, С.М. Рытова, Ю.И. Неймарка, П.С. Ланда, В.В. Болотина, М.Ф. Диментберга, В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасовой, А.А. Короновского, А.Е. Храмова, В.И. Некоркина, С.П. Кузнецова, А.Б. Неймана, А. Пиковского, А.А. Дубкова, R.A. Ibrahim, W. Horsthemke, R. Lefever, J. Duan, A. Pisarchik, J. Kurths, B. Spagnolo, S. Boccaletti и других (см. [23–36] и библиографию в них).

Сочетание нелинейности и стохастичности может приводить к неожиданным и зачастую контринтуитивным динамическим явлениям, не имеющим детерминированных аналогов. В настоящее время интенсивно исследуются такие нелинейные стохастические явления, как вызванные шумом переходы [30,33,37–40], стохастические бифуркации [41–46], стохастический и когерентный резонанс [47–55], вызванный шумом порядок и хаос [56–60], вызванная шумом синхронизация [32, 36], возбудимость [61–64], перемежаемость [65–67], мультимодальность [68, 69], вызванные шумом кризисы [70, 71].

Подобные явления, свидетельствующие о конструктивном характере шумов, обнаружены во многих нелинейных стохастических системах, моделирующих реальные процессы, относящиеся к различным областям естествознания. В частности, такие стохастические явления наблюдаются и в обсуждаемых в диссертации направлениях, связанных с механикой потоков [72–74], с химической кинетикой [75–78], с популяционной динамикой [79–86], с нейронной активностью [48, 61, 87–92], с климатической и вулканической динамикой [93–97].

Основным инструментом исследования нелинейных стохастических систем пока остается прямое численное моделирование [98, 99]. В рамках этого чрезвычайно затратного метода сложно получить ясные параметрические описания разнообразных стохастических режимов исследуемых моделей. Для проведения детального параметрического анализа, позволяющего выяснить вероятностные механизмы этих новых стохастических явлений, требуется разработка аналитических подходов.

Сравнительный анализ представленного в литературе широкого круга нелинейных стохастических эффектов позволяет выделить главные причины, их вызывающие. В исследовании индуцированных шумами переходов определяющую роль играет взаимное расположение разброса случайных состояний вокруг аттракторов и сепаратрис, разделяющих их бассейны притяжения. Исчерпывающее описание динамики вероятностных распределений в моделях, использующих стохастические дифференциальные уравнения, дается соответствующим уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова. Аналитическое решение этого уравнения возможно только в одномерном случае, а в общем случае систем с малыми шумами здесь возникают известные сложности анализа уравнений с малыми коэффициентами при старших производных. В этих обстоятельствах важны подходы, дающие конструктивные аппроксимации для искомых статистических характеристик. В частности, разработан метод, связанный с обрывом бесконечной последовательности уравнений для моментов высших порядков. При этом, как правило, ограничиваются первыми двумя моментами [29]. Методы стохастического усреднения в системах с малым параметром развивались в работах [23,26]. Из приближенных методов можно также отметить широко используемые аппроксимации в переменных амплитуды и фазы [23, 30, 100]. Для класса быстро-медленных нелинейных систем дифференциальных уравнений возможные асимптотические аппроксимации обсуждаются в [48, 101–103]. В настоящее время хорошо известен общий подход, использующий при асимптотической аппроксимации плотности распределения в системах с малыми шумами так называемый квазипотенциал [104]. Данный метод активно развивался в работах [105–110].

В условиях локализации случайных состояний в окрестности детерминированного аттрактора для квазипотенциала можно эффективно использовать квадратичную аппроксимацию. В случае равновесия и цикла эта квадратичная аппроксимация была построена в [111]. Параметры соответствующей квадратичной формы задаются матрицей, получившей в дальнейшем название матрицы стохастической чувствительности. Метод функций стохастической чувствительности, использующий другой подход, связанный с системами первого приближения, развивался в цикле совместных работ [112–114] автора диссертации. В [115], этот метод был распространен на случай квазипериодических аттракторов. Обзор метода функций стохастической чувствительности для стохастических дифференциальных уравнений с гауссовскими белыми шумами представлен в монографии [116].

Во многих реальных процессах адекватной математической моделью действующих случайных возмущений являются цветные шумы, имеющие те или иные характерные корреляционные временные характеристики [117,118]. Важная роль цветных шумов была обнаружена во многих системах самой разной природы, например, в лазерах [119], сейсмологии [120], биохимии [121], динамике популяций [122], кинетике роста микроорганизмов [123], динамике роста опухолей [124]. Воздействие цветных шумов может приводить к таким явлениям, как индуцированные случайными возмущениями переходы [118, 125, 126], стохастический резонанс [127], вызывать стохастические бифуркации [128] и трансформации порядок-хаос [129]. Для анализа вероятностных механизмов этих явлений несомненно актуальным является представленное в диссертации распространение теории стохастической чувствительности на случай систем с цветными шумами.

Изучение взаимного влияния стохастических и периодических возмущений на поведение нелинейных динамических систем является темой обширных исследований. Даже в детерминированном случае, динамические системы с периодически меняющимися параметрами являются широко распространенными математическими моделями в естествознании и технике. Например, в анализе динамики популяционных и климатических систем важную роль играют изменения внешних условий, связанные с суточными и сезонными ритмами. Такие системы могут демонстрировать разнообразие динамических режимов с периодическими, апериодическими и даже хаотическими колебаниями. Для исследования детерминированных систем с периодическими коэффициентами активно используются различные подходы, основанные на теории возмущений и усреднений, методе точечных отображений [130, 131]. Для линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами разработана фундаментальная математическая теория [132]. Взаимодействие нелинейности, периодичности и стохастичности может привести к различным неожиданным динамическим явлениям [133–135]. Здесь классическим примером является стохастический резонанс [49,50,136]. Конструктивная роль шума в периодических системах привлекает внимание многих исследователей (см., например, [30,33,100,137–144]). Здесь, как правило, рабочим инструментом является прямое численное моделирование. Представленное в диссертации развитие авторского аналитического метода стохастической чувствительности для исследования нелинейных систем с периодическими и случайными возмущениями является актуальным теоретическим направлением.

Наряду со стохастическими дифференциальными уравнениями, при моделировании случайных процессов в естествознании широко используются дискретные нелинейные отображения [145]. Даже одномерные дискретные модели позволяют моделировать широкий круг динамических режимов, как регулярных, так и хаотических. Для дискретных моделей, присутствие случайных возмущений порождает не меньшее разнообразие интересных стохастических явлений, чем в системах с непрерывным временем. Исследование этих явлений, в подавляющем большинстве работ, основано на численном моделировании решений стохастических дискретных систем и последующей статистической обработке.

Математическое описание динамики вероятностных распределений в системах с дискретным временем дается функциональными уравнениями с операторами Перрона-Фробениуса [146,147]. Однако аналитическое решение таких уравнений, даже в одномерном случае, возможно только для специально подобранных примеров. Для аппроксимации вероятностных распределений случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов (равновесий и циклов) дискретных систем, в работах [148,149] был разработан аналог функции стохастической чувствительности, полученной ранее для непрерывного случая. Исследования показали, что в случае шумов, зависящих от состояния системы, этот метод аппроксимации может занижать значения дисперсии. Здесь построение более точных аппроксимаций, учитывающих специфику параметрических шумов, представляется важной исследовательской задачей диссертации.

В системах, задаваемых отображениями, наряду с равновесиями и дискретными циклами возможен еще один тип регулярного аттрактора – замкнутая инвариантная кривая. Возникновение такого аттрактора связано с бифуркацией Неймарка-Сакера [150, 151], в результате которой равновесный режим трансформируется в квазипериодический.

В результате последовательных бифуркаций удвоения периода дискретных циклов, разрушения инвариантных кривых и бифуркаций кризиса, в системе появляются хаотические аттракторы [152–154]. Квазипериодические и хаотические осцилляции являются важными режимами функционирования во многих нелинейных системах с дискретным временем. Присутствие случайных возмущений вносит дополнительные сложности в их анализ [155–157]. Разработка методов аппроксимации вероятностных распределений случайных состояний вблизи замкнутых инвариантных кривых и хаотических аттракторов является важным шагом в исследовании динамики стохастических систем с такими аттракторами и понимании внутренних механизмов сложных вероятностных феноменов.

Таким образом, разработка конструктивных аналитических методов аппроксимации вероятностных распределений вокруг регулярных и хаотических аттракторов является несомненно важной задачей современной нелинейной стохастической динамики. Практическая реализация этих теоретических методов в анализе разнообразных индуцированных шумами явлений требует разработки соответствующих алгоритмов и программ.

В настоящее время безусловно актуальной задачей является разработка конструктивных методов управления сложными колебательными режимами нелинейных систем. Здесь можно отметить технические проблемы по устранению вибраций в механических системах, подавлению нежелательных гармоник в электронных системах и т.п. Наряду с подавлением осцилляций, возникают и противоположные задачи генерации требуемых амплитудных и частотных характеристик. Для детерминированных систем такая теория достаточно хорошо развита (см. например [158–162]). В этом кругу особый интерес исследователей вызывает тематика, связанная с управлением хаосом [163–169]. Объектом активных исследований являются задачи управления колебаниями в нелинейных стохастических системах [111, 170–175].

Переход от традиционно рассматриваемых задач стабилизации равновесных режимов к синтезу сложных колебательных процессов с наперед заданными вероятностными характеристиками, особенно в условиях информационных и технологических ограничений, приводит к необходимости постановки и решения новых математических задач. В русле исследований, проводимых в данной диссертации, возникает новая постановка задачи управления, связанная с синтезом назначенной стохастической чувствительности рабочих режимов, связанных с теми или иными аттракторами динамических моделей. Здесь возникает круг новых математических задач по исследованию вопросов управляемости, достижимости и построению регуляторов в условиях полной и неполной информации.

Проводимые автором математические исследования были во многом мотивированы необходимостью решать актуальные задачи, возникающие в нелинейных стохастических моделях из разных разделов современного естествознания, связанных с динамикой сложной жидкости, функционированием проточных химических реакторов, протеканием реакций гликолиза, нейронной и популяционной динамикой, сложными динамическими явлениями в геофизике. Выявление общих закономерностей в моделях разной физической природы, формализация и разработка единого численно-аналитического подхода к исследованию наблюдаемых нелинейных стохастических явлений и решение новых задач управления делает тему диссертационной работы актуальной и важной для современной стохастической теории нелинейных динамических систем ее приложений.

Цели и задачи диссертационной работы

Целью работы является разработка новых методов математического моделирования, анализа и управления для сложных стохастических режимов нелинейных динамических систем в зонах порядка и хаоса, а также приложение этой теории к решению актуальных исследовательских задач в различных разделах естествознания.

Для достижения указанной цели были поставлены и решены следующие задачи.

Основные задачи

1. Разработка методов асимптотической аппроксимации вероятностных распределений вблизи регулярных (равновесия, циклы, замкнутые инвариантные кривые) и хаотических аттракторов дискретных динамических систем с шумами, зависящими от состояния.

2. Развитие техники стохастической чувствительности для непрерывных динамических систем с цветными шумами и периодическими возмущениями.

3. Построение общей методики и создание комплекса алгоритмов и программ для исследования широкого круга индуцированных шумами явлений, связанных со стохастическими переходами и бифуркациями в математических моделях с непрерывным и дискретным временем.

4. Разработка конструктивных методов управления для решения новых задач синтеза динамических систем с заданными вероятностными характеристиками, в том числе и при неполной информации.

5. Применение разработанных методов математического моделирования, стохастического анализа и управления для решения ряда актуальных исследовательских задач, связанных со сложными стохастическими явлениями в потоках сложной жидкости, проточных химических реакторах, кинетике гликолиза, нейронной и популяционной динамике, геофизике.

Научная новизна заключается в разработке универсальной методики математического моделирования, анализа и управления для широкого круга стохастических явлений, исследуемых в разных областях естествознания. Математической основой этой методики является аппарат аппроксимации вероятностных распределений нелинейных стохастических систем, основанный на авторской технике функции стохастической чувствительности. Этот аппарат позволяет проводить конструктивное исследование новых стохастических явлений вблизи локальных и нелокальных бифуркаций в зонах порядка и хаоса, избегая затратного прямого численного моделирования в параметрическом анализе. Предложен и реализован новый численно-аналитический подход, учитывающий стохастическую чувствительность аттракторов и геометрию их бассейнов притяжения.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация решает научную проблему, состоящую в разработке общей теории математического моделирования и анализа сложных стохастических явлений в нелинейных стохастических системах. Предложен универсальный подход, позволяющий в рамках единой теории исследовать особенности вероятностных распределений вблизи регулярных и хаотических аттракторов в математических моделях с дискретным и непрерывным временем с общими параметрическими шумами, в том числе цветными. Результаты, полученные в диссертационной работе, позволяют продвинуться в понимании общих закономерностей индуцированных шумами переходов и бифуркаций на основе анализа стохастической чувствительности аттракторов и их бассейнов притяжения. Предложенный подход к описанию сложных вероятностных явлений позволяет в рамках единой методики эффективно прогнозировать стохастические трансформации динамических режимов, проводить их количественный параметрический анализ и решать задачи управления, что имеет весьма широкую область потенциального применения в различных областях технических и естественных наук.

Теоретические разработки диссертации уже нашли применение в исследовании стохастических процессов в системах различной физической природы. Здесь можно отметить циклы работ по стохастическим явлениям в динамике связанных популяций, нейронной активности, кинетике гликолиза, термохимических реакторах, макроэкономике, климатической динамике, вулканической и гейзерной активности. Результаты этих практических приложений разработанной в диссертации теории опубликованы в авторитетных специализированных научных журналах.

Методология и методы исследования

В качестве математических моделей систем в диссертации используются нелинейные системы стохастических дифференциальных и разностных уравнений. Для их анализа применяется современная методология, опирающаяся на математическую теорию локальных и нелокальных бифуркаций, аналитические, асимптотические и численные методы теории случайных процессов, компьютерное моделирование.

В диссертации используются и развиваются авторские методы математического моделирования и анализа нелинейных стохастических феноменов, использующие технику стохастических линейных расширений и аппарат функций стохастической чувствительности. Для пространственного описания вероятностных распределений в диссертации развивается техника доверительных областей, метод главных направлений с привлечением метрики Махаланобиса.

Важно подчеркнуть, что эти подходы и методы автора диссертации позволяют в рамках единой теории охватить как традиционно исследуемые простые случаи аттракторов (равновесия, циклы на плоскости), так и достаточно сложные пространственные аттракторы дискретных и непрерывных систем в зонах перехода от порядка к хаосу, и проводить анализ воздействия не только аддитивных, но и параметрических случайных возмущений.

В решении задач стохастического синтеза используются методы управления с помощью статических регуляторов с обратной связью, а также динамических регуляторов с фильтрацией зашумленных сигналов.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Спектральные критерии существования устойчивых стационарных вторых моментов стохастических линейных расширений нелинейных дискретных систем с параметрическими шумами в случае равновесий и циклов. Конструктивные алгоритмы для отыскания этих моментов.

2. Теория стохастической чувствительности для замкнутых инвариантных кривых двумерных отображений.

3. Теория стохастической чувствительности хаотических аттракторов одно- и двумерных отображений.

4. Теория стохастической чувствительности равновесий непрерывных систем с цветными шумами.

5. Теория стохастической чувствительности циклов неавтономных непрерывных систем с периодическими возмущениями.

6. Техника математического моделирования распределений случайных состояний регулярных и хаотических аттракторов в форме доверительных областей с привлечением техники функций стохастической чувствительности, метрики Махаланобиса и метода главных направлений.

7. Общая методика и комплекс алгоритмов и программ для исследования широкого круга индуцированных шумом явлений на основе разработанной

теории стохастической чувствительности:

- стохастические переходы между сосуществующими аттракторами и их частями;
- обратные стохастические бифуркации;
- стохастическая генерация новых режимов в зонах седло-узловых, касательных и кризисных бифуркаций, а также бифуркаций Андронова-Хопфа, Неймарка-Сакера, и удвоения периода;
- стохастическая возбудимость и генерация мультимодальных колебаний в моностабильных системах;
- бифуркация стохастического расщепления предельных циклов;
- индуцированная шумом генерация и подавление хаоса;
- стохастическая генерация фантомного аттрактора.

8. Теория и алгоритмы решения новых задач синтеза динамических систем с заданными вероятностными характеристиками равновесных и осцилляционных режимов, в том числе и при неполной информации. Критерии управляемости и достижимости в зависимости от геометрии управляющих воздействий в задаче синтеза стохастической чувствительности. Конструктивные методы регуляризации в некорректной задаче управления стохастическим циклом. Новая техника управления доверительными областями в задаче структурной стабилизации и подавления хаоса.

9. Конструктивные методы, основанные на разработанной теории стохастической чувствительности, для исследования ряда актуальных задач в нелинейных стохастических моделях современного естествознания:

- анализ индуцированных шумом осцилляций в модели течения сложной жидкости;
- исследование стохастической возбудимости и стабилизация в модели проточного химического реактора;
- анализ явления стохастической генерации осцилляций в модели Селькова кинетики гликолиза;
- исследование вероятностных механизмов стохастической возбудимости в непрерывных моделях нейронной активности Фицхью-Нагумо, Юлихера, Ходжкина-Хаксли и дискретных моделях Рулькова;
- анализ вызванных шумами экологических сдвигов и способов их предотвращения в дискретных и непрерывных моделях популяционной динамики;
- анализ вероятностных механизмов нелинейных стохастических явлений в моделях геофизики (динамика климата и вулканическая активность).

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав и заключения. Общий объем диссертации составляет 388 страниц текста, включая 208 рисунков и список использованных источников, содержащий 341 наименования. Логика изложения материала в диссертационной работе построена следующим образом. Общий математический материал и результаты по аппроксимации вероятностных распределений вблизи аттракторов стохастических систем, полученные в первой и второй главе, являются основой для исследования индуцированных шумом явлений в третьей главе и решения задач управления в четвертой главе. Результаты первых четырех глав используются в пятой главе для анализа стохастических явлений в моделях естествознания. В шестой главе содержится описание комплекса разработанных программ.

Во Введении обоснована актуальность научной тематики диссертационной работы, сформулированы ее цель и задачи, отражена научная новизна, приведены основные результаты, выносимые на защиту, дано краткое изложение диссертационной работы, и представлены сведения о достоверности и апробации результатов.

В первой главе развивается математический аппарат анализа вероятностных распределений нелинейных стохастических систем с дискретным временем. В п.1.1 для системы линейного приближения вблизи равновесия исследуется динамика вторых моментов решений и доказывается Теорема 1.1, дающая спектральный критерий существования устойчивого равновесия для этих моментов. Исследуется асимптотика стационарных моментов при малых шумах, строится первое приближение, связанное с матрицей стохастической чувствительности. Здесь устанавливается связь этой матрицы с гауссовскими аппроксимациями плотности распределения вокруг равновесия и доверительными эллипсоидами. В п.1.2 эти результаты распространяются на случай дискретного цикла. В Теореме 1.2 дается спектральный критерий существования устойчивого периодического решения системы вторых моментов, и даются спектральные мажоранты, позволяющие получить конструктивные достаточные условия. Предлагается алгоритм построения этого периодического решения, выводятся явные формулы для одномерного случая. Для малых шумов строятся асимптотические разложения, устанавливается связь с последовательностью матриц, определяющих стохастическую чувствительность элементов дискретного цикла. В п.1.3 теория стохастической чувствительности распространяется на более сложный осцилляционный аттрактор, задаваемый замкнутой инвариантной кривой. Детально разбираются случаи, когда эта кривая состоит из равновесий, дискретных циклов и квазипериодических решений. В п.1.4 развивается теория стохастической чувствительности хаотических аттракторов дискретных систем. Выводятся явные формулы для чувствительности границ однокусочных и многокусочных хаотических аттракторов одномерных систем. Для хаотических аттракторов двумерных систем найдена стохастическая чувствительность границ, полученных с помощью аппарата критических линий. Все теоретические результаты Главы 1 иллюстрируются на примерах.

В Главе 2 представлен соответствующий математический аппарат по аппроксимации вероятностных распределений вокруг равновесий (п.2.1) и циклов (п.2.2) динамических систем, задаваемых стохастическими дифференциальными уравнениями Ито. Здесь результаты, выносимые на защиту, представлены в п.2.1.3, где строится математическая теория стохастической чувствительности равновесия системы с цветными шумами, и в п. 2.2.4, где развивается теория стохастической чувствительности циклов в системах с периодическими возмущениями.

Глава 3 посвящена применению представленного в главах 1, 2 общего математического аппарата по аппроксимации вероятностных распределений вблизи регулярных и хаотических аттракторов систем с дискретным и непрерывным временем к исследованию стохастических переходов и бифуркаций. В п.3.1 излагаются методы анализа индуцированных шумами переходов между сосуществующими аттракторами, как регулярными, так и хаотическими. Показано, как подобные переходы могут быть конструктивно исследованы с помощью аппарата доверительных областей и анализа их взаимного расположения с сепаратрисами, разделяющими бассейны притяжения аттракторов. В п.3.2 исследуются переходы между отдельными фрагментами сложных пространственных аттракторов, порождающие обратные стохастические бифуркации и трансформации от порядка к хаосу. В п.3.3 исследуются феномены стохастической генерации новых аттракторов в зонах возбудимости вблизи касательной бифуркации и бифуркации Андронова-Хопфа. Здесь также проведено детальное исследование нового стохастического явления генерации так называемого фантомного аттрактора, состоящего в сдвиге распределения случайных состояний в зону, где исходная детерминированная система не имеет никаких аттракторов. Это явление иллюстрируется на примере быстро-медленной системы и исследуется аналитически методом «замораживания» медленной переменной.

Глава 4 посвящена решению задач синтеза стохастических режимов в нелинейных динамических системах. Представленные здесь теоретические разработки опираются на результаты глав 1-3. В п.4.1 рассматриваются и решаются задачи построения регуляторов, синтезирующих наперед заданные вероятностные характеристики в дискретных системах. П. 4.1.1 посвящен управлению стохастической чувствительностью равновесия. В Теореме 4.1 дан критерий полной управляемости, а в Теореме 4.2 описано множество достижимых матриц стохастической чувствительности. Эти теоремы содержат явные формулы для коэффициентов регулятора, синтезирующего наперед заданную матрицу стохастической чувствительности. В п.4.1.2 представлены результаты полного анализа достижимости в двумерном случае. В п.4.1.3 представлена теория управления при неполной информации (Теорема 4.3). В п.4.1.4 представлена теория управления стохастической чувствительностью дискретных циклов одномерных систем. П.4.2 посвящен решению задач синтеза стохастических режимов в системах с непрерывным временем. Материал п.4.2.1 по синтезу стохастической чувствительности равновесий в случае полной информации носит обзорный характер и предваряет вынесенные на защиту результаты исследования случая неполной информации из п.4.2.2. Здесь Теорема 4.5. представляет условия достижимости и дает явные формулы параметров статического регулятора, решающего задачу стохастического синтеза. Необходимые условия в задаче минимизации стохастической чувствительности даны в Теореме 4.6. В этом пункте также приводятся результаты по синтезу динамического регулятора, использующего фильтр для зашумленного сигнала. В п.4.2.3 излагается теория управления стохастической чувствительностью предельных циклов. Для циклов на плоскости исследована ситуация, когда задача синтеза стохастической чувствительности становится некорректной. Здесь предлагается конструктивный метод регуляризации. Для синтеза стохастической чувствительности циклов трехмерных систем предлагается подход, использующий технику сингулярных разложений. Конструктивные возможности этого подхода иллюстрируются на примере стабилизации цикла в модели Лоренца. В п.4.2.4 приведены результаты стабилизации стохастически возмущенных равновесных и колебательных режимов нелинейных осцилляторов в рамках новой концепции управления доверительными областями. В п.4.2.5 показано, как общие теоретические результаты по управлению стохастической чувствительностью могут быть использованы в задаче структурной стабилизации и подавления хаоса.

В Главе 5 показано, как теоретические разработки предыдущих глав по методам математического моделирования, анализа и синтеза стохастических режимов в нелинейных системах могут быть использованы в решении актуальных исследовательских задач, относящихся к разным разделам естествознания.

В п.5.1 исследуются стохастические эффекты в модели течения сложной жидкости. Здесь для многомерной дискретизации математической модели с помощью метода блочной декомпозиции построен алгоритм расчета стохастической чувствительности слоев стационарного потока, найдена параметрическая зона с высокой стохастической чувствительностью потока, что объясняет переходы в осцилляционные режимы с большими амплитудами. Для двумерной дискретизации проведен детальный анализ стохастической возбудимости равновесий с помощью метода доверительных областей. Найдена параметрическая зона циклов-канардов, имеющих сверхвысокую стохастическую чувствительность.

В п.5.2 исследуется стохастический вариант модели проточного химического реактора. Здесь с помощью результатов главы 2 выясняются вероятностные механизмы стохастического возбуждения большеамплитудных колебаний. Для подавления этих нежелательных стохастических режимов используются методы управления, разработанные в главе 4.

В п.5.3 исследуется кинетика гликолиза в присутствии случайных возмущений на примере стохастического варианта концептуальной модели Селькова. Здесь представлены результаты исследования стохастической чувствительности равновесных и колебательных режимов, позволяющие прояснить вероятностные механизмы генерации мультимодальных осцилляций и перехода к хаосу.

П.5.4 посвящен приложению представленных главах 1,2,3 диссертации общих теоретических методов стохастического анализа к исследованию индуцированных шумом явлений в нейронной динамике. Здесь рассматриваются дискретные и непрерывные модели, демонстрирующие качественное разнообразие стохастических режимов нейронной активности. В п.5.4.1 для одномерной дискретной модели Рулькова с помощью техники функции стохастической чувствительности изучаются такие стохастические эффекты как обратные стохастические бифуркации, стохастический берстинг, индуцированные шумом переходы «порядок-хаос-порядок», стохастический сдвиг точек бифуркации кризиса. Для двумерной модели Рулькова такой вероятностный анализ проводится вблизи бифуркации Неймарка-Сакера, где локализована параметрическая зона замкнутых инвариантных кривых канардовского типа и исследован эффект стохастического расщепления. В модели Фицхью-Нагумо с непрерывным временем (п.5.4.2) исследуется стохастическая возбудимость под действием белых и цветных шумов, найдено значение времени корреляции, отвечающее резонансу. В п.5.4.3 для модели волоскового пучка, осуществляющего механоэлектрические преобразования звуковых сигналов, изучаются механизмы стохастической возбудимости в параметрических зонах с одним равновесием, двумя равновесиями и сосуществующими равновесием и циклом. Четырехмерная нейронная модель Ходжкина-Хаксли изучается в п.5.4.4, где экспериментально обнаруженная высокая вариативность в стохастических колебаниях смешанных мод, сочетающих малоамплитудные осцилляции и большеамплитудные спайки, исследуется с помощью техники функции стохастической чувствительности, метода главных направлений и метрики Махаланобиса.

В п.5.5 на базе концептуальных моделей популяционной динамики показано, как разработанная математическая теория из глав 1, 2, 3 конструктивно используется в анализе вызванных шумами экологических сдвигов и решении задач предотвращения таких сдвигов с помощью управляющий воздействий. В п.5.5.1 для дискретной популяционной модели Рикера с Олли эффектом с помощью техники функции стохастической чувствительности исследованы переходы с регулярных (равновесных и периодических) и хаотических режимов в зону вымирания, описан процесс сжатия параметрического региона выживания при усилении демографического шума. Для предотвращения индуцированного шумом вымирания построен регулятор обратной связи, обеспечивающий структурную стабилизацию. В п.5.5.2 исследован стохастический вариант модели "хищник-жертва"с Олли эффектом и трофической функцией Холлинга II типа, задаваемой стохастическими дифференциальными уравнениями с параметрическими шумами. Теоретические результаты п.4.2.4 по управлению доверительными областями используются здесь для решения задачи предотвращения индуцированного шумом вымирания. Исследована достижимость и найдены коэффициенты стабилизирующих регуляторов для разной структуры управляющих воздействий. В п. 5.5.3 для модели, описывающей взаимодействие фито- и зоопланктона, со случайными возмущениями размеров экологической ниши с помощью теоретических результатов глав 2,3 исследуются изменения численности популяции, связанные со стохастическими бифуркациями циклов-канардов, переходом к хаосу и генерацией фантомных аттракторов.

П. 5.6 посвящен приложению методов стохастического анализа из глав 2,3 к некоторым процессам из области геофизики. В п. 5.6.1 рассматривается стохастический вариант трехмерной климатической модели Зальцмана, связывающей изменение концентрации углекислого газа в атмосфере с динамикой массы льда и температуры в глубине океана. В этой модели была обнаружена интересная математическая особенность, связывающая анализ климатической динамики с исследованием поведения модели в зоне седло-узловой бифуркации на инвариантной кривой. Здесь для анализа стохастической генерации большеамплитудных осцилляций конструктивно применяется метод доверительных эллипсов в сечениях Пуанкаре, отвечающих главным направлениям. В п.5.6.2 исследуются процессы вулканической активности на основе трехмерной нелинейной динамической модели с переменными, отвечающими за скорость вулканической пробки, давление магмы и объем канала. С помощью методов стохастического анализа, разработанных в диссертации, найдена параметрическая зона, где даже малые случайные возмущения коэффициентов трения в канале вулкана могут вызывать периодически повторяющиеся выбросы магмы значительных объемов.

В Главе 6 дается описание комплекса программ, реализующих разработанные в рамках диссертационного исследования численные процедуры и алгоритмы, позволяющие эффективно применять оригинальные методы моделирования, анализа и управления стохастическими нелинейными динамическими системами. С помощью этого комплекса в диссертации решен широкий круг актуальных исследовательских задач, возникающих в современных разделах естествознания.

В Заключении подведены итоги и сформулированы основные результаты диссертационной работы, даны рекомендации и представлены перспективы дальнейшей разработки темы.

Достоверность и апробация результатов

Достоверность теоретических результатов обеспечивается строгими математическими выводами и доказательствами. Достоверность численных результатов подтверждается их воспроизводимостью, анализом погрешности, сопоставлением результатов, полученных аналитическими и численными методами, совпадением результатов при использовании различных численных методов, соответствием известным из литературы результатам для аналогичных моделей, а также отсутствием противоречий с известными в научной литературе достоверными общепризнанными результатами.

Материалы диссертационной работы использовались при выполнении НИР, проводимых на кафедре теоретической и математической физики и лаборатории многомасштабного математического моделирования Уральского федерального университета, проектов Российского научного фонда (16-11-10095, 16-11-10098), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 00-01-00076, 02-01-96418урал, 04-01-96098урал, 06-01-00625, 06-08-00396, 07-

01-96079-урал, 09-01-00026, 09-08-00048, 10-01-96022урал, 12-01-31210, 13-08-00069, 14-01-00181, 16-08-00388, 20-01-00165), Министерства образования и науки РФ (1.1099.2011, 2.1267.2011, 14.A18.21.0364, 1.849.2017), Уральского математического центра (075-02-2020-1537/1).

Основные результаты диссертации были представлены в форме приглашенных, устных и стендовых докладов на таких международных конференциях как 5th International Conference on Dynamic Systems and Applications (2007, Atlanta); 3rd IFAC Workshop "Periodic Control System" (2007, Санкт-Петербург); 3rd International IEEE Scientific Conference on Physics and Control (2007, Potsdam); 4th International Scientific Conference on Physics and Control (2009, Catania); "Neural, Parallel, and Scientific Computations" (2010, Atlanta); Advanced Workshop on Anderson Localization, Nonlinearity and Turbulence: a Cross-Fertilization (2010, Trieste); 3rd Conference of Computational and Mathematical Population Dynamics (2010, Bordeaux); «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (2008, 2010, Москва); Моделирование, управление и устойчивость» (2012, Севастополь); International Workshop on Chaos-Fractals Theories and Applications (2013, Taiyuan); "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity" (2014, Саратов); XII Всероссийское совещание по проблемам управления (2014, Москва); «Динамика систем и процессы управления» (2014, Екатеринбург); 19th World Congress of the International Federation of Automatic Control (2014, Cape Town); Workshop on Dynamical Systems (2015, Trieste); «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби» (2015, Екатеринбург); International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics (2014, 2015, Rhodes); Multistability and Tipping: From Mathematics and Physics to Climate and Brain (2016, Дрезден); Computational Methods in Sciences and Engineering (2016, Афины); Models in Population Dynamics and Ecology (2017, Cape Town); "Structural and phase transformation in materials: Theory, computer modeling and experiment" (2017, Екатеринбург); 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (2017, Екатеринбург); 5Th International Conference on Complex Dynamical Systems in Life Sciences: Modeling and Analysis (2018, Aveiro); Conference of the Euro-American Consortium for Promoting the Application of Mathematics in Technical and Natural Sciences (2017, 2018, Albena); Applications of Mathematics in Engineering and Economics (2019, Sozopol); Ural Symposium on Biomedical Engineering, Radioelectronics and Information Technology (2020, Екатеринбург).

Результаты работы опубликованы в реферируемых научных журналах, таких как «Автоматика и телемеханика», «Прикладная математика и механика», «Нелинейная динамика», «Компьютерные исследования и моделирование, «Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки», «Physical Review E», «Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science», «Europhysics Letters», «Physics Letters A», « Physica A: Statistical Mechanics and its Applications», «BioMed Research International», «Fluctuation and Noise Letters», «Journal of Difference Equations and Applications, International Journal of Bifurcation and Chaos», «European Physical Journal B», «Tellus A», «Discrete Dynamics in Nature and Society», «International Journal of Applied Mathematics and Computer Science», «International Journal of Control», «Nonlinear Dynamics», «Journal of the Franklin Institute», «Kybernetika», «Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation», «Theoretical Population Biology», «Mathematical Modelling of Natural Phenomena», «Chaos, Solitons and Fractals».

Научный уровень журналов, в которых опубликованы результаты автора, характеризуются следующими показателями. Всего по теме диссертации опубликовано 96 статей. Все они индексируются в базах данных WOS или SCOPUS.

Представленный в диссертации математический аппарат по анализу стохастических явлений в нелинейных системах стал теоретической основой для международного сотрудничества. В ходе совместных исследований опубликовано 17 статей с учеными из Центра Хаоса и Сложных Сетей Университета Гонконга, из Центра Биомедицинских Технологий Технического Университета Мадрида, из Университета Огайо (США), из Интердисциплинарной группы по теоретической физике Университета Палермо (Италия), из Группы Нелинейной динамики, Хаоса и Сложных систем Университета Мадрида. Авторская техника функций стохастической чувствительности и доверительных областей стала основой в исследованиях и других независимых зарубежных ученых в области математической теории нелинейных стохастических систем [176–179], гидродинамики [180, 181], микробиологии [182–184], популяционной динамики [185–187].

Результаты, выносимые на защиту, опубликованы в 49 статьях [188–236]. Все они индексируются в базах данных WOS или SCOPUS, из них 20 опубликованы в журналах, имеющих квартиль Q1. При этом в 13 статьях диссертант является единственным автором.

Результаты, полученные в рамках выполнения настоящей диссертационной работы, частично вошли также в материал трех коллективных монографий.

При выполнении диссертационной работы разработаны алгоритмы и подготовлен комплекс компьютерных программ. На государственную регистрацию были отправлены и получили свидетельства одиннадцать программ [237–247].

Личный вклад. Представленные в диссертации результаты получено автором лично, или при его непосредственном участии. Все результаты, вынесенные на защиту, принадлежат лично соискателю.

Глава 1. Аппроксимация аттракторов дискретных стохастических систем

Рассмотрим нелинейную детерминированную систему с дискретным временем

$$x_{t+1} = f(x_t), \tag{1.0.1}$$

где x – n-мерный вектор, $f(x)$ – достаточно гладкая n-вектор-функция, $t = 0, 1, 2, \ldots$.

Наряду с системой (1.0.1) рассмотрим стохастическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(x_t)\xi_t^i\ , \tag{1.0.2}$$

где $\sigma_i(x)$ – n-вектор-функции, ξ_t^i – независимые скалярные случайные последовательности с параметрами $\mathrm{E}\xi_t^i = 0,\ \mathrm{E}(\xi_t^i)^2 = 1,\ i = 1, ..., m,\ t = 0, 1, ...$ Функции $\sigma_i(x)$ характеризуют зависимость интенсивности случайных воздействий от состояния системы x.

1.1. Равновесие

Пусть система (1.0.1) имеет экспоненциально устойчивое равновесие $\bar{x}$ в некоторой инвариантной окрестности U.

Определение 1.1. Равновесие $\bar{x}$ называется *экспоненциально устойчивым* для системы (1.0.1), если для некоторой окрестности U существуют $K > 0,\ l > 0$ такие, что для всех $t = 1, 2, ...$ выполняется неравенство

$$\|x_t - \bar{x}\| \ \leqslant\ Ke^{-lt}\|x_0 - \bar{x}\|,$$

где x_t – решение системы (1.0.1) с начальным условием $x_0 \in \mathrm{U}$, $\|\cdot\|$ – Евклидова норма.

Под воздействием случайных возмущений стохастические решения системы (1.0.2) покидают детерминированное равновесие $\bar{x}$ и формируют некоторое вероятностное распределение вокруг него. Динамика плотности этого распределения зависит от закона распределения случайных возмущений, поведения функций $f(x)$, $\sigma_i(x)$ и задается функциональным уравнением Перрона-Фробениуса [146, 147], решение которого связано с серьезными техническими трудностями даже в одномерном случае. При малых шумах, когда случайные состояния концентрируются вблизи исходного устойчивого равновесия, основные параметры вероятностного распределения могут быть найдены по локальным характеристикам системы (1.0.2) вблизи равновесия $\bar{x}$.

1.1.1. Система первого приближения и ее моменты

Для отклонений $z = x - \bar{x}$ случайных состояний x системы (1.0.2) от положения равновесия $\bar{x}$ запишем систему первого приближения

$$z_{t+1} = Fz_t + \sum_{i=1}^{m}(S_{0,i} + S_{1,i}z_t)\xi_t^i \quad , \tag{1.1.1}$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S_{0,i} = \sigma_i(\bar{x}), \quad S_{1,i} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x}(\bar{x}).$$

Динамика первых $m_t = \mathrm{E}z_t$ и вторых $M_t = \mathrm{E}z_t z_t^\top$ моментов системы (1.1.1) определяется уравнениями:

$$m_{t+1} = Fm_t, \tag{1.1.2}$$

$$M_{t+1} = FM_tF^\top + \sum_{i=1}^{m}\left(S_{0,i}S_{0,i}^\top + S_{0,i}m_t^\top S_{1,i}^\top + S_{1,i}m_tS_{0,i}^\top + S_{1,i}M_tS_{1,i}^\top\right). \tag{1.1.3}$$

Будем использовать систему (1.1.2),(1.1.3) для аппроксимации вероятностного распределения случайных состояний нелинейной системы (1.0.2) вблизи равновесия $\bar{x}$.

Здесь возникает вопрос, при каких условиях у системы (1.1.2),(1.1.3) существует устойчивое стационарное решение $(\bar{m}, \bar{M})$. Для подсистемы (1.1.2), благодаря экспоненциальной устойчивости $\bar{x}$, $\rho(F) < 1$ ($\rho(F)$ – спектральный радиус матрицы F), и, следовательно, единственным стационарным и устойчивым решением является вектор $\bar{m} = 0$. Подставляя это решение $\bar{m} = 0$ в (1.1.3), получаем уравнение

$$M_{t+1} = FM_tF^\top + \sum_{i=1}^{m}\left(S_{0,i}S_{0,i}^\top + S_{1,i}M_tS_{1,i}^\top\right). \tag{1.1.4}$$

Пусть матрица $\bar{M}$ является стационарным решением уравнения (1.1.4):

$$\bar{M} = F\bar{M}F^\top + \sum_{i=1}^{m} \left(S_{0,i}S_{0,i}^\top + S_{1,i}\bar{M}S_{1,i}^\top\right). \tag{1.1.5}$$

Вычитая (1.1.5) из (1.1.4), получим для отклонений $\Delta_t = M_t - \bar{M}$ однородное уравнение

$$\Delta_{t+1} = F\Delta_t F^\top + \sum_{i=1}^{m} S_{1,i}\Delta_t S_{1,i}^\top. \tag{1.1.6}$$

Это матричное уравнение задает динамику вторых моментов $\Delta_t = \mathrm{E}y_t y_t^\top$ решений y_t линейного однородного стохастического уравнения

$$y_{t+1} = Fy_t + \sum_{i=1}^{m} S_{1,i}y_t\xi_t^i. \tag{1.1.7}$$

Устойчивость стационарного решения $\bar{M}$ уравнения (1.1.4) означает, что $\lim_{t\to\infty} \Delta_t = 0$ при любом Δ_0, что эквивалентно экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения $y = 0$ стохастической системы (1.1.7).

Определение 1.2. Решение $y \equiv 0$ стохастической системы (1.1.7) называется *экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном*, если существуют $K > 0,\ \ l > 0$ такие, что для всех $t = 1, 2, ...$ выполняется неравенство

$$\mathrm{E}\|y_t\|^2 \ \leqslant\ Ke^{-lt}\,\mathrm{E}\|y_0\|^2,$$

где y_t – решение системы (1.1.7) с начальным состоянием y_0.

Теория среднеквадратичной устойчивости линейных дискретных систем вида (1.1.7) достаточно хорошо разработана [14, 248–250].

Рассмотрим пространство $\mathbf{\Sigma}$ симметрических $n\times n$-матриц. Соотношение $V \succeq 0$ означает, что матрица $V \in \mathbf{\Sigma}$ является неотрицательно определенной. Соотношение $V \succ 0$ означает, что матрица $V \in \mathbf{\Sigma}$ является положительно определенной. Для матриц V и W соотношение $V \succeq W$ означает, что $V - W \succeq 0$.

Отметим, что множество $\mathbf{K} = \{V \in \mathbf{\Sigma}|\ V \succeq 0\}$ является телесным и нормальным конусом. Это означает, что множество $\mathbf{K}$ содержит сферу ненулевого радиуса и отношение $V \succeq W$ влечет $\|V\| \geq \|W\|$ (см. [251]).

Оператор $\mathcal{R}$ называется положительным, если для любого $V \in \mathbf{K}$ выполняется неравенство $\mathcal{R}[V] \in \mathbf{K}$. Для операторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{Q}$ соотношение $\mathcal{R} \succeq \mathcal{Q}$ означает, что оператор $\mathcal{R} - \mathcal{Q}$ является положительным.

Рассмотрим матрицу $S_0 = \sum_{i=1}^m S_{0,i}S_{0,i}^\top$ и операторы

$$\mathcal{F}[M] = FMF^\top,\ \ \mathcal{A}[M] = M - FMF^\top,\ \ \mathcal{S}[M] = \sum_{i=1}^m S_{1,i}MS_{1,i}^\top,\ \ \mathcal{P} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}.$$

Отметим, что операторы $\mathcal{F}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{P}$ являются положительными.

Используя эти операторы, уравнения (1.1.4), (1.1.5), (1.1.6) можно переписать в виде:

$$M_{t+1} = \mathcal{F}[M_t] + \mathcal{S}[M_t] + S_0, \tag{1.1.8}$$

$$\mathcal{A}[\bar{M}] = \mathcal{S}[\bar{M}] + S_0, \tag{1.1.9}$$

$$\Delta_{t+1} = \mathcal{F}[\Delta_t] + \mathcal{S}[\Delta_t]. \tag{1.1.10}$$

Существование оператора $\mathcal{A}^{-1} = (I - \mathcal{F})^{-1}$ следует из условия $\rho(F) < 1$ и соотношения $\rho(\mathcal{F}) = \rho^2(F)$.

Справедлива теорема.

Теорема 1.1.

Следующие утверждения эквивалентны:

(а) Система (1.1.8) имеет единственное стационарное экспоненциально устойчивое решение $\bar{M}$, удовлетворяющее (1.1.9);

(б) Решение $\Delta_t \equiv 0$ системы (1.1.10) является экспоненциально устойчивым;

(в) Решение $y \equiv 0$ стохастической системы (1.1.7) является экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном;

(г) $\rho(\mathcal{F} + \mathcal{S}) < 1$;

(д) $\rho(\mathcal{F}) < 1$ и $\rho(\mathcal{P}) < 1$.

Доказательство. Эквивалентность (а), (б) и (в) непосредственно следует из предыдущих рассуждений.

Неравенство (г) является стандартным критерием для утверждения (б).

Из (б) непосредственно следует неравенство $\rho(\mathcal{F}) < 1$ утверждения (д). Докажем теперь, что из (а) следует второе неравенство $\rho(\mathcal{P}) < 1$ из (д).

Рассмотрим $\bar{M}$ – решение уравнения (1.1.9) при некотором $S_0 \succ 0$. Тогда $\bar{M} \succ 0$. Применяя слева оператор $\mathcal{A}^{-1}$ к уравнению (1.1.9), получим

$$\bar{M} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}[\bar{M}] + \mathcal{A}^{-1}[S_0]\ =\ \mathcal{P}[\bar{M}] + \mathcal{A}^{-1}[S_0].$$

Поскольку $\mathcal{A}^{-1}[S_0] = (I - \mathcal{F})^{-1}[S_0] = \sum_{n=1}^\infty \mathcal{F}^n[S_0] \succ 0$, то

$$\bar{M} \succ \mathcal{P}[\bar{M}]. \tag{1.1.11}$$

Оператор $\mathcal{P}$, как произведение положительных операторов $\mathcal{A}^{-1}$ и $\mathcal{S}$, также является положительным. Благодаря нормальности и телесности конуса $\mathbf{K}$ неотрицательно определенных матриц, из неравенства (1.1.11) по теореме 16.7 из [251] следует неравенство $\rho(\mathcal{P}) < 1$.

Докажем, что из (д) следует (г). Пусть $\rho(\mathcal{P}) < 1$. Тогда существует обратный оператор $(I - \mathcal{P})^{-1}$. Легко проверить, что при $S_0 \succ 0$ матрица $\bar{M} = (I - \mathcal{P})^{-1}\mathcal{A}^{-1}[S_0] \succ 0$ удовлетворяет соотношению (1.1.9) и, как следствие, неравенству $\bar{M} \succ (\mathcal{F} + \mathcal{S})[\bar{M}]$. Оператор $\mathcal{F} + \mathcal{S}$ положителен, как сумма положительных операторов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}$. Из последнего неравенства вытекает [251] утверждение (г).

Замечание 1.1. В случае аддитивных шумов, когда функции $\sigma_i(x)$ не зависят от x и, следовательно, оператор $\mathcal{S}$ – нулевой, существование устойчивого стационарного решения уравнения (1.1.8) гарантируется условием $\rho(F) < 1$ устойчивости равновесия $\bar{x}$. Если же интенсивности шумов зависят от состояния $\left(\dfrac{\partial \sigma_i}{\partial x}(\bar{x}) \neq 0\right)$, то просто устойчивости равновесия уже может оказаться недостаточно. Здесь, наряду с $\rho(F) < 1$, требуется выполнения неравенства $\rho(\mathcal{P}) < 1$. При нарушении этого дополнительного условия последовательность вторых моментов, задаваемая системой (1.1.8), будет неограниченно возрастать.

Замечание 1.2. Рассмотрим случай, когда оператор $\mathcal{S}$, характеризующий зависимость шумов от состояния системы, имеет простую структуру:

$$\mathcal{S}[V] = \operatorname{tr}(VG) \cdot Q, \tag{1.1.12}$$

где G и Q – неотрицательно определенные $n \times n$-матрицы. При этом оператор $\mathcal{P}$ действует на матрицу V следующим образом: $\mathcal{P}(V) = \operatorname{tr}(VG) \cdot \mathcal{A}^{-1}[Q]$, а его спектральный радиус имеет простое явное представление:

$$\rho(\mathcal{P}) = \operatorname{tr}(WG), \tag{1.1.13}$$

где матрица $W = \mathcal{A}^{-1}[Q]$ является решением уравнения $W = \mathcal{F}[W] + Q$. В данном случае проверка алгебраического критерия $\rho(\mathcal{P}) < 1$ существенно упрощается.

Оператор $\mathcal{S}$ имеет структуру (1.1.12), например, в случае, когда шумы, зависящие от состояния, входят лишь в одно уравнение системы (1.0.2). Пусть таковым является первое уравнение. В этом случае для оператора $\mathcal{S}$ справедливо представление (1.1.12), где матрицы G и Q имеют элементы:

$$[G]_{l,j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_l}(\bar{x}) \frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_j}(\bar{x}), \qquad [Q]_{1,1} = 1, \;\; [Q]_{l,j} = 0 \; (l \neq 1, j \neq 1).$$

В общем случае операторы вида (1.1.12) могут быть использованы в качестве мажорант. Действительно, благодаря положительности оператора $\mathcal{S}$, из неравенства $V \preceq \mathrm{tr}(V)I$ следует неравенство

$$\mathcal{S}[V] \preceq \mathrm{tr}(V)\mathcal{S}[I] = \mathrm{tr}(V)\sum_{i=1}^{m} S_{1i}S_{1i}^{\top}.$$

Здесь оператор $\bar{\mathcal{S}}[V] = \mathrm{tr}(V)\sum_{i=1}^{m} S_{1i}S_{1i}^{\top}$, играющий роль мажоранты для оператора $\mathcal{S}$, имеет структуру (1.1.12), где $G = I$, $Q = \sum_{i=1}^{m} S_{1i}S_{1i}^{\top}$. Далее, для оператора $\mathcal{P}$ строим мажоранту $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{A}^{-1}\bar{\mathcal{S}}$ и получаем для $\rho(\mathcal{P})$ простую оценку сверху:

$$\rho(\mathcal{P}) \le \rho(\bar{\mathcal{P}}) = \mathrm{tr}(W),$$

где матрица W является решением уравнения $W = \mathcal{F}[W] + \sum_{i=1}^{m} S_{1i}S_{1i}^{\top}$. В итоге неравенство $\mathrm{tr}(W) < 1$ становится простым достаточным условием для утверждений (а), (б), (в), (г) теоремы.

Замечание 1.3. В одномерном случае ($n = 1$) условие $\rho(\mathcal{P}) < 1$ имеет явное параметрическое представление:

$$\rho(\mathcal{P}) = \frac{q_1}{1 - (f'(\bar{x}))^2} < 1$$

и тогда дисперсия

$$M = \frac{q_0}{1 - (f'(\bar{x}))^2 - q_1}, \tag{1.1.14}$$

где

$$q_0 = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2(\bar{x}), \quad q_1 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sigma_i^{'}(\bar{x})\right)^2.$$

Замечание 1.4. Представленные результаты позволяют строить аппроксимацию вероятностного распределения вблизи детерминированного равновесия $\bar{x}$ нелинейной системы (1.0.2) следующим образом. В качестве среднего значения случайных состояний предлагается брать $\bar{x}$, а для ковариационной матрицы этих состояний использовать в качестве приближения матрицу $\bar{M}$ решения системы (1.1.9). При этом гауссовская аппроксимация плотности распределения будет иметь вид:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det\left(\bar{M}\right)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\bar{x})^{\top}\bar{M}^{-1}(x-\bar{x})\right\}.$$

1.1.2. Асимптотика при малых шумах. Стохастическая чувствительность равновесия

Рассмотрим стохастическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} \sigma_i(x_t)\xi_t^i \quad , \tag{1.1.15}$$

где ε – скалярный малый параметр. Для этой системы уравнение (1.1.9), задающее ковариационную матрицу M стационарного решения системы первого приближения (1.1.1), имеет вид

$$\mathcal{A}[M] = \varepsilon^2 \mathcal{S}[M] + \varepsilon^2 S_0.$$

Исследуем зависимость решения $M(\varepsilon)$ этого уравнения от параметра ε. Пусть $W(\varepsilon)$ – решение уравнения

$$\mathcal{A}[W] = \varepsilon^2 \mathcal{S}[W] + S_0. \tag{1.1.16}$$

Тогда $M(\varepsilon) = \varepsilon^2 W(\varepsilon)$. Для $W(\varepsilon)$ можно записать следующее разложение:

$$W(\varepsilon) = (\mathcal{A} - \varepsilon^2 \mathcal{S})^{-1}[S_0] = \left(\mathcal{A}(I - \varepsilon^2 \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S})\right)^{-1}[S_0] =$$
$$= \left(I - \varepsilon^2 \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}\right)^{-1} \mathcal{A}^{-1}[S_0] = \left(I - \varepsilon^2 \mathcal{P}\right)^{-1}[W(0)].$$

Отсюда при малом ε выполняется

$$W(\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m} \mathcal{P}^m[W(0)] = W(0) + \varepsilon^2 \mathcal{P}[W(0)] + \varepsilon^4 \mathcal{P}^2[W(0)] + \ldots$$

В результате, для матричной функции $M(\varepsilon)$ получаем разложение по степеням малого параметра

$$M(\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m+2} \mathcal{P}^m[W(0)] = \varepsilon^2 W(0) + \varepsilon^4 \mathcal{P}[W(0)] + \varepsilon^6 \mathcal{P}^2[W(0)] \ldots$$

Матрица $W(0)$, присутствующая в этом разложении, играет важную роль в асимптотическом анализе разброса случайных состояний вокруг равновесия. В силу равенства $W(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} M(\varepsilon)$, эта матрица характеризует стохастическую чувствительность к воздействию малых шумов. Таким образом, в первом приближении

$$M(\varepsilon) \approx \varepsilon^2 W, \tag{1.1.17}$$

где матрица стохастической чувствительности W является решением уравнения

$$W = FWF^{\top} + S_0. \tag{1.1.18}$$

Если шумы в системе (1.1.15) не зависят от состояния, то $\mathcal{P} = 0$ и первое приближение совпадает с точным значением: $M(\varepsilon) = \varepsilon^2 W$. В общем случае использование W в качестве аппроксимации для $M(\varepsilon)$ приводит к занижению оценки ковариации разброса. Действительно, в силу положительности оператора $\mathcal{P}$, справедливо неравенство $M(\varepsilon) \succ \varepsilon^2 W$.

В одномерном случае стохастическая чувствительность равновесия $\bar{x}$ для системы (1.1.15) задается формулой

$$W = \frac{\sum_{i=1}^m \sigma_i^2(\bar{x})}{1 - (f'(\bar{x}))^2}. \tag{1.1.19}$$

Пример 1.1.

Для иллюстрации представленной выше общей теории по аппроксимации разброса вокруг равновесия, рассмотрим следующую простую динамическую систему

$$x_{t+1} = ax_t + \varepsilon(\sigma_1 \xi_t^1 + \sigma_2 x_t \xi_t^2),$$

где $a,\ \sigma_1,\ \sigma_2$ – неотрицательные параметры, ε – интенсивность случайных возмущений, $\xi_t^1,\ \xi_t^2$ – независимые скалярные случайные последовательности с параметрами $\mathrm{E}\xi_t^i = 0,\ \mathrm{E}(\xi_t^i)^2 = 1, t = 0, 1, ...$ Величины σ_1 и σ_2 задают веса аддитивных и мультипликативных возмущений.

При $a < 1$ соответствующая детерминированная система (при $\varepsilon = 0$) имеет экспоненциально устойчивое равновесие $\bar{x} = 0$. Вторые моменты $M_t = \mathrm{E}(x_t - \bar{x})^2$ отклонений решений x_t от равновесия удовлетворяют уравнению

$$M_{t+1} = a^2 M_t + \varepsilon^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 M_t),$$

имеющему стационарное решение

$$M(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 \sigma_1^2}{1 - a^2 - \varepsilon^2 \sigma_2^2}.$$

Следуя представленной выше общей теории, для $M(\varepsilon)$ при малых шумах можно записать асимптотику

$$M(\varepsilon) = \varepsilon^2 W + O(\varepsilon^4),$$

где W – величина, характеризующая стохастическую чувствительность равновесия $\bar{x}$. Эта величина удовлетворяет уравнению (1.1.18)

$$W = a^2 W + \sigma_1^2.$$

Величина W позволяет для функции $M(\varepsilon)$ записать первое приближение

$$M^{(1)}(\varepsilon) = \varepsilon^2 W = \frac{\varepsilon^2 \sigma_1^2}{1 - a^2}.$$

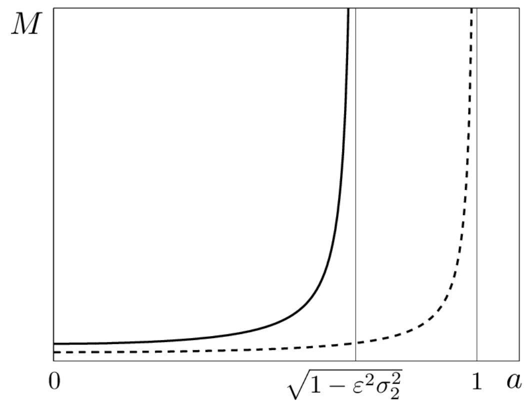


Рис. 1.1.1 – Графики стационарных вторых моментов M (сплошная линия) и их аппроксимации $M^{(1)}$ (пунктир).

Формально, аппроксимация $M^{(1)}(\varepsilon)$ определена при любых $0 \leqslant a < 1$, в то время как аппроксимируемая функция $M(\varepsilon)$ определена только для $0 \leqslant a < \sqrt{1-\varepsilon^2\sigma_2^2}$. В отсутствие мультипликативных шумов ($\sigma_2 = 0$), функции $M^{(1)}$ и M тождественно совпадают. При $\sigma_2 \neq 0$ они отличаются.

Это отличие хорошо видно на рис. 1.1.1, где представлены графики функций M (сплошная линия) и $M^{(1)}$ (пунктир) при изменении параметра a. Во-первых, аппроксимация $M^{(1)}$ всегда меньше M (это было выше показано и в общем случае). Во-вторых, на интервале $\sqrt{1-\varepsilon^2\sigma_2^2} \leqslant a < 1$, где аппроксимация дает конечные значения, исходная функция вообще не определена – вторые моменты M_t стремятся к бесконечности. На интервале $0 \leqslant a < \sqrt{1-\varepsilon^2\sigma_2^2}$ ошибка аппроксимации монотонно возрастает и стремится к бесконечности при приближении к бифуркационному значению $a_* = \sqrt{1-\varepsilon^2\sigma_2^2}$. Для относительной погрешности здесь можно написать явное представление

$$\left|\frac{M - M^{(1)}}{M}\right| = \varepsilon^2 \frac{\sigma_2^2}{1-a^2}.$$

Представленная в этом разделе техника оценки вторых моментов случайных состояний вокруг равновесия, учитывающая производные интенсивностей параметрических шумов, была применена в [205] к исследованию стохастических переходов в популяционной модели Рикера с Олли эффектом.

1.1.3. Аппроксимация стационарного распределения. Доверительные области

В случае n-мерной гауссовской случайной величины со средним m и ковариацией M плотность распределения $p(x)$ случайных состояний имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det M}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-m, M^{-1}(x-m))}{2}\right).$$

Используя приближение (1.1.17) вблизи $\bar{x}$, для $p(x)$ можно записать параметрическую аппроксимацию

$$p(x,\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\varepsilon^2)^n \,\mathrm{det} W}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\bar{x}, W^{-1}(x-\bar{x}))}{2\varepsilon^2}\right).$$

Для наглядного геометрического описания разброса случайных состояний вокруг равновесия $\bar{x}$ удобно использовать доверительные области в форме эллипсоидов [252, 253].

В общем случае формула доверительного n-мерного эллипсоида имеет вид:

$$\big(x-\bar{x}, W^{-1}(x-\bar{x})\big) = \varepsilon^2 K(P), \tag{1.1.20}$$

где P – доверительная вероятность. Величина $\frac{1}{\varepsilon^2}(x-\bar{x})^\top W^{-1}(x-\bar{x})$ для x, распределенного по нормальному закону, имеет стандартное χ^2-распределение с n степенями свободы. Функция $K(P)$ является обратной к функции $P(K)$, задаваемой формулой

$$P(K) = \frac{\Phi_n(K)}{\Phi_n(\infty)}, \qquad \Phi_n(K) = \int\limits_0^{\sqrt{K}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, t^{n-1} dt.$$

В одномерном случае ($n = 1$),

$$P(K) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\sqrt{K}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{K}{2}}\right), \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x} e^{-t^2} dt,$$

и соответствующий доверительный интервал имеет вид

$$(\bar{x}-r, \bar{x}+r), \quad r = \varepsilon\sqrt{2W}\,\mathrm{erf}^{-1}(P), \tag{1.1.21}$$

где стохастическая чувствительность W вычисляется по формуле (1.1.19). В частности, при использовании стандартного правила "трех сигм"следует брать $r = 3\varepsilon\sqrt{W}$.

В двумерном случае ($n = 2$),

$$P(K) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{K}{2}}, \qquad K(P) = -2\ln(1-P),$$

а уравнение доверительного эллипса можно записать в канонической форме

$$\frac{z_1^2}{\mu_1} + \frac{z_2^2}{\mu_2} = \varepsilon^2 K(P), \tag{1.1.22}$$

где

$$z_1 = (x-\bar{x}, v_1), \quad z_2 = (x-\bar{x}, v_2).$$

Здесь μ_1, μ_2 – собственные числа, а $v_1 = (v_{11}, v_{12})^\top$, $v_2 = (v_{21}, v_{22})^\top$ – нормированные собственные векторы матрицы стохастической чувствительности W. Эти векторы определяют направления осей доверительного эллипса, а μ_1, μ_2 задают величины полуосей. Фазовые координаты x_1 и x_2 этого доверительного эллипса можно записать параметрически:

$$x_1 = \bar{x}_1 + \frac{z_1 v_{22} - z_2 v_{12}}{v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21}}, \quad x_2 = \bar{x}_2 + \frac{z_2 v_{11} - z_1 v_{21}}{v_{11} v_{22} - v_{12} v_{21}},$$

$$z_1(\varphi) = \sqrt{2\mu_1} c \cos\varphi, \quad z_2(\varphi) = \sqrt{2\mu_2} c \sin\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

В трехмерном случае ($n = 3$),

$$P(K) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int\limits_0^{\sqrt{K}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt - \sqrt{K} e^{-\frac{K}{2}} \right] = \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{K}{2}} \right) - \sqrt{\frac{2K}{\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{K}{2}}.$$

Уравнение соответствующего доверительного эллипсоида имеет вид

$$\frac{z_1^2}{\mu_1} + \frac{z_2^2}{\mu_2} + \frac{z_3^2}{\mu_3} = \varepsilon^2 K(P), \tag{1.1.23}$$

где μ_1, μ_2, μ_3 – собственные числа, v_1, v_2, v_3 – нормированные собственные векторы матрицы стохастической чувствительности W, а $z_1 = (x - \bar{x}, v_1)$, $z_2 = (x - \bar{x}, v_2)$, $z_3 = (x - \bar{x}, v_3)$.

Для $n = 4$ имеем $P(K) = 1 - e^{-\frac{K}{2}} \left(1 + 0.5K\right)$.

Отметим, что уравнение эллипсоида (1.1.20) может быть переписано в виде

$$d_M^2(x, \bar{x}) = \varepsilon^2 K(P),$$

где

$$d_M(x, \bar{x}) = \sqrt{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}.$$

Функция $d_M(x, \bar{x})$ в математической статистике известна как метрика Махаланобиса [254]. Множество точек, лежащих на поверхности доверительного эллипсоида (1.1.20), можно трактовать как точки, равноудаленные от $\bar{x}$ в метрике Махаланобиса.

Впервые матрица стохастической чувствительности равновесия дискретной системы была введена в работе [149]. Более общие теоретические результаты раздела 1.1 опубликованы в работах [197, 205, 220] автора диссертации.

1.2. Цикл

Рассмотрим случай, когда детерминированная система (1.0.1) имеет экспоненциально устойчивый k-цикл Γ. Точки множества $\Gamma = \{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k\}$ связаны равенствами

$$f(\bar{x}_i) = \bar{x}_{i+1} \ \ (i = 1, ..., k-1), \ \ f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1.$$

Последовательность $\bar{x}_t$ определена для всех t благодаря условию периодичности $\bar{x}_{t+k} = \bar{x}_t$.

Предполагается, что k-цикл Γ является экспоненциально устойчивым в некоторой инвариантной окрестности U.

Определение 1.3. k-цикл Γ называется *экспоненциально устойчивым* для системы (1.0.1), если для некоторой окрестности U существуют константы $K > 0$, $l > 0$ такие, что для всех $t = 1, 2, ...$ выполняется неравенство

$$\|\Delta(x_{t+1})\| \ \leqslant \ Ke^{-lt} \, \|\Delta(x_0)\|$$

для любого $x_0 \in U$. Здесь $\Delta(x) = x - \gamma(x)$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма, $\Delta(x)$ – вектор отклонения точки x от Γ. Для любого $x \in$ U функция $\gamma(x) = \mathrm{argmin}_{y \in \Gamma} \|x - y\|$ определяет точку цикла Γ, ближайшую к x.

Необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости цикла Γ является неравенство [255]

$$\rho(F_k \cdot ... \cdot F_2 \cdot F_1) < 1, \ \ F_i = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_i). \tag{1.2.1}$$

1.2.1. Система первого приближения и ее моменты

Для отклонений $z_t = x_t - \bar{x}_t$ случайных состояний x_t стохастической системы (1.0.2) от точек $\bar{x}_t$ детерминированного цикла Γ системы (1.0.1) можно записать систему первого приближения

$$z_{t+1} = F_t z_t + \sum_{i=1}^{m} (S_{0,i,t} + S_{1,i,t} z_t) \xi_t^i \quad , \tag{1.2.2}$$

где параметры

$$F_t = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_t), \ \ S_{0,i,t} = \sigma_i(\bar{x}_t), \ \ S_{1,i,t} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x}(\bar{x}_t)$$

являются k-периодическими функциями.

Динамика первых $m_t = \mathrm{E} z_t$ и вторых $M_t = \mathrm{E} z_t z_t^\top$ моментов системы (1.2.2) определяется уравнениями:

$$m_{t+1} = F_t m_t, \tag{1.2.3}$$

$$M_{t+1} = F_t M_t F_t^\top + \sum_{i=1}^{m} \left(S_{0,i,t} S_{0,i,t}^\top + S_{0,i,t} m_t^\top S_{1,i,t}^\top + S_{1,i,t} m_t S_{0,i,t}^\top + S_{1,i,t} M_t S_{1,i,t}^\top \right). \tag{1.2.4}$$

Будем использовать систему (1.2.3),(1.2.4) для аппроксимации устойчивого стационарного распределения случайных состояний нелинейной системы (1.0.2) вблизи точек k-цикла $\Gamma = \{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k\}$.

Выясним условия существования устойчивого k-периодического решения $(\bar{m}_t, \bar{M}_t)$ системы (1.2.3),(1.2.4).

Для подсистемы (1.2.3), благодаря экспоненциальной устойчивости k-цикла Γ, выполняется неравенство (1.2.1) и, следовательно, при любом начальном значении m_0 имеем $\lim_{t\to\infty} m_t = 0$.

Подставляя решение $\bar{m}_t \equiv 0$ в (1.2.4), получаем уравнение

$$M_{t+1} = F_t M_t F_t^\top + \sum_{i=1}^{m} \left(S_{0,i,t} S_{0,i,t}^\top + S_{1,i,t} M_t S_{1,i,t}^\top \right). \tag{1.2.5}$$

Пусть матрица $\bar{M}_t$ является k-периодическим решением уравнения (1.2.5). Для исследования его устойчивости рассмотрим отклонения $\Delta_t = M_t - \bar{M}_t$ произвольного решения M_t системы (1.2.5) от $\bar{M}_t$. Для последовательности матриц Δ_t справедливо линейное однородное уравнение

$$\Delta_{t+1} = F_t \Delta_t F_t^\top + \sum_{i=1}^{m} S_{1,i,t} \Delta_t S_{1,i,t}^\top. \tag{1.2.6}$$

Это матричное уравнение задает динамику вторых моментов $\Delta_t = \mathrm{E} y_t y_t^\top$ решений y_t линейного однородного стохастического уравнения

$$y_{t+1} = F_t y_t + \sum_{i=1}^{m} S_{1,i,t} y_t \xi_t^i. \tag{1.2.7}$$

Экспоненциальная устойчивость k-периодического решения $\bar{M}_t$ уравнения (1.2.5) означает, что $\lim_{t\to\infty} \Delta_t = 0$ при любом Δ_0. Это эквивалентно экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения $y = 0$ стохастической системы (1.2.7).

Определение 1.4. Решение $y \equiv 0$ стохастической системы (1.2.7) называется *экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном*, если существуют $K > 0,\ l > 0$ такие, что для всех $t = 1, 2, ...$ выполняется неравенство

$$\mathrm{E}\|y_t\|^2 \leqslant Ke^{-lt}\, \mathrm{E}\|y_0\|^2,$$

где y_t – решение системы (1.2.7) с начальным состоянием y_0.

Основные результаты по среднеквадратичной устойчивости линейных дискретных систем с периодическими коэффициентами представлены в [18, 256, 257].

Рассмотрим k-периодические последовательности матриц

$$S_{0,t} = \sum_{i=1}^{m} S_{0,i,t} S_{0,i,t}^{\top}$$

и операторов

$$\mathcal{F}_t[M] = F_t M F_t^{\top}, \quad \mathcal{S}_t[M] = \sum_{i=1}^{m} S_{1,i,t} M S_{1,i,t}^{\top}, \quad \mathcal{B}_t = \mathcal{F}_t + \mathcal{S}_t.$$

Обозначим

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}_2 \cdot \mathcal{F}_1, \quad \mathcal{A} = \mathcal{I} - \mathcal{F}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{B}_2 \cdot \mathcal{B}_1,$$

где $\mathcal{I}$ – тождественный оператор. Далее мы будем использовать разложение

$$\mathcal{B} = \mathcal{F} + \mathcal{S},$$

где

$$\mathcal{S} = (\mathcal{F}_k + \mathcal{S}_k) \cdot \ldots \cdot (\mathcal{F}_1 + \mathcal{S}_1) - \mathcal{F}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}_1 =$$

$$= \mathcal{F}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}_2 \mathcal{S}_1 + \mathcal{F}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{S}_2 \mathcal{F}_1 + \ldots + \mathcal{S}_k \cdot \mathcal{F}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}_1 + \ldots + \mathcal{S}_k \cdot \mathcal{S}_{k-1} \cdot \ldots \cdot \mathcal{S}_1.$$

Если $\rho(\mathcal{F}) < 1$, то существует оператор $\mathcal{P} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}$.

Отметим, что операторы $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{S}_i$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{S}$ и $\mathcal{P}$ являются положительными.

Уравнения (1.2.5), (1.2.6) можно переписать в операторном виде:

$$M_{t+1} = \mathcal{B}_t[M_t] + S_{0,t}, \tag{1.2.8}$$

$$\Delta_{t+1} = \mathcal{B}_t[\Delta_t]. \tag{1.2.9}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.

Следующие утверждения эквивалентны:

(а) Система (1.2.8) имеет единственное k-периодическое экспоненциально устойчивое решение $\bar{M}_t$;

(б) Решение $\Delta_t \equiv 0$ системы (1.2.9) является экспоненциально устойчивым;

(в) Решение $y \equiv 0$ стохастической системы (1.2.7) является экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном;

(г) $\rho(\mathcal{B}) < 1$;

(д) $\rho(\mathcal{F}) < 1$ и $\rho(\mathcal{P}) < 1$.

Доказательство.

Докажем, что из (а) следует (б).

Пусть Δ_t – произвольное решение системы (1.2.9) и $\bar{M}_t$ – k-периодическое решение системы (1.2.8). Тогда $M_t = \bar{M}_t + \Delta_t$ также является решением (1.2.8). Благодаря (а), M_t экспоненциально стремится к $\bar{M}_t$, следовательно Δ_t экспоненциально стремится к нуля.

Докажем, что из (б) следует (а).

Из (б) следует, что $\Delta_t \equiv 0$ является единственным k-периодическим решением однородной линейной системы (1.2.9). Это означает, что неоднородная линейная системы (1.2.8) имеет единственное k-периодическое решение $\bar{M}_t$. Экспоненциальная устойчивость $\bar{M}_t$ следует из утверждения (б).

Докажем эквивалентность (б) и (в).

Пусть y_t – решение стохастической системы (1.2.7) и $\Delta_t = \mathrm{E} y_t y_t^\top$.

Отметим, что для любой симметрической неотрицательно определенной $n \times n$-матрицы Δ выполняется неравенство:

$$\frac{1}{n}\mathrm{tr}\Delta \leqslant \|\Delta\| \leqslant \mathrm{tr}\Delta.$$

Из этого неравенства и соотношения $\mathrm{E}\|y_t\|^2 = \mathrm{tr}\Delta_t$ следует, что

$$\frac{1}{n}\mathrm{E}\|y_t\|^2 \leqslant \|\Delta_t\| \leqslant \mathrm{E}\|y_t\|^2 \leqslant n\|\Delta_t\|.$$

Из этих неравенств следует эквивалентность (б) и (в).

Докажем эквивалентность (б) и (г).

Оператор $\mathcal{B}$ является оператором монодромии системы (1.2.9). Действительно, для подпоследовательности $\Delta_1, \Delta_{k+1}, \ldots, \Delta_{kl+1}, \ldots$ произвольного решения системы (1.2.9) имеем

$$\Delta_{kl+1} = \mathcal{B}^l[\Delta_1].$$

Следовательно, неравенство (г) является необходимым и достаточным условием для (б).

Докажем, что из (г) следует (д).

Из условия (г) следует существование положительного оператора $(\mathcal{I} - \mathcal{B})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{B}^i$ и матрицы $M = (\mathcal{I} - \mathcal{B})^{-1}[I] \succ 0$, удовлетворяющей уравнению

$$M - \mathcal{F}[M] = \mathcal{S}[M] + I.$$

Благодаря положительности оператора $\mathcal{S}$, получаем $\mathcal{S}[M]+I \succ 0$ и $M \succ \mathcal{F}[M]$. Следуя теории положительных операторов [251], из соотношения $M \succ \mathcal{F}[M]$ следует неравенство $\rho(\mathcal{F}) < 1$ и существование положительного оператора $\mathcal{A}^{-1}$. При этом $M = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}[M] + \mathcal{A}^{-1}[I] = \mathcal{P}[M] + \mathcal{A}^{-1}[I]$.

Неравенство $\mathcal{A}^{-1}[I] \succ 0$ влечет $M \succ \mathcal{P}[M]$, что по теореме 16.7 из [251] означает $\rho(\mathcal{P}) < 1$.

Докажем, что из (д) следует (г).

Из (д) следует существование положительных операторов $\mathcal{A}^{-1}$, $(\mathcal{I} - \mathcal{P})^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}^i$ и матрицы $N = (\mathcal{I} - \mathcal{P})^{-1}\mathcal{A}^{-1}[I] \succ 0$, удовлетворяющей соотношениям

$$N - \mathcal{P}[N] = N - \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}[N] = \mathcal{A}^{-1}[I].$$

Умножив это соотношение на $\mathcal{A}$ слева, получим

$$\mathcal{A}[N] - \mathcal{S}[N] = N - \mathcal{F}[N] - \mathcal{S}[N] = N - \mathcal{B}[N] = I \succ 0.$$

В итоге, равенство $N - \mathcal{B}[N] = I \succ 0$ влечет $\rho(\mathcal{B}) < 1$.

Теорема 1.2 доказана.

Замечание 1.5. В случае аддитивных шумов, когда функции $\sigma_i(x)$ не зависят от x, операторы $\mathcal{S}_t$ и $\mathcal{S}$ – нулевые. При этом $\mathcal{B} = \mathcal{F}$, $\rho(\mathcal{B}) = \rho^2(F)$ и условие (г) Теоремы 1.2 совпадает с условием (1.2.1) экспоненциальной устойчивости детерминированного цикла. Таким образом, в случае аддитивных шумов, существование k-периодического решения уравнения (1.2.8) гарантируется условием (1.2.1).

В общем случае функции $\sigma_i(x)$ зависят от x и $\mathcal{B} \succeq \mathcal{F}$, поэтому условие (1.2.1) экспоненциальной устойчивости детерминированного цикла не гарантирует выполнение (а)-(г). В этих обстоятельствах следует учитывать дополнительное требование (см. (д)) в форме неравенства $\rho(\mathcal{P}) = \rho(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}) < 1$. Это неравенство можно рассматривать как ограничение на параметрические шумы.

Замечание 1.6. Спектральный радиус $\rho(\mathcal{P})$ играет важную роль в бифуркационном анализе стохастических систем.

Действительно, рассмотрим систему

$$y_{t+1} = F_t y_t + \varepsilon \sum_{i=1}^{m} S_{1,i,t} y_t \xi_t^i \tag{1.2.10}$$

со скалярным коэффициентом $\varepsilon > 0$ интенсивности параметрического шума. Для этой системы $\mathcal{P}(\varepsilon) = \varepsilon^2\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}$. Пусть $\rho(\mathcal{F}) < 1$. Второе неравенство

$\rho(\mathcal{P}(\varepsilon)) < 1$ в утверждении (д) Теоремы 1.2 здесь будет означать, что

$$\varepsilon^2\rho(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}) < 1.$$

Если $\rho(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}) = 0$, то в силу утверждения (в) Теоремы 1.2, решение $y \equiv 0$ системы (1.2.10) является экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном при всех ε.

Если $\rho(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}) \neq 0$, то значение $\varepsilon_* = \frac{1}{\sqrt{\rho(\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S})}}$ будет точкой бифуркации: решение $y \equiv 0$ системы (1.2.10) является экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном для $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ и неустойчивым при $\varepsilon > \varepsilon_*$.

1.2.2. Спектральные мажоранты

По Теореме 1.2, спектральные неравенства (г),(д) дают необходимые и достаточные условия для (а),(б) и (в). Однако в общем случае весьма сложно найти точные значения спектральных радиусов $\rho(\mathcal{B})$ и $\rho(\mathcal{P})$. Поэтому для решения практических задач важным направлением является построение параметрических мажорант, дающих простые достаточные условия.

Лемма 1.1. Для оператора $\mathcal{Q}[M] = QMQ^\top$ выполняются следующие неравенства

$$\|\mathcal{Q}\| \leqslant \|Q\|^2; \tag{1.2.11}$$

$$\mathcal{Q} \preceq \bar{\mathcal{Q}}, \quad \bar{\mathcal{Q}}[M] = \mathrm{tr}(M)QQ^\top. \tag{1.2.12}$$

Доказательство. Неравенство (1.2.11) следует из свойств матричных норм. Неравенство (1.2.12) следует из неравенства

$$M \preceq \mathrm{tr}(M)I, \quad M \in \mathbf{K}$$

и положительности оператора $\mathcal{Q}$.

Теорема 1.3.

Для спектральных радиусов $\rho(\mathcal{B})$ и $\rho(\mathcal{P})$ операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{P}$ выполняются неравенства:

$$\rho(\mathcal{B}) \leqslant \prod_{t=1}^{k} \left(\|F_t\|^2 + \|S_t\|\right) \tag{1.2.13}$$

$$\rho(\mathcal{P}) \leqslant \rho(\bar{\mathcal{P}}), \tag{1.2.14}$$

где

$$\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{A}^{-1}\bar{\mathcal{S}}, \quad \bar{\mathcal{S}} = (\mathcal{F}_k + \bar{\mathcal{S}_k}) \cdot \ldots \cdot (\mathcal{F}_1 + \bar{\mathcal{S}_1}) - \mathcal{F}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}_1,$$

$$\bar{\mathcal{S}}_t[M] = \mathrm{tr}(M) S_t, \quad S_t = \sum_{i=1}^{m} S_{1,i,t} S_{1,i,t}^{\top}. \tag{1.2.15}$$

Доказательство. Неравенство (1.2.13) следует из неравенств (1.2.11) и $\rho(\mathcal{B}) \leqslant \|\mathcal{B}\|$.

Из (1.2.12) следует, что величины $\bar{\mathcal{S}}_t$, $\bar{\mathcal{S}}$, $\bar{\mathcal{P}}$ являются мажорантами для $\mathcal{S}_t$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{P}$ соответственно: $\mathcal{S}_t \preceq \bar{\mathcal{S}}_t, \quad \mathcal{S} \preceq \bar{\mathcal{S}}, \quad \mathcal{P} \preceq \bar{\mathcal{P}}$. Следуя теории положительных операторов [251], получим (1.2.14).

Лемма 1.2. Пусть $\mathcal{P} = \mathcal{D}\mathcal{S}$, где $\mathcal{D}$ – положительный оператор и $\mathcal{S}[M] = \mathrm{tr}[M]Q$, $Q \in \mathbf{K}$. Тогда выполняется

$$\rho(\mathcal{P}) = \mathrm{tr}\left(\mathcal{D}[Q]\right).$$

Доказательство.

Пусть V – собственный вектор оператора $\mathcal{P}$ для собственного значения $\rho(\mathcal{P})$. Тогда $\mathcal{P}[V] = \mathrm{tr}(V)\mathcal{D}[Q] = \rho(\mathcal{P})V$, и следовательно $\rho(\mathcal{P}) = \mathrm{tr}\left(\mathcal{D}[Q]\right)$.

Замечание 1.7. Благодаря (1.2.13),(1.2.14), неравенства

$$\prod_{t=1}^{k} \left(\|F_t\|^2 + \|S_t\|\right) < 1 \tag{1.2.16}$$

$$\rho(\bar{\mathcal{P}}) < 1 \tag{1.2.17}$$

являются достаточными условиями для (а),(б) и (в) Теоремы 1.2.

Условие (1.2.16) выглядит гораздо более простым, чем (1.2.17). Однако во многих случаях мажоранта в (1.2.13) является завышенной и достаточное условие (1.2.16) становится бесполезным. Например, вопреки факту $\rho(F_k \cdot \ldots \cdot F_1) < 1$, может быть $\prod_{t=1}^{k} \|F_t\| > 1$. В этом случае достаточное условие (1.2.16) никогда не выполняется и конструктивная оценка допустимых значений интенсивности параметрического шума может быть все-таки получена из (1.2.17).

Эти оценки могут быть гораздо более простыми, если для оператора $\mathcal{P}$ использовать мажоранту $\bar{\mathcal{P}} = \mathcal{A}^{-1}\bar{\mathcal{S}}$ с $\bar{\mathcal{S}}[M] = \mathrm{tr}(M)Q$. В этом случае спектральный радиус мажорантного оператора $\bar{\mathcal{P}}$ легко вычисляется (см. Лемму 1.2).

Мажоранты для 2-цикла

В случае 2-цикла, для мажорантного оператора $\bar{\mathcal{S}}$ в (1.2.15) справедливо

$$\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{F}_2\bar{\mathcal{S}}_1 + \bar{\mathcal{S}}_2\mathcal{F}_1 + \bar{\mathcal{S}}_2\bar{\mathcal{S}}_1 \preceq \mathrm{tr}(M)Q,$$

где

$$Q = F_2 S_1 S_1^\top F_2^\top + \mathrm{tr}(F_1 F_1^\top) S_2 S_2^\top + \mathrm{tr}(S_1 S_1^\top) S_2 S_2^\top.$$

Поэтому, в силу Теоремы 1.3 и Леммы 1.2, мы имеем

$$\rho(\mathcal{P}) \leqslant \mathrm{tr}\left(\mathcal{A}^{-1}[Q]\right).$$

Таким образом, неравенство $\mathrm{tr}\left(\mathcal{A}^{-1}[Q]\right) < 1$ дает достаточное условие для утверждений (а),(б) и (в) Теоремы 1.2.

1.2.3. Алгоритм построения периодического решения

Для вычисления устойчивого k-периодического решения $\bar{M}_t$ системы (1.2.8) (см. также утверждение (а) Теоремы 1.2) предлагается следующая процедура.

В силу периодичности, для $\bar{M}_t$ справедливы соотношения:

$$\bar{M}_1 = \mathcal{B}_k[\bar{M}_k] + S_{0,k} = \mathcal{B}_k\left[\mathcal{B}_{k-1}[\bar{M}_{k-1}] + S_{0,k-1}\right] + S_{0,k} = \ldots$$
$$= \mathcal{B}_k \cdot \cdots \cdot \mathcal{B}_2 \cdot \mathcal{B}_1[\bar{M}_1] + \mathcal{B}_k \cdot \cdots \cdot \mathcal{B}_2[S_{0,1}] + \cdots + \mathcal{B}_k[S_{0,k-1}] + S_{0,k}.$$

Таким образом, матрица $\bar{M}_1$ множества $\left\{\bar{M}_1, \bar{M}_2, \ldots \bar{M}_k\right\}$ значений k-периодического решения системы (1.2.8) удовлетворяет уравнению

$$\bar{M}_1 = \mathcal{B}[\bar{M}_1] + Q, \tag{1.2.18}$$

где

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{B}_2 \cdot \mathcal{B}_1, \quad Q = \mathcal{B}_k \cdot \ldots \cdot \mathcal{B}_2[S_{0,1}] + \cdots + \mathcal{B}_k[S_{0,k-1}] + S_{0,k}.$$

Благодаря условию (г) Теоремы 1.2, выполняется неравенство $\rho(\mathcal{B}) < 1$, в силу которого система (1.2.18) имеет единственное решение $\bar{M}_1$.

Остальные матрицы $\bar{M}_2, \ldots, \bar{M}_k$ находятся рекуррентно:

$$\bar{M}_2 = \mathcal{B}_1[\bar{M}_1] + S_{0,1},\ \ldots, \bar{M}_k = \mathcal{B}_{k-1}[\bar{M}_{k-1}] + S_{0,k-1}.$$

Случай 2-цикла.

Элементы 2-цикла $\Gamma = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ связаны уравнениями

$$f(\bar{x}_1) = \bar{x}_2,\ f(\bar{x}_2) = \bar{x}_1.$$

Разброс случайных состояний стохастической системы (1.0.2) вокруг точек $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ задается матрицами $\bar{M}_1$ и $\bar{M}_2$. Матрица $\bar{M}_1$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{M}_1 = \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1[\bar{M}_1] + \mathcal{B}_2[S_{0,1}] + S_{0,2}. \tag{1.2.19}$$

Матрица $\bar{M}_2$ может быть найдена из явной формулы:

$$\bar{M}_2 = \mathcal{B}_1[\bar{M}_1] + S_{0,1}. \tag{1.2.20}$$

1.2.4. Анализ циклов стохастических одномерных систем

Рассмотрим детерминированную систему (1.0.1) в одномерном случае ($n = 1$). Критерий экспоненциальной устойчивости (1.2.1) k-цикла $\Gamma = \{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k\}$ в этом случае имеет вид:

$$|f'(\bar{x}_1) \cdot \dots \cdot f'(\bar{x}_k)| < 1.$$

Система (1.2.5), задающая динамику вторых моментов M_t, здесь выглядит следующим образом:

$$M_{t+1} = b_t M_t + \alpha_t,$$

где

$$b_t = [f'(\bar{x}_t)]^2 + \sum_{i=1}^{m} [\sigma_i'(\bar{x}_t)]^2, \quad \alpha_t = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2(\bar{x}_t).$$

Необходимое и достаточное условие существования устойчивого k-периодического решения $\bar{M}_t$ этой системы (условие г) Теоремы 1.2) здесь имеет вид:

$$b_1 \cdot \dots \cdot b_k < 1. \tag{1.2.21}$$

Значения $\bar{M}_1, ..., \bar{M}_k$ удовлетворяют следующей линейной системе

$$\begin{aligned} &M_2 = b_1 M_1 + \alpha_1, \\ &\cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ &M_k = b_{k-1} M_{k-1} + \alpha_{k-1}, \\ &M_1 = b_k M_k + \alpha_k. \end{aligned}$$

Перепишем эту систему в векторной форме

$$AM \;=\; \alpha, \tag{1.2.22}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -b_1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & -b_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -b_k \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_k \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу A_1, полученную из матрицы A заменой первого столбца вектором α:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \alpha_2 & -b_2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ \alpha_{k-1} & 0 & 0 & ... & -b_{k-1} & 1 \\ \alpha_k & 0 & 0 & ... & 0 & -b_k \end{bmatrix}.$$

Для определителей $\Delta = \mathrm{det}A,\ \Delta_1 = \mathrm{det}A_1$ справедливы равенства

$$\Delta = (-1)^{k+1}(1 - b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_k),\ \Delta_1 = (-1)^{k+1}(\alpha_k + \alpha_{k-1}b_k + ... + \alpha_1 b_2 \cdot ... \cdot b_k).$$

В силу (1.2.21), $\Delta \neq 0$ и система (1.2.22) имеет единственное решение M. Его первая координата $M_1 = \Delta_1/\Delta$ может быть записана в явном виде:

$$M_1 = (\alpha_k + \alpha_{k-1}b_k + ... + \alpha_1 b_2 \cdot ... \cdot b_k)/(1 - b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_k).$$

Остальные координаты $M_2, ..., M_k$ находятся рекуррентно:

$$M_i = b_{i-1}M_{i-1} + \alpha_{i-1}, \quad i = 2, ..., k.$$

Если детерминированная система имеет 2-цикл $\Gamma = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$, то справедливы следующие явные формулы:

$$M_1 = \frac{b_2\alpha_1 + \alpha_2}{1 - b_1 b_2}, \quad M_2 = \frac{b_1\alpha_2 + \alpha_1}{1 - b_1 b_2}. \tag{1.2.23}$$

Для случая 3-цикла с состояниями $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ выполняется

$$\begin{gathered} M_1 = \frac{b_2 b_3\alpha_1 + b_3\alpha_2 + \alpha_3}{1 - b_1 b_2 b_3},\ M_2 = \frac{b_1 b_3\alpha_2 + b_1\alpha_3 + \alpha_1}{1 - b_1 b_2 b_3}, \\ M_3 = \frac{b_1 b_2\alpha_3 + b_2\alpha_1 + \alpha_2}{1 - b_1 b_2 b_3}. \end{gathered} \tag{1.2.24}$$

1.2.5. Асимптотика при малых шумах. Стохастическая чувствительность цикла

Рассмотрим стохастическую систему (1.1.15) со скалярным малым параметром ε интенсивности шума. Для этой системы уравнение (1.2.8) имеет вид

$$M_{t+1} = \mathcal{F}_t[M_t] + \varepsilon^2 \mathcal{S}_t[M_t] + \varepsilon^2 S_{0,t}. \tag{1.2.25}$$

Тогда для последовательности матриц $W_t(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} M_t(\varepsilon)$, задающих стохастическую чувствительность состояний $\bar{x}_t$ цикла Γ, справедливо уравнение

$$W_{t+1} = \mathcal{F}_t[W_t] + S_{0,t}. \tag{1.2.26}$$

По Теореме 1.2, существование у уравнения (1.2.26) экспоненциально устойчивого k-периодического решения гарантируется условием (1.2.1) устойчивости детерминированного цикла.

Элементы W_1, $W_2, \ldots, W_k$ этого периодического решения могут быть найдены по следующему алгоритму. Матрица $\bar{W}_1$ находится из уравнения

$$W_1 = \mathcal{F}[W_1] + Q,$$

где

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_k \cdot \dots \cdot \mathcal{F}_2 \cdot \mathcal{F}_1, \;\; Q = \mathcal{F}_k \cdot \dots \cdot \mathcal{F}_2[S_{0,1}] + \dots + \mathcal{F}_k[S_{0,k-1}] + S_{0,k}.$$

Остальные матрицы $W_2, \ldots, W_k$ находятся рекуррентно:

$$W_2 = \mathcal{F}_1[W_1] + S_{0,1}, \; \ldots, W_k = \mathcal{F}_{k-1}[W_{k-1}] + S_{0,k-1}.$$

В одномерном случае ($n = 1$) первый элемент последовательности
W_1, $W_2, \ldots, W_k$ находится по явной формуле

$$W_1 = (\alpha_k + \alpha_{k-1}\beta_k + ... + \alpha_1\beta_2 \cdot ... \cdot \beta_k)/(1 - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot ... \cdot \beta_k),$$

где

$$\beta_t = \left[f'(\bar{x}_t)\right]^2, \;\; \alpha_t = \sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2(\bar{x}_t).$$

Остальные координаты $W_2, ..., W_k$ находятся рекуррентно:

$$W_i = \beta_{i-1}W_{i-1} + \alpha_{i-1}, \quad i = 2, ..., k.$$

Для случая 2-цикла с состояниями $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ справедливы следующие явные формулы:

$$W_1 = \frac{\beta_2\alpha_1 + \alpha_2}{1 - \beta_1\beta_2}, \qquad W_2 = \frac{\beta_1\alpha_2 + \alpha_1}{1 - \beta_1\beta_2}. \tag{1.2.27}$$

Для случая 3-цикла с состояниями $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ выполняется

$$\begin{gathered} W_1 = \frac{\beta_2\beta_3\alpha_1 + \beta_3\alpha_2 + \alpha_3}{1 - \beta_1\beta_2\beta_3}, \; W_2 = \frac{\beta_1\beta_3\alpha_2 + \beta_1\alpha_3 + \alpha_1}{1 - \beta_1\beta_2\beta_3}, \\ W_3 = \frac{\beta_1\beta_2\alpha_3 + \beta_2\alpha_1 + \alpha_2}{1 - \beta_1\beta_2\beta_3}. \end{gathered} \tag{1.2.28}$$

Набор матриц W_1, $W_2, \ldots, W_k$ стохастической чувствительности состояний $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k$ цикла позволяет записать параметрическую аппроксимацию стационарного распределения в следующей форме:

$$p(x, \varepsilon) = \frac{1}{k} \sum_{t=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{(2\pi\varepsilon^2)^n \,\det W_t}} \cdot \exp\left(-\frac{(x - \bar{x}_t, W_t^{-1}(x - \bar{x}_t))}{2\varepsilon^2}\right). \tag{1.2.29}$$

Отметим, что значения $\varepsilon^2 W_1, ..., \varepsilon^2 W_k$ аппроксимируют ковариации случайных состояний стохастической системы (1.1.15) вблизи точек $\bar{x}_1, ..., \bar{x}_k$ детерминированного цикла Γ. Эти значения могут быть использованы при построении доверительных областей вокруг состояний цикла, подобно случаю равновесия, детально рассмотренному выше (см. п. 1.1.3).

Впервые стохастическая чувствительность цикла дискретной системы исследовалась в работе [149]. Более общие теоретические результаты этого раздела опубликованы в работах [198, 206] автора диссертации.

1.3. Замкнутая инвариантная кривая

Среди регулярных аттракторов дискретных динамических систем размерности два и выше, наряду с равновесиями и циклами конечной длины, существует и более сложный аттрактор – замкнутая инвариантная кривая. Эта кривая появляется в результате бифуркации Неймарка-Сакера [150, 151].

Будем предполагать, что система (1.0.1) имеет инвариантное множество в виде достаточно гладкой замкнутой кривой Γ, экспоненциально устойчивой в некоторой инвариантной окрестности U.

Определение 1.5. Замкнутая инвариантная кривая Γ называется *экспоненциально устойчивой* для системы (1.0.1), если для некоторой окрестности U существуют константы $K > 0$, $l > 0$ такие, что для всех $t = 1, 2, ...$ выполняется неравенство

$$\|\Delta(x_t)\| \leqslant Ke^{-lt} \|\Delta(x_0)\|$$

для любого $x_0 \in U$. Здесь $\Delta(x) = x - \gamma(x)$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма, $\Delta(x)$ – вектор отклонения точки x от Γ. Для любого $x \in$ U функция $\gamma(x) = \mathrm{argmin}_{y \in \Gamma} \|x - y\|$ определяет точку замкнутой инвариантной кривой Γ, ближайшую к x.

1.3.1. Стохастическая чувствительность замкнутой инвариантной кривой

Наряду с детерминированной системой (1.0.1) рассмотрим стохастическую систему (1.1.15) в более общем виде

$$x_{t+1} = f(x_t) + \varepsilon \sigma(x_t) \xi_t \;, \tag{1.3.1}$$

где ε – скалярный параметр интенсивности шума, $n \times m$-матричная функция $\sigma(x)$ характеризует зависимость возмущений от состояния системы, ξ_t – некоррелированный m - мерный векторный случайный процесс с параметрами

$\mathrm{E}\xi_t = 0$, $\mathrm{E}(\xi_t\xi_t^\top) = V$, $(t = 1, 2, \dots)$. Здесь $m \times m$-матрица V задает вторые моменты координат вектора ξ_t.

Зафиксируем произвольную точку $\bar{x} \in \Gamma$ и рассмотрим решение $\bar{x}_t$ $(t = 1, 2, \dots)$ детерминированной системы (1.0.1) с начальным условием $\bar{x}_1 = \bar{x}$. В силу инвариантности, все точки $\bar{x}_t$ этого решения принадлежат Γ. Наряду с детерминированным решением $\bar{x}_t$ рассмотрим решение $x_t(\varepsilon)$ стохастической системы (1.3.1) с начальным условием $x_1(\varepsilon) = \bar{x}_1 + \varepsilon z_1$, где z_1 – вектор, ортогональный кривой Γ в точке $\bar{x}_1$.

Будем изучать динамику отклонений $\Delta_t(\varepsilon) = x_t(\varepsilon) - x_t^*(\varepsilon)$ случайных состояний $x_t(\varepsilon)$ от кривой Γ при малых ε. Здесь $x_t^*(\varepsilon)$ – точка кривой Γ, ближайшая к $x_t(\varepsilon)$.

Введем следующие обозначения. Обозначим через $\Pi(x)$ гиперплоскость, ортогональную кривой Γ в точке x, а через $P(x)$ – матрицу оператора проектирования на гиперплоскость $\Pi(x)$.

Лемма 1.3. Для асимптотики

$$z_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta_t(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

отклонений справедлива следующая линейная стохастическая система

$$z_{t+1} = P_{t+1}\left[F_t z_t + S_t \xi_t\right], \tag{1.3.2}$$

где

$$F_t = F(\bar{x}_t), \quad F(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x), \quad S_t = \sigma(\bar{x}_t), \quad P_t = P(\bar{x}_t). \tag{1.3.3}$$

Доказательство.

Рассмотрим в деталях первый шаг. Для вектора $\delta(\varepsilon) = x_2^*(\varepsilon) - \bar{x}_2$ запишем следующее разложение

$$\delta(\varepsilon) = n(\varepsilon) + r(\varepsilon),$$

где вектор $r(\varepsilon)$ лежит на прямой, касательной к Γ в точке $x_2^*(\varepsilon)$, а вектор $n(\varepsilon)$ – в гиперплоскости Π_2. Благодаря гладкости кривой Γ и функций f, σ, справедливы оценки $\|\delta(\varepsilon)\| = O(\varepsilon)$, $\|r(\varepsilon)\| = O(\varepsilon)$, $\|n(\varepsilon)\| = O(\varepsilon^2)$.

Рассмотрим гиперплоскость $\Pi(x_2^*(\varepsilon))$, ортогональную Γ в точке $x_2^*(\varepsilon)$, и матрицу $P(x_2^*(\varepsilon))$ проектирования на эту гиперплоскость.

С учетом соотношений $P(x_2^*(\varepsilon))r(\varepsilon) = 0$, $x_2^*(\varepsilon) = \bar{x}_2 + n(\varepsilon) + r(\varepsilon)$, из равенств

$$x_2(\varepsilon) - x_2^*(\varepsilon) = P(x_2^*(\varepsilon))[x_2(\varepsilon) - x_2^*(\varepsilon)] =$$

$$= P(x_2^*(\varepsilon))[f(x_1(\varepsilon)) + \varepsilon\sigma(x_1(\varepsilon))\xi_1 - \bar{x}_2 - n(\varepsilon) - r(\varepsilon)] =$$

$$= P(x_2^*(\varepsilon))[f(x_1(\varepsilon)) - f(\bar{x}_1) + \varepsilon\sigma(x_1(\varepsilon))\xi_1 - n(\varepsilon)] =$$
$$= P(x_2^*(\varepsilon))[\varepsilon F(\bar{x}_1)z_1 + \varepsilon\sigma(\bar{x}_1)\xi_1 + O(\varepsilon^2)] =$$
$$= \varepsilon P(x_2^*)[F(\bar{x}_1)z_1 + \sigma(\bar{x}_1)\xi_1] + O(\varepsilon^2)$$

следует

$$z_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x_2(\varepsilon) - x_2^*(\varepsilon)}{\varepsilon} = P(\bar{x}_2)[F(\bar{x}_1)z_1 + \sigma(\bar{x}_1)\xi_1].$$

Тогда в обозначениях (1.3.3) можно записать

$$z_2 = P_2[F_1 z_1 + S_1\xi_1].$$

Таким образом, для всех последовательных шагов выполняется

$$z_{t+1} = P_{t+1}[F_t z_t + S_t\xi_t]$$

и формула (1.3.2) верна. Лемма доказана.

Динамика первых двух моментов $m_t = \mathrm{E}z_t, \quad M_t = \mathrm{E}\left(z_t z_t^\top\right)$ решений системы (1.3.2) задается уравнениями

$$m_{t+1} = P_{t+1}F_t m_t, \tag{1.3.4}$$

$$M_{t+1} = P_{t+1}\left[F_t M_t F_t^\top + G_t\right]P_{t+1}, \qquad G_t = S_t V S_t^\top. \tag{1.3.5}$$

Исследование динамики этих моментов существенно зависит от поведения решений детерминированной системы на замкнутой инвариантной кривой Γ. Здесь мы ограничиваемся рассмотрением трех наиболее характерных случаев. В первом случае замкнутая инвариантная кривая целиком состоит только из равновесий этой детерминированной системы. Во втором случае замкнутая инвариантная кривая состоит из семейства k-циклов, а в третьем случае предполагается, что кривая формируется семейством квазипериодических решений.

1.3.2. Замкнутая инвариантная кривая, состоящая из равновесий

Пусть каждая точка $\bar{x} \in \Gamma$ является равновесием системы (1.0.1): $f(\bar{x}) = \bar{x}$. В этом случае систему (1.3.2) можно переписать в виде

$$z_{t+1} = P\left[Fz_t + S\xi_t\right], \tag{1.3.6}$$

где $F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}),\ S = \sigma(\bar{x}),\ P = P(\bar{x})$.

В детерминированном случае ($S = 0$) система (1.3.6) имеет вид

$$z_{t+1} = PFz_t. \tag{1.3.7}$$

Динамика ее решений $z_{t+1} = (PF)^t z_1$ определяется спектром $\Sigma(PF)$ матрицы PF. Рассмотрим как $\Sigma(PF)$ связан со спектром матрицы F.

Пусть $\Sigma(F) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ – спектр матрицы F, а $v_1,\ v_2, \ldots, v_n$ – соответствующие собственные векторы. Прежде всего отметим, что вектор r, касательный к Γ в точке $\bar{x}$, является собственным для F: $Fr = r$, поскольку функция f в рассматриваемом случае задает на Γ тождественное отображение. Поэтому можно считать, что $\lambda_1 = 1,\ v_1 = r$.

Лемма 1.4. $\Sigma(PF) = \{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, где $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – собственные числа матрицы F.

Доказательство. Прежде всего отметим, что $PFr = Pr = 0$, то есть вектор r является собственным и для матрицы PF с нулевым собственным значением.

Из соотношений

$$PF = PF\left[P + \frac{rr^\top}{r^\top r}\right] = PFP + \frac{1}{r^\top r}PFrr^\top = PFP$$

следует, что для $\bar{v}_i = Pv_i$ $(i = 2, \ldots, n)$ справедливы равенства

$$PF\bar{v}_i = PFPv_i = PFv_i = \lambda_i Pv_i = \lambda_i \bar{v}_i.$$

Это означает, что $r, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ являются собственными векторами матрицы PF, имеющей спектр $\Sigma(PF) = \{0, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$. Лемма доказана.

Отметим, что неравенства

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 2, \ldots, n \tag{1.3.8}$$

являются необходимыми и достаточными условиями экспоненциальной устойчивости тривиального решения системы (1.3.7).

Рассмотрим далее динамику моментов решений стохастической системы (1.3.2). Здесь моменты m_t и M_t удовлетворяют системе

$$m_{t+1} = PFm_t, \tag{1.3.9}$$

$$M_{t+1} = P\left[FM_tF^\top + G\right]P, \qquad G = SVS^\top. \tag{1.3.10}$$

Из условий (1.3.8) следует, что для любых начальных значений $m_1,\ M_1$ выполняется

$$\lim_{t\to\infty} m_t = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} M_t = W,$$

где W – единственное решение матричного уравнения

$$W = P\left[FWF^\top + G\right]P. \tag{1.3.11}$$

В рассматриваемом случае экспоненциальная устойчивость замкнутой инвариантной кривой эквивалентна экспоненциальной устойчивости тривиального решения семейства систем (1.3.7), связанного со всеми точками $\bar{x} \in \Gamma$. Таким образом, предполагается выполнение семейства условий

$$\forall \bar{x} \in \Gamma \qquad |\lambda_i(\bar{x})| < 1, \quad i = 2, \dots, n. \tag{1.3.12}$$

В этих условиях уравнение (1.3.11) однозначно определяет матричную функцию $W(\bar{x})$, определенную во всех точках $\bar{x} \in \Gamma$. Эта функция $W(\bar{x})$ играет роль функции стохастической чувствительности замкнутой инвариантной кривой Γ. Отметим, что матрица $\varepsilon^2 W(\bar{x})$ аппроксимирует матрицу ковариации разброса случайных состояний системы (1.0.2) в гиперплоскости $\Pi(\bar{x})$, ортогональной кривой Γ в точке $\bar{x}$.

Двумерный случай.

Для $n = 2$ матрица проектирования имеет вид $P(\bar{x}) = p(\bar{x})p^\top(\bar{x})$, где $p(\bar{x})$ – единичный вектор, ортогональный к кривой Γ в точке $\bar{x}$.

Из доказательства Леммы 1.4 следует, что $PFPv_2 = \lambda_2 Pv_2$ и $pp^\top Fpp^\top v_2 = \lambda_2 pp^\top v_2$. Следовательно, $\lambda_2 = p^\top Fp$.

Функция стохастической чувствительности $W(\bar{x})$ может быть переписана в виде

$$W(\bar{x}) = \mu(\bar{x})p(\bar{x})p^\top(\bar{x}),$$

где скалярная функция $\mu(\bar{x})$, благодаря (1.3.11), является решением уравнения

$$\mu = \left(p^\top Fp\right)^2 \mu + p^\top Gp. \tag{1.3.13}$$

В этом случае условие (1.3.12) сводится к неравенству

$$|\lambda_2(\bar{x})| = |p^\top(\bar{x})F(\bar{x})p(\bar{x})| < 1.$$

При этом уравнение (1.3.13) имеет единственное решение, которое может быть записано в явной форме

$$\mu(\bar{x}) = \frac{p^\top(\bar{x})G(\bar{x})p(\bar{x})}{1 - \left(p^\top(\bar{x})F(\bar{x})p(\bar{x})\right)^2}. \tag{1.3.14}$$

Скалярная функция стохастической чувствительности $\mu(\bar{x})$ замкнутой инвариантной кривой Γ позволяет найти простую аппроксимацию $\varepsilon^2\mu(\bar{x})$ дисперсии случайных состояний системы (1.0.2) в нормальном направлении к кривой Γ в точке $\bar{x}$.

1.3.3. Замкнутая инвариантная кривая, состоящая из k-циклов

Пусть каждая точка кривой Γ является состоянием k-цикла. Зафиксируем произвольную точку $\bar{x} \in \Gamma$ и рассмотрим соответствующий k-цикл $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$: $\bar{x}_1 = \bar{x}$, $\bar{x}_{t+1} = f(\bar{x}_t)$ $(t = 1, \ldots, k-1)$, $f(\bar{x}_k) = \bar{x}_1$.

В этом случае коэффициенты P_{t+1}, F_t, S_t системы (1.3.2) являются k-периодическими.

Из решения z_t $(t = 1, 2, \ldots)$ системы (1.3.2) выделим подпоследовательность $y_t = z_{(t-1)k+1} : y_1 = z_1, y_2 = z_{k+1}, y_3 = z_{2k+1}, \ldots$.

Динамика значений y_t задается с помощью стохастической системы

$$y_{t+1} = P_1 \left[\Phi y_t + \eta_t\right], \tag{1.3.15}$$

где

$$\Phi = F_k P_k F_{k-1} \cdot \ldots \cdot P_2 F_1,$$

$$\eta_t = F_k P_k F_{k-1} \cdot \ldots \cdot P_3 F_2 P_2 S_1 \xi_{(t-1)k+1} + F_k P_k F_{k-1} \cdot \ldots \cdot P_4 F_3 P_3 S_2 \xi_{(t-1)k+2} + \ldots +$$
$$+ F_k P_k S_{k-1} \xi_{tk-1} + S_k \xi_{tk}.$$

В детерминированном случае $(\eta_t = 0)$ эта система имеет вид

$$y_{t+1} = P_1 \Phi y_t. \tag{1.3.16}$$

В силу Леммы 1.4 постоянная матрица монодромии $P_1 \Phi$ является вырожденной и имеет спектр

$$\Sigma(P_1(\bar{x})\Phi(\bar{x})) = \{0, \lambda_1(\bar{x}), \lambda_2(\bar{x}), \ldots, \lambda_n(\bar{x})\}.$$

Поскольку экспоненциальная устойчивость замкнутой инвариантной кривой эквивалентна экспоненциальной устойчивости тривиального решения семейства систем (1.3.16), связанного со всеми точками $\bar{x} \in \Gamma$, то справедливы неравенства (1.3.12).

Рассмотрим далее динамику стохастической системы (1.3.15). Моменты $m_t = \mathrm{E} y_t$, $M_t = \mathrm{E}(y_t y_t^\top)$ ее решений удовлетворяют системе

$$m_{t+1} = P_1 \Phi \, m_t, \tag{1.3.17}$$

$$M_{t+1} = P_1 \left[\Phi M_t \Phi^\top + Q\right] P_1. \tag{1.3.18}$$

Здесь матрица

$$Q = \mathrm{E}(\eta_t \eta_t^\top) = Q^{(k)}$$

находится рекуррентно:

$$Q^{(0)} = 0, \;\; Q^{(j)} = P_{j+1} \left[F_j Q^{(j-1)} F_j^\top + G_j \right] P_{j+1} \;\; (j = 1, \dots k-1),$$

$$Q^{(k)} = F_k Q^{(k-1)} F_k^\top + G_k.$$

Из (1.3.12) следует, что при любых начальных значениях $m_1, \; M_1$ выполняется

$$\lim_{t \to \infty} m_t = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} M_t = W,$$

где W является единственным решением матричного уравнения

$$W = P_1 \left[\Phi W \Phi^\top + Q \right] P_1. \tag{1.3.19}$$

Используя эту матрицу как начальную $M_1 = W(\bar{x}_1)$, из рекуррентной формулы (1.3.5) можно найти $W_t = W(\bar{x}_t)$ $(t = 1, \dots, k-1)$. Таким образом можно вычислить стохастическую чувствительность каждой точки замкнутой инвариантной кривой Γ.

Двумерный случай

Для $n = 2$ для матрицы стохастической чувствительности справедливо разложение $W(\bar{x}) = \mu(\bar{x}) p(\bar{x}) p^\top(\bar{x})$. Здесь скалярная функция $\mu(\bar{x})$ (см. (1.3.14)) имеет вид

$$\mu(\bar{x}) = \frac{p^\top(\bar{x}) Q(\bar{x}) p(\bar{x})}{1 - \left(p^\top(\bar{x}) \Phi(\bar{x}) p(\bar{x})\right)^2}. \tag{1.3.20}$$

Поскольку $\lambda_2(\bar{x}) = p^\top(\bar{x}) \Phi(\bar{x}) p(\bar{x})$, условие (1.3.12) может быть записано в виде $|p^\top(\bar{x}) \Phi(\bar{x}) p(\bar{x})| < 1$. Отметим, что в рассматриваемом случае

$$p^\top(\bar{x}) \Phi(\bar{x}) p(\bar{x}) = \prod_{i=1}^{k} p^\top(\bar{x}_{i+1}) F(\bar{x}_i) p(\bar{x}_i).$$

1.3.4. Замкнутая инвариантная кривая, состоящая из квазипериодических решений

Рассмотрим случай, когда замкнутая инвариантная кривая Γ формируется семейством квазипериодических решений детерминированной системы (1.0.1). Зафиксируем произвольную точку $\bar{x} \in \Gamma$ и рассмотрим решение x_t детерминированной системы (1.0.1) с начальным условием $\bar{x}_1 = \bar{x}$. Вследствие квазипериодичности точки этого решения лежат всюду плотно на кривой Γ. Это означает, что для любого $\delta > 0$ существует число k такое, что выполняется неравенство $\|\bar{x}_{k+1} - \bar{x}_1\| < \delta$. Следовательно, можно рассматривать точки $\bar{x}_1, \dots \bar{x}_k$ как элементы k-цикла, который является δ-аппроксимацией исходного квазипериодического решения.

Для этой δ-аппроксимации можно вычислить стохастическую чувствительность кривой Γ, используя метод, представленный выше для случая k-цикла. Отметим, что точность этой δ-аппроксимации можно повысить, уменьшая параметр δ. При этом период k-цикла, используемого при аппроксимации, будет увеличиваться.

1.3.5. Доверительные области

Функция стохастической чувствительности $W(\bar{x})$, заданная в точках $\bar{x}$ замкнутой инвариантной кривой Γ, позволяет аппроксимировать разброс случайных состояний стохастической системы (1.3.1) вокруг Γ. Действительно, в гиперплоскости $\Pi(\bar{x})$, ортогональной кривой Γ в точке $\bar{x}$, при малых значениях интенсивности шума ε справедлива следующая аппроксимация для вторых моментов отклонений случайных состояний x от $\bar{x}$:

$$\mathrm{E}(x-\bar{x})(x-\bar{x})^\top \approx \varepsilon^2 W.$$

Для наглядного геометрического описания разброса случайных состояний вокруг замкнутой инвариантной кривой Γ удобно использовать доверительные области. В общем случае такая область является n-мерным тором, задаваемым семейством доверительных $(n-1)$-мерных эллипсоидов

$$\big(x-\bar{x}, W^{+}(x-\bar{x})\big) = \varepsilon^2 K(P), \quad \bar{x} \in \Gamma$$

располагающихся в гиперплоскостях $\Pi(\bar{x})$. Здесь P – доверительная вероятность, функция $K(P)$ описана в разделе 1.1.3, а знак " + " означает псевдообращение [258].

В трехмерном случае доверительный тор формируется семейством двумерных эллипсов, задаваемых в плоскостях $\Pi(\bar{x})$ уравнениями

$$\frac{z_1^2}{\mu_1(\bar{x})} + \frac{z_2^2}{\mu_2(\bar{x})} = -2\varepsilon^2 \ln(1-P),$$
$$z_1 = (x-\bar{x}, v_1(\bar{x})),\ z_2 = (x-\bar{x}, v_2(\bar{x})),\ \ \bar{x} \in \Gamma.$$

Здесь $\mu_1(\bar{x}), \mu_2(\bar{x})$ – собственные числа, а $v_1(\bar{x}),\ v_2(\bar{x})$ – нормированные собственные векторы матрицы стохастической чувствительности $W(\bar{x})$ – играют роль базисов координатных плоскостей $\Pi(\bar{x})$.

В двумерном случае доверительной областью будет полоса (кольцо), задаваемая семейством отрезков с границами

$$\tilde{x}_{1,2} = \bar{x} \pm q\varepsilon\sqrt{2\mu(\bar{x})}p(\bar{x}), \quad q = \mathrm{erf}^{-1}(\mathcal{P}), \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt, \qquad (1.3.21)$$

где $\mu(\bar{x})$ – стохастическая чувствительность в точке $\bar{x}$, а $p(\bar{x})$ – единичный вектор, ортогональный Γ в точке $\bar{x}$.

1.3.6. Пример

Для демонстрации конструктивных возможностей предложенной техники стохастической чувствительности рассмотрим следующую стохастическую систему

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= \frac{(1+by_t)(x_t\cos(2\pi a) - y_t\sin(2\pi a))}{\sqrt{x_t^2+y_t^2}} + \varepsilon\xi_{1,t}, \\ y_{t+1} &= \frac{(1+by_t)(y_t\cos(2\pi a) + x_t\sin(2\pi a))}{\sqrt{x_t^2+y_t^2}} + \varepsilon\xi_{2,t}, \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

где $\xi_{1,t}$, $\xi_{2,t}$ – некоррелированные случайные гауссовские процессы с параметрами $\mathrm{E}\xi_{i,t} = 0$, $\mathrm{E}\xi_{i,t}^2 = 1$ $(i = 1, 2)$, ; $\mathrm{E}(\xi_{1,t}\xi_{2,t}) = 0$, ε – интенсивность шума, a и b – положительные параметры.

В полярных координатах $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$ соответствующая детерминированная система записывается в виде

$$\begin{aligned} r_{t+1} &= 1 + br_t\sin(\varphi_t) \\ \varphi_{t+1} &= \varphi_t + 2\pi a. \end{aligned}$$

Для $a = 0$ эта детерминированная система имеет в качестве аттрактора замкнутую инвариантную кривую Γ (эллипс):

$$x^2 + (1-b^2)y^2 - 2by = 1.$$

Эта кривая, состоящая из равновесий, является экспоненциально устойчивой – любая траектория, стартующая из точки (x_1, y_1), лежит на прямой $y = \operatorname{arctg}(y_1/x_1)x$ и сходится к соответствующему равновесию. Эта замкнутая кривая показана на рис. 1.3.1a сплошной линией.

При случайных возмущениях, в системе (1.3.22) формируется некоторое стационарное вероятностное распределение вокруг этого инвариантного эллипса. На рис. 1.3.1a случайные состояния, полученные прямым численным моделированием решений системы (1.3.22) при $\varepsilon = 0.05$ показаны серыми точками.

Как можно заметить, разброс случайных состояний вокруг детерминированного эллипса неоднороден. Для анализа дисперсии D случайных состояний, будем использовать теоретическую аппроксимацию $D \approx \varepsilon^2\mu$, где функция стохастической чувствительности μ определена в точках детерминированной кривой Γ.

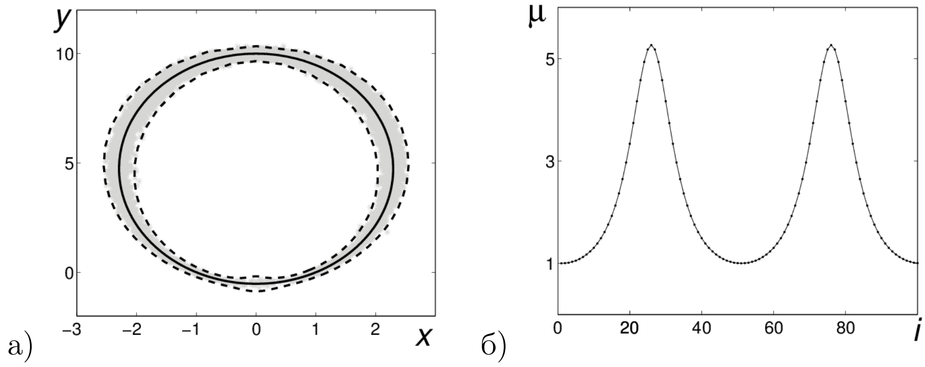


Рис. 1.3.1 – Стохастическая чувствительность замкнутой инвариантной кривой, состоящей из равновесий: а) замкнутая инвариантная кривая (сплошная линия), случайные состояния (серые точки) и доверительная полоса для $b = 0.9,\ a = 0,\ \varepsilon = 0.05$; б) функция стохастической чувствительности.

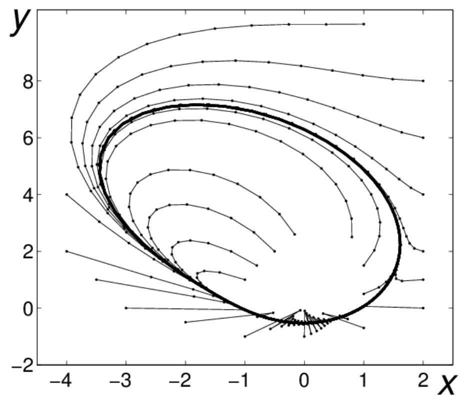


Рис. 1.3.2 – Фазовый портрет детерминированной системы для $b = 0.9,\ a = 0.01$.

Рассмотрим следующую дискретизацию кривой Г:

$$(\varphi^{(0)}, r^{(0)}),\ (\varphi^{(1)}, r^{(1)}), \dots\ , (\varphi^{(100)}, r^{(100)}),$$

$$\varphi^{(j)} = 2\pi j/100, \qquad r^{(j)} = 1/(1 - b\sin(\varphi^{(j)})).$$

Соответствующие значения $\mu(j)$ функции стохастической чувствительности изображены на рисунке 1.3.1б. Как можно видеть, функция стохастической чувствительности $\mu(j)$ имеет существенный перепад значений. Пики этой функции соответствуют наиболее широким участкам распределения случайных состояний.

Используя функцию стохастической чувствительности $\mu(j)$, можно вычислить границы доверительной полосы (1.3.21) вокруг Г. Эти границы для системы (1.3.22) с $\varepsilon = 0.05$ построены пунктирной линией на рисунке 1.3.1а. В этом примере используется правило "трех сигм"(доверительная вероятность $\mathcal{P} = 0.9973$). Как можно видеть, теоретическая аппроксимация адекватно отражает основные черты вероятностного распределения случайных состояний нелинейной стохастической системы (1.3.22).

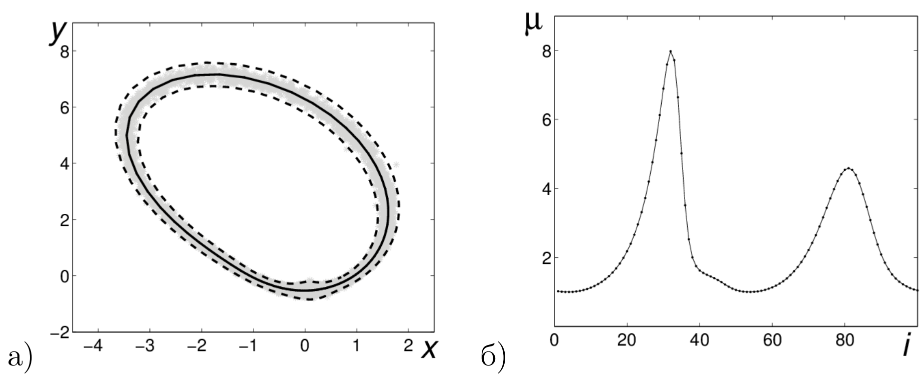


Рис. 1.3.3 – Стохастическая чувствительность замкнутой инвариантной кривой, состоящей из циклов: а) замкнутая инвариантная кривая (сплошная линия), случайные состояния (серые точки) и доверительная полоса для $b = 0.9,\ a = 0.01,\ \varepsilon = 0.05$; б) функция стохастической чувствительности.

Рассмотрим далее значение параметра $a = 0.01$. В этом случае замкнутая инвариантная кривая Γ детерминированной системы состоит из семейства 100-циклов. На рисунке 1.3.2 показано, как эта кривая притягивает траектории детерминированной системы.

Случайные состояния системы (1.3.22) с $\varepsilon = 0.05$ показаны серыми точками на рисунке 1.3.3а. Функция стохастической чувствительности этой кривой построена на рисунке 1.3.3б, а найденные с помощью этой функции границы доверительной полосы показаны пунктиром на рисунке 1.3.3а. Как можно заметить, теоретические результаты, основанные на функции стохастической чувствительности, хорошо согласуются с результатами прямого численного моделирования и в этом случае тоже.

Теоретические результаты этого раздела по стохастической чувствительности замкнутых инвариантных кривых опубликованы в работах [208, 209] автора диссертации. Конструктивные возможности этой теории были продемонстрированы в анализе стохастической чувствительности и индуцированных шумом переходов между дискретным циклом и замкнутой инвариантной кривой в логистических моделях с запаздыванием [259, 260], между двумя сосуществующими замкнутыми инвариантными кривыми [261] в двумерной логистической модели.

1.4. Хаотический аттрактор

В нелинейных дискретных системах, наряду с регулярными аттракторами (равновесия, циклы, замкнутые инвариантные кривые), даже в одномерном случае могут наблюдаться и хаотические аттракторы. Изучение результатов воздействия шума на хаотический аттрактор, несомненно, является важной исследовательской задачей.

Рассмотрим общую одномерную нелинейную дискретную динамическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t, \eta_t), \quad \eta_t = \varepsilon\xi_t, \tag{1.4.1}$$

где $f(x,\eta)$ – гладкая по обеим переменным функция, ξ_t – m-мерный некоррелированный случайный процесс с параметрами $\mathrm{E}\xi_t = 0$, $\mathrm{E}\xi_t\xi_t^\top = V$, V – ковариационная $m \times m$-матрица, ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Рассмотрим решение $\bar{x}_t$ $(t = 0, 1, \dots)$ соответствующей детерминированной системы

$$x_{t+1} = f(x_t, 0) \tag{1.4.2}$$

Обозначим через x_t^ε решение стохастической системы (1.4.1) с начальным условием $x_0^\varepsilon = \bar{x}_0$. Чувствительность решения $\bar{x}_t$ к случайным возмущениям определяется асимптотической переменной

$$z_t = \left.\frac{\partial x_t^\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x_t^\varepsilon - \bar{x}_t}{\varepsilon}.$$

Динамика пары $(\bar{x}_t, z_t)$ задается системой стохастического линейного расширения

$$\begin{aligned} \bar{x}_{t+1} &= f(\bar{x}_t, 0) \\ z_{t+1} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_t, 0)\, z_t + \frac{\partial f}{\partial\eta}(\bar{x}_t, 0)\,\xi_t, \qquad \frac{\partial f}{\partial\eta} = \left(\frac{\partial f}{\partial\eta_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial\eta_m}\right). \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Вторые моменты $M_t = \mathrm{E}z_t^2$ переменной z_t удовлетворяют следующей детерминированной системе

$$\begin{aligned} \bar{x}_{t+1} &= f(\bar{x}_t, 0) \\ M_{t+1} &= \alpha^2(\bar{x}_t)M_t + s(\bar{x}_t), \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

где

$$\alpha(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0), \quad s(x) = \frac{\partial f}{\partial\eta}(x, 0)\, V\, \frac{\partial f}{\partial\eta}^\top(x, 0).$$

Значения M_t определяют стохастическую чувствительность элементов последовательности решения $\bar{x}_t$.

При малых шумах величины M_t позволяют аппроксимировать дисперсию $D_t = \mathrm{E}(x_t^\varepsilon - \bar{x}_t)^2$ разброса случайных состояний x_t^ε вокруг $\bar{x}_t$: $D_t \approx \varepsilon^2 M_t$.

Используя систему (1.4.4), можно изучать стохастическую чувствительность как регулярных, так и хаотических аттракторов.

Для анализа стохастической чувствительности экспоненциально устойчивого равновесия $\bar{x}$ системы (1.4.2) следует положить $\bar{x}_t \equiv \bar{x}$. Благодаря устойчивости $\bar{x}$, выполняется неравенство $|\alpha(\bar{x})| < 1$ и система (1.4.4) имеет единственное устойчивое стационарное решение $M_t \equiv M$, где

$$M = \frac{s(\bar{x})}{1 - \alpha^2(\bar{x})}. \tag{1.4.5}$$

Это значение M определяет стохастическую чувствительность равновесия $\bar{x}$.

Для анализа стохастической чувствительности экспоненциально устойчивого k-цикла $\bar{x}$ системы (1.4.2) следует в качестве решения $\bar{x}$ взять его последовательные элементы $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k$ и продолжить по периодичности: $\bar{x}_{t+k} = \bar{x}_t$.

Необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости этого k-цикла является неравенство $|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k| < 1$, где $\alpha_t = \alpha(\bar{x}_t)$. Благодаря устойчивости цикла, система (1.4.4) имеет единственное устойчивое k-периодическое решение M_t, удовлетворяющее уравнению

$$M_{t+1} = \alpha_t^2 M_t + s_t, \qquad s_t = s(\bar{x}_t). \tag{1.4.6}$$

Множество $\{M_1, \dots, M_k\}$ определяет стохастическую чувствительность цикла $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k\}$. Здесь элемент M_1 является решением уравнения

$$M_1 = \left[\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_k\right]^2 M_1 + g_{k+1}, \tag{1.4.7}$$

где g_{k+1} находится итерациями:

$$g_{t+1} = \alpha_t^2 g_t + s_t, \;\; t = 1, \dots, k, \qquad g_1 = 0.$$

Остальные элементы $M_2, \dots, M_k$ искомого k-периодического решения M_t могут быть найдены рекуррентно из уравнения (1.4.6).

Для случая суперустойчивого $k-$цикла с $\alpha_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_1, 0) = 0$ имеем

$$M_2 = s_1, \;\; M_3 = \alpha_2^2 s_1 + s_2, \; \dots \; ,$$

$$M_k = (\alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_{k-1})^2 s_1 + (\alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_{k-2})^2 s_2 + \dots + s_{k-1},$$
$$M_1 = (\alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k)^2 s_1 + (\alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_{k-1})^2 s_2 + \dots + s_k.$$

Перейдем теперь к исследованию стохастической чувствительности хаотических аттракторов. В общем случае, эти аттракторы могут иметь весьма сложную структуру. Здесь мы ограничимся рассмотрением случая, когда аттрактор состоит из конечного числа непересекающихся частей, каждая из которых заполняет интервал конечной длины. Хаотический аттрактор, целиком сосредоточенный на одном интервале, будем называть однокусочным, в противном случае - многокусочным.

1.4.1. Стохастическая чувствительность однокусочного хаотического аттрактора

Предположим, что детерминированная система (1.4.2) имеет однокусочный хаотический аттрактор $\mathcal{A}$, заполняющий интервал $[a,b]$. При этом $a = \inf\mathcal{A}$, $b = \sup\mathcal{A}$. Предполагается, что функция $f(x,0)$ – унимодальна, имеет максимум в точке $c \in (a,b)$

$$\max_{[a,b]} f(x,0) = f(c,0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(c,0) = 0,$$

является монотонно возрастающей при $x < c$, монотонно убывающей при $x > c$ и $f(x) > x$ для $x < c$. При этих предположениях

$$b = f(c,0),\ a = f(b,0) = f(f(c,0),0).$$

Такими свойствами обладает, например, хорошо известный хаотический аттрактор системы с логистическим отображением. Характерный пример такого аттрактора приведен на рис. 1.4.1а.

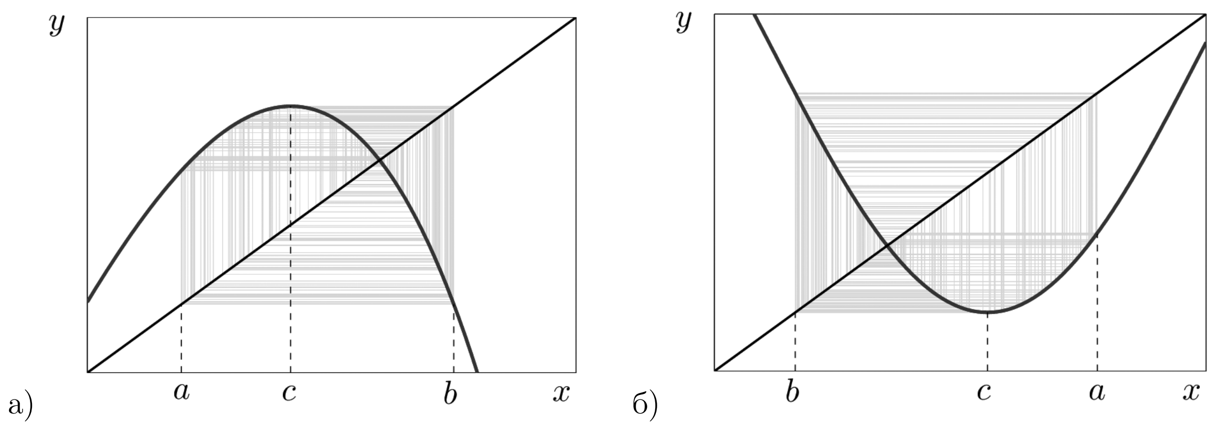


Рис. 1.4.1 – Хаотические однокусочные аттракторы (серый цвет) и функция $y = f(x,0)$ (черная кривая).

Как видим, границы a и b такого однокусочного хаотического аттрактора определяются значением c экстремума отображения $f(x,0)$.

В исследовании индуцированных шумом переходов важно анализировать поведение стохастических траекторий, выходящих за границы детерминированных аттракторов. В рассматриваемом здесь случае однокусочного хаотического аттрактора речь идет о границах a и b. Таким образом, нас прежде всего интересует стохастическая чувствительность решений детерминированной системы (1.4.2), проходящих вблизи границ a и b. Отметим, что на эти границы выходит решение $\bar{x}_t$ системы (1.4.2), стартующее с точки $\bar{x}_1 = c$. Действительно, тогда $\bar{x}_2 = b$, $\bar{x}_3 = a$. Стохастическая чувствительность M_1, M_2, M_3

состояний $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \bar{x}_3$ связана (см. (1.4.4)) соотношениями

$$M_2 = \alpha^2(\bar{x}_1)M_1 + s(\bar{x}_1), \qquad M_3 = \alpha^2(\bar{x}_2)M_2 + s(\bar{x}_2).$$

Поскольку $\alpha(\bar{x}_1) = \frac{\partial f}{\partial x}(c,0) = 0$, и следовательно M_2 не зависит от M_1, то значения стохастической чувствительности $M(a) = M_3$ и $M(b) = M_2$ в граничных точках аттрактора $\mathcal{A}$ могут быть найдены явно:

$$M(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(f(c,0),0)\right]^2 s(c) + s(f(c,0)), \quad M(b) = s(c). \tag{1.4.8}$$

Как видим, не только расположение границ хаотического аттрактора определяется значением c, но и их стохастическая чувствительность.

Рассмотрим симметричный случай, когда хаотический аттрактор $\mathcal{A}$ расположен около минимума функции $f(x,0)$ (см. рис. 1.4.1б). Здесь $a = \sup \mathcal{A},\ b = \inf \mathcal{A},\ c = \mathrm{argmin}_{[b,a]} f(x,0)$. В этом случае можно вывести те же формулы (1.4.8) для стохастической чувствительности $M(a)$ и $M(b)$ правой и левой границ аттрактора $\mathcal{A}$.

Таким образом, стохастическая чувствительность граничных точек a и b однокусочного хаотического аттрактора $\mathcal{A}$ определяется наклоном касательной к графику функции $f(x,0)$ в точке $x = b$ и значениями функции $s(x) = \dfrac{\partial f}{\partial \eta}(x,0)\, V\, \dfrac{\partial f}{\partial \eta}^{\top}(x,0)$ в точках c и b.

1.4.2. Стохастическая чувствительность многокусочного хаотического аттрактора

Рассмотрим теперь случай, когда хаотический аттрактор $\mathcal{A}$ состоит из k отдельных непересекающихся частей: $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k\}$, связанных соотношениями:

$$f(\mathcal{A}_t, 0) = \mathcal{A}_{t+1}\ (t = 1, 2, \ldots, k-1), \quad f(\mathcal{A}_k, 0) = \mathcal{A}_1.$$

Будем называть такой аттрактор $\mathcal{A}$ k-периодическим многокусочным хаотическим аттрактором.

Рассмотрим последовательные итерации системы (1.4.1):

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= f(x_t, \eta_t) \\
x_{t+2} &= f(f(x_t, \eta_t), \eta_{t+1}) \\
x_{t+3} &= f(f(f(x_t, \eta_t), \eta_{t+1}), \eta_{t+2}) \\
&\ldots \\
x_{t+k} &= f(\ldots f(f(x_t, \eta_t), \eta_{t+1}), \ldots, \eta_{t+k-1}).
\end{aligned}$$

Введем функцию

$$\varphi(x, \beta_1, \dots, \beta_k) = f(\dots f(f(x, \beta_1), \beta_2), \dots, \beta_k).$$

Тогда переход от x_t к x_{t+k} может быть записан как одна итерация этого k-шагового отображения φ:

$$x_{t+k} = \varphi(x_t, \eta_t, \dots, \eta_{t+k-1}). \tag{1.4.9}$$

В детерминированном случае это k-шаговое отображение имеет вид

$$\varphi(x, 0, \dots, 0) = f(\dots f(f(x, 0), 0), \dots, 0). \tag{1.4.10}$$

Таким образом, отдельные части $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ k-периодического многокусочного хаотического аттрактора $\mathcal{A}$ детерминированной системы с отображением $f(x, 0)$ можно рассматривать как сосуществующие однокусочные хаотические аттракторы системы с отображением (1.4.10). Такой подход позволяет исследовать стохастическую чувствительность границ многокусочного хаотического аттрактора в системе (1.4.1) путем анализа стохастической чувствительности границ отдельных однокусочных хаотических аттракторов $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ в системе (1.4.9). Отметим, что в то время как в системе (1.4.1) вектор η_t шумов имеет размерность m, в системе (1.4.9) расширенный вектор $(\eta_t, \dots, \eta_{t+k-1})$ шумов имеет размерность $k \cdot m$.

Рассмотрим подробно варианты двух- и трехкусочных хаотических аттракторов в системе со скалярными шумами:

$$x_{t+1} \, = \, f(x_t, \eta_t), \quad \eta_t = \varepsilon \xi_t, \tag{1.4.11}$$

где ξ_t – скалярный некоррелированный случайный процесс с параметрами $\mathrm{E}\xi_t = 0$, $\mathrm{E}\xi_t^2 = 1$ и ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Стохастическая чувствительность 2-кусочного хаотического аттрактора

Пусть соответствующая детерминированная система

$$x_{t+1} \, = \, f(x_t, 0) \tag{1.4.12}$$

имеет 2-кусочный хаотический аттрактор $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$. Тогда его части $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ можно рассматривать как сосуществующие 1-кусочные хаотические аттракторы системы

$$x_{t+2} \, = \, f(f(x_t, 0), 0) \, = \, \varphi(x_t, 0, 0). \tag{1.4.13}$$

Здесь используется 2-шаговое отображение

$$\varphi(x,\beta)=\varphi(x,\beta_1,\beta_2)=f(f(x_t,\beta_1),\beta_2),$$

где $\beta=(\beta_1,\beta_2)$. С помощью этого 2-шагового отображения можно переписать стохастическую систему (1.4.11) в виде

$$x_{t+2}\ =\ f(f(x_t,\eta_t),\eta_{t+1})=\varphi(x_t,\eta_t,\eta_{t+1}). \tag{1.4.14}$$

Рассмотрим сначала границы однокусочного хаотического аттрактора $\mathcal{A}_1$. Пусть

$$c=\mathrm{argmax}_{x\in\mathcal{A}_1}\varphi(x,0),\quad b=\sup\mathcal{A}_1=\varphi(c,0),\quad a=\inf\mathcal{A}_1=\varphi(b,0).$$

Наша задача – найти стохастическую чувствительность $M(a)$ и $M(b)$ границ аттрактора $\mathcal{A}_1$.

Из общей формулы (1.4.8) следует, что

$$M(a)=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\varphi(c,0),0)\right]^2 s(c)+s(\varphi(c,0)),\quad M(b)=s(c). \tag{1.4.15}$$

Здесь,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(f(x,0),0)\frac{\partial f}{\partial x}(x,0),\quad s(x)=\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}(x,0)\,V\,\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}^{\top}(x,0),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}=\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1},\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_2}\right],\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_1}(x,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(f(x,0),0)\frac{\partial f}{\partial\eta}(x,0),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\beta_2}(x,0)=\frac{\partial f}{\partial\eta}(x,0),\qquad V=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

Стохастическая чувствительность границ аттрактора $\mathcal{A}_2$ находится аналогичным образом.

Стохастическая чувствительность 3-кусочного хаотического аттрактора

Пусть детерминированная системы (1.4.12) имеет 3-кусочный хаотический аттрактор $\mathcal{A}=\{\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3\}$. Тогда его части можно рассматривать как сосуществующие 1-кусочные хаотические аттракторы системы

$$x_{t+3}\ =\ f(f(f(x_t,0),0),0)\ =\ \varphi(x_t,0,0,0). \tag{1.4.16}$$

Здесь используется 3-шаговое отображение $\varphi(x,\beta)=\varphi(x,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=f(f(f(x_t,\beta_1),\beta_2),\beta_3)$, где $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$.

С помощью этого 3-шагового отображения можно переписать стохастическую систему (1.4.11) в виде

$$x_{t+3} = f(f(f(x_t, \eta_t), \eta_{t+1}), \eta_{t+2}) = \varphi(x_t, \eta_t, \eta_{t+1}, \eta_{t+2}). \tag{1.4.17}$$

Рассмотрим сначала границы однокусочного хаотического аттрактора $\mathcal{A}_1$. Пусть

$$c = \mathrm{argmax}_{x \in \mathcal{A}_1} \varphi(x, 0), \quad b = \sup \mathcal{A}_1 = \varphi(c, 0), \quad a = \inf \mathcal{A}_1 = \varphi(b, 0).$$

Стохастическая чувствительность $M(a)$ и $M(b)$ границ аттрактора $\mathcal{A}_1$ может быть вычислена по тем же формулам (1.4.15) с использованием

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(f(f(x,0),0),0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(f(x,0),0)\frac{\partial f}{\partial x}(x,0),$$

$$s(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}(x,0)\,V\,\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}^{\top}(x,0), \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_3}\right],$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_1}(x,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(f(f(x,0),0),0)\,\frac{\partial f}{\partial x}(f(x,0),0)\,\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,0),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_2}(x,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(f(x,0),0)\,\frac{\partial f}{\partial \eta}(x,0), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_3}(x,0) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(x,0).$$

Стохастическая чувствительность границ хаотических аттракторов $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ находится аналогично.

Примеры

Рассмотрим стохастически возмущенное логистическое уравнение

$$x_{t+1} = f(x_t, \eta_t), \qquad f(x,\eta) = \mu x(1-x) + \eta, \quad \eta_t = \varepsilon \xi_t, \tag{1.4.18}$$

где ξ_t – скалярный некоррелированный случайный процесс с параметрами $\mathrm{E}\xi_t = 0$, $\mathrm{E}\xi_t^2 = 1$, ε – интенсивность шума.

В отсутствие случайных возмущений эта динамическая система демонстрирует большое разнообразие как регулярных, так и хаотических аттракторов (см. рис. 1.4.2). Здесь выделены черным хаотические аттракторы: однокусочный при $\mu = 3.9$, 2-кусочный при $\mu = 3.6$ и 3-кусочный при $\mu = 3.8551$.

Рассмотрим сначала однокусочный хаотический аттрактор $\mathcal{A}$ при $\mu = 3.9$, имеющий положительный показатель Ляпунова $\Lambda = 0.496$ и границы

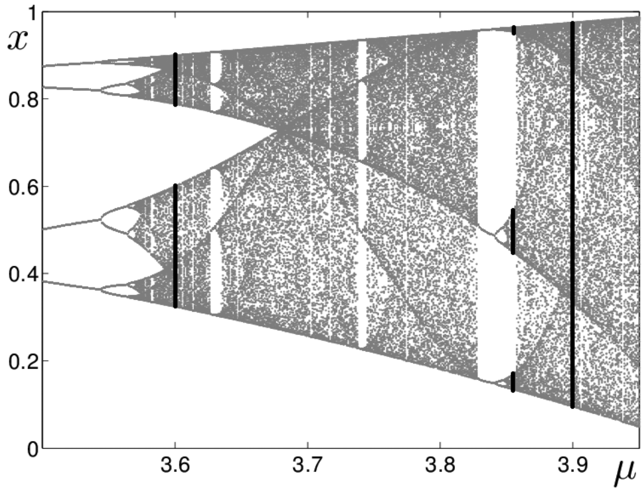


Рис. 1.4.2 – Аттракторы детерминированной системы (серый цвет). Выделены хаотические аттракторы для $\mu = 3.6$, $\mu = 3.8551$, $\mu = 3.9$.

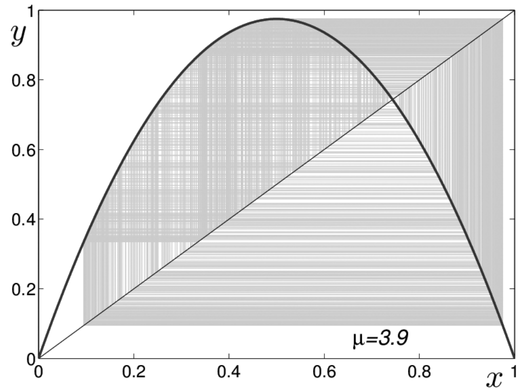


Рис. 1.4.3 – Итерации детерминированной системы (серый цвет) для $\mu = 3.9$.

$a = 0.0950625$ и $b = 0.975$. Итерации детерминированной системы, представляющие этот аттрактор, показаны на рис. 1.4.3 серым цветом, а функция $y = f(x, 0)$ изображена черным цветом. Эта функция имеет максимум в точке $c = 0.5$.

Для отыскания стохастической чувствительности в граничных точках a и b однокусочного аттрактора $\mathcal{A}$ воспользуемся формулой (1.4.8).

$$f(c, 0) = 0.25\mu, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \mu(1 - 2x), \quad \frac{\partial f}{\partial \eta} = 1, \quad s(c) = 1$$

и тогда

$$M(a) = \mu^2(1 - 0.5\mu)^2 + 1, \qquad M(b) = 1.$$

При $\mu = 3.9$ получаем $M(a) = 14.73$, $\quad M(b) = 1$. Таким образом, для дисперсии D_a случайных состояний, выходящих за левую границу a аттрактора $\mathcal{A}$, можно использовать приближение $D_a \approx \tilde{D}_a(\varepsilon) = 14.73 \cdot \varepsilon^2$. На рис. 1.4.4 построены графики функций $D_a(\varepsilon)$ и $\tilde{D}_a(\varepsilon)$. Как видим, результаты прямого численного моделирования согласуются с теоретическими оценками.

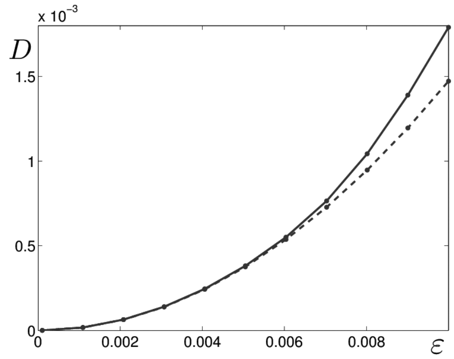


Рис. 1.4.4 – Дисперсия случайных состояний, выходящих за левую границу a хаотического аттрактора $\mathcal{A}$ при $\mu = 3.9$: график $D_a(\varepsilon)$ (сплошная линия), график $\tilde{D}_a(\varepsilon)$ (пунктир).

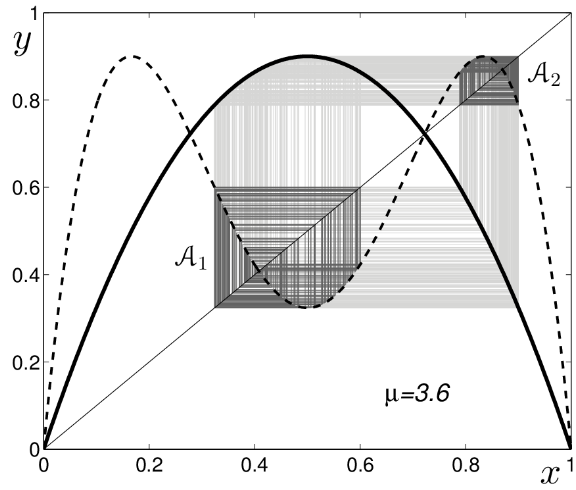


Рис. 1.4.5 – Итерации детерминированной системы (серый) для $\mu = 3.6$, график функции $y = f(x, 0)$ (сплошная черная), график функции $y = \varphi(x, 0)$ (пунктир), однокусочные хаотические аттракторы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$.

Рассмотрим теперь двухкусочный хаотический аттрактор $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ при $\mu = 3.6$, имеющий положительный показатель Ляпунова $\Lambda = 0.183$. Этот аттрактор выделен на рис. 1.4.2.

Итерации детерминированной системы, представляющие этот аттрактор, показаны на рис. 1.4.5 серым цветом, функция $y = f(x, 0)$ изображена черной сплошной линией, а функция $y = \varphi(x, 0) = f(f(x, 0), 0)$ детерминированного 2-шагового отображения показана пунктиром. Здесь также изображены отдельные однокусочные хаотические аттракторы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ для отображения $\varphi(x, 0)$.

Функция $\varphi(x, 0)$ имеет три экстремума $c_0 = \dfrac{1}{6}$, $c_1 = \dfrac{1}{2}$, $c_2 = \dfrac{5}{6}$. Отметим, что $c_1 \in \mathcal{A}_1$ и $c_2 \in \mathcal{A}_2$. Здесь границы b_1, a_1 аттрактора $\mathcal{A}_1$ равны

$$b_1 = \varphi(c_1, 0) = 0.324, \; a_1 = \varphi(b_1, 0) = 0.6004,$$

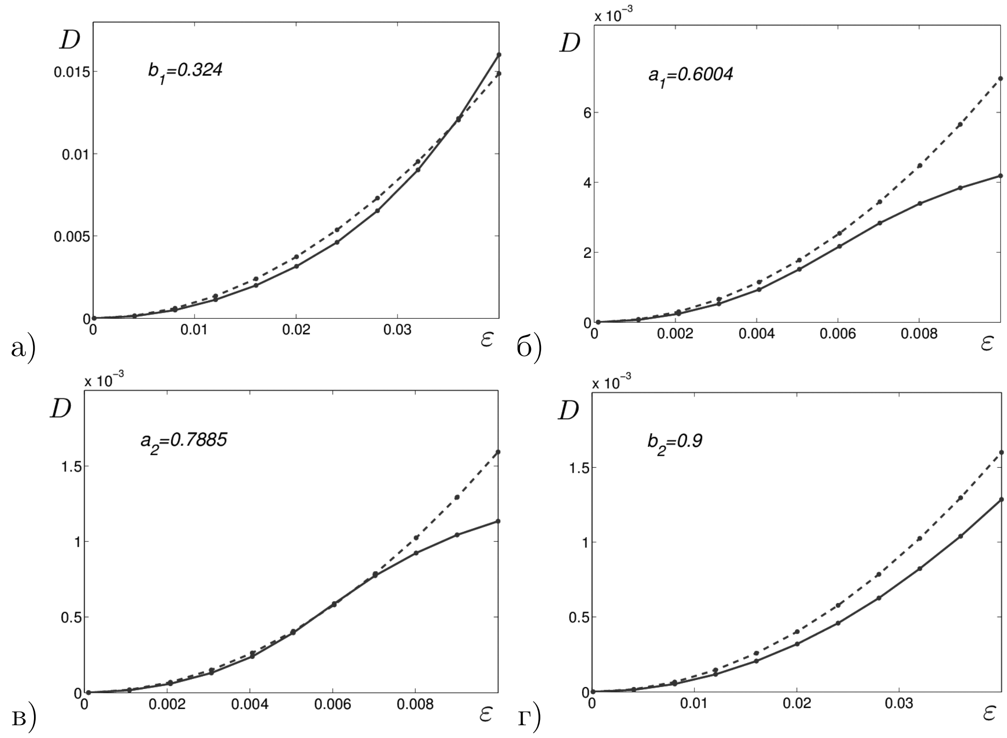


Рис. 1.4.6 – Дисперсия случайных состояний, выходящих за границы двухкусочного хаотического аттрактора $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ для $\mu = 3.6$ около границ: а) налево от b_1, б) направо от a_1, в) налево от a_2, г) направо от b_2. Кривые $D(\varepsilon)$ показаны сплошными линиями, аппроксимации $\tilde{D}(\varepsilon)$ – пунктиром.

а границы a_2, b_2 аттрактора $\mathcal{A}_2$ равны

$$b_2 = \varphi(c_2, 0) = 0.9, \ a_2 = \varphi(b_2, 0) = 0.7885.$$

Используя формулы (1.4.15), можно найти значения стохастической чувствительности

$$M(b_1) = 9.2944, \ M(a_1) = 69.706, \ M(a_2) = 15.925, \ M(b_2) = 1.$$

Как видим, стохастическая чувствительность граничных точек существенно отличается по величине. Эти значения стохастической чувствительности границ хаотического аттрактора будем использовать при аппроксимации дисперсии D случайных состояний, выходящих за границы этого аттрактора.

На рис. 1.4.6 значения дисперсии $D(\varepsilon)$, найденные с помощью прямого численного моделирования, показаны сплошной линией, а соответствующие аппроксимации $\tilde{D}(\varepsilon)$, использующие функцию стохастической чувствительности – пунктиром.

Рассмотрим теперь при $\mu = 3.8551$ трехкусочный хаотический аттрактор $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3\}$, имеющий положительный показатель Ляпунова $\Lambda = 0.166$. Этот аттрактор выделен на рис. 1.4.2.

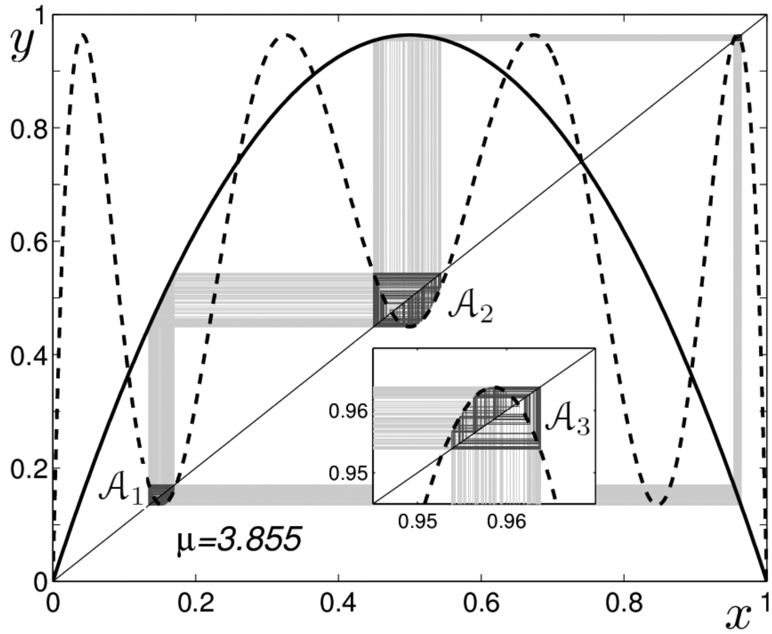


Рис. 1.4.7 – Итерации детерминированной системы (серый) для $\mu = 3.8551$, график функции $y = f(x, 0)$ (сплошная черная), график функции $\varphi(x, 0)$ (пунктир), однокусочные хаотические аттракторы $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$.

Итерации детерминированной системы, представляющие аттрактор $\mathcal{A}$, показаны на рис. 1.4.7 серым цветом, функция $y = f(x, 0)$ изображена черным цветом, а функция $\varphi(x, 0) = f(f(f(x, 0), 0), 0)$ детерминированного 3-шагового отображения показана пунктиром. Здесь также изображены отдельные однокусочные хаотические аттракторы $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$ для отображения $\varphi(x, 0)$.

Три из семи экстремумов функции $\varphi(x, 0)$ принадлежат этим хаотическим аттракторам: $c_1 = 0.15315 \in \mathcal{A}_1$, $c_2 = \dfrac{1}{2} \in \mathcal{A}_2$, and $c_3 = 0.95855 \in \mathcal{A}_3$. Аттракторы $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ имеют следующие границы:

$$\mathcal{A}_1: \quad b_1 = \varphi(c_1, 0) = 0.1346,\ a_1 = \varphi(b_1, 0) = 0.1700,$$

$$\mathcal{A}_2: \quad b_2 = \varphi(c_2, 0) = 0.4490,\ a_2 = \varphi(b_2, 0) = 0.5440,$$

$$\mathcal{A}_3: \quad b_3 = \varphi(c_3, 0) = 0.9638,\ a_3 = \varphi(b_3, 0) = 0.9538.$$

Используя формулы (1.4.15), в этих граничных точках можно найти значения стохастической чувствительности

$$M(b_1) = 13.79, \quad M(a_1) = 221.99;$$

$$M(b_2) = 110.43; \quad M(a_2) = 1437.94,$$

$$M(a_3) = 18.05; \quad M(b_3) = 1.$$

Эти значения стохастической чувствительности границ хаотического аттрактора будем использовать при аппроксимации дисперсии D случайных состояний, выходящих за границы этого аттрактора.

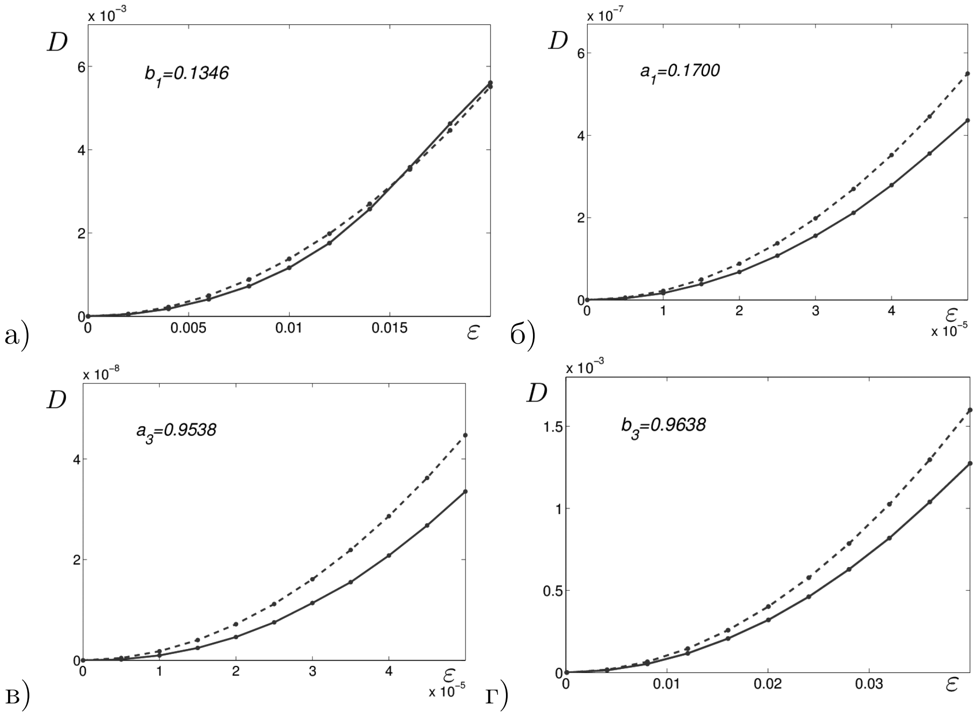


Рис. 1.4.8 – Дисперсия случайных состояний, выходящих за границы трехкусочного хаотического аттрактора $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3\}$ для $\mu = 3.8551$ около границ: а) налево от b_1, б) направо от a_1, в) налево от a_3, г) направо от b_3. Кривые $D(\varepsilon)$ показаны сплошными линиями, аппроксимации $\tilde{D}(\varepsilon)$ – пунктиром.

На рис. 1.4.8 значения дисперсии $D(\varepsilon)$, найденные с помощью прямого численного моделирования, показаны сплошной линией, а соответствующие аппроксимации $\tilde{D}(\varepsilon)$, использующие функцию стохастической чувствительности – пунктиром.

Приведенные выше результаты экспериментов показали, что разброс случайных состояний вне исходных детерминированных аттракторов существенно зависит от того, из скольки частей он состоит, и о каких границах – внешних или внутренних – идет речь. Значения величины этого разброса определяется стохастической чувствительностью соответствующей границы. При этом оценка дисперсии, полученная с помощью техники стохастической чувствительности, дает хорошую аппроксимацию.

1.4.3. Стохастическая чувствительность двумерного хаотического аттрактора

Рассмотрим общую двумерную нелинейную дискретную динамическую систему

$$x_{t+1} = f(x_t, \eta_t), \quad \eta_t = \varepsilon \xi_t, \tag{1.4.19}$$

где $f(x, \eta)$ – гладкая функция, ξ_t – m-мерный некоррелированный случайный процесс с параметрами $\mathrm{E}\xi_t = 0$, $\mathrm{E}\xi_t\xi_t^\top = V$, V – ковариационная $m \times m$-матрица, ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Рассмотрим решение $\bar{x}_t$ $(t = 0, 1, \dots)$ соответствующей детерминированной системы

$$x_{t+1} = f(x_t, 0). \tag{1.4.20}$$

Обозначим через x_t^ε решение стохастической системы (1.4.19) с начальным условием $x_0^\varepsilon = \bar{x}_0$. Чувствительность решения $\bar{x}_t$ к случайным возмущениям определяется асимптотической переменной

$$z_t = \left.\frac{\partial x_t^\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x_t^\varepsilon - \bar{x}_t}{\varepsilon}.$$

Динамика пары $(\bar{x}_t, z_t)$ задается стохастическим линейным расширением

$$\begin{aligned} &\bar{x}_{t+1} = f(\bar{x}_t, 0), \qquad z_{t+1} = F_t z_t + G_t\, \xi_t, \\ &F_t = F(\bar{x}_t),\ G_t = G(\bar{x}_t),\ F(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0),\ G(x) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, 0). \end{aligned} \tag{1.4.21}$$

Хаотические аттракторы в системе (1.4.20) возможны лишь в случае необратимости отображения $f(x, 0)$. Обозначим через $\mathcal{A}$ хаотический аттрактор системы (1.4.20), а через L – его кусочно гладкую границу. Под действием шума, случайное решение системы (1.4.19), стартующее с $\mathcal{A}$ может выйти за границу L и оказаться вне аттрактора $\mathcal{A}$. В силу устойчивости $\mathcal{A}$, после нескольких итераций, случайное решение возвращается вовнутрь аттрактора $\mathcal{A}$. В результате таких стохастических переходов вокруг $\mathcal{A}$ формируется некоторое вероятностное распределение. Стохастическая динамика внутри $\mathcal{A}$ может быть чрезвычайно сложной в силу расходимости траекторий на хаотическом аттракторе. Здесь изучается только стационарное вероятностное распределение вне аттрактора $\mathcal{A}$.

В этих обстоятельствах возникают две задачи. Первая состоит в определении границы L хаотического аттрактора $\mathcal{A}$. Вторая задача состоит в оценке разброса случайных состояний, выходящих за эту границу.

Первая задача может быть решена с помощью так называемых критических кривых [262] следующим образом. Рассмотрим начальную критическую кривую $\gamma = \{x \mid \det F(x) = 0\}$. Обозначим $L_0 = \gamma \cap \mathcal{A}$ и последовательно найдем кривые $L_1 = f(L_0, 0), L_2 = f(L_1, 0),\ L_3 = f(L_2, 0), \dots$. Эти кривые и составляют границу L хаотического аттрактора $\mathcal{A}$. Таким образом, состояние x_t детерминированного решения будет располагаться на границе L_1, если его прообраз x_{t-1} принадлежит L_0. Тогда последовательные состояния $x_{t+1}, x_{t+2}, \ldots$ будут, соответственно, принадлежать $L_2,\ L_3, \ldots$.

Перейдем теперь ко второй задаче, связанной с оценкой разброса случайных состояний, лежащих вне аттрактора $\mathcal{A}$. Здесь нам потребуются следующие геометрические построения.

Рассмотрим произвольную точку $\bar{x} \in L_0$ и ее образ $\bar{y} = f(\bar{x}, 0) \in L_1$. Пусть q – касательный вектор к L_0 в точке $\bar{x}$. Тогда вектор $r = F(\bar{x})q$ будет касательным к L_1 в точке $\bar{y}$. Вследствие сингулярности $F(\bar{x})$, существует ненулевой вектор v, такой что $F(\bar{x})v = 0$. Отметим, что векторы v и q линейно независимы, поэтому для любого вектора x найдутся скалярные коэффициенты α и β, такие что $x = \alpha q + \beta v$.

Пусть n – нормализованный вектор, ортогональный к L_1 в точке $\bar{y}$. Из соотношений $n^\top F(\bar{x})q = n^\top r = 0$ и $F(\bar{x})v = 0$ следует

$$n^\top F(\bar{x})x = \alpha n^\top F(\bar{x})q + \beta n^\top F(\bar{x})v = 0. \tag{1.4.22}$$

Для параметрического анализа отклонения случайных состояний от границы L вне $\mathcal{A}$, воспользуемся техникой стохастической чувствительности. Стохастическая чувствительность в точке $\bar{y}$ границы L_1 хаотического аттрактора $\mathcal{A}$ определяется стохастической чувствительностью детерминированного решения $\bar{x}_t$, проходящего через точку $\bar{y}$. Пусть $\bar{x}$ – произвольная точка L_0 и $\bar{x}_t$ – детерминированное решение с начальными условиями $\bar{x}_0 = \bar{x}$. Тогда $\bar{x}_1 = \bar{y} \in L_1$. Последовательные значения z_0, z_1 асимптотик отклонения случайных состояний x_0^ε, x_1^ε от $\bar{x}_0$, $\bar{x}_1$ связаны соотношением

$$z_1 = F_0 z_0 + G_0 \xi_0.$$

Из (1.4.22) и $F_0 = F(\bar{x})$ следует

$$n^\top z_1 = n^\top G_0 \xi_0.$$

Это означает, что асимптотика z_1 отклонений вдоль вектора n, ортогонального к L_1 в точке $\bar{y}$ не зависит от z_0. Проекция $n^\top z_1$ полностью определяется нормальным вектором n, матрицей G_0 и случайным возмущением ξ_0. Благодаря этому, получаем

$$\mu = \mathrm{E}(n^\top z_1)^2 = n^\top Q_0 n, \qquad Q_0 = G_0 V G_0^\top.$$

Таким образом, значение $\mu_1(\bar{y})$ стохастической чувствительности в точке $\bar{y}$ границы L_1 может быть найдено в явной форме

$$\mu_1(\bar{y}) = n^\top(\bar{y}) Q(\bar{x}) n(\bar{y}), \qquad Q(\bar{x}) = G(\bar{x}) V G(\bar{x})^\top,$$

где $\bar{y} = f(\bar{x}, 0)$, нормализованный вектор $n(\bar{y})$ ортогонален к L_1 в точке $\bar{y}$.

Последовательные значения $\mu_2,\ \mu_3, \dots$ стохастической чувствительности в точках $\bar{x}_2 \in L_2,\ \bar{x}_3 \in L_3, \dots$, лежащих на границе хаотического аттрактора $\mathcal{A}$, могут быть найдены рекуррентно.

Действительно, пусть n_t $(t = 1, 2, \dots)$ – нормализованные векторы, ортогональные к кривым L_t в точках $\bar{x}_t$ детерминированного решения, стартующего из $\bar{x}_0 = \bar{x} \in L_0$. Здесь естественно положить $W_1 = \mu_1 n_1 n_1^\top$ как значение матрицы стохастической чувствительности в точке $\bar{x}_1$ кривой L_1. Последовательные матрицы $W_2, W_3, \dots$, характеризующие стохастическую чувствительность границ $L_2, L_3, \dots$ в точках $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots$, и скалярные значения $\mu_2, \mu_3, \dots$ могут быть найдены по формулам

$$\mu_{t+1} = n_{t+1}^\top \left(F_t W_t F_t^\top + Q_t\right) n_{t+1}, \quad W_{t+1} = \mu_{t+1} n_{t+1} n_{t+1}^\top, \quad t = 1, 2, \dots.$$

Отметим, что последовательность n_t ортогональных векторов может быть найдена с помощью соответствующих касательных векторов q_t, связанных рекуррентно: $q_{t+1} = F_t q_t$. Здесь q_0 – вектор, касательный к L_0 в точке $\bar{x}$.

Функция стохастической чувствительности $\mu_t(x)$ границы L_t хаотического аттрактора $\mathcal{A}$ может быть использована для построения соответствующей доверительной области. Эта область формируется семейством доверительных интервалов. В точке $x \in L_t$, границы такого интервала в соответствии с "правилом трех сигм"вычисляются по формулам

$$\tilde{x}_{1,2} = x \pm 3\varepsilon\sqrt{\mu_t(x)}\, n_t(x), \tag{1.4.23}$$

где $n_t(x)$ – нормализованный вектор, ортогональный L_t в точке x.

Пример

В качестве примера, рассмотрим модель [263] со случайными возмущениями

$$\begin{aligned} x_{1,t+1} &= 1 - a x_{2,t}^2 + b x_{1,t} + \varepsilon \xi_t \\ x_{2,t+1} &= x_{1,t}. \end{aligned} \tag{1.4.24}$$

Здесь ξ_t – последовательность некоррелированных гауссовских случайных величин с параметрами $\langle \xi_t \rangle = 0,\ \langle \xi_t^2 \rangle = 1$.

При $a = 1.1,\ b = 0.3$, соответствующая детерминированная система имеет хаотический аттрактор. Этот аттрактор, наряду с критическими линиями L_i, показан на рис. 1.4.9a. Здесь, например, кривая L_1 принадлежит прямой $x_2 = (x_1 - 1)/b$, а кривая L_2 принадлежит параболе $x_1 = 1 - a(x_2 - 1)^2/b^2 + b x_2$.

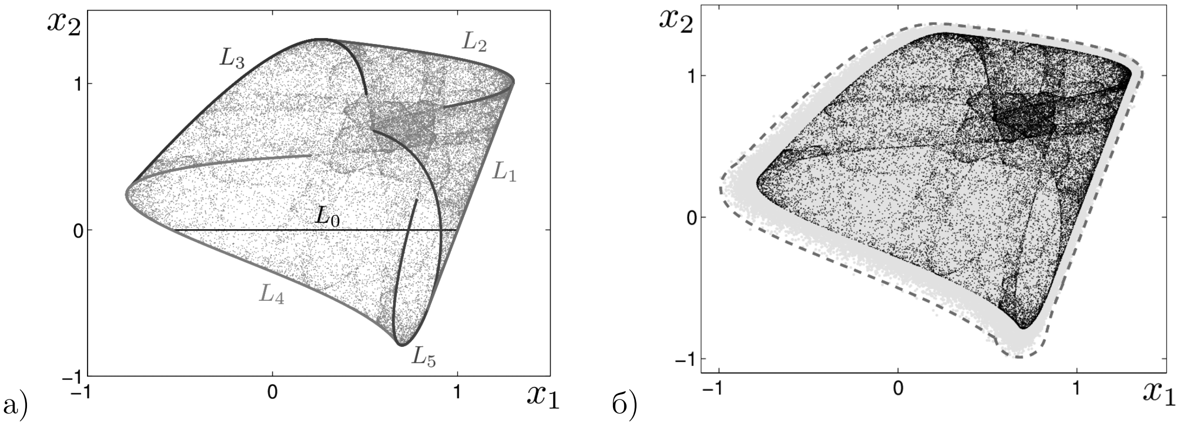


Рис. 1.4.9 – Система (1.4.24): а) детерминированный хаотический аттрактор и критические линии, б) случайные состояния при $\varepsilon = 0.02$ и граница доверительной области (пунктир).

На рис. 1.4.9б, наряду с детерминированным аттрактором, пунктиром показана найденная по описанному выше алгоритму граница доверительной области для $\varepsilon = 0.02$. Здесь же точками показаны случайные состояния системы (1.4.24), найденные прямым численным моделированием. Как видим, доверительная область хорошо описывает особенности разброса случайных состояний.

Представленные здесь теоретические результаты по стохастической чувствительности хаотических аттракторов опубликованы в работах [211,221,236] автора диссертации. Приложения этой теории даны в диссертации: в разделе 3.1.3 для анализа индуцированных шумом переходов между порядком и хаосом вблизи бифуркации кризиса, в разделе 3.2.4 для анализа переходов между частями хаотического аттрактора, в разделе 5.5.1 для параметрического изучения феномена индуцированного шумом вымирания. Конструктивные возможности разработанных методов в исследовании различных стохастических явлений для дискретных систем в зонах хаоса были представлены в цикле статей: в [211, 221, 264] для моделей логистического типа, в [226] для нейронной модели Рулькова, в [227] для популяционной модели Риккера с Олли эффектом и для популяционной модели Хасселя с внутренними кризисами [265] и с запаздыванием [266].

Глава 2. Аппроксимация аттракторов непрерывных стохастических систем

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx = f(x)dt, \tag{2.0.1}$$

где x – n-мерный вектор, $f(x)$ – достаточно гладкая n-вектор-функция.

Наряду с системой (2.0.1) рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений Ито [267, 268]

$$dx = f(x)dt + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(x)dw_i(t), \tag{2.0.2}$$

где $\sigma_i(x)$ – вектор-функции, $w_i(t)$ – скалярные независимые стандартные винеровские процессы. Функции $\sigma_i(x)$ моделируют возможную параметрическую зависимость интенсивности случайных воздействий от состояния системы.

2.1. Равновесие

Предполагается, что система (2.0.1) имеет экспоненциально устойчивое равновесие $\bar{x}$.

Определение 2.1. Равновесие $\bar{x}$ называется *экспоненциально устойчивым* для системы (2.0.1), если для некоторой окрестности U существуют $K > 0$, $l > 0$ такие, что для всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\|x(t) - \bar{x}\| \;\leqslant\; Ke^{-lt}\|x_0 - \bar{x}\|,$$

где $x(t)$ – решение системы (2.0.1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in \mathrm{U}$, $\|\cdot\|$ – Евклидова норма.

Решения стохастической системы (2.0.2), покидая под действием случайных возмущений детерминированное равновесие $\bar{x}$, формируют некоторое вероятностное распределение. Предполагается, что вероятностное распределение состояний системы (2.0.2) стабилизируется. Соответствующая устойчивая стационарная плотность распределения удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова [104, 269]. Непосредственное использование этого уравнения для описания стационарного распределения весьма затруднительно уже в двумерном случае. Здесь, при малых шумах, весьма конструктивными являются аппроксимации, получаемые с помощью систем первого приближения.

2.1.1. Система первого приближения и ее моменты

Для отклонений $z = x - \bar{x}$ случайных состояний x системы (2.0.2) от положения равновесия $\bar{x}$ запишем систему первого приближения

$$dz = Fzdt + \sum_{i=1}^{k}(S_{0,i} + S_{1,i}z)dw_i, \tag{2.1.1}$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S_{0,i} = \sigma_i(\bar{x}), \quad S_{1,i} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial x}(\bar{x}).$$

Динамика первых $m = \mathrm{E}(z)$, и вторых $M = \mathrm{E}(zz^\top)$ моментов решений системы (2.1.1) определяется уравнениями:

$$\dot{m} = Fm, \tag{2.1.2}$$

$$\dot{M} = FM + MF^\top + \sum_{i=1}^{k}\left(S_{0,i}S_{0,i}^\top + S_{0,i}m^\top S_{1,i}^\top + S_{1,i}mS_{0,i}^\top + S_{1,i}MS_{1,i}^\top\right). \tag{2.1.3}$$

Нас интересуют стационарные решения этой системы, позволяющие найти аппроксимацию разброса случайных состояний вокруг детерминированного равновесия $\bar{x}$.

Для подсистемы (2.1.2) в силу экспоненциальной устойчивости равновесия $\bar{x}$ выполняется $\mathrm{Re}\lambda_i(F) < 0$, где $\lambda_i(F), i = 1, ..., n,$ – собственные значения матрицы F. Поэтому единственным стационарным и устойчивым решением системы (2.1.2) является вектор $\bar{m} = 0$. Подставляя это решение $\bar{m} = 0$ в (2.1.3), получаем уравнение

$$\dot{M} = FM + MF^\top + \sum_{i=1}^{k}\left(S_{0,i}S_{0,i}^\top + S_{1,i}MS_{1,i}^\top\right). \tag{2.1.4}$$

Матрица $\bar{M}$ стационарного решения (2.1.4) удовлетворяет уравнению:

$$F\bar{M} + \bar{M}F^\top + \sum_{i=1}^{k}\left(S_{0,i}S_{0,i}^\top + S_{1,i}\bar{M}S_{1,i}^\top\right) = 0. \tag{2.1.5}$$

Тогда для отклонений $\Delta = M - \bar{M}$ получим однородное уравнение

$$\dot{\Delta} = F\Delta + \Delta F^\top + \sum_{i=1}^{k} S_{1,i}\Delta S_{1,i}^\top. \qquad (2.1.6)$$

Матрица Δ является матрицей вторых моментов $\Delta = \mathrm{E}yy^\top$ решений y линейного однородного стохастического уравнения

$$dy = Fydt + \sum_{i=1}^{k} S_{1,i}ydw_i. \qquad (2.1.7)$$

Таким образом, интересующий нас вопрос об устойчивости стационарного решения $\bar{M}$ уравнения (2.1.4) сводится к эквивалентному вопросу об экспоненциальной устойчивости в среднем квадратичном тривиального решения $y = 0$ стохастической системы (2.1.7).

Определение 2.2. Решение $y \equiv 0$ стохастической системы (2.1.7) называется *экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном*, если существуют $K > 0,\ \ l > 0$ такие, что для всех $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\mathrm{E}\|y(t)\|^2 \ \leqslant\ Ke^{-lt}\,\mathrm{E}\|y(0)\|^2,$$

где $y(t)$ – решение системы (2.1.7) с начальным состоянием $y(0) = y_0$.

Устойчивость в среднем квадратичном для стохастических систем дифференциальных уравнений Ито исследовалась, например, в [12, 270].

Введем матрицу $S_0 = \sum_{i=1}^{k} S_{0,i}S_{0,i}^\top$ и операторы

$$\mathcal{A}[M] = FM + MF^\top, \quad \mathcal{S}[M] = \sum_{i=1}^{k} S_{1,i}MS_{1,i}^\top, \quad \mathcal{P} = -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}.$$

Перепишем уравнения (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) в виде:

$$\dot{M} = \mathcal{A}[M] + \mathcal{S}(M) + S_0, \qquad (2.1.8)$$

$$\mathcal{A}[\bar{M}] + \mathcal{S}[\bar{M}] + S_0 = 0, \qquad (2.1.9)$$

$$\dot{\Delta} = \mathcal{A}[\Delta] + \mathcal{S}[\Delta]. \qquad (2.1.10)$$

Существование оператора $\mathcal{A}^{-1}$ следует из условия $\mathrm{Re}\lambda_i(F) < 0$.

Теорема 2.1.

Следующие утверждения эквивалентны:

(а) Система (2.1.8) имеет стационарное экспоненциально устойчивое решение $\bar{M}$, удовлетворяющее (2.1.9);

(б) Решение $\Delta \equiv 0$ системы (2.1.10) является экспоненциально устойчивым;

(в) Решение $y \equiv 0$ стохастической системы (2.1.7) является экспоненциально устойчивым в среднем квадратичном;

(г) $\mathrm{Re}\lambda_i(F) < 0$ $(i = 1, ..., n)$ и $\rho(\mathcal{P}) < 1$, где $\rho(\mathcal{P})$ – спектральный радиус оператора $\mathcal{P}$.

Утверждения этой теоремы доказаны или следуют из более общих результатов, представленных в [12, 116, 271, 272].

Замечание 2.1. В одномерном случае $(n = 1)$

$$S_0 = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2(\bar{x}), \quad \mathcal{A}[M] = 2f^{'}(\bar{x})M, \quad \mathcal{S}[M] = \sum_{i=1}^{k} \left(\sigma_i^{'}(\bar{x})\right)^2 M$$

и условие $\rho(\mathcal{P}) < 1$ имеет явное параметрическое представление:

$$\rho(\mathcal{P}) = -\frac{1}{2f'(\bar{x})} \sum_{i=1}^{k} \left(\sigma_i^{'}(\bar{x})\right)^2 < 1.$$

Тогда для дисперсии разброса случайных состояний вокруг $\bar{x}$ справедлива оценка

$$M = -\frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2(\bar{x})}{2f^{'}(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{k} \left(\sigma_i^{'}(\bar{x})\right)^2}. \tag{2.1.11}$$

2.1.2. Асимптотика при малых шумах. Стохастическая чувствительность равновесия

Рассмотрим стохастическую систему

$$dx = f(x)dt + \varepsilon \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(x) dw_i(t), \tag{2.1.12}$$

где ε – скалярный малый параметр интенсивности возмущений. Для этой системы уравнение (2.1.9) для ковариационной матрицы M равновесия $\bar{x}$ имеет вид

$$\mathcal{A}[M] + \varepsilon^2 \mathcal{S}[M] + \varepsilon^2 S_0 = 0.$$

Исследуем зависимость решения $M(\varepsilon)$ этого уравнения от параметра ε. Пусть $W(\varepsilon)$ – решение уравнения

$$\mathcal{A}[W] + \varepsilon^2 \mathcal{S}[W] + S_0 = 0. \tag{2.1.13}$$

Тогда $M(\varepsilon) = \varepsilon^2 W(\varepsilon)$. Для $W(\varepsilon)$ можно записать следующее разложение:

$$W(\varepsilon) = -(\mathcal{A} + \varepsilon^2 \mathcal{S})^{-1}[S_0] = -\left(I + \varepsilon^2 \mathcal{A}^{-1}\mathcal{S}\right)^{-1} \mathcal{A}^{-1}[S_0] =$$

$$= \left(I - \varepsilon^2 \mathcal{P}\right)^{-1} [W(0)].$$

Отсюда при малом ε выполняется

$$W(\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m} \mathcal{P}^m [W(0)] = W(0) + \varepsilon^2 \mathcal{P}[W(0)] + \varepsilon^4 \mathcal{P}^2 [W(0)] + ...$$

В результате, для матричной функции $M(\varepsilon)$ получаем разложение по степеням малого параметра

$$M(\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{2m+2} \mathcal{P}^m [W(0)] = \varepsilon^2 W(0) + \varepsilon^4 \mathcal{P}[W(0)] + \varepsilon^6 \mathcal{P}^2 [W(0)]...$$

Матрица $W(0)$, присутствующая в этом разложении, играет важную роль в асимптотическом анализе разброса случайных состояний вокруг равновесия. В силу равенства $W(0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} M(\varepsilon)$, эта матрица характеризует стохастическую чувствительность к воздействию малых шумов. Таким образом, в первом приближении

$$M(\varepsilon) \approx M^{(1)}(\varepsilon) = \varepsilon^2 W, \tag{2.1.14}$$

где W – решение уравнения

$$FW + WF^{\top} + S_0 = 0. \tag{2.1.15}$$

Если шумы в системе (2.1.12) не зависят от состояния, то $\mathcal{P} = 0$ и первое приближение совпадает с точным значением: $M(\varepsilon) = \varepsilon^2 W$. В общем случае использование W в качестве аппроксимации для $M(\varepsilon)$ приводит к занижению оценки ковариации разброса. Действительно, в силу положительности оператора $\mathcal{P}$, справедливо неравенство $M(\varepsilon) \succeq \varepsilon^2 W$.

В одномерном случае стохастическая чувствительность равновесия $\bar{x}$ для системы (2.1.12) задается формулой

$$W = -\frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2(\bar{x})}{2f'(\bar{x})}. \tag{2.1.16}$$

Пример 1.

Для иллюстрации представленной выше общей теории по аппроксимации разброса вокруг равновесия, рассмотрим следующую простую динамическую систему

$$dx = -axdt + \varepsilon(\sigma_1 dw_1(t) + \sigma_2 x dw_2(t)),$$

где $a,\ \sigma_1,\ \sigma_2$ – неотрицательные параметры, ε – интенсивность случайных возмущений, $w_i(t)$ – некоррелированные скалярные винеровские процессы. Величины σ_1 и σ_2 задают веса аддитивных и мультипликативных возмущений.

При $a > 0$ соответствующая детерминированная система ($\varepsilon = 0$) имеет экспоненциально устойчивое равновесие $\bar{x} = 0$. Вторые моменты $M(t) = \mathrm{E}(x(t) - \bar{x})^2$ отклонений решений $x(t)$ от равновесия удовлетворяют уравнению

$$\dot{M} = -2aM + \varepsilon^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 M),$$

имеющему стационарное решение

$$M(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2\sigma_1^2}{2a - \varepsilon^2\sigma_2^2}.$$

Следуя теории из п. 2.1.2, для $M(\varepsilon)$ при малых шумах можно записать асимптотику

$$M(\varepsilon) = \varepsilon^2 W + O(\varepsilon^4),$$

где W – величина, характеризующая стохастическую чувствительность равновесия $\bar{x}$. Эта величина удовлетворяет уравнению (2.1.15)

$$-2aW + \sigma_1^2 = 0.$$

Величина W позволяет для функции $M(\varepsilon)$ записать первое приближение

$$M^{(1)}(\varepsilon) = \varepsilon^2 W = \frac{\varepsilon^2\sigma_1^2}{2a}.$$

Формально, аппроксимация $M^{(1)}(\varepsilon)$ определена при любых $a > 0$ в то время как аппроксимируемая функция $M(\varepsilon)$ определена только для $a > \frac{\varepsilon^2\sigma_2^2}{2}$. В отсутствие мультипликативных шумов ($\sigma_2 = 0$), функции $M^{(1)}$ и M тождественно совпадают. При $\sigma_2 \neq 0$ они отличаются.

Это отличие хорошо видно на рис. 2.1.1, где представлены графики функций M (сплошная линия) и $M^{(1)}$ (пунктир) при изменении параметра a. Во-первых, аппроксимация $M^{(1)}$ всегда меньше M (это было показано в п. 2.1.2 для общего случая). Во-вторых, на интервале $0 < a < \frac{\varepsilon^2\sigma_2^2}{2}$, где аппроксимация дает конечные значения, исходная функция вообще не определена – вторые моменты $M(t)$ стремятся к бесконечности. На интервале $a > \frac{\varepsilon^2\sigma_2^2}{2}$ ошибка аппроксимации монотонно возрастает и стремится к бесконечности при приближении к бифуркационному значению $a_* = \frac{\varepsilon^2\sigma_2^2}{2}$. Для относительной погрешности здесь можно написать явное представление

$$\left|\frac{M - M^{(1)}}{M}\right| = \frac{\varepsilon^2\sigma_2^2}{2a}.$$

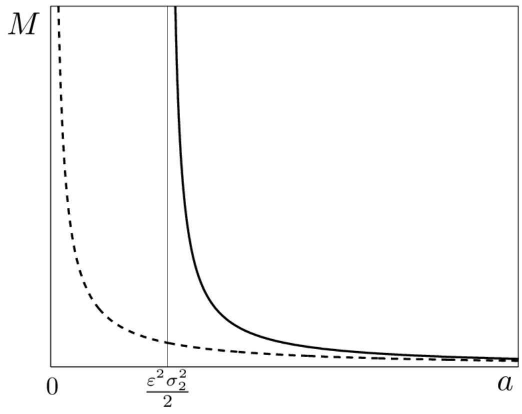


Рис. 2.1.1 – Графики стационарных вторых моментов M (сплошная линия) и их аппроксимации $M^{(1)}$ (пунктир).

Продолжим далее сравнение этих двух способов оценки разброса случайных состояний вокруг равновесия на примере двумерной системы.

Пример 2.

Рассмотрим стохастически возмущенный осциллятор Ван-дер-Поля

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + a(1-x^2)y + \sigma_1\dot{w}_1 + \sigma_2 y\dot{w}_2, \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

где σ_1 – интенсивность аддитивного шума, σ_2 – интенсивность параметрического шума, $w_{1,2}$ – независимые винеровские процессы. Здесь используется более краткая формальная запись системы стохастических дифференциальных уравнений, которая, как и выше, трактуется в смысле Ито.

Детерминированная система ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$) имеет равновесие $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, устойчивое при $a < 0$. Под действием малых стохастических возмущений случайные траектории покидают это равновесие и формируют стационарное вероятностное распределение, сконцентрированное в малой окрестности начала координат.

Исследуем зависимость дисперсии D координаты x этого распределения от параметров системы. Для аналитической аппроксимации этой дисперсии воспользуемся представленной выше техникой систем первого приближения.

Параметры уравнения (2.1.9) для системы (2.1.17) имеют вид:

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix} \quad S_1 = \sigma_1^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}(M) = \sigma_2^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}.$$

Уравнения (2.1.9) для элементов матрицы $M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$, могут быть

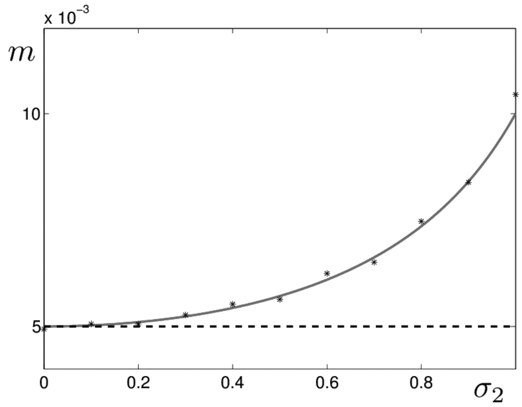


Рис. 2.1.2 – Дисперсия x-координаты решений стохастической системы (2.1.17) с $a = -1,\ \sigma_1 = 0.1$.

записаны в виде системы:

$$m_{12} = m_{21} = 0, \quad -m_{11} + am_{12} + m_{22} = 0, \quad -2m_{12} + 2am_{22} + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 m_{22} = 0.$$

Из этой системы находим

$$m_{11} = m_{22} = -\frac{\sigma_1^2}{2a + \sigma_2^2}, \quad m_{12} = m_{21} = 0.$$

Эта матрица диагональна и $m_{11} = m_{22}$. Будем использовать функцию m_{11} для аппроксимации дисперсии D.

Положим $a = -1,\ \sigma_1 = 0.1$ и рассмотрим зависимость m_{11} от параметра σ_2. На рис. 2.1.2 функция $m_{11}(\sigma_2)$ изображена сплошной линией, а звездочками показаны значения дисперсии D, найденные прямым численным моделированием решений стохастической системы (2.1.17). Как видим, используемая аппроксимация хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования.

Сравним полученные результаты с аппроксимацией

$$m_{11}^{(1)} = -\frac{\sigma_1^2}{2a},$$

полученной с помощью функции стохастической чувствительности. На рис. 2.1.2 функция $m_{11}^{(1)}(\sigma_2)$ изображена пунктиром. Аппроксимация $m_{11}^{(1)}$ не учитывает влияние параметрического шума, поэтому с ростом σ_2 погрешность этой аппроксимации возрастает.

Разница в этих приближениях может привести к качественным различиям в прогнозировании результатов влияния шума.

Рассмотрим модель Ван-дер-Поля с жестким возбуждением

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y \\ &\dot{y} = -x + (a + bx^2 - x^4)y + \sigma_1 \dot{w}_1 + \sigma_2 y \dot{w}_2. \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

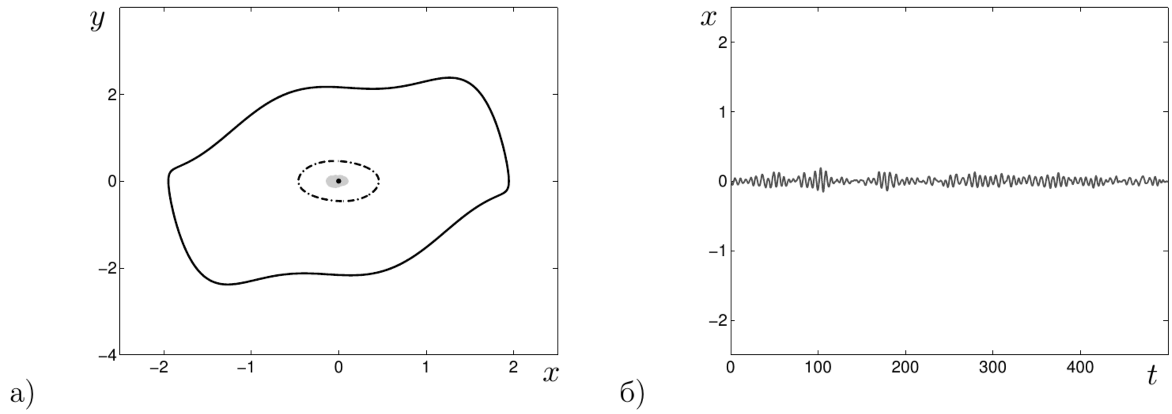


Рис. 2.1.3 – Стохастическая система (2.1.18) с $\sigma_1 = 0.02, \ \ \sigma_2 = 0.2$: а) случайная траектория (серый цвет); б) временной ряд.

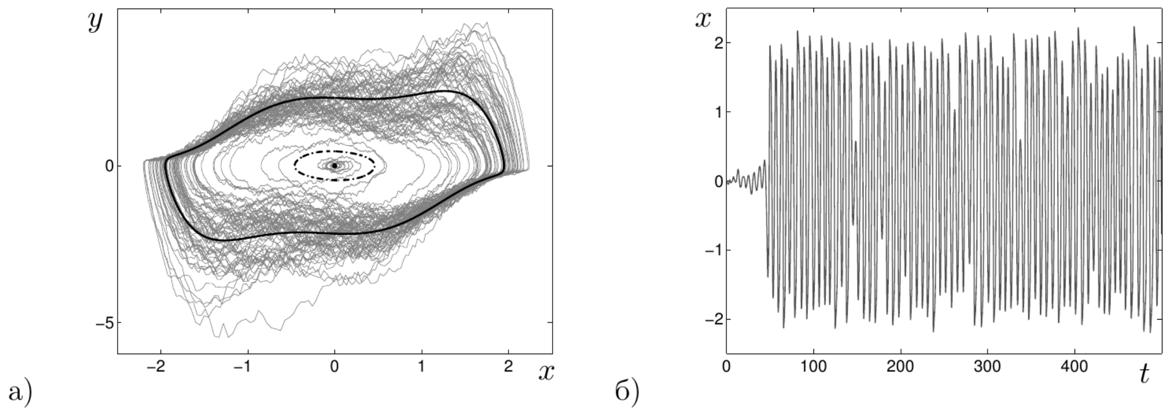


Рис. 2.1.4 – Стохастическая система (2.1.18) с $\sigma_1 = 0.05, \ \ \sigma_2 = 0.4$: а) случайная траектория (серый цвет); б) временной ряд.

Зафиксируем $a = -0.1, \ b = 2$. При этих параметрах детерминированная система (2.1.18) с $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ имеет сосуществующие аттракторы: устойчивое равновесие $\bar{x} = 0, \ \bar{y} = 0$ и устойчивый предельный цикл. Эти аттракторы разделены неустойчивым предельным циклом. На рис. 2.1.3а, 2.1.4а это равновесие показано черным кружком, устойчивый цикл – сплошной линией, а неустойчивый – штрих-пунктиром.

Рассмотрим поведение траекторий стохастической системы (2.1.18), стартующих с равновесия. Под действием случайных возмущений траектории покидают устойчивое равновесие и образуют стационарное вероятностное распределение, сосредоточенное в малой окрестности начала координат. Этот тип динамики соответствует невозбужденному режиму осциллятора (см. рис. 2.1.3 для $\sigma_1 = 0.02, \ \ \sigma_2 = 0.2$).

При увеличении интенсивности шума случайные траектории пересекают сепаратрису (неустойчивый предельный цикл) и продолжают совершать колебания уже вблизи устойчивого цикла. Это означает переход к режиму

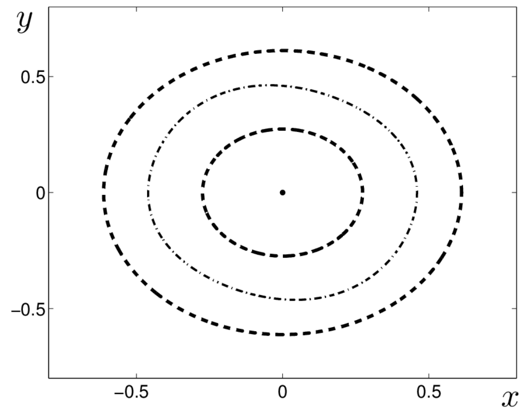


Рис. 2.1.5 – Доверительные эллипсы (пунктир) и неустойчивый цикл (штрихпунктир) для системы (2.1.18) с $a = -1$, $\sigma_1 = 0.05$, $\sigma_2 = 0.4$. Внутренний эллипс построен по матрице $M^{(1)}$, внешний – по матрице M.

возбуждения (см. рис. 2.1.4 для $\sigma_1 = 0.05$, $\sigma_2 = 0.4$).

В прогнозировании индуцированных шумом переходов через сепаратрису будем использовать доверительные эллипсы. На рис. 2.1.5 представлены два доверительных эллипса, построенных по матрицам M (больший эллипс) и $M^{(1)}$ (меньший эллипс) для системы с $\sigma_1 = 0.05$, $\sigma_2 = 0.4$. Больший эллипс захватывает бассейн притяжения предельного цикла, что позволяет сделать прогноз о генерации большеамплитудных осцилляций (режим возбуждения). Меньший же эллипс целиком содержится в бассейне притяжения устойчивого равновесия и поэтому прогнозирует невозбужденный режим осциллятора. Как видим, погрешность в оценке вторых моментов может приводить к качественным ошибкам в решении важной задачи прогноза.

2.1.3. Воздействие цветных шумов

В исследованиях динамики реальных систем необходимо учитывать специфику неизбежно присутствующих случайных возмущений. Среди возможных типов стохастических возмущений часто рассматривают так называемые цветные шумы, имеющие те или иные характерные корреляционные временные свойства [118, 273]. Важная роль цветных шумов была обнаружена во многих системах самой разной природы, например, в лазерах [119], сейсмологии [120], биохимии [121], динамике популяций [122], кинетике роста микроорганизмов [123], динамике роста опухолей [124]. Воздействие цветных шумов может приводить к таким явлениям, как индуцированные случайными возмущениями переходы [118, 125, 126], стохастический резонанс [273], вызывать стохастические бифуркации [128] и трансформации порядок-хаос [129].

Рассмотрим нелинейную динамическую систему

$$\dot{x} = f(x, r), \tag{2.1.19}$$

где x – n-мерный вектор, $f(x, r)$ – достаточно гладкая вектор-функция, $r(t)$ – m-вектор случайных возмущений.

Предполагается, что невозмущенная система ($r = 0$) имеет экспоненциально устойчивое равновесие $\bar{x}: \ f(\bar{x}, 0) = 0$.

Цель данного раздела – исследовать поведение системы (2.1.19) вблизи этого равновесия под воздействием малых цветных шумов. Случайные возмущения $r(t) = \varepsilon s(t), \ s = (s_1, \ldots, s_m)^\top$, имеющие интенсивность ε, моделируются следующей стохастической системой Ито:

$$\dot{s}_i = -a_i s_i + \sigma_i \sqrt{2a_i} \dot{w}_i, \quad a_i > 0. \tag{2.1.20}$$

Здесь $w_i(t)\,(i = 1, \ldots m)$ – независимые стандартные винеровские процессы с параметрами $\mathrm{E}(w_i(t) - w_i(t')) = 0, \ \mathrm{E}(w_i(t) - w_i(t'))^2 = |t - t'|$. Система (2.1.20) формирует коррелированный цветной шум с параметрами

$$\mathrm{E}s_i(t) = 0, \quad \mathrm{E}s_i(t)s_i(t') = \sigma_i^2 \exp\left(-a_i|t - t'|\right), \quad \tau_i = \frac{1}{a_i}.$$

При этом параметры a_i задают времена корреляции τ_i координат этого цветного шума. Тогда дисперсии $\mathrm{E}r_i^2(t) = \varepsilon^2 \sigma_i^2$ координат случайного возмущения $r(t) = \varepsilon s(t)$ в системе (2.1.19) не зависят от параметров a_i.

Система (2.1.20) играет роль генератора цветных шумов, получая их из стандартных винеровских процессов.

Обозначим через $x^\varepsilon(t)$ решение стохастической системы

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon s), \tag{2.1.21}$$

возмущенной цветным шумом (2.1.20). Для изучения дисперсии решений $x^\varepsilon(t)$ около равновесия $\bar{x}$ при малом цветном шуме будем использовать следующую асимптотику:

$$y(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^\varepsilon(t) - \bar{x}}{\varepsilon}.$$

Динамика пары $y(t), s(t)$ задается следующей стохастической линейной системой:

$$\dot{y} = Fy + Gs \tag{2.1.22}$$

$$\dot{s} = -As + C\dot{w}. \tag{2.1.23}$$

Здесь

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0), \qquad G = \frac{\partial f}{\partial r}(\bar{x}, 0),$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \sigma_1\sqrt{2a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m\sqrt{2a_m} \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}.$$

Для расширенного $(n+m)$-мерного вектора $z = \begin{bmatrix} y \\ s \end{bmatrix}$ справедлива система

$$\dot{z} = \Phi z + S\dot{w}, \tag{2.1.24}$$

где

$$\Phi = \begin{bmatrix} F & G \\ O & -A \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} O \\ C \end{bmatrix},$$

and O – нулевые матрицы соответствующих размерностей.

Обозначим через $Z = \mathrm{E}\, zz^\top$ матрицу вторых моментов решений z системы (2.1.24). Эта матрица удовлетворяет следующему уравнению:

$$\dot{Z} = \Phi Z + Z\Phi^\top + SS^\top. \tag{2.1.25}$$

Отметим, что спектр $\sigma(\Phi)$ матрицы Φ связан со спектром $\sigma(F)$ матрицы F соотношением $\sigma(\Phi) = \sigma(F) \cup \{-a_1, \ldots, -a_m\}$. Благодаря экспоненциальной устойчивости равновесия $\bar{x}$ и положительности параметров a_i, спектр $\sigma(\Phi)$ лежит в левой комплексной полуплоскости и, следовательно, система (2.1.25) имеет единственное экспоненциально устойчивое стационарное решение Z, удовлетворяющее матричному уравнению

$$\Phi Z + Z\Phi^\top + SS^\top = 0. \tag{2.1.26}$$

Матрица Z этого стационарного решения имеет следующую структуру:

$$Z = \begin{bmatrix} W & M \\ M^\top & B \end{bmatrix}, \quad W = \mathrm{E}\, yy^\top,\ M = \mathrm{E}\, ys^\top,\ B = \mathrm{E}\, ss^\top,$$

где $z = \begin{bmatrix} y \\ s \end{bmatrix}$ – стационарно распределенное решение системы (2.1.24). Отметим, что

$$SS^\top = \begin{bmatrix} O & O \\ O & 2AQ \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_m^2 \end{bmatrix}. \tag{2.1.27}$$

С учетом (2.1.26) и (2.1.27), для блоков W, M и B матрицы Z справедлива система

$$\begin{aligned} &FW + WF^\top + GM^\top + MG^\top = 0 \\ &FM + GB - MA = 0 \\ &AB + BA = 2AQ. \end{aligned} \tag{2.1.28}$$

Из этой системы сразу следует, что $B = Q$. Таким образом, матричные блоки W и M связаны системой

$$\begin{aligned} &FW + WF^\top + GM^\top + MG^\top = 0 \\ &FM + GQ - MA = 0. \end{aligned} \tag{2.1.29}$$

Отметим, что матрица W определяет стохастическую чувствительность равновесия $\bar{x}$ и может быть использована для оценки ковариации стационарно распределенных состояний $x^\varepsilon(t)$ системы (2.1.21), (2.1.23):

$$\operatorname{cov}(x^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t)) \approx \varepsilon^2 W.$$

Система (2.1.29) связывает эту матрицу W с параметрами $F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0)$ и $G = \frac{\partial f}{\partial r}(\bar{x}, 0)$ детерминированной системы и параметрами A и Q, характеризующими свойства действующего на систему цветного шума.

Замечание 2.2. Рассмотрим случай, когда случайное возмущение s в системе (2.1.21) является одномерным и моделируется одним уравнением:

$$\dot{s} = -as + \sigma\sqrt{2a}\xi(t).$$

В этом случае $Q = \sigma^2$, $A = a$ – скалярные параметры, и, как следует из системы (2.1.29)

$$M = -\sigma^2 (F - aI)^{-1} G,$$

и матрица стохастической чувствительности W может быть найдена из уравнения

$$FW + WF^\top = \sigma^2 \left[GG^\top \left(F^\top - aI\right)^{-1} + (F - aI)^{-1} GG^\top \right]. \tag{2.1.30}$$

Замечание 2.3. Рассмотрим случай, когда все цветные шумы $s_1(t), \ldots, s_m(t)$ имеют одинаковое время корреляции ($a_1 = \cdots = a_m = a$). В этом случае $A = aI$, $M = -(F - aI)^{-1} GQ$, и матрица стохастической чувствительности W удовлетворяет уравнению

$$FW + WF^\top = GQG^\top \left(F^\top - aI\right)^{-1} + (F - aI)^{-1} GQG^\top.$$

Стохастическая чувствительность двумерных систем

Рассмотрим нелинейную двумерную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \varepsilon s) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \varepsilon s) \\ \dot{s} &= -as + \sqrt{2a}\dot{w}, \end{aligned} \tag{2.1.31}$$

возмущаемую скалярным цветным шумом $r(t) = \varepsilon s(t)$. Здесь $a > 0$ и $w(t)$ – стандартный винеровский процесс с параметрами $\mathrm{E}(w(t)-w(t')) = 0$, $\mathrm{E}(w(t)-w(t'))^2 = |t-t'|$. Отметим, что здесь цветной шум $s(t)$ является нормализованным – варьируя a, можно изменять время корреляции $\tau = \dfrac{1}{a}$, но дисперсия не зависит от a: $\mathrm{E}s^2(t) = 1$.

Пусть $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ является экспоненциально устойчивым равновесием соответствующей детерминированной системы (2.1.31) с $\varepsilon = 0$. Для этого равновесия матрица Якоби имеет вид:

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{12} \end{bmatrix},$$

$$f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0), \quad f_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0),$$
$$f_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0), \quad f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0).$$

Матрица W стохастической чувствительности равновесия $\bar{x}$ системы (2.1.31) удовлетворяет уравнению (2.1.30), где

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}, \; GG^\top = \begin{bmatrix} g_1^2 & g_1 g_2 \\ g_1 g_2 & g_2^2 \end{bmatrix},$$

$$g_1 = \frac{\partial f_1}{\partial r}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0), \quad g_2 = \frac{\partial f_2}{\partial r}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0),$$

$$F - aI = \begin{bmatrix} f_{11} - a & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} - a \end{bmatrix}, \quad (F - aI)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} f_{22} - a & -f_{12} \\ -f_{21} & f_{11} - a \end{bmatrix},$$
$$\Delta = a^2 - \mathrm{tr}F\, a + \det F.$$

Отметим, что благодаря устойчивости равновесия, справедливы неравенства $\mathrm{tr}F < 0$, $\det F > 0$, поэтому для любого $a > 0$ выполняется $\Delta > 0$.

Для элементов матрицы стохастической чувствительности

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix},$$

с учетом ее симметричности ($w_{12} = w_{21}$), из (2.1.30) получаем систему трех уравнений:

$$\begin{aligned} &2(f_{11}w_{11} + f_{12}w_{12}) = p_1 \\ &f_{21}w_{11} + \mathrm{tr}F w_{12} + f_{12}w_{22} = p_2 \\ &2(f_{21}w_{12} + f_{22}w_{22}) = p_3, \end{aligned} \tag{2.1.32}$$

где

$$p_1 = \frac{2}{\Delta}\left(g_1^2(f_{22} - a) - g_1g_2f_{12}\right), \quad p_2 = \frac{1}{\Delta}\left(-g_1^2f_{21} + g_1g_2(\mathrm{tr}F - 2a) - g_2^2f_{12}\right),$$

$$p_3 = \frac{2}{\Delta}\left(-g_1g_2f_{21} + g_2^2(f_{11} - a)\right).$$

Система (2.1.32) имеет решение

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{p_1\left(f_{22}\mathrm{tr}F - f_{12}f_{21}\right) - 2p_2f_{22}f_{12} + p_3f_{12}^2}{2\mathrm{tr}F\,\det F} \\ w_{12} = w_{21} &= \frac{-p_1f_{21}f_{22} + 2p_2f_{11}f_{22} - p_3f_{11}f_{12}}{2\mathrm{tr}F\,\det F} \\ w_{22} &= \frac{p_1f_{21}^2 - 2p_2f_{11}f_{21} + p_3\left(f_{11}\mathrm{tr}F - f_{12}f_{21}\right)}{2\mathrm{tr}F\,\det F}. \end{aligned} \tag{2.1.33}$$

Стохастическая чувствительность нелинейных осцилляторов

Рассмотрим нелинейный осциллятор

$$\ddot{x} = \varphi(x, \dot{x}, r), \tag{2.1.34}$$

возмущенный скалярным цветным шумом $r(t) = \varepsilon s(t)$. Это уравнение можно записать в виде системы:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2 \\ &\dot{x}_2 = \varphi(x_1, x_2, \varepsilon s) \\ &\dot{s} = -as + \sqrt{2a}\dot{w}, \end{aligned} \tag{2.1.35}$$

где $a > 0$, а $w(t)$ – стандартный винеровский процесс с параметрами $\mathrm{E}(w(t) - w(t')) = 0$, $\mathrm{E}(w(t) - w(t'))^2 = |t - t'|$. Цветной шум $s(t)$ является нормализованным ($\mathrm{E}s^2(t) = 1$) и имеет время корреляции $\tau = \dfrac{1}{a}$.

Пусть $\bar{x}$ – экспоненциально устойчивое равновесие соответствующего детерминированного осциллятора (2.1.34) с $\varepsilon = 0$. Для этого равновесия элементы матрицы Якоби

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\bar{x}, 0, 0) & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\bar{x}, 0, 0) \end{bmatrix}$$

должны удовлетворять неравенствам:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\bar{x},0,0)<0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\bar{x},0,0)<0.$$

В детерминированном случае для малых отклонений $y=x-\bar{x}$ можно записать аппроксимацию в форме линейного осциллятора

$$\ddot{y}+k\dot{y}+\omega^2 y=0,\qquad k=-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(\bar{x},0,0),\quad \omega=\sqrt{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(\bar{x},0,0)}.$$

Для рассматриваемого осциллятора имеем

$$F=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\omega^2 & -k\end{bmatrix},\ g=\begin{bmatrix}0\\ p\end{bmatrix},\ \ gg^\top=p^2\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ F-aI=\begin{bmatrix}-a & 1\\ -\omega^2 & -k-a\end{bmatrix}$$

$$(F-aI)^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}-k-a & -1\\ \omega^2 & -a\end{bmatrix},\quad \Delta=a(a+k)+\omega^2,\quad p=\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\bar{x},0,0).$$

Тогда явные формулы (2.1.33) для элементов матрицы стохастической чувствительности имеют вид

$$\begin{aligned} w_{11}&=\frac{(a+k)p^2}{\omega^2 k(a^2+ak+\omega^2)}\\ w_{12}&=w_{21}=0\\ w_{22}&=\frac{ap^2}{k(a^2+ak+\omega^2)}. \end{aligned}\tag{2.1.36}$$

Таким образом, для нелинейного осциллятора (2.1.34) матрица стохастической чувствительности равновесия $\bar{x}$ является диагональной.

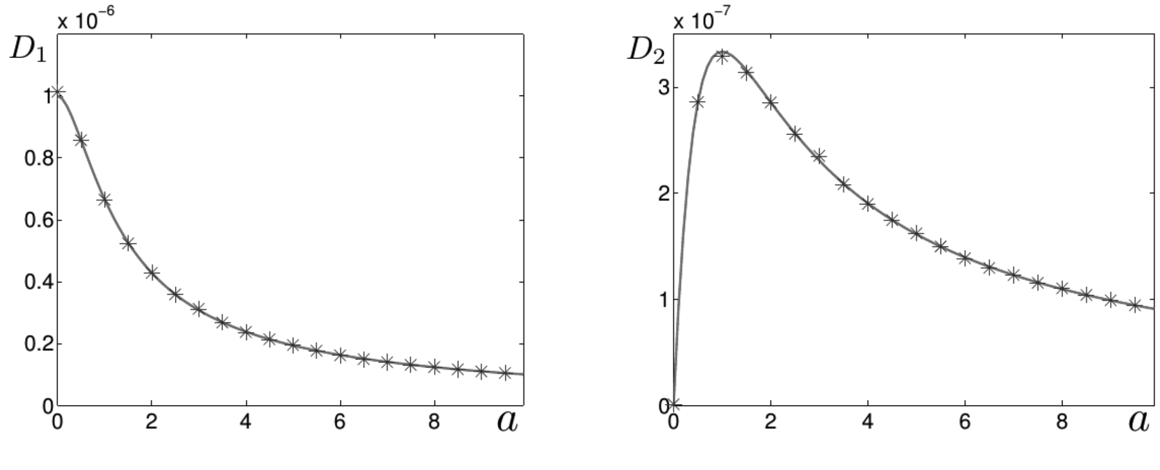


Рис. 2.1.6 – Дисперсии D_1 и D_2 случайных состояний (звездочки) и их теоретические оценки $\bar{D}_1$ и $\bar{D}_2$ (сплошные линии) для $k=1$, $\varepsilon=0.001$.

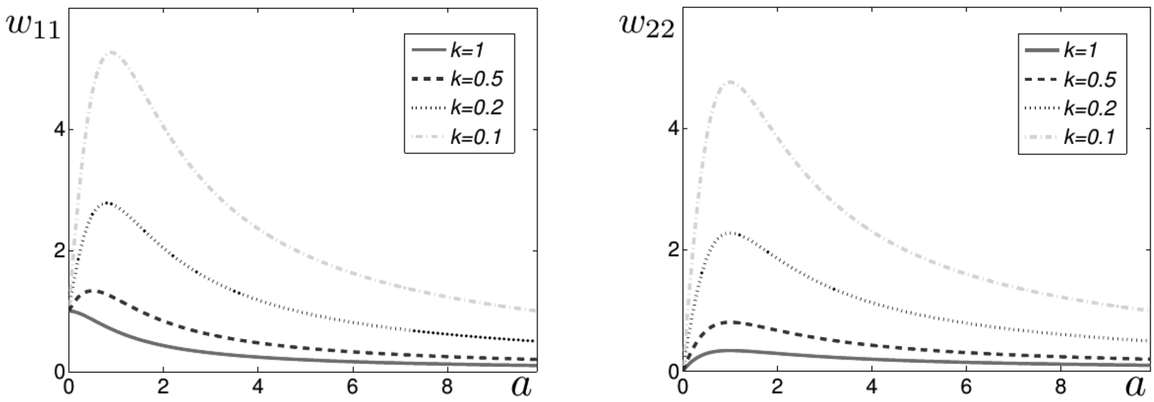


Рис. 2.1.7 – Стохастическая чувствительность равновесия.

Рассмотрим, как меняются диагональные элементы w_{11}, w_{22} матрицы стохастической чувствительности W при изменении параметра a на интервале $0 < a < \infty$. Когда a стремится к бесконечности, оба элемента стремятся к нулю. Если $\omega \leq k$, то функция $w_{11}(a)$ монотонно убывает и имеет максимум $w_{11}(0) = \dfrac{p^2}{\omega^4}$. При $\omega > k$, функция $w_{11}(a)$ имеет единственный максимум в точке $a = \omega - k > 0$. Функция $w_{22}(0) = 0$ и имеет единственный максимум в точке $a = \omega$. Эти экстремумы локализуют значения параметра a цветного шума, соответствующие резонансам.

Стохастический электронный генератор с жестким возбуждением

Рассмотрим систему, моделирующую работу электронного генератора с жестким возбуждением [274] в присутствии цветного шума:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - (k - x_1^2 + x_1^4)x_2 + \varepsilon s \\ \dot{s} &= -as + \sqrt{2a}\dot{w}. \end{aligned} \tag{2.1.37}$$

Для $k > 0$ детерминированная система (2.1.37) с $\varepsilon = 0$ имеет устойчивое тривиальное равновесие $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$. При $k > 0.125$ это равновесие является единственным аттрактором. При $0 < k < 0.125$ система бистабильна и имеет два аттрактора - устойчивое равновесие и устойчивый цикл, разделенные неустойчивым циклом. Значение $k = 0.125$ соответствует седло-узловой бифуркации жесткого рождения цикла.

Диагональная матрица стохастической чувствительности (2.1.36) равновесия $(0,0)$ системы (2.1.37) имеет следующие элементы

$$w_{11} = \frac{a+k}{k(a^2+ak+1)}$$
$$w_{22} = \frac{a}{k(a^2+ak+1)}.$$

Используя эти явные функции, мы можем аппроксимировать дисперсии $D_i = \mathrm{E}x_i^2 \approx \bar{D}_i$, где $\bar{D}_i = \varepsilon^2 w_{ii}$ $(i = 1, 2)$. На рисунке 2.1.6 для $k = 1$, $\varepsilon = 0.001$ сплошными линиями показаны функции $\bar{D}_1(a)$ и $\bar{D}_2(a)$. Значения дисперсий D_1 и D_2, найденные прямым численным моделированием решений системы (2.1.37), изображены звездочками. Как видим, теоретические оценки, полученные с помощью техники функции стохастической чувствительности, хорошо согласуются с результатами численного моделирования.

Рассмотрим теперь, как стохастическая чувствительность зависит от параметров a и k. На рисунке 2.1.7 функции $w_{11}(a)$, $w_{22}(a)$ изображены для различных значений параметра k.

Как видно, важной чертой этих графиков является наличие пиков. Функция $w_{11}(a)$ имеет максимум в точке $a_1 = 1 - k$, а функция $w_{22}(a)$ - в точке $a_2 = 1$. Значения a_1, a_2 определяют параметры цветного шума, для которого координаты системы (2.1.37) наиболее чувствительны к действующим случайным возмущениям. Максимальные значения этих функций равны

$$\max_a w_{11}(a) = \frac{1}{k(2-k)}, \qquad \max_a w_{22}(a) = \frac{1}{k(2+k)}.$$

Как видим, при стремлении k к нулю, эти максимумы стремятся к бесконечности, что означает неограниченный рост стохастической чувствительности.

Рассмотрим теперь, как цветной шум может резко изменить стохастическую динамику системы вблизи значения $a = 1$, где система наиболее чувствительна. Зафиксируем $k = 0.01$ и сравним отклик системы (2.1.37) на цветной шум с тремя разными значениями параметра: $a = 0.1$, $a = 1$ и $a = 10$, для одинаковой интенсивности $\varepsilon = 0.01$. При $k = 0.01$ детерминированная система бистабильна и имеет (см. рисунок 2.1.8) устойчивое равновесие $(0,0)$ и устойчивый предельный цикл. Бассейны притяжения этих аттракторов разделены неустойчивым циклом.

При $a = 0.1$ случайные траектории, стартующие из равновесия, располагаются в его бассейне притяжения (см. рисунок 2.1.8а). В этом случае решения демонстрируют малоамплитудные стохастические осцилляции. Аналогичное поведение наблюдается и при $a = 10$ (см. рисунок 2.1.8в). При $a = 1$, вслед-

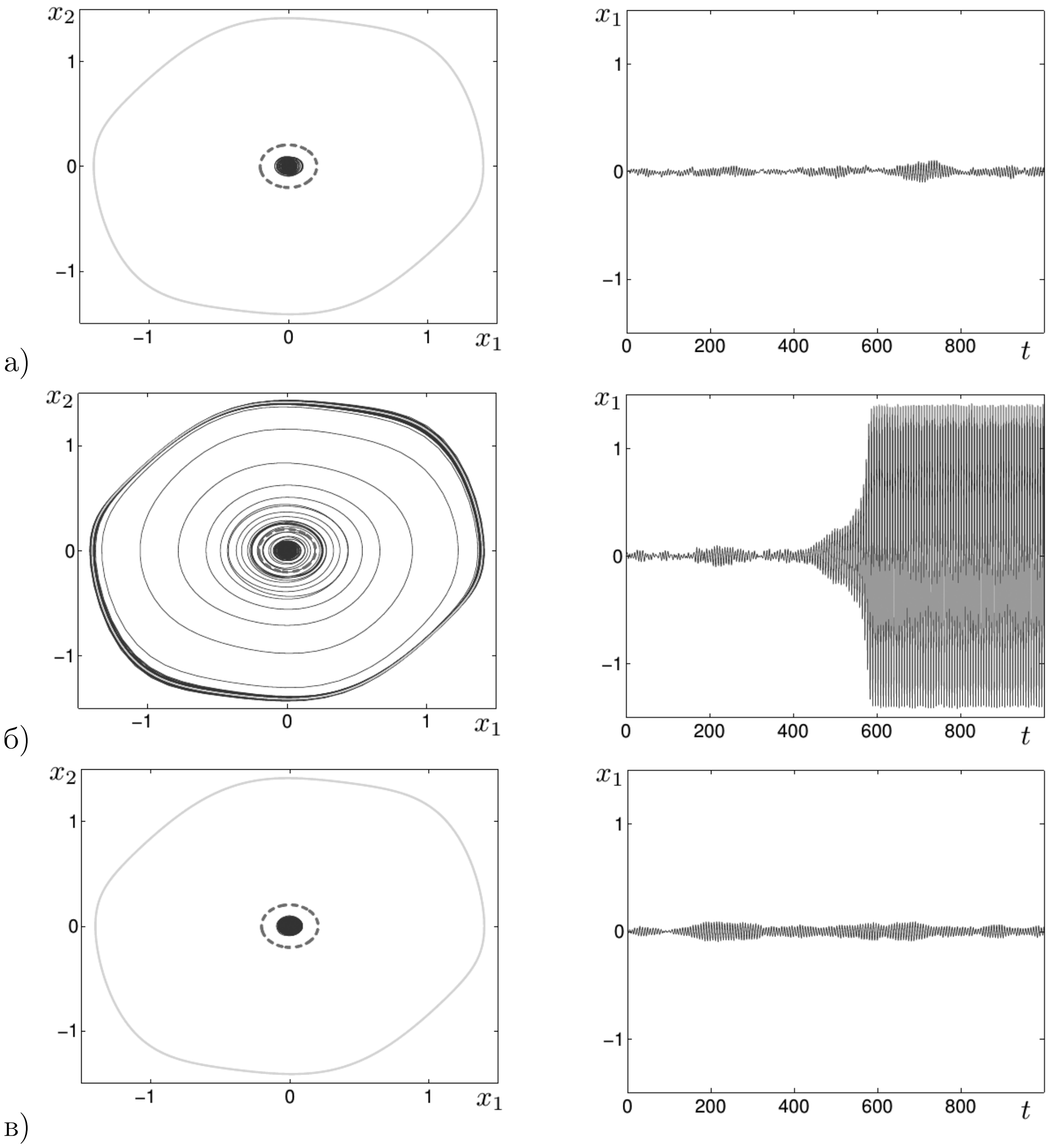


Рис. 2.1.8 – Стохастические траектории и временные ряды системы (2.1.37) при $k = 0.01$, $\varepsilon = 0.01$ для а) $a = 0.1$, б) $a = 1$, в) $a = 10$. Детерминированные устойчивый и неустойчивый циклы изображены сплошной и пунктирной замкнутыми линиями.

ствие высокой стохастической чувствительности, случайные траектории выходят из бассейна притяжения равновесия, пересекают сепаратрису и в дальнейшем осциллируют уже в окрестности устойчивого предельного цикла (см. рисунок 2.1.8б). Таким образом, при $a = 1$ цветной шум переводит систему из режима малоамплитудных осцилляций в режим стохастических колебаний с большими амплитудами.

Интересно сопоставить эти результаты численного моделирования со значениями стохастической чувствительности. Действительно, при $a = 0.1$ мы имеем $w_{11} = 10.9$, $w_{22} = 9.9$, при $a = 1$ мы имеем $w_{11} = 50.2$, $w_{22} = 49.8$, а при $a = 10$ выполняется $w_{11} = 9.9$, $w_{22} = 9.9$. Как видно, при значении параметра $a = 1$ система (2.1.37) имеет высокую стохастическую чувствительность, приводящую к увеличению дисперсии с переходами через сепаратрису. Это в конечном счете вызывает качественные изменения стохастической динамики модели.

Как видим, реакция системы на цветные шумы одной и той же интенсивности существенно зависит от времени корреляции цветного шума. Изменение времени корреляции, приводящее к росту стохастической чувствительности, может не только увеличить дисперсию, но и вызвать качественные изменения режима стохастической динамики. Представленная здесь техника стохастической чувствительности позволяет вести конструктивный параметрический анализ явлений такого рода.

Результаты разделов 2.1.1, 2.1.2 носят обзорный характер и используются в последующих главах. Результаты раздела 2.1.3, посвященного новому направлению исследований, связанному с анализом специфики воздействия цветных шумов опубликованы в работах [228, 229] автора диссертации. Представленная здесь теория стохастической чувствительности систем с цветными шумами используется в разделе 5.4.2 в анализе возбудимости нейрона.

2.2. Цикл

Рассмотрим детерминированную систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x). \tag{2.2.1}$$

Будем предполагать, что система (2.2.1) имеет T-периодическое решение $x = \bar{x}(t)$ с экспоненциально устойчивой фазовой кривой γ. Это означает, что для малой окрестности Γ цикла γ существуют константы $K > 0,\ l > 0$, такие что для любого решения $x(t)$ системы (2.2.1) с начальным условием $x(0) = x_0 \in \Gamma$ выполняется неравенство

$$\|\Delta(x(t))\| \leq Ke^{-lt}\|\Delta(x_0)\|.$$

Здесь $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ – отклонение точки x от цикла γ, $\gamma(x)$ – точка цикла γ, ближайшая к x.

Обозначим через Π_t гиперплоскость, ортогональную циклу в точке $\bar{x}(t)$ $(0 \leqslant t < T)$. Через Γ_t обозначим окрестность $\Gamma_t = \Gamma \cap \Pi_t$. Предполагается, что $\Gamma_t \cap \Gamma_s = \emptyset$ для $t \neq s$.

Рассмотрим систему первого приближения

$$\dot{z} = F(t)z, \quad F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t)) \tag{2.2.2}$$

для малых отклонений $z = x - \bar{x}(t)$ решений системы (2.2.1) от цикла γ.

В анализе динамики этих отклонений будем использовать проектор $P_r = I - rr^\top / r^\top r$ на подпространство, ортогональное вектору $r \neq 0$. Для $r(t) = f(\bar{x}(t))$ матрица $P(t) = P_{r(t)}$ является проекционной матрицей на гиперплоскость Π_t. Устойчивость цикла означает, что проекции $P(t)z(t)$ решений $z(t)$ системы (2.2.2) стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

Определение 2.3. Система (2.2.2) называется P-устойчивой, если существуют константы $K > 0,\ l > 0$ такие, что для любого решения $z(t)$ системы (2.2.2) с $z(0) = z_0$ выполняется следующее неравенство

$$\|P(t)z(t)\| \leq Ke^{-lt}\|P(0)z_0\|.$$

P-устойчивость линейной системы (2.2.2) является необходимым и достаточным условием [275] экспоненциальной устойчивости цикла γ нелинейной системы (2.2.1).

2.2.1. Стохастическая чувствительность цикла

Для исследования чувствительности детерминированного цикла γ к случайным возмущениям будем рассматривать следующую стохастическую систему Ито:

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon\sigma(x)\dot{w}. \tag{2.2.3}$$

Здесь $w(t)$ – n-мерный винеровский процесс, $\sigma(x)$ – $n \times n$-матричная функция, задающая зависимость возмущений от состояния системы, ε – параметр интенсивности шума.

Случайные траектории системы (2.2.3) образуют некоторое распределение вокруг предельного цикла γ. Для описания вероятностных характеристик этого распределения случайных траекторий вокруг предельного цикла γ рассмотрим векторную случайную переменную X_t. Значения X_t задают координаты точек пересечения случайных траекторий системы (2.2.3) с Γ_t. С ростом времени распределение случайных траекторий вокруг предельного цикла стабилизируется, а следовательно случайная величина X_t имеет в окрестности Γ_t некоторое стационарное распределение с плотностью $p_t(x, \varepsilon)$.

Для малых шумов функция $p_t(x, \varepsilon)$ в окрестности цикла γ имеет экспоненциальную гауссовскую асимптотику $p_t^*(x, \varepsilon)$

$$p_t(x, \varepsilon) \approx p_t^*(x, \varepsilon) = K \exp\left(-\frac{(x - \bar{x}(t))^\top W^+(t)(x - \bar{x}(t))}{2\varepsilon^2}\right)$$

с математическим ожиданием $m_t = \bar{x}(t)$ и ковариационной матрицей $\mathrm{cov}_t = D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$. Здесь знак "+"означает псевдообращение.

Это распределение, сконцентрированное в плоскости Π_t является сингулярным: $\mathrm{rank} D(t,\varepsilon) \leqslant n-1$. Для невырожденных шумов ($\det\ \sigma(x)|_\gamma \neq 0$) выполняется $\mathrm{rank} D(t,\varepsilon) = n-1$.

Ковариационная матрица $D(t,\varepsilon)$ характеризует дисперсию точек пересечения случайных траекторий с гиперплоскостью Π_t. Матрица $W(t) = \dfrac{1}{\varepsilon^2} D(t,\varepsilon)$ играет роль функции стохастической чувствительности цикла. Свяжем матрицу $W(t)$ с решениями некоторой линейной стохастической системы.

Для малых шумов, система первого приближения для (2.2.3) имеет вид

$$\dot{z} \ =\ F(t)z \ +\ \varepsilon G(t)\dot{w}, \quad G(t) = \sigma(\bar{x}(t)). \tag{2.2.4}$$

Чувствительность решений z системы (2.2.4) к шуму интенсивности ε характеризуется переменной $u = \dfrac{1}{\varepsilon} z$, удовлетворяющей уравнению

$$\dot{u} \ =\ F(t)u \ +\ G(t)\dot{w}. \tag{2.2.5}$$

Как будет показано ниже, динамика проекций $P(t)u(t)$ этих решений связана с системой

$$\dot{v} \ =\ F(t)v \ +\ P(t)G(t)\dot{w}. \tag{2.2.6}$$

Аддитивные шумы в системе (2.2.6) являются проекциями шумов из системы (2.2.5).

Ковариационная матрица $U(t) = \mathrm{cov}(u(t), u(t))$ произвольного решения $u(t)$ системы (2.2.5) удовлетворяет уравнению

$$\dot{U} \ =\ F(t)U \ +\ UF^\top(t) + S(t), \ \ S(t) \ =\ G(t)G^\top(t). \tag{2.2.7}$$

Для ковариационной матрицы $V(t) = \mathrm{cov}(v(t), v(t))$ произвольного решения $v(t)$ системы (2.2.6) можно выписать следующее уравнение

$$\dot{V} \ =\ FV \ +\ VF^\top + PSP. \tag{2.2.8}$$

Справедлива следующая теорема [113].

Теорема 2.2. Пусть система (2.2.2) является P-устойчивой. Тогда уравнение (2.2.8) с условиями

$$V(t)r(t) \equiv 0 \tag{2.2.9}$$

$$V(0) = V(T) \tag{2.2.10}$$

имеет на интервале $[0, +\infty)$ единственное решение – матрицу $W(t)$.

2.2.2. Стохастическая чувствительность циклов двумерных систем

В случае системы (2.2.1) на плоскости ($n = 2$) матрица $W(t)$, задающая стохастическую чувствительность цикла, и проекционная матрица $P(t)$ имеют ранг, равный единице, и представимы в виде [111]

$$W(t) = \mu(t)P(t), \quad P(t) = p(t)p^\top(t).$$

Здесь $p(t)$ – нормированный вектор, ортогональный касательному вектору $f(\bar{x}(t))$, а следовательно, и циклу γ в точке $\bar{x}(t)$, а $\mu(t) > 0$ – T-периодическая скалярная функция, задающая разброс (дисперсию) пучка по нормали $p(t)$ к циклу.

Подставив в дифференциальное уравнение (2.2.8) матрицу $W(t) = \mu(t)P(t)$ и умножив его на $p^\top(t)$ слева и на $p(t)$ справа, с учетом свойств проекционной матрицы

$$p^\top(t)P(t)p(t) \equiv 1,\ p^\top(t)\dot{P}(t)p(t) \equiv 0,$$

получим для $\mu(t)$ краевую задачу

$$\dot{\mu} = a(t)\mu + b(t), \ \ \mu(0) = \mu(T) \tag{2.2.11}$$

с T-периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^\top(t)(F^\top(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^\top(t)S(t)p(t).$$

Общее решение этой краевой задачи имеет вид

$$\mu(t) = g(t)\left(c + h(t)\right),$$

где

$$g(t) = \exp\left(\int\limits_0^t a(s)ds\right), \quad h(t) = \int\limits_0^t \frac{b(s)}{g(s)}ds, \quad c = \frac{g(T)h(T)}{1 - g(T)}.$$

В анализе влияния случайных возмущений на стохастическую динамику системы около предельного цикла важную роль играет величина

$$M = \max_{[0,T]} \mu(t).$$

Величину M будем называть *коэффициентом чувствительности цикла* γ к случайным возмущениям. В то время как функция $\mu(t)$ дает детальное описание стохастической чувствительности вдоль цикла, коэффициент M является удобной характеристикой цикла в целом.

Отметим, что функция $\mu(t)$ позволяет построить доверительную полосу вокруг детерминированного цикла. Для прямой Π_t, ортогональной циклу в точке $\bar{x}(t)$, границы $x_{1,2}(t)$ доверительной полосы могут быть записаны в точной параметрической форме:

$$x_{1,2}(t) = \bar{x}(t) \pm \varepsilon\sqrt{2\mu(t)}\,\mathrm{erf}^{-1}(P)p(t), \tag{2.2.12}$$

где $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$, а P – доверительная вероятность.

2.2.3. Стохастическая чувствительность циклов трехмерных систем

В трехмерном случае ($n = 3$) для построения решения $V(t)$ уравнения (2.2.8), где $V(t)$ – симметрическая неотрицательно определенная 3×3-матрица, будем использовать следующее сингулярное разложение [113]:

$$V(t) = \lambda_1(t)v_1(t)v_1^\top(t) + \lambda_2(t)v_2(t)v_2^\top(t) + \lambda_3(t)v_3(t)v_3^\top(t).$$

Здесь $\lambda_1(t) \geqslant \lambda_2(t) \geqslant \lambda_3(t)$ – собственные значения, а $v_1(t), v_2(t)$, $v_3(t)$ – собственные векторы матрицы $V(t)$.

Из условия (2.2.9) следует, что при любом t матрица $V(t)$ является вырожденной – распределение точек пересечения сосредоточено в плоскости Π_t. Это означает, что $\lambda_3(t) \equiv 0$ и соответствующий собственный вектор $v_3(t) = r(t)/\|r(t)\|$ является касательным к циклу. Вследствие этого разложение матрицы $V(t)$ имеет вид

$$V(t) = \lambda_1(t)v_1(t)v_1^\top(t) + \lambda_2(t)v_2(t)v_2^\top(t). \tag{2.2.13}$$

Здесь $V(t)$ задается скалярными функциями $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ и векторами $v_1(t)$, $v_2(t)$. В случае невырожденных шумов функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ строго положительны и определяют при любом t дисперсию случайных траекторий цикла вдоль векторов $v_1(t)$, $v_2(t)$. Значения $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ задают размер, а $v_1(t), v_2(t)$ задают направление осей эллипса рассеивания точек пересечения случайных траекторий с плоскостью Π_t. Уравнение этого эллипса в плоскости Π_t имеет вид

$$(x - \bar{x}(t))^\top W^+(t)(x - \bar{x}(t)) \;=\; 2\varepsilon^2 k,$$

где k задает доверительную вероятность $P = 1 - e^{-k}$. Набор этих доверительных эллипсов вдоль детерминированного трехмерного цикла формирует доверительный тор [276].

Обозначим через $u_1(t)$, $u_2(t)$ некоторый ортонормированный базис плоскости Π_t. Этот базис может быть легко найден по известному T-периодическому решению $\bar{x}(t)$ (см. ниже замечание 2.4). Собственные векторы $v_1(t)$, $v_2(t)$ могут быть получены вращением базиса $u_1(t)$, $u_2(t)$ на некоторый угол $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} v_1(t) &= u_1(t)\cos\varphi(t) + u_2(t)\sin\varphi(t), \\ v_2(t) &= -u_1(t)\sin\varphi(t) + u_2(t)\cos\varphi(t). \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

В результате разложение (2.2.13), (2.2.14) позволяет выразить неизвестное решение системы (2.2.8)–(2.2.10) через три скалярные функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$.

Справедлива следующая теорема [113].

Теорема 2.3. Матрица $V(t)$ является решением системы (2.2.8), (2.2.10) тогда и только тогда, когда скалярные функции $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\varphi(t)$ разложения (2.2.13), (2.2.14) удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \lambda_1 v_1^\top [F + F^\top] v_1 + v_1^\top S v_1 \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_2 v_2^\top [F + F^\top] v_2 + v_2^\top S v_2 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\dot{\varphi} &= \lambda_2 v_1^\top F v_2 + \lambda_1 v_1^\top F^\top v_2 + v_1^\top S v_2 - (\lambda_1 - \lambda_2)\dot{u}_1^\top u_2. \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

Как видим, построение решения системы (2.2.8), (2.2.10) на основе сингулярного разложения (2.2.13), (2.2.14) сводится к решению системы (2.2.15) для трех скалярных функций. Матрица $W(t)$ (искомая функция стохастической чувствительности цикла) решения системы (2.2.8)–(2.2.10) может быть получена из $V(t)$ с помощью следующего предельного перехода.

Обозначим

$$P_1(t) = v_1(t) \cdot v_1^\top(t), \ P_2(t) = v_2(t) \cdot v_2^\top(t),$$

где $v_i(t)$ – векторные функции из (2.2.14). Отметим, что $P_i(t)$ $(i = 1, 2)$ являются проекционными матрицами:

$$P_i v_i = v_i, \quad P_i v_j = 0 \ (i \neq j), \quad P = P_1 + P_2.$$

Перепишем разложение (2.2.13) в виде

$$V(t) = \lambda_1(t) \cdot P_1(t) + \lambda_2(t) \cdot P_2(t).$$

Справедлива следующая теорема [113].

Теорема 2.4. Пусть матрица $W(t)$ является решением системы (2.2.8)–(2.2.10). Пусть $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \varphi(t)$ – произвольное решение системы (2.2.15) на интервале $[0, +\infty)$. Тогда матрица $V(t) = \lambda_1(t) \cdot P_1(t) + \lambda_2(t) \cdot P_2(t)$ сходится к матрице $W(t)$ при $t \to +\infty$:

$$\lim_{t \to +\infty} (V(t) - W(t)) = 0. \qquad (2.2.16)$$

Замечание 2.4. Для вычисления правых частей системы (2.2.15) необходимо знать векторные функции $u_1(t), u_2(t)$ и производную $\dot{u}_1(t)$.

Предлагается следующий метод их расчета. Перепишем исходную детерминированную систему (2.2.1) и ее T-периодическое решение $x = \bar{x}(t)$ покоординатно:

$$\dot{x}_1 \;=\; f_1(x_1, x_2, x_3), \; \dot{x}_2 \;=\; f_2(x_1, x_2, x_3), \; \dot{x}_3 \;=\; f_3(x_1, x_2, x_3),$$

$$\bar{x}(t) \;=\; (\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{x}_3(t))^\top.$$

Касательный вектор $r(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))^\top$ к циклу в точке $\bar{x}(t)$ имеет координаты $f_i(t) = f_i(\bar{x}(t)),\; i = 1, 2, 3$. Ортонормированный базис $u_1(t), u_2(t)$ векторов плоскости Π_t может быть выбран в форме

$$u_1 = g_1 \cdot \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = g_2 \cdot \begin{pmatrix} -f_1 f_3 \\ -f_2 f_3 \\ f_1^2 + f_2^2 \end{pmatrix},$$

где

$$g_1 \;=\; \left(f_1^2 + f_2^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad g_2 \;=\; \left(f_3^2\left(f_1^2 + f_2^2\right) + \left(f_1^2 + f_2^2\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

В результате такого выбора производная $\dot{u}_1$ может быть найдена по формуле

$$\dot{u}_1 \;=\; \dot{g}_1 \cdot \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \\ 0 \end{pmatrix} + g_1 \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & -\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & -\dfrac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

где

$$\dot{g}_1 \;=\; -\left(f_1^2 + f_2^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \left(f_1 \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} f_3\right) + \right.$$

$$\left. + f_2 \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_3} f_3\right)\right).$$

Представленная здесь техника анализа стохастической чувствительности циклов трехмерных систем была использована в исследовании стохастических эффектов в моделях Лоренца, Ресслера, Чена и опубликована в работах [113, 188, 193, 199, 276–278] автора диссертации.

2.2.4. Стохастическая чувствительность циклов в периодических системах

Для исследования детерминированных систем с периодическими коэффициентами активно используются различные подходы, основанные на теории возмущений и усреднений, методе точечных отображений [130, 131]. Для линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами разработана фундаментальная математическая теория [132].

Взаимодействие нелинейности, периодичности и стохастичности может привести к различным неожиданным динамическим явлениям [133–135]. Здесь классическим примером является стохастический резонанс [49, 50, 136].

Конструктивная роль шума в периодических системах привлекает внимание многих исследователей (см., например, [30, 33, 100, 137–144]). Здесь, как правило, рабочим инструментом является прямое численное моделирование.

Распространение метода стохастической чувствительности на анализ нелинейных систем с периодическими и случайными возмущениями является важным направлением развития теории и составляет содержание данного раздела.

Рассмотрим общую нелинейную неавтономную систему

$$\dot{x} \;=\; f(t,x) + \varepsilon\sigma(t,x)\dot{w}(t), \tag{2.2.17}$$

где x – n-вектор состояния, $f(t,x)$ – n-мерная функция, $w(t)$ – m-мерный стандартный винеровский процесс с параметрами $\mathrm{E}(w(t)-w(s))=0$, $\mathrm{E}(w(t)-w(s))(w(t)-w(s))^\top = \delta(t-s)I$ (I – единичная $m\times m$-матрица), $\sigma(t,x)$ – $n\times m$-матричная функция, ε – скалярный параметр интенсивности случайного возмущения. Предполагается, что функции $f(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ являются T-периодическими: $f(t+T,x)=f(t,x)$, $\sigma(t+T,x)=\sigma(t,x)$.

Пусть $\bar{x}(t)$ – экспоненциально устойчивое T-периодическое решение детерминированной системы (2.2.17) ($\varepsilon=0$) с начальным условием $\bar{x}(t_0)=\bar{x}_0$.

Рассмотрим поведение решений $x^\varepsilon(t)$ стохастической системы (2.2.17) с начальным условием $x^\varepsilon(t_0)=\bar{x}_0+\varepsilon z_0$ при малом ε. Для асимптотики

$$z(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^\varepsilon(t)-\bar{x}(t)}{\varepsilon},$$

можно записать следующее линейное стохастическое уравнение:

$$\dot{z} \;=\; F(t)z + S(t)\xi(t), \tag{2.2.18}$$

где

$$F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \bar{x}(t)), \qquad S(t) = \sigma(t, \bar{x}(t))$$

являются T-периодическими матричными функциями.

Первые два момента $\bar{z}(t) = \mathrm{E}z(t)$, $Z(t) = \mathrm{E}z(t)z^\top(t)$ решений $z(t)$ уравнения (2.2.18) удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}} &= F(t)\bar{z}, \\ \dot{Z} &= F(t)Z + ZF^\top(t) + S(t)S^\top(t). \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Благодаря устойчивости $\bar{x}(t)$, система (2.2.19) имеет экспоненциально устойчивое решение

$$\bar{z} \equiv 0, \quad Z = W(t),$$

где матрица $W(t)$ является T-периодической. Эта матрица $W(t)$ определяет асимптотику дисперсии установившегося распределения решений $x^\varepsilon(t)$ около детерминированного решения $\bar{x}(t)$:

$$\operatorname{cov}\left(x^\varepsilon(t), x^\varepsilon(t)\right) \approx \varepsilon^2 W(t).$$

Матрица стохастической чувствительности $W(t)$ является единственным T-периодическим решением краевой задачи:

$$\dot{W} = F(t)W + WF^\top(t) + S(t)S^\top(t), \tag{2.2.20}$$

$$W(t_0) = W(t_0 + T). \tag{2.2.21}$$

Решение этой задачи строится следующим образом.

Рассмотрим фундаментальную матрицу $\Phi(t, t_0)$ решений системы

$$\dot{\Phi} = F(t)\Phi, \quad \Phi(t_0, t_0) = I.$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения (2.2.20) может быть записано как

$$W(t) = \Phi(t, t_0)\left[C + \int\limits_{t_0}^{t} \Psi(\tau, t_0)d\tau\right]\Phi^\top(t, t_0), \tag{2.2.22}$$

где

$$\Psi(\tau, t_0) = \Phi^{-1}(\tau, t_0)S(\tau)S^\top(\tau)\left(\Phi^{-1}(\tau, t_0)\right)^\top$$

и C – произвольная постоянная $n \times n$-матрица. Подставляя это общее решение в краевое условие (2.2.21), получаем уравнение для C:

$$C = \Phi(t_0 + T, t_0) \left[C + \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \Psi(\tau, t_0) d\tau \right] \Phi^\top(t_0 + T, t_0). \tag{2.2.23}$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{F}[C] = \Phi(t_0 + T, t_0) C \Phi^\top(t_0 + T, t_0)$ и матрицу $Q = \int_{t_0}^{t_0+T} \Psi(\tau, t_0) d\tau$. Тогда уравнение (2.2.23) может быть переписано в простой форме:

$$C - \mathcal{F}[C] = \mathcal{F}[Q]. \tag{2.2.24}$$

Отметим, что $\mathcal{F}$ является оператором монодромии для соответствующего однородного уравнения

$$\dot{Z} = F(t)Z + ZF^\top(t).$$

Благодаря экспоненциальной устойчивости T-периодического решения $\bar{x}(t)$, спектральный радиус $\rho(\mathcal{F})$ оператора $\mathcal{F}$ удовлетворяет неравенству $\rho(\mathcal{F}) < 1$. Следовательно, уравнение (2.2.24) имеет единственное решение

$$C = (\mathcal{I} - \mathcal{F})^{-1} \mathcal{F}[Q]. \tag{2.2.25}$$

Таким образом, формулы (2.2.22) and (2.2.25) дают единственное решение W краевой задачи (2.2.20), (2.2.21).

Одномерный случай

В одномерном случае ($n = m = 1$) стохастическая чувствительность периодического решения $\bar{x}(t)$ задается скалярной функцией $\mu(t)$ и решение задачи (2.2.20), (2.2.21) можно записать как

$$\dot{\mu} \;=\; b(t)\mu + q(t), \quad \mu(t_0) = \mu(t_0 + T), \tag{2.2.26}$$

где

$$b(t) = 2f'_x(t, \bar{x}(t)), \quad q(t) = \sigma^2(t, \bar{x}(t)).$$

Благодаря устойчивости $\bar{x}(t)$, выполняется неравенство

$$\int\limits_{t_0}^{t} b(\tau) d\tau < 0$$

и краевая задача (2.2.26) имеет единственное решение

$$\mu(t) = \varphi(t) \left[C + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{q(\tau)}{\varphi(\tau)} d\tau \right],$$

где

$$\varphi(t) = \exp\left[\int\limits_{t_0}^{t} b(\tau)d\tau\right], \; C = \frac{\varphi(t_0+T)}{1-\varphi(t_0+T)} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} \frac{q(\tau)}{\varphi(\tau)}d\tau.$$

Стохастическая чувствительность решения $\bar{x}(t)$ в целом может быть описана коэффициентом

$$M = \max_{[t_0, t_0+T]} \mu(t). \tag{2.2.27}$$

С помощью значения $\mu(t)$ стохастической чувствительности в точке $\bar{x}(t)$ можно построить доверительный интервал вокруг этой точки. Границы $\tilde{x}_{1,2}(t)$ этого доверительного интервала записываются в явной параметрической форме

$$\tilde{x}_{1,2}(t) = \bar{x}(t) \pm \varepsilon\sqrt{2\mu(t)}\,\mathrm{erf}^{-1}(P).$$

Здесь P – доверительная вероятность, $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$.

Множество доверительных интервалов $(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)),\; t_0 \le t \le t_0+T$ формирует доверительную полосу вокруг детерминированного решения $\bar{x}(t)$.

Пример

Рассмотрим одномерное уравнение с кубической нелинейностью

$$\dot{x} \;=\; 1 + a\cos(\omega t) - x^3 + \varepsilon\dot{w}. \tag{2.2.28}$$

Здесь a и ω – амплитуда и частота периодического возмущения, ε – интенсивность случайного возмущения. В отсутствие периодических и случайных возмущений уравнение (2.2.28) имеет единственное устойчивое равновесие $\bar{x} = 1$.

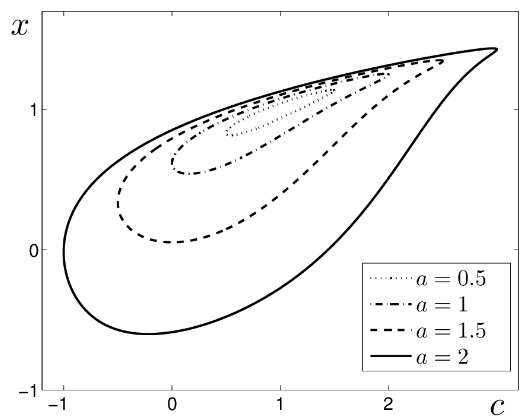
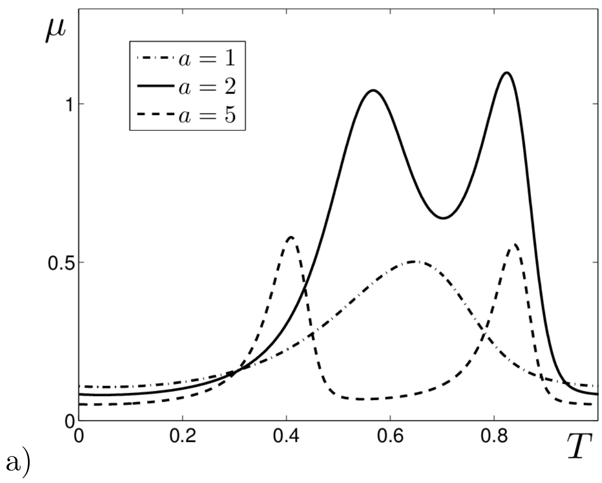


Рис. 2.2.1 – Циклы модели (2.2.28) для $\omega = 1,\ \varepsilon = 0$.

Под действием периодических возмущений в детерминированной модели формируются периодические решения. Примеры соответствующих циклов в расширенном пространстве (c, x) показаны на рис. 2.2.1. Здесь $c(t) =$

$1 + a\cos(\omega t)$, а $x(t)$ – решение системы (2.2.28). Как видим, увеличение амплитуды a периодического возмущения влечет за собой увеличение амплитуды вынужденных колебаний.



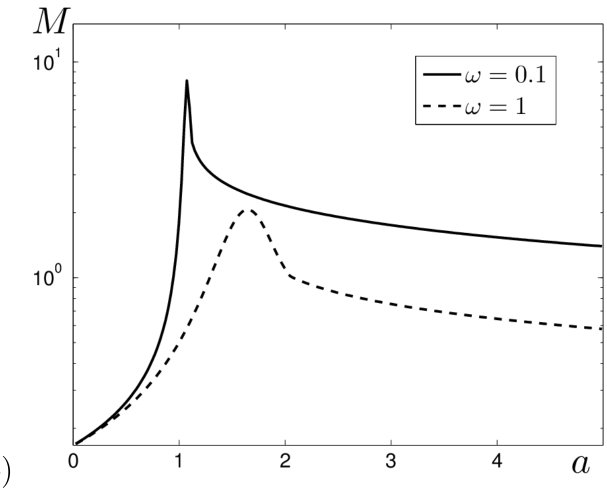


Рис. 2.2.2 – Стохастическая чувствительность циклов модели (2.2.28): а) графики $\mu(t)$ при $\omega = 1$; б) графики $M(a)$.

Под действием дополнительных случайных возмущений вокруг таких циклов формируются пучки случайных траекторий. Для изучения разброса этих траекторий воспользуемся техникой функции стохастической чувствительности. Для этой модели параметры уравнения (2.2.26) имеют вид

$$b(t) = -6\bar{x}^2(t), \quad q(t) = 1,$$

где $\bar{x}(t)$ – периодическое решение уравнения (2.2.28) при $\varepsilon = 0$. Зависимость стохастической чувствительности от параметров представлена на рис. 2.2.2. На рис. 2.2.2а показаны графики функции $\mu(t)$ при фиксированном $\omega = 1$, приведенные к периоду 2π. Как видим, стохастическая чувствительность существенно меняется вдоль цикла.

На рис. 2.2.2б показаны графики коэффициента стохастической чувствительности $M(a)$ для двух значений частоты ω. Как видим, эта функция при некоторых значениях амплитуд имеет ярко выраженные пики. Таким образом, функция стохастической чувствительности позволяет исследовать параметрически такого сорта резонансные явления.

На рис. 2.2.3 при $a = 2$, $\omega = 1$, $\varepsilon = 0.1$ показаны результаты использования функции $\mu(t)$ для описания разброса случайных траекторий вокруг детерминированного цикла. Здесь пунктиром показаны границы доверительных интервалов

$$\tilde{x}_{1,2}(t) = \bar{x}(t) \pm 2\varepsilon\sqrt{\mu(t)},$$

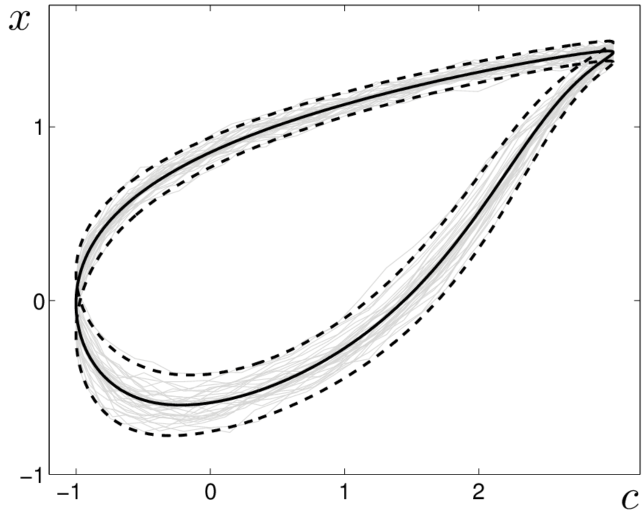


Рис. 2.2.3 – Стохастическая модель (2.2.28) с $a = 2$, $\omega = 1$, $\varepsilon = 0.1$: случайные траектории (серый цвет), детерминированный цикл (сплошная черная линия), границы доверительной полосы (пунктир).

построенных по правилу двух сигм. Как видим, полученная полоса хорошо отражает пространственные особенности распределения случайных траекторий.

Результаты разделов 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 носят обзорный характер и являются теоретической основой для решения новых задач в последующих главах. Результаты раздела 2.2.4, посвященного новому теоретическому направлению исследований, связанному с анализом стохастической чувствительности циклов, генерируемых периодическими возмущениями, опубликованы в работе [230] автора диссертации. В работе также показано, как эта теория может быть эффективно использована в анализе механизмов вымирания в популяционной системе с периодическими изменениями размера экологической ниши.

Глава 3. Стохастические переходы и бифуркации

В нелинейных динамических системах случайные возмущения могут приводить к появлению новых разнообразных стохастических режимов. Такие режимы могут формироваться как в результате индуцированных шумом переходов между сосуществующими аттракторами, так и отдельными фрагментами одного аттрактора. Сильная нелинейность системы может стать причиной стохастической генерации новых аттракторов. Цель данной главы – показать, как этот круг явлений может быть исследован с помощью методов, представленных в главе 1 и главе 2. В каждом из разделов данной главы стохастический феномен обсуждается и исследуется на базе соответствующих репрезентативных моделей.

3.1. Стохастические переходы между аттракторами

Известно, что нелинейность может стать причиной мультистабильности. Исследование динамического поведения мультистабильных систем предполагает описание сосуществующих аттракторов, их бассейнов притяжения и разделяющих их сепаратрис. В детерминированных системах траектория не может выходить из бассейна притяжения, а под действием случайных возмущений возможны переходы стохастической траектории в бассейн притяжения другого аттрактора. Такие индуцированные шумами переходы формируют новые динамические режимы, не имеющие аналогов в исходных детерминированных моделях. В данном разделе показано, как техника функции стохастической чувствительности и метод доверительных областей применяется к анализу переходов между равновесиями, предельными циклами и хаотическими аттракторами мультистабильных систем.

3.1.1. Стохастические переходы между равновесиями

Механизмы индуцированных шумом переходов между сосуществующими равновесиями продемонстрируем на примере модели с кубической нелинейностью, взятой из работы [210], посвященной изучению динамики климата. Эта модель, описывающая динамическую связь широты границы ледяного покрова x и температуры океана y, задается системой

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - x \\ \dot{y} &= -0.5x + 1.5y - x^2 y + \varepsilon \dot{w}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Здесь $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

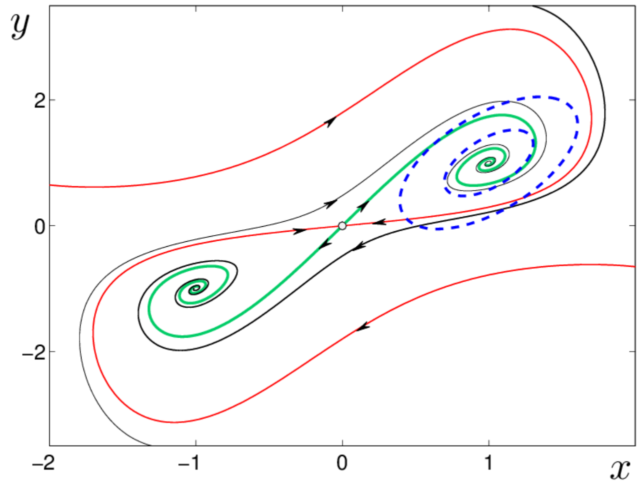


Рис. 3.1.1 – Система (3.1.1): фазовые траектории и доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.1$ и $\varepsilon = 0.2$.

В отсутствие возмущений ($\varepsilon = 0$) система (3.1.1) имеет три равновесия: $M_0(0,0)$, $M_1(1,1)$ и $M_2(-1,-1)$. Равновесие M_0 – неустойчиво (седло), равновесия M_1 и M_2 – устойчивы (фокусы). На рис. 3.1.1 сплошными линиями представлены характерные фазовые траектории детерминированной системы. Здесь красным и зеленым цветом показаны устойчивое и неустойчивое многообразия седла M_0. Устойчивое многообразие является сепаратрисой – оно разделяет бассейны притяжения устойчивых равновесий M_1 и M_2.

Рассмотрим решения системы (3.1.1), выходящие из начальной точки M_1. Под действием случайных возмущений траектория покидает M_1, и при малом шуме осциллирует вокруг этой точки, оставаясь в ее бассейне притяжения (см. фазовые траектории и временные ряды, показанные черным цветом на рис. 3.1.2 при $\varepsilon = 0.1$). При увеличении интенсивности шума отклонения случайных решений от равновесия увеличивается, их траектории пересекают сепаратрису и попадают в бассейн притяжения уже равновесия M_2. Затем, после перехода в окрестность M_2, решения переходят в фазу осцилляций вблизи M_2. Далее сценарий повторяется, и траектория, пересекая сепаратрису, переходит от M_2 к M_1. В итоге, наряду с малоамплитудными стохастическими осцилляциями вокруг устойчивых равновесий наблюдаются большеамплитудные осцилляции, вызванные переходами между ними (см. рис. 3.1.2 для $\varepsilon = 0.2$).

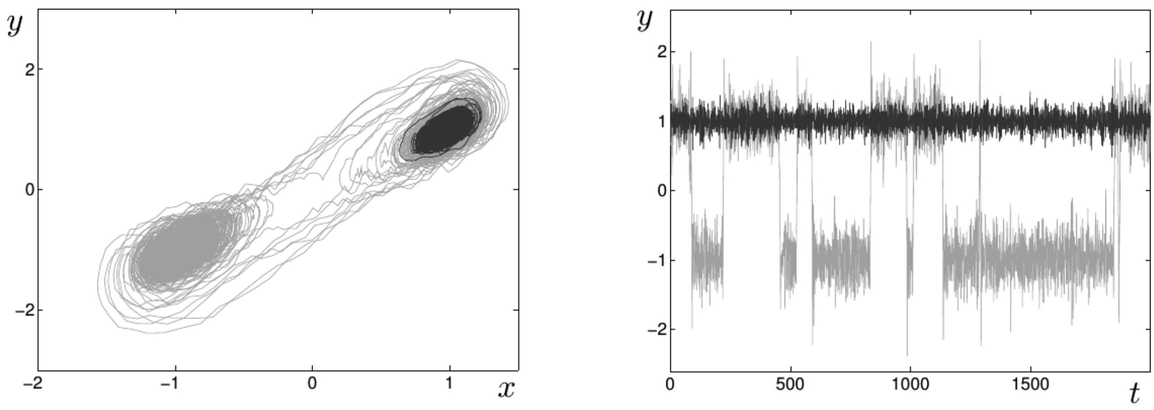


Рис. 3.1.2 – Система (3.1.1): детерминированные фазовые траектории и временные ряды при $\varepsilon = 0.1$ (черный) и $\varepsilon = 0.2$ (серый).

Для параметрического исследования этого стохастического феномена будем использовать технику функции стохастической чувствительности равновесий (п. 2.1.2) и метод доверительных эллипсов (п. 1.1.3).

Параметры уравнения (2.1.15), задающего матрицу стохастической чувствительности W для равновесия M_1 системы (3.1.1), имеют вид:

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad S_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из (2.1.15) находим матрицу стохастической чувствительности

$$W = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{bmatrix},$$

ее собственные числа $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{0.5}$ и нормированные собственные векторы

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.383 \\ 0.924 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.924 \\ -0.383 \end{bmatrix}.$$

Следуя (1.1.22), по этим данным можно найти параметры доверительных эллипсов, отвечающих разным значениям интенсивности шума ε. На рис. 3.1.1 пунктиром показаны доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.1$ (малый) и $\varepsilon = 0.2$

(большой) и доверительной вероятности $P = 0.999$. Как видим, малый эллипс целиком лежит в бассейне притяжения равновесия M_1. Большой эллипс пересекает сепаратрису (красную линию) и захватывает точки бассейна притяжения M_2. Анализируя такое расположение эллипсов, можно сделать прогноз, что при $\varepsilon = 0.1$ стохастическая система должна демонстрировать малоамплитудные осцилляции вблизи M_1, а при $\varepsilon = 0.2$ должны наблюдаться индуцированные шумом переходы между бассейнами притяжения обоих равновесий. Как видим, результаты прямого численного моделирования, представленные на рис. 3.1.2, хорошо согласуются с этим прогнозом.

3.1.2. Стохастические переходы между равновесием и циклом

Рассмотрим модель Ван-дер-Поля с жестким возбуждением

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + (a + bx^2 - x^4)y + \varepsilon\dot{w}. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Здесь $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Для этой модели интервал $-b^2/8 < a < 0$ является параметрической зоной сосуществования двух аттракторов – устойчивого равновесия $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$ и предельного цикла. Бассейны притяжения этих аттракторов разделены неустойчивым предельным циклом. Зафиксируем $b = 1$, и тогда $a^* = -0.125$ является бифуркационным значением, отвечающим жесткому рождению предельного цикла. Рассмотрим теперь, как вариация параметра a меняет стохастическую чувствительность аттракторов и сценарии индуцированных шумом переходов между ними.

Положим сначала $a = -0.12$ и для двух значений интенсивности шумы $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.05$ рассмотрим стохастические траектории, стартующие с предельного цикла. На рис. 3.1.3а показаны временные ряды таких решений для $\varepsilon = 0.01$ (зеленый цвет) и для $\varepsilon = 0.05$ (синий цвет).

При малом значении интенсивности шума траектории демонстрируют малоамплитудные стохастические колебания вокруг детерминированного цикла, а при большем шуме – случайная траектория попадает в бассейн притяжения устойчивого равновесия и продолжает совершать колебания уже вблизи этого аттрактора. На рис. 3.1.3б, для тех же значений интенсивности шума показаны временные ряды решений стохастической системы с начальным значением в устойчивом равновесии. Как видим, индуцированных шумом переходов "равновесие–цикл"здесь не происходит.

Такой сценарий поведения системы может быть предсказан с помощью

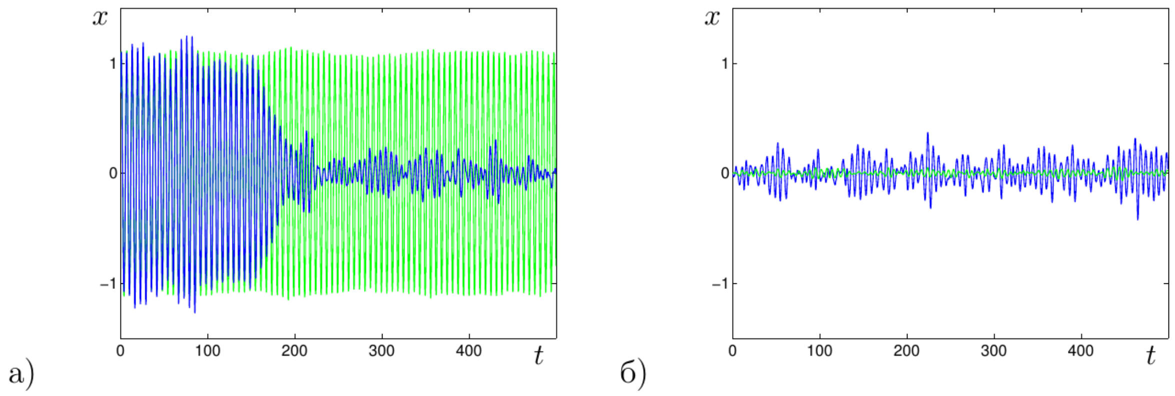


Рис. 3.1.3 – Временные ряды решений системы (3.1.2) с $a = -0.12,\ b = 1$: а) стартующие с цикла, б) стартующие с равновесия для $\varepsilon = 0.01$ (зеленый цвет), $\varepsilon = 0.05$ (синий цвет).

анализа взаимного расположения доверительных областей и сепаратрисы, разделяющей бассейны притяжения аттракторов. Такая сепаратриса – неустойчивый предельный цикл – показана красной сплошной линией на рис.3.1.4. Здесь же показаны аттракторы системы: устойчивое равновесие – черным кружком, устойчивый цикл – черной сплошной линией. Также на рис.3.1.4 изображены

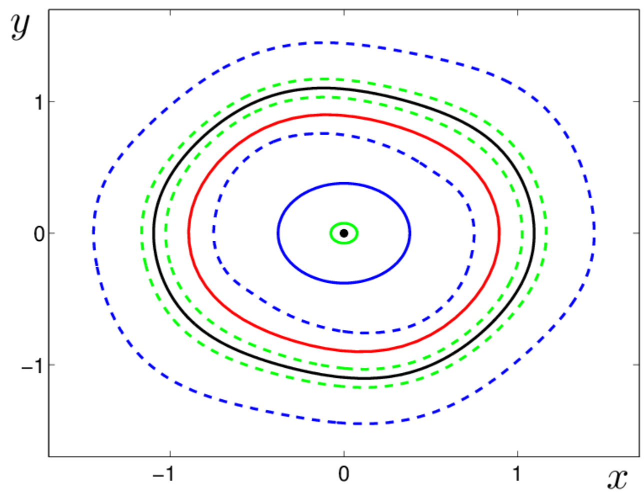


Рис. 3.1.4 – Система (3.1.2) с $a = -0.12,\ b = 1$: устойчивый цикл (черная сплошная линия), неустойчивый цикл (красная сплошная), доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.01$ (зеленая сплошная) и $\varepsilon = 0.05$ (синяя сплошная); доверительные полосы для $\varepsilon = 0.01$ (зеленый пунктир) и $\varepsilon = 0.05$ (синий пунктир).

доверительные эллипсы (сплошная линия) вокруг равновесия и границы доверительной полосы (пунктир) вокруг цикла для $\varepsilon = 0.01$ зеленым цветом и для $\varepsilon = 0.05$ синим цветом.

Как видим, при $\varepsilon = 0.01$ доверительная полоса целиком содержится внутри бассейна притяжения предельного цикла, а значит, случайные траектории располагаются вблизи цикла. При $\varepsilon = 0.05$ внутренняя граница доверительной полосы лежит внутри неустойчивого цикла. Это означает, что доверительная полоса содержит точки плоскости, принадлежащие бассейну притяжения устойчивого равновесия. Случайная траектория, попав в бассейн притяжения равновесия, приближается к нему и продолжает осциллировать вблизи него. Таким образом происходят индуцированные шумом переходы "цикл–равновесие". Заметим, что оба доверительных эллипса целиком содержатся в бассейне притяжения равновесия, а значит, индуцированные шумом переходы "равновесие–цикл"не происходят.

Положим теперь $a = -0.05$ и для тех же двух значений $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.05$ интенсивности шума рассмотрим стохастические траектории, стартующие с равновесия. На рис. 3.1.5а показаны временные ряды таких решений для $\varepsilon = 0.01$ (зеленый цвет) и для $\varepsilon = 0.05$ (синий цвет).

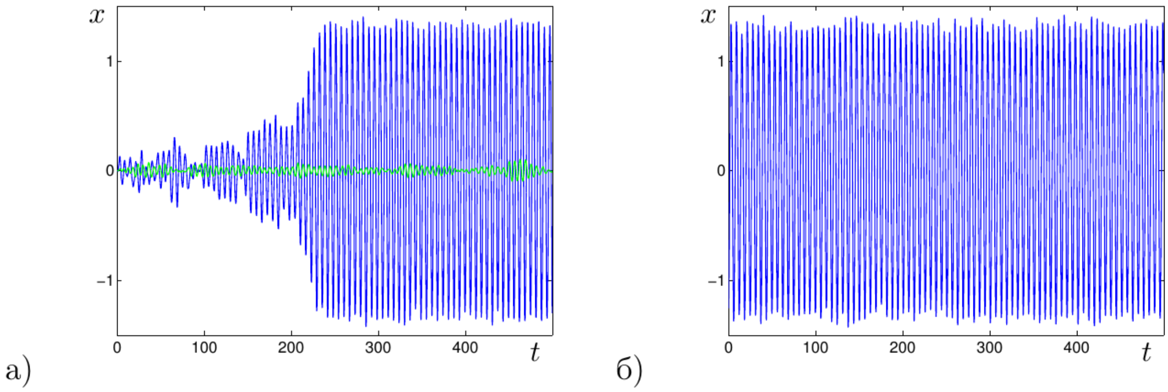


Рис. 3.1.5 – Временные ряды решений системы (3.1.2) с $a = -0.05$, $b = 1$: а) стартующие с равновесия при $\varepsilon = 0.01$ (зеленый цвет), $\varepsilon = 0.05$ (синий цвет), б) стартующие с цикла для $\varepsilon = 0.05$.

При малом значении интенсивности шума траектории демонстрируют малоамплитудные стохастические колебания вокруг начала координат, а при большем шуме – случайная траектория попадает в бассейн притяжения устойчивого цикла и продолжает совершать колебания уже вблизи этого аттрактора. Стохастические траектории с начальным значением на устойчивом цикле при обоих значениях интенсивности шума траектории совершают осцилляции вблизи орбиты предельного цикла. На рис. 3.1.5б для $\varepsilon = 0.05$ показан временной ряд решения стохастической системы.

Такой сценарий поведения системы тоже может быть объяснен с помощью анализа взаимного расположения доверительных областей и сепаратрисы. На рис.3.1.6 изображены доверительные эллипсы (сплошная линия) вокруг равновесия и границы доверительной полосы (пунктир) вокруг цикла для $\varepsilon = 0.01$ зеленым цветом и для $\varepsilon = 0.05$ синим цветом.

Как видим, при $\varepsilon = 0.01$ доверительный эллипс целиком содержится

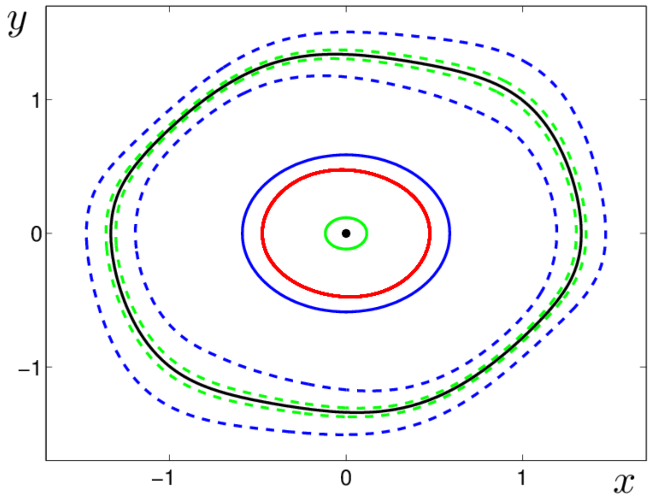


Рис. 3.1.6 – Система (3.1.2) с $a = -0.05,\ b = 1$: устойчивый цикл (черная сплошная линия), неустойчивый цикл (красная сплошная), доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.01$ (зеленая сплошная) и $\varepsilon = 0.05$ (синяя сплошная); доверительные полосы для $\varepsilon = 0.01$ (зеленый пунктир) и $\varepsilon = 0.05$ (синий пунктир).

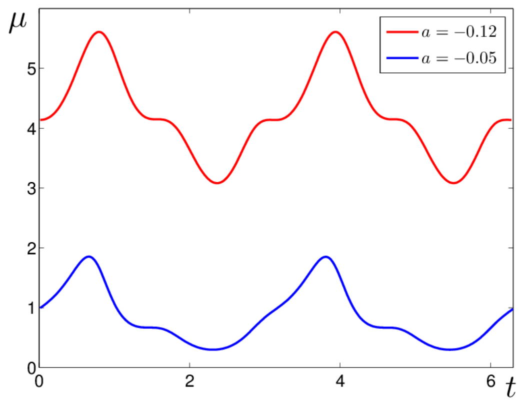
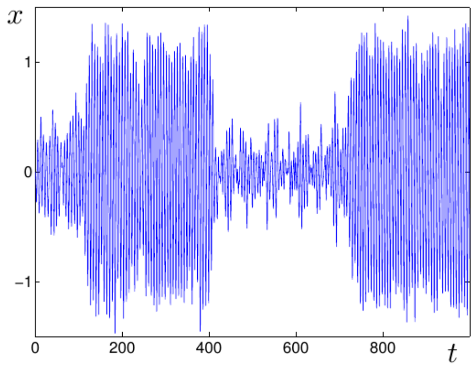


Рис. 3.1.7 – Функция стохастической чувствительности циклов системы (3.1.2).

внутри бассейна притяжения равновесия, а значит, случайные траектории осциллируют вблизи начала координат. С ростом интенсивности шума эллипс расширяется, пересекает сепаратрису и захватывает точки бассейна притяжения устойчивого цикла (см. доверительный эллипс при $\varepsilon = 0.05$, синий цвет). Случайная траектория, попав в бассейн притяжения цикла, приближается к нему и продолжает осциллировать вблизи него. Таким образом происходят индуцированные шумом переходы "равновесие–цикл". Заметим, что здесь обе доверительных полосы целиком содержатся в бассейне притяжения цикла, а значит, индуцированные шумом переходы "цикл–равновесие"не происходят.

При построении доверительных областей были использованы значения функции стохастической чувствительности. Так, при построении доверительных эллипсов была найдена матрица стохастической чувствительности, вычислены ее собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2$ и собственные векторы. Сравним $\lambda_1,\ \lambda_2$



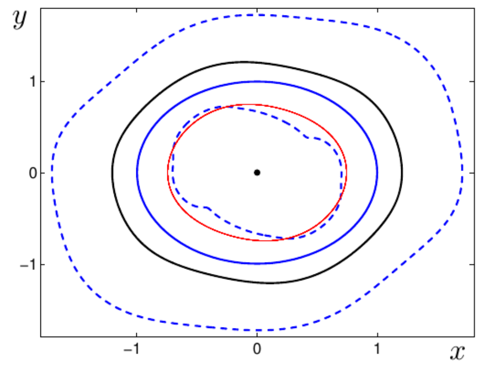


Рис. 3.1.8 – Система (3.1.2) с $a = -0.1$, $b = 1$ и $\varepsilon = 0.12$: а) временной ряд для $\varepsilon = 0.12$, б) доверительные области, аттракторы и сепаратриса.

для рассмотренных выше значений параметра. Для $a = -0.12$ эти значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 4.17$, а для $a = -0.05$ собственные числа $\lambda_1 = \lambda_2 = 10$. Как видим, во втором случае равновесие более чувствительно к шуму, чем в первом.

Графики функции стохастической чувствительности цикла для $a = -0.12$ и $a = -0.05$, использованные при построении доверительных полос, изображены на рис.3.1.7. Коэффициент стохастической чувствительности для $a = -0.12$ равен $M = 5.61$, а для $a = -0.05$ равен $M = 1.85$. Это означает, что в первом случае цикл более чувствителен к шуму, чем во втором. Отметим, что с ростом интенсивности шума в системе могут происходит индуцированные шумом переходы в обоих направлениях. Тогда временные ряды демонстрируют колебания смешанных амплитуд, когда малоамплитудные колебания вокруг равновесия перемежаются с большеамплитудными колебаниями вблизи цикла. На рис.3.1.8а для $a = -0.1$ и $\varepsilon = 0.12$ показан временной ряд решения, стартующего с равновесия, а на рис.3.1.8б – соответствующие доверительные области, аттракторы и сепаратриса. Как видим на рис.3.1.8б, обе доверительные области – эллипс и полоса – пересекаются и содержат точки бассейнов притяжения обоих аттракторов. Такое расположение сигнализирует о взаимных стохастических переходах между равновесием и циклом.

3.1.3. Стохастические переходы между равновесием и хаотическим аттрактором

Рассмотрим стохастическую дискретную модель с кубической нелинейностью

$$x_{t+1} = \mu x_t^2(1 - x_t) + \varepsilon \xi_t, \tag{3.1.3}$$

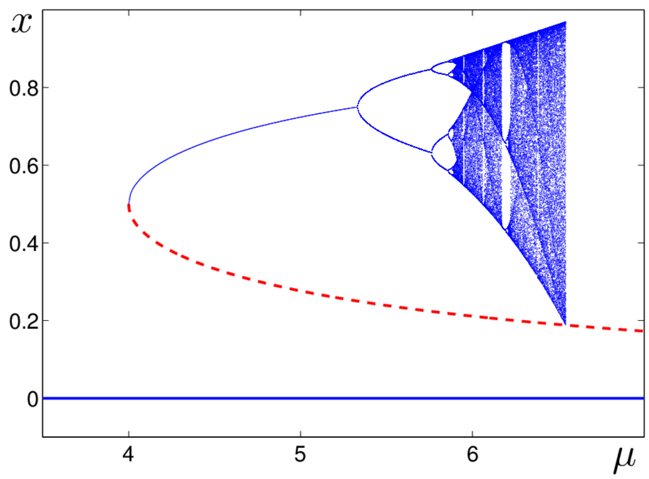


Рис. 3.1.9 – Бифуркационная диаграмма детерминированной системы (3.1.3).

где ξ_t – некоррелированный случайный процесс с параметрами $\mathrm{E}\xi_t = 0,\ \mathrm{E}\xi_t^2 = 1$, ε – интенсивность шума.

В детерминированном случае эта система демонстрирует большое разнообразие аттракторов в зоне бистабильности. Эта модель имеет устойчивое равновесие $\bar{x} = 0$. При $\mu = 4$ происходит седло-узловая бифуркация с рождением неустойчивого равновесия $\bar{x}_1$ и устойчивого равновесия $\bar{x}_2$. На интервале $4 < \mu < 6.75$ наблюдается классический каскад Фейгенбаума с регулярными и хаотическими аттракторами (см. рис. 3.1.9). Равновесия $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ вычисляются по явной формуле

$$\bar{x}_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4}{\mu}}\right).$$

Верхние аттракторы отделяются от нижнего устойчивого равновесия $\bar{x} = 0$ неустойчивым равновесием $\bar{x}_1(\mu)$ (красная пунктирная линия), играющим роль сепаратрисы. При $\mu = 6.75$ хаотический аттрактор касается неустойчивого равновесия $\bar{x}_1$, происходит бифуркация граничного кризиса и хаотический аттрактор исчезает.

Проведем анализ индуцированных шумом переходов между равновесием $\bar{x}$ и хаотическим аттрактором $\mathcal{A}$ для фиксированного $\mu = 6.5$.

На рис. 3.1.10 приведены итерации решений детерминированной системы для начальных значений, выбранных вблизи неустойчивого равновесия $\bar{x}_1 = 0.1899$. Отметим, что $\bar{x}_2 = 0.8101$. Неустойчивые равновесия показаны пустыми кружками на рис. 3.1.10а и пунктирами на рис. 3.1.10б. При $\mu = 6.5$ хаотический аттрактор $\mathcal{A}$ имеет границы $a = \inf \mathcal{A} = 0.2232,\ b = \sup \mathcal{A} = 0.9629$.

Рассмотрим сначала поведение решений стохастической системы (3.1.3), стартующих с хаотического аттрактора $\mathcal{A}$. При малом шуме решения не выходят из бассейна притяжения аттрактора $\mathcal{A}$ (см. рис. 3.1.11а для $\varepsilon = 0.001$).

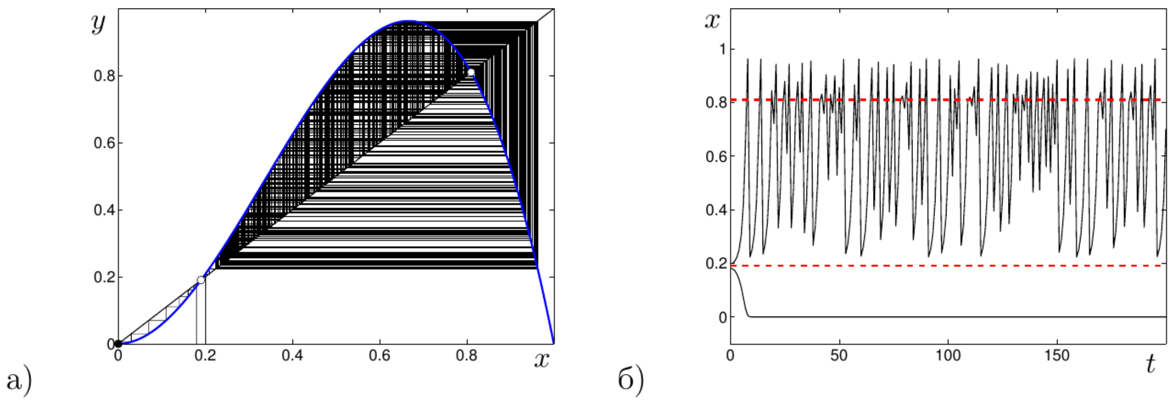


Рис. 3.1.10 – Итерации детерминированной системы (3.1.3) при $\mu = 6.5$.

При увеличении интенсивности шума разброс случайных состояний увеличивается, решения пересекают сепаратрису $\bar{x}_1$, и, попадая в бассейн притяжения равновесия $\bar{x}$, продолжают осциллировать уже вблизи $\bar{x}$ (см. рис. 3.1.11б для $\varepsilon = 0.005$). При таком переходе большеамплитудные осцилляции вокруг хаотического аттрактора трансформируются в малоамплитудные вокруг регулярного.

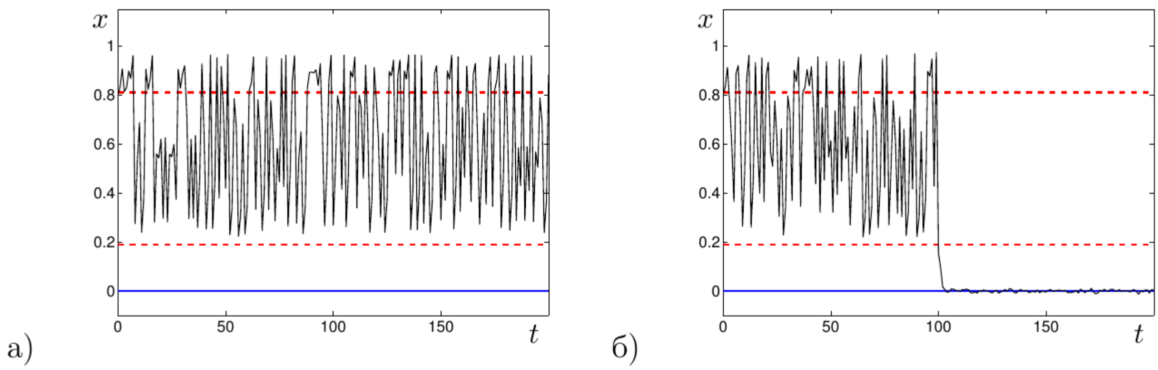


Рис. 3.1.11 – Временные ряды стохастической системы (3.1.3) при $\mu = 6.5$ и а) $\varepsilon = 0.001$, б) $\varepsilon = 0.005$.

Рассмотрим теперь решения стохастической системы (3.1.3), стартующие с устойчивого равновесия $\bar{x} = 0$. При малом шуме осцилляции не выходят из бассейна притяжения $\bar{x}$, а с ростом шума пересекают сепаратрису $\bar{x}_1$, попадают в бассейн притяжения хаотического аттрактора $\mathcal{A}$ и продолжают осциллировать уже вблизи $\mathcal{A}$ (см. рис. 3.1.12). Отметим, что такая трансформация малоамплитудных осцилляций в колебания больших амплитуд происходит при гораздо большем шуме.

Детальная зависимость распределения случайных состояний системы (3.1.3) от интенсивности шума представлена на рис. 3.1.13. Здесь серым цветом показаны случайные состояния $x_{1001}, \ldots, x_{1200}$ системы (3.1.3), стартующие с хаотического аттрактора (рис. 3.1.13а) или с равновесия $\bar{x} = 0$ (рис. 3.1.13б). Неустойчивое равновесие $\bar{x}_1$ изображено пунктиром.

Следуя теории из п. 1.1.2, 1.1.3 и 1.4.1, находим стохастическую чувствительность M равновесия $\bar{x}$ и ближайшей к нему граничной точки a хаотического аттрактора $\mathcal{A}$:

$$M(\bar{x}) = 1, \quad M(a) = 31.96.$$

Как видим, стохастическая чувствительность хаотического аттрактора во много раз больше чувствительности равновесия.

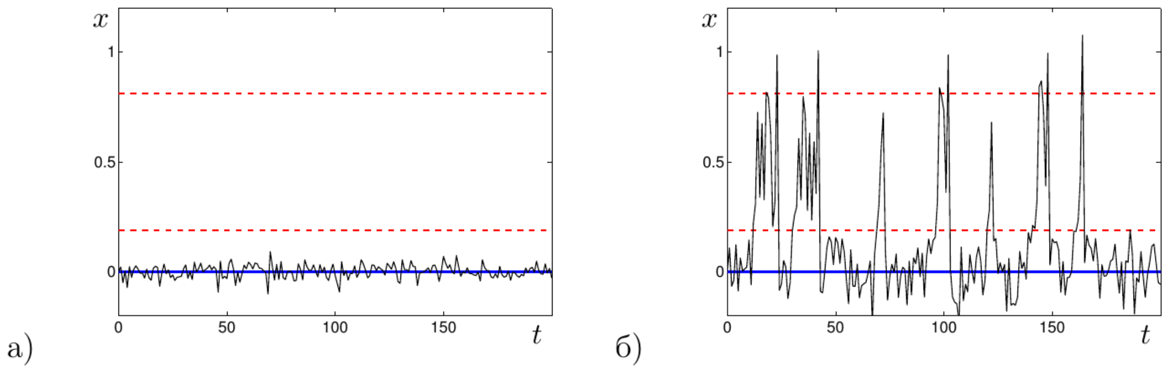


Рис. 3.1.12 – Временные ряды стохастической системы (3.1.3) при $\mu = 6.5$ и а) $\varepsilon = 0.03$, б) $\varepsilon = 0.1$.

Далее, следуя правилу трех сигм, по этим значениям стохастической чувствительности находим верхнюю границу $\tilde{x}(\varepsilon)$ доверительного интервала для $\bar{x}$ (черный пунктир на рис. 3.1.13) и нижнюю границу $\tilde{x}_{\mathcal{A}}(\varepsilon)$ доверительного интервала для a (синий штрихпунктир на рис. 3.1.13):

$$\tilde{x}(\varepsilon) = 3\sqrt{M(\bar{x})}\varepsilon = 3\varepsilon, \quad \tilde{x}_{\mathcal{A}}(\varepsilon) = 3\sqrt{M(a)}\varepsilon = 95.88\varepsilon.$$

Точка пересечения границы доверительной области с сепаратрисой позволяет локализовать зону значений интенсивности шума ε, при которых начинается переход с одного аттрактора на другой. Полученные оценки хорошо согласуются с результатами прямого численного моделирования случайных состояний: переход "хаотический аттрактор $\to$ равновесие" происходит в зоне $\varepsilon \approx 0.002$, а переход "равновесие $\to$ хаотический аттрактор" наблюдается в зоне $\varepsilon \approx 0.06$.

Наряду с представленными здесь пространственными сдвигами разбросов случайных состояний системы (3.1.3) рассмотрим вызванные шумом изменения значений показателя Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$. Ляпуновский показатель является одной из наиболее важных характеристик, отражающих внутреннюю динамику отображений. В частности, изменение его знака с минуса на плюс используется как критерий перехода системы от порядка к хаосу. Такой переход называют стохастической D-бифуркацией.

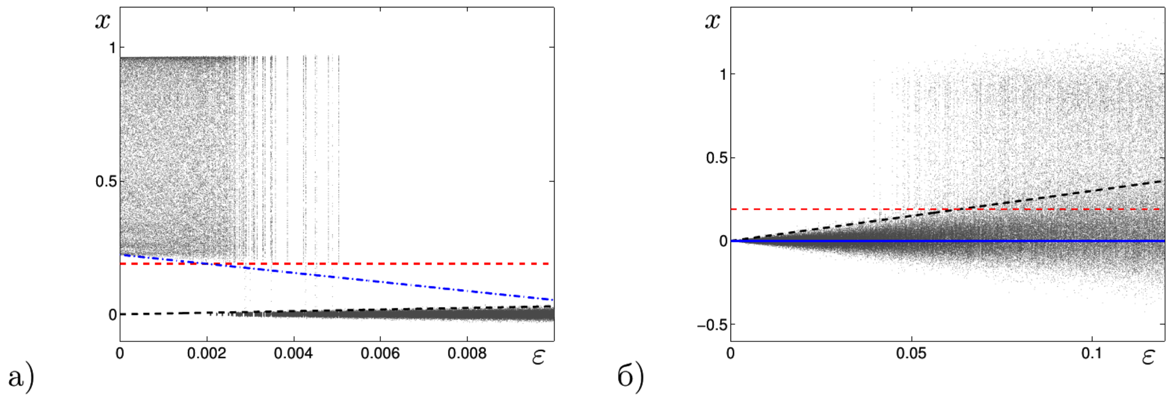


Рис. 3.1.13 – Случайные состояния системы (3.1.3) при $\mu = 6.5$: а) стартующие с хаотического аттрактора, б) стартующие с равновесия $\bar{x} = 0$.

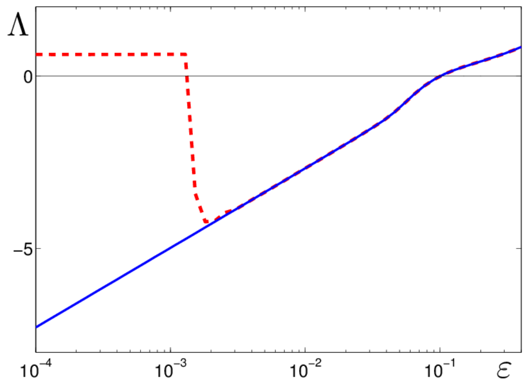


Рис. 3.1.14 – Показатель Ляпунова для решений системы (3.1.3) при $\mu = 6.5$, стартующих с хаотического аттрактора (пунктир) и стартующих с равновесия $\bar{x} = 0$ (сплошная).

На рис. 3.1.14 представлены графики показателя Ляпунова, вычисленных на решениях системы (3.1.3) при $\mu = 6.5$, стартующих с хаотического аттрактора (пунктир) и с равновесия $\bar{x} = 0$ (сплошная линия). Как видим, при малых шумах знак $\Lambda(\varepsilon)$ совпадает со знаком $\Lambda(0)$ – показателя Ляпунова исходного детерминированного аттрактора. В критической зоне $\varepsilon \approx 0.002$, где случайные траектории уходят от детерминированного хаотического аттрактора $\mathcal{A}$ в бассейн притяжения равновесия $\bar{x}$, верхняя ветвь $\Lambda(\varepsilon)$ резко убывает и далее практически совпадает с нижней ветвью. Это сигнализирует о том, что в системе произошло перемешивание, вследствие которого Λ перестает зависеть от начального состояния системы. Смена знака Λ с плюса на минус означает D-бифуркацию, при которой система переходит от хаоса к порядку.

При дальнейшем увеличении шума показатель $\Lambda(\varepsilon)$ монотонно возрастает и снова меняет знак уже с минуса на плюс. Это сигнализирует о новой D-бифуркации перехода от порядка к хаосу.

3.1.4. Стохастические переходы между циклами

В двумерных системах исследование индуцированных шумами переходов между сосуществующими циклами основывается на анализе взаимного расположения доверительных полос вокруг этих циклов и сепаратрисы, разделяющей их бассейны притяжения. Здесь, как и в рассмотренном в п. 3.1.2 случае, изучение стохастических переходов можно связать с выходом границы соответствующей доверительной полосы из бассейна притяжения.

Для трехмерного случая, исследуем здесь более детально явление индуцированных шумом переходов между циклами на примере широко известной модели Лоренца [279].

Рассмотрим систему Лоренца в присутствии случайных возмущений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(-x+y)+\varepsilon\dot{w}_1 \qquad\qquad \sigma=10,\ b=\tfrac{8}{3} \\ \dot{y} &= rx-y-xz+\varepsilon\dot{w}_2 \\ \dot{z} &= -bz+xy+\varepsilon\dot{w}_3. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Здесь $w_1,\ w_2,\ w_3$ – независимые стандартные винеровские процессы, ε – интенсивность шума.

При $r=300$ детерминированная система Лоренца имеет в качестве аттракторов два сосуществующих предельных цикла. Эти циклы в проекциях на координатные плоскости представлены на рис.3.1.15 сплошной и пунктирной линиями, а в трехмерном пространстве – на рис.3.1.16а.

На рис.3.1.16б,в показаны случайные траектории системы (3.1.4), стартующие с детерминированных циклов, при разных значениях интенсивности шума. При малом шуме ($\varepsilon=0.3$) оба пучка случайных траекторий локализованы вблизи исходных циклов и не пересекаются (см. рис.3.1.16б). При увеличении шума разброс случайных траекторий увеличивается и начинаются переходы между этими циклами. Результат такого перемешивания виден на рис.3.1.16в для $\varepsilon=2$. Для исследования процесса индуцированного шумом перемешивания воспользуемся техникой функций стохастической чувствительности трехмерных циклов (см. п. 2.2.3).

Здесь матрица $W(t)$ стохастической чувствительности точек цикла имеет собственные значения $\lambda_1(t)>\lambda_2(t)>\lambda_3(t)\equiv 0$. Эти скалярные функции эффективно находятся с помощью метода сингулярного разложения. Графики $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t)$ циклов системы (3.1.4) с $r=300$ изображены на рис.3.1.17. Как видим, значения λ_1 на порядок больше λ_2. Это приводит к тому, что эллипсы, формирующие доверительный тор вокруг циклов, имеют значительный

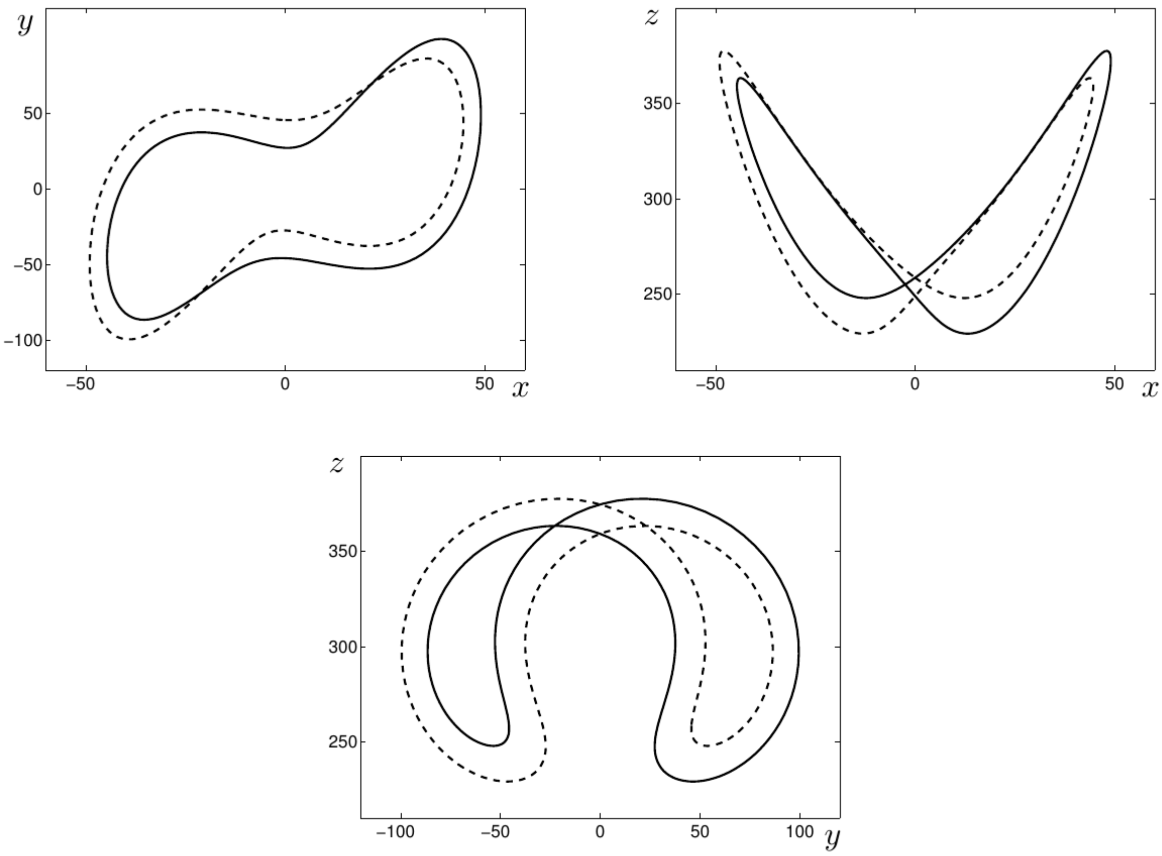


Рис. 3.1.15 – Предельные циклы детерминированной системы (3.1.4) при $r = 300$, $\varepsilon = 0$.

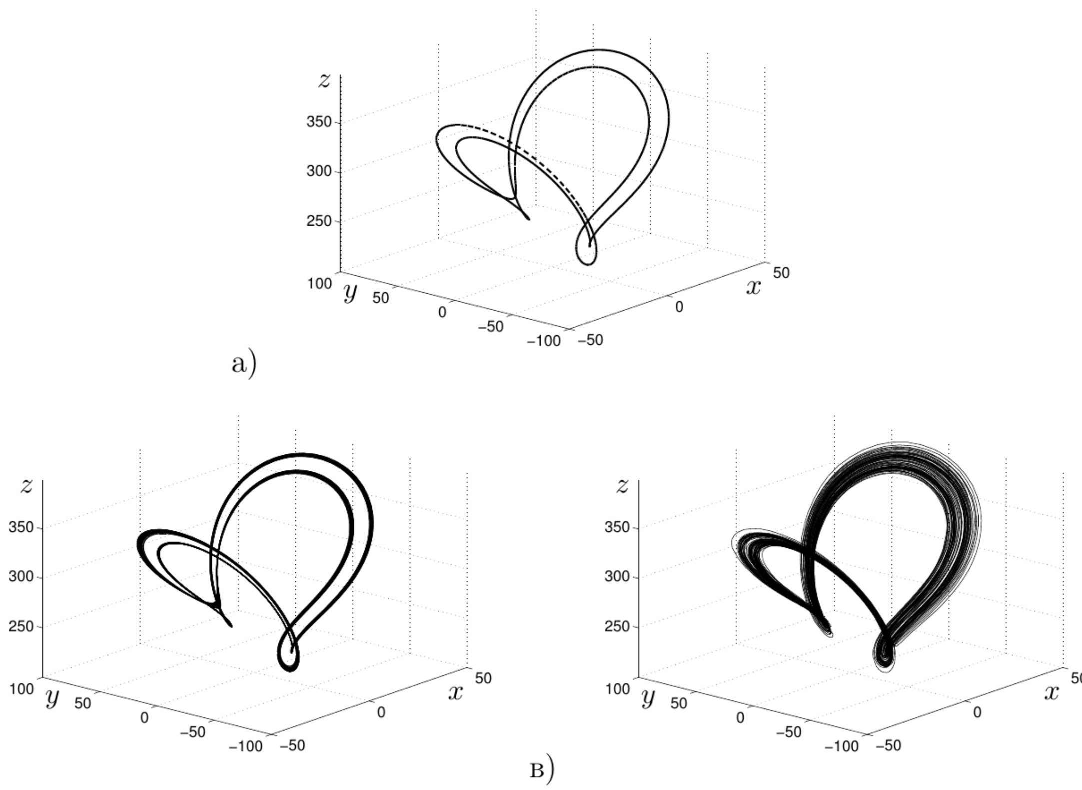


Рис. 3.1.16 – Траектории системы (3.1.4) для $r = 300$ при а) $\varepsilon = 0$, б) $\varepsilon = 0.3$, б) $\varepsilon = 2$.

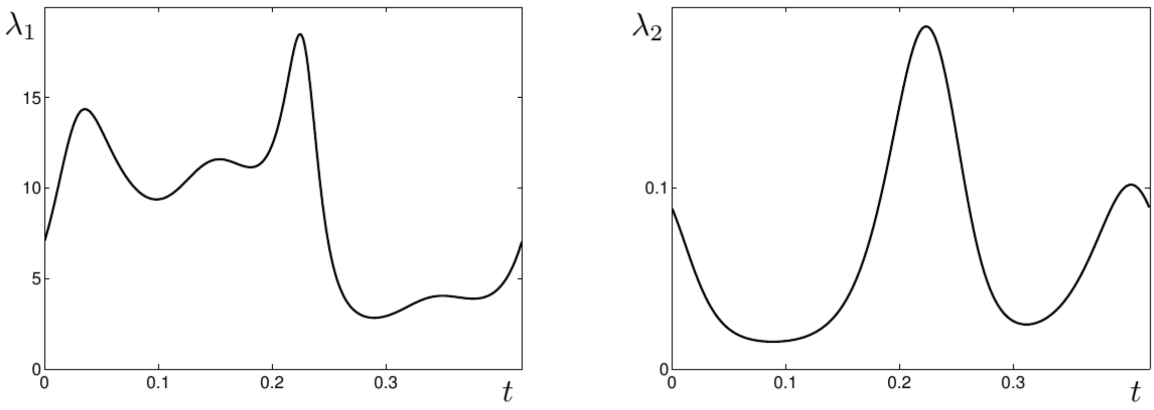


Рис. 3.1.17 – Стохастическая чувствительность циклов системы (3.1.4) для $r = 300$.

эксцентриситет.

Детали индуцированного шумом перехода от двух разделенных сосуществующих циклов к одному перемешанному представлены на рис.3.1.18. Здесь звездочками изображены точки пересечения случайных траекторий с полуплоскостью $\Pi = \{x > 0,\ y = 0\}$ для трех значений интенсивности шума. Наряду с этими результатами прямого численного моделирования здесь показаны доверительные эллипсы, построенные с помощью собственных чисел и собственных векторов матриц стохастической чувствительности.

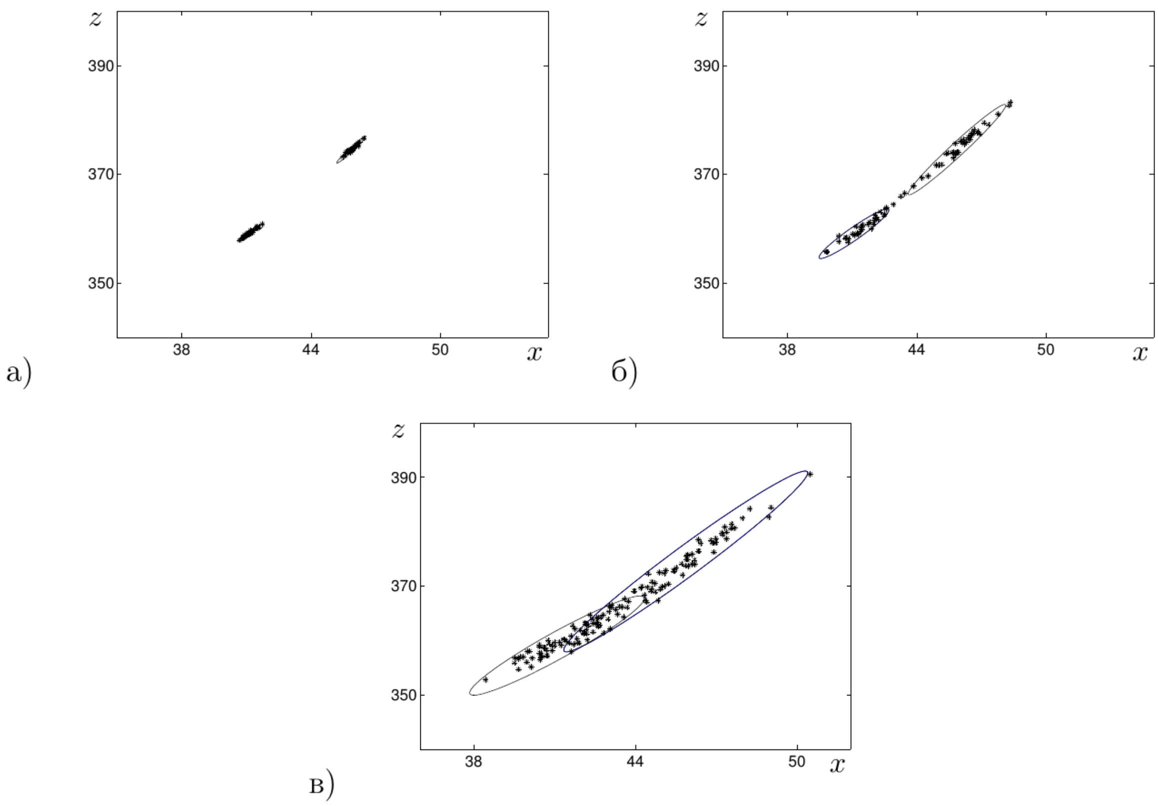


Рис. 3.1.18 – Случайные состояния и доверительные эллипсы системы (3.1.4) в сечении Π для $r = 300$ и а) $\varepsilon = 0.3$, б) $\varepsilon = 1$, в) $\varepsilon = 2$.

При малом шуме ($\varepsilon = 0.3$) случайные состояния локализованы вблизи соответствующих циклов, доверительные эллипсы малы и удалены друг от друга (см. рис. 3.1.18а). С увеличением интенсивности шума ($\varepsilon = 1$) разброс случайных состояний растет, что хорошо отражается эллипсами, которые увеличиваются и приближаются друг к другу (см. рис. 3.1.18б). При дальнейшем увеличении шума ($\varepsilon = 2$) эллипсы пересекаются и два раздельных пучка случайных траекторий сливаются в один (см. рис. 3.1.18в). Таким образом, размер и взаимное расположение эллипсов, найденных с помощью функции стохастической чувствительности, позволяет описывать и эффективно прогнозировать основные особенности индуцированных шумом переходов между трехмерными циклами.

В этом разделе был проведен детальный анализ индуцированных шумом переходов между некоторыми характерными аттракторами нелинейных динамических систем. Представленные здесь результаты опубликованы в работах [188, 210, 211] автора диссертации.

Отметим, что описанная здесь методика, использующая функцию стохастической чувствительности и метод доверительных областей, была успешно применена к анализу стохастических переходов между аттракторами и других типов [200, 260, 261, 264].

3.2. Стохастические переходы между отдельными частями аттрактора

В нелинейных динамических системах аттракторы могут иметь достаточно сложную пространственную структуру, состоять из нескольких частей. Под действием случайных возмущений возможны индуцированные шумами переходы между отдельными фрагментами аттракторов. Такие переходы могут быть причиной стохастических бифуркаций.

3.2.1. Обратные стохастические бифуркации в дискретных моделях

Обратные стохастические бифуркации в дискретных системах рассмотрим на примере известной модели Рулькова [280] нейронной активности. Стохастический вариант этой модели задается уравнением

$$x_{t+1} = \frac{\alpha}{1 + x_t^2} + \gamma + \varepsilon\xi_t. \tag{3.2.1}$$

Случайные возмущения в параметре γ моделируются некоррелированным

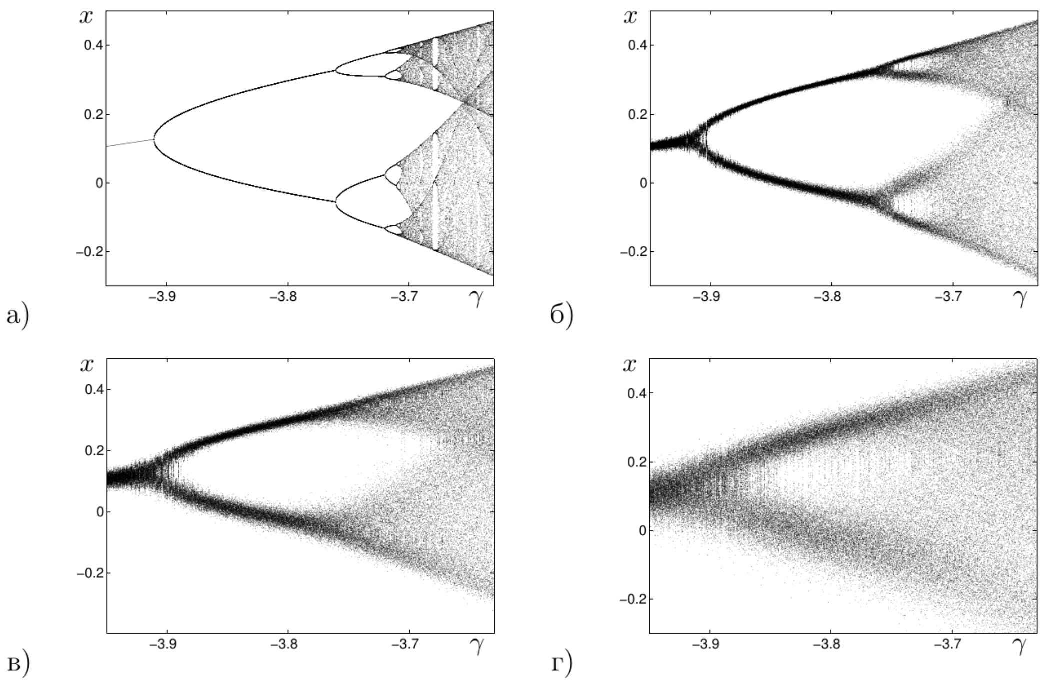


Рис. 3.2.1 – Состояния системы (3.2.1) для а) $\varepsilon = 0$, б) $\varepsilon = 0.003$, в) $\varepsilon = 0.007$, г) $\varepsilon = 0.02$.

гауссовским случайным процессом ξ_t с параметрами $\mathrm{E}(\xi_t) = 0$, $\mathrm{E}(\xi_t^2) = 1$, ε – интенсивность шума. Положим $\alpha = 4.1$.

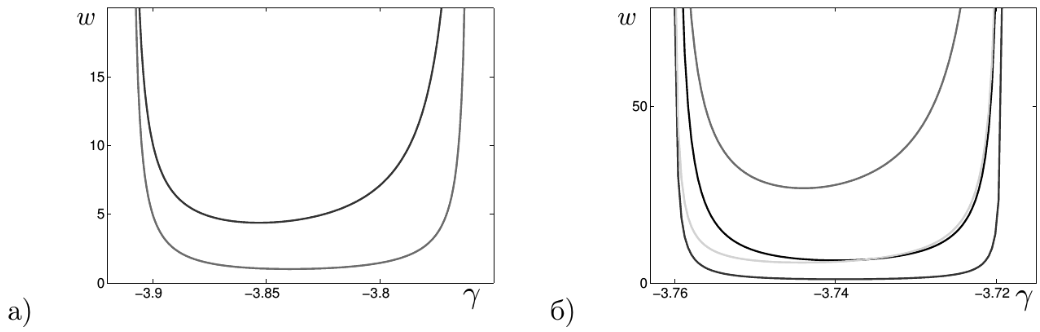


Рис. 3.2.2 – Стохастическая чувствительность аттракторов системы (3.2.1): а) 2-циклов, б) 4-циклов.

На рис. 3.2.1а представлена бифуркационная диаграмма детерминированной системы (3.2.1) с $\varepsilon = 0$. При случайных возмущениях решения системы (3.2.1) покидают детерминированные аттракторы и образуют вокруг них стационарные вероятностные распределения. На рис. 3.2.1б,в,г изображены состояния x_t, $(t = 1001, \ldots, 1100)$ решений системы (3.2.1), стартующих с $x_0 = 0$ для разных значений интенсивности шума. Здесь видно, что слабый шум лишь слегка размывает тонкую структуру детерминированных аттракторов. По мере увеличения интенсивности шума дисперсия случайных состояний растет. Наряду с количественными изменениями дисперсии увеличение шума вызывает качественные преобразования вероятностных распределений.

Для анализа разброса случайных состояний вокруг аттракторов будем использовать аппроксимации, основанные на методе функций стохастической чувствительности аттракторов дискретных систем (разделы 1.1, 1.2 диссертации). На рис. 3.2.2 показаны графики функций стохастической чувствительности для состояний 2-циклов (см. рис. 3.2.2а) и 4-циклов (см. рис. 3.2.2б) модели Рулькова на интервалах структурной устойчивости. Как видно, стохастическая чувствительность сильно меняется на краях этих интервалов. Приближаясь к точкам бифуркации, эти функции неограниченно возрастают.

Надо отметить, что разные точки цикла имеют различный отклик на случайные возмущения. Детали этого отличия четко наблюдаются с помощью функции плотности вероятности. На рис. 3.2.3 показаны графики плотности распределения случайных состояний системы (3.2.1) при $\gamma = -3.9$ вокруг элементов $\bar{x}_1 = 0.07725$, $\bar{x}_2 = 0.17568$ невозмущенного детерминированного 2-цикла для трех значений интенсивности шума: $\varepsilon = 0.003$ (красный), $\varepsilon = 0.007$ (зеленый) и $\varepsilon = 0.02$ (синий). Кривые на рис. 3.2.3а были получены методом прямого численного моделирования, а на рис. 3.2.3б – вычислялись с использованием функции стохастической чувствительности (1.2.29). Различие в стохастической чувствительности состояний 2-цикла объясняет разницу в высоте и ширине пиков плотности вероятности.

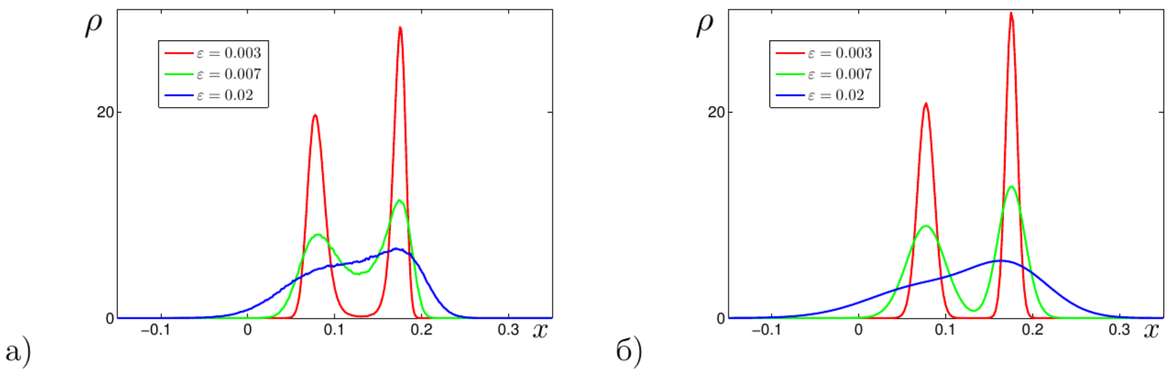


Рис. 3.2.3 – Обратная стохастическая бифуркация при $\gamma = -3.9$. Функции плотности распределения, построенные с помощью а) прямого численного моделирования; б) функции стохастической чувствительности.

Рассмотрим изменение формы этих пиков при увеличении шума. Для слабого шума ($\varepsilon = 0.003$) кривая функции плотности вероятности $\rho(x)$ имеет два узких пика над точками детерминированного 2-цикла. По мере увеличения интенсивности шума наблюдается процесс слияния этих пиков. Как видно, локальный минимум $\rho(x)$ увеличивается, но общая форма графика остается бимодальной, с тремя локальными экстремумами. Для некоторого порогового значения ε происходит качественное изменение формы $\rho(x)$. Форма этой кри-

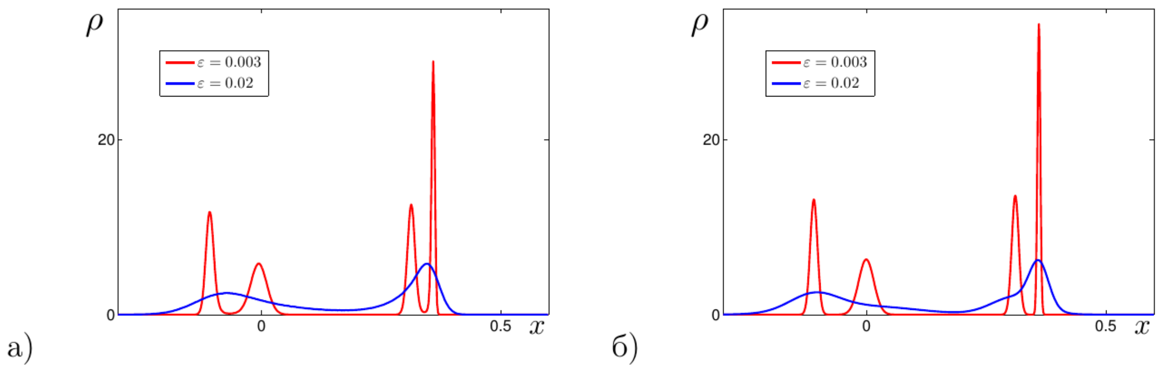


Рис. 3.2.4 – Обратная стохастическая бифуркация при $\gamma = -3.74$. Функции плотности распределения, построенные с помощью а) прямого численного моделирования; б) функции стохастической чувствительности.

вой становится унимодальной: два отдельных пика сливаются в один, остается единственный максимум. Подобная форма плотности характерна для стохастически возмущенного равновесия. Такое преобразование формы $\rho(x)$ от бимодальной к унимодальной можно трактовать как обратную стохастическую бифуркацию – разновидность стохастической P-бифуркации [41].

Аналогичное преобразование наблюдается и для 4-цикла. На рис. 3.2.4 показано, как происходит обратная стохастическая бифуркация "4-цикл $\to$ 2-цикл". Графики на рис. 3.2.4а были построены на основе прямого численного моделирования, а на рис. 3.2.4б – с помощью аналитического приближения, использующего значения стохастической чувствительности элементов 4-цикла.

Таким образом, техника стохастической чувствительности позволяет не только описывать разброс случайных состояний вокруг аттракторов, но и анализировать переходы между их отдельными частями, приводящие к обратным стохастическим бифуркациям.

3.2.2. Обратные стохастические бифуркации в непрерывных моделях

Обратные стохастические бифуркации в непрерывных системах рассмотрим на примере классической модели Лоренца [279]. Стохастический вариант этой модели при $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ задается уравнением (3.1.4).

На рис. 3.2.5 представлена бифуркационная диаграмма детерминированной модели на интервале $205 < r < 235$. Здесь показаны z-координаты точек пересечения детерминированных аттракторов с секущей плоскостью $y = 0$ при $x < 0$.

На этом интервале детерминированная система Лоренца демонстрирует как хаотические, так и регулярные аттракторы в цепи бифуркаций удвое-

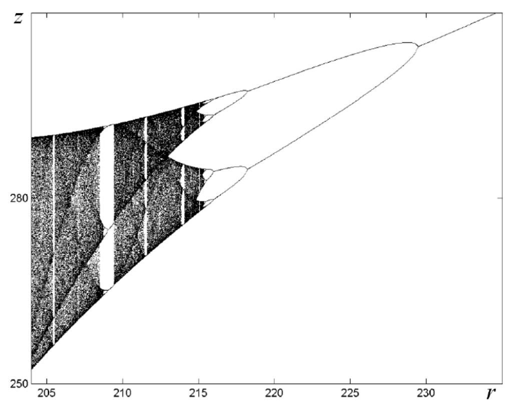


Рис. 3.2.5 – Бифуркационная диаграмма модели Лоренца

ния периода. Предельные 2^k-циклы наблюдаются на интервалах структурной устойчивости I_k: $I_0 = (229, 235)$, $I_1 = (218.22, 229)$, $I_2 = (215.88, 218.22)$, $I_3 = (215.49, 215.88)$, $I_4 = (215.39, 215.49), \ldots$.

На рис. 3.2.6 изображены циклы разной кратности. Характерной особенностью этих кратных циклов является наличие близко расположенных частей (петель).

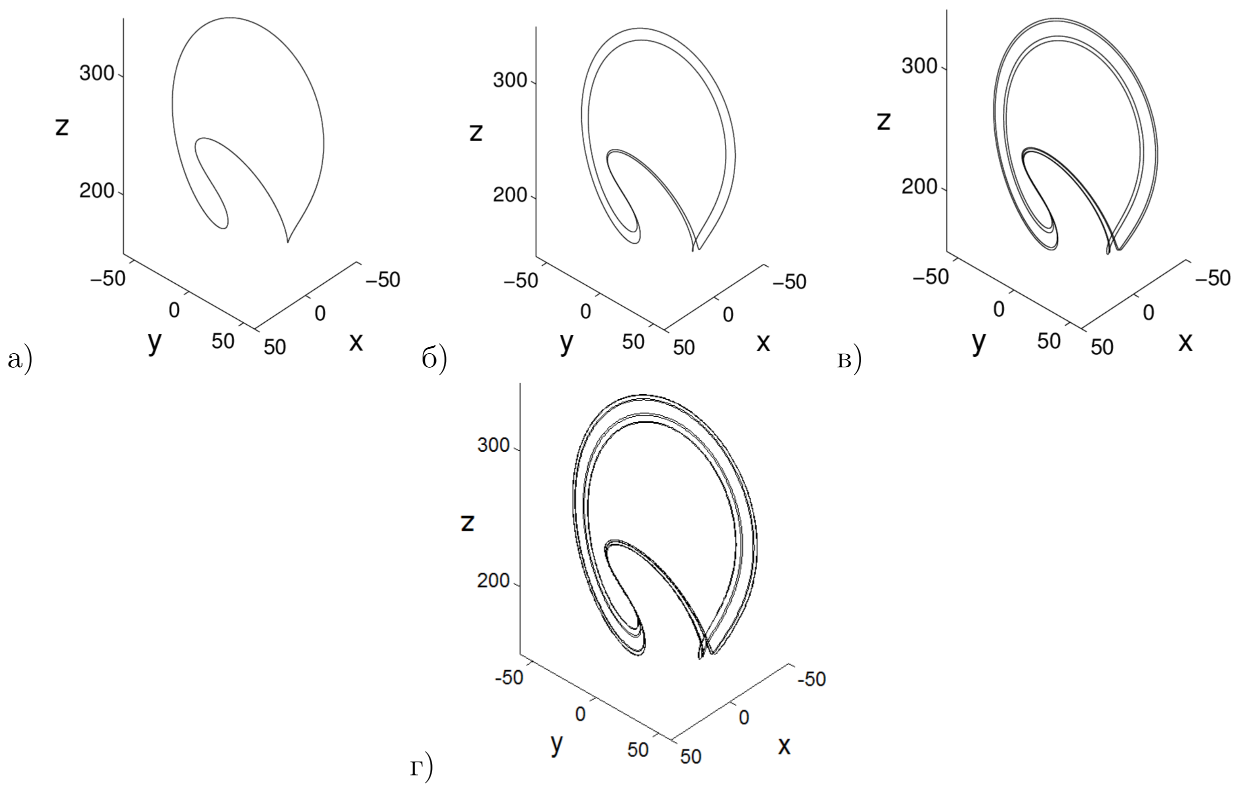


Рис. 3.2.6 – Циклы детерминированной модели для а) $r = 230$ (1-цикл), б) $r = 224.5$ (2-цикл), в) $r = 217.2$ (4-цикл), г) $r = 215.75$ (8-цикл).

При случайных возмущениях траектории, стартующие с детерминированной орбиты цикла, образуют вокруг него некоторое распределение (стохастический цикл).

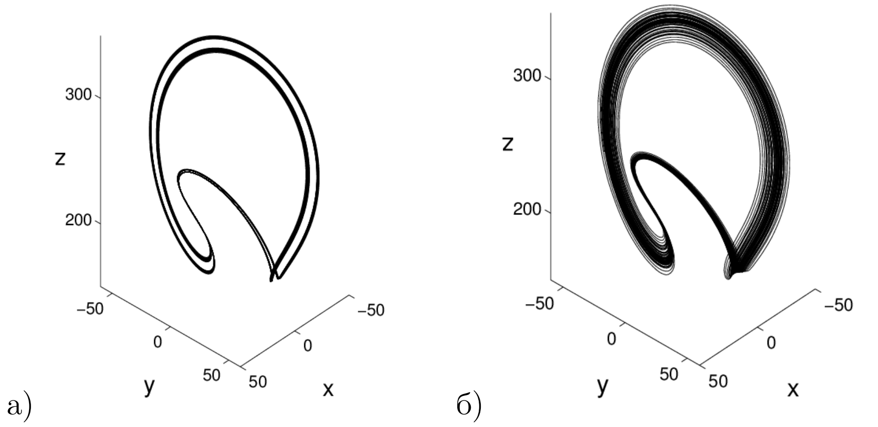


Рис. 3.2.7 – Стохастические 2-циклы при $r = 224.5$: а) $\varepsilon = 0.2$, б) $\varepsilon = 1$.

Рассмотрим влияние шума на кратные циклы. На рис. 3.2.7, 3.2.8 показаны результаты воздействия возрастающего шума на циклы кратности два и четыре.

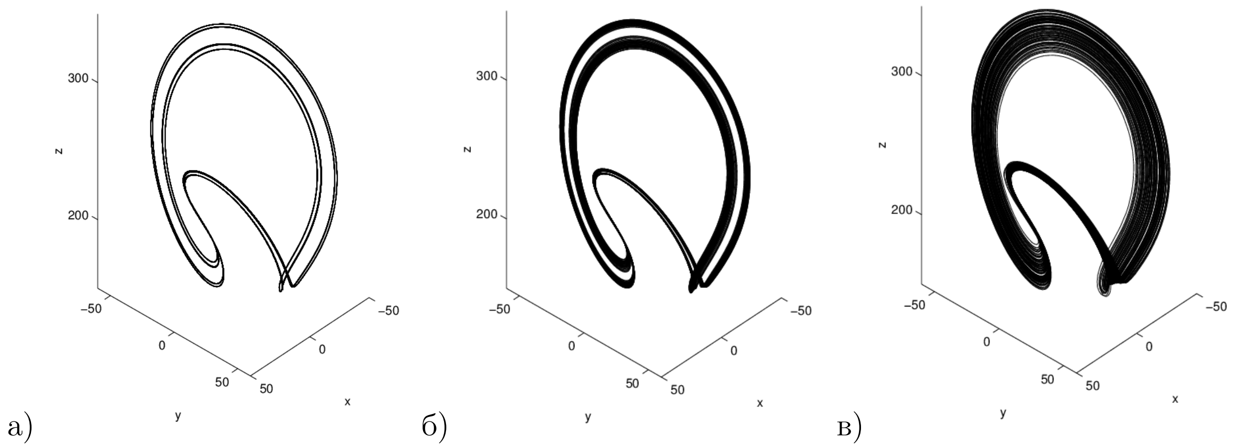


Рис. 3.2.8 – Стохастические 4-циклы при $r = 217.2$: а) $\varepsilon = 0.02$, б) $\varepsilon = 0.2$, в) $\varepsilon = 1$.

При малом шуме случайные траектории локализованы вблизи детерминированной орбиты. По мере увеличения интенсивности шума растет дисперсия стохастического пучка и начинаются индуцированные шумом переходы случайных траекторий между ближайшими петлями. С дальнейшим ростом шума отдельные, но близко расположенные части стохастического пучка объединяются в один. Представленный на рис. 3.2.7 сценарий можно интерпретировать как индуцированное шумом преобразование стохастического 2-цикла в стохастический 1-цикл, а на рис. 3.2.8 – последовательные трансформации стохастического 4-цикла в стохастический 2-цикл и далее в 1-цикл. Такое уменьшение кратности цикла по мере увеличения интенсивности шума называют обратной стохастической бифуркацией.

Аналогичный сценарий обратных стохастических бифуркаций наблюда-

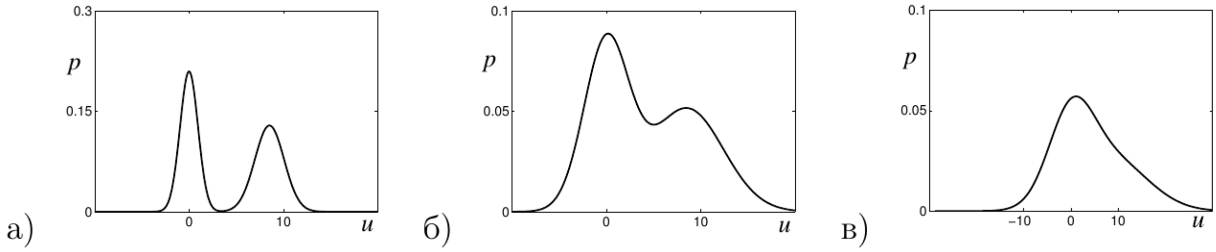


Рис. 3.2.9 – Трансформации плотности распределений для 2-цикла с $r = 224.5$: при а) $\varepsilon = 0.2$, б) $\varepsilon = 0.5$, в) $\varepsilon = 1$.

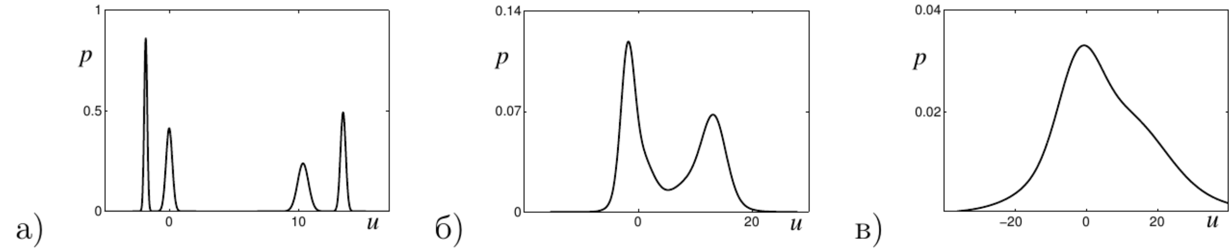


Рис. 3.2.10 – Трансформации плотности распределений для 4-цикла с $r = 217.2$: при а) $\varepsilon = 0.02$, б) $\varepsilon = 0.5$, в) $\varepsilon = 1$.

ется и для циклов более высокой кратности, например, и для 8-цикла при $r = 215.75$: 8-цикл $\to$ 4-цикл $\to$ 2-цикл $\to$ 1-цикл.

Формальное математическое исследование этого феномена обратных стохастических бифуркаций (ОСБ) проводится путем анализа функций плотности вероятности. Каждая ОСБ сопровождается качественным изменением формы плотности вероятности. Здесь для подробного параметрического анализа явления ОСБ в этой трехмерной модели будем использовать метод сечений Пуанкаре.

Зафиксируем плоскость сечения Пуанкаре П и прямую l, которая принадлежит П. Пусть u - координата текущей точки этой прямой l. Рассмотрим точки пересечения пучка случайных траекторий с плоскостью П. Обозначим через $p(u)$ функцию плотности вероятности для проекций этих точек пересечения на прямую l. Зоны вблизи максимумов $p(u)$ отмечают наибольшую концентрацию случайных состояний в стохастическом пучке.

Теперь мы можем свести изучение ОСБ к анализу качественных изменений формы кривых $p(u, \varepsilon)$. При изучении ОСБ для функций $p(u, \varepsilon)$ будем использовать следующее аналитическое приближение, основанное на методе функций стохастической чувствительности (см. п. 2.2.3).

В общем случае это приближение строится следующим образом. Пусть $\bar{x}(t)$ – периодическое решение, задающее детерминированный цикл, П – сечение Пуанкаре и l – прямая, которая принадлежит П. Пусть b – единичный

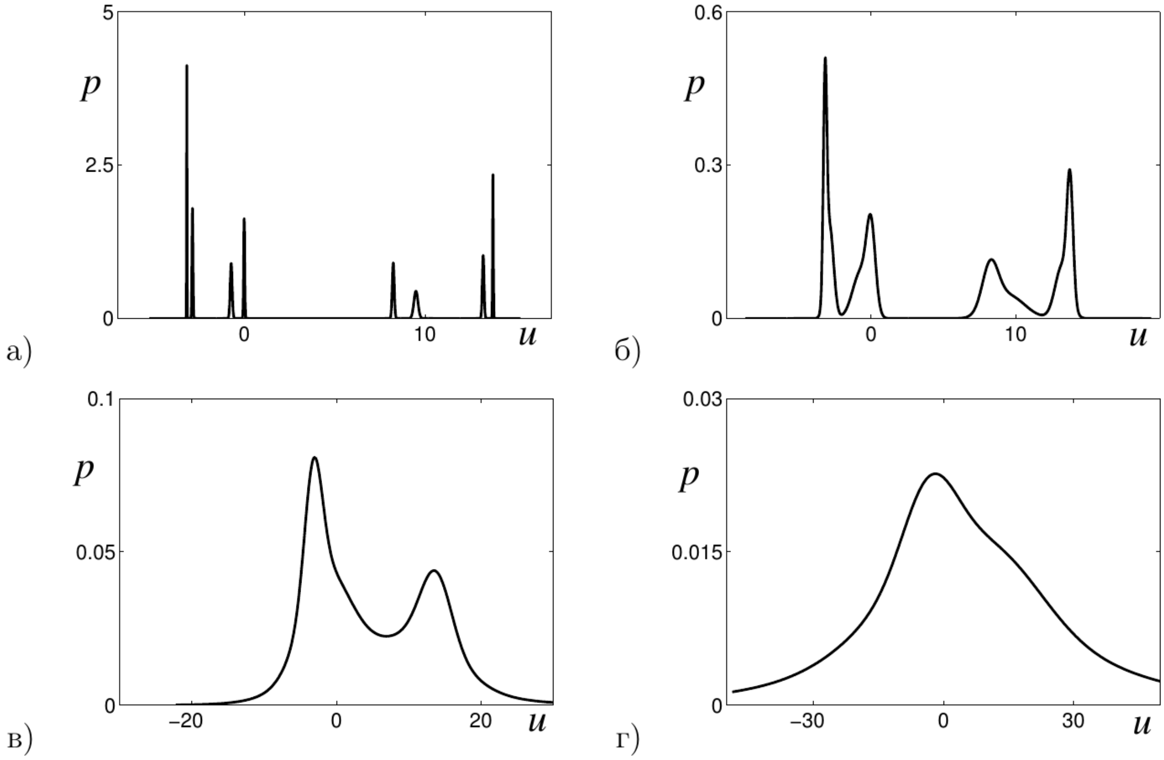


Рис. 3.2.11 – Трансформации плотности распределений для 8-цикла с $r = 215.75$: при а) $\varepsilon = 0.002$, б) $\varepsilon = 0.02$, в) $\varepsilon = 0.2$, г) $\varepsilon = 1$.

нормальный вектор плоскости П. На линии l определим систему координат с началом η и единичным направляющим вектором a. Тогда любая точка $x \in l$ имеет соответствующую скалярную координату $u:\ x(u) = \eta + ua$.

Пусть $\bar{x}_i = \bar{x}(t_i)$ $(i = 1, ..., k)$ – точки пересечения детерминированного цикла с П. Для каждой точки $\bar{x}_i$ найдем матрицу $W_i = W(t_i)$ стохастической чувствительности. Эти матрицы характеризуют стохастическую чувствительность цикла в нормальной плоскости. Соответствующая матрица стохастической чувствительности Φ_i в некоторой секущей плоскости П (необязательно нормальной) может быть рассчитана как

$$\Phi_i = B_i W_i B_i^\top, \quad B_i = I - r_i b^\top/(r_i^\top b).$$

Здесь r_i – единичный вектор, касательный к детерминированному циклу в точке $\bar{x}_i$. При этом значение $\sigma_i^2 = a^\top \Phi_i a$ задает величину стохастической чувствительности для цикла в точке $\bar{x}_i$ в направлении вектора a.

Пусть u_i – координаты проекций точек $\bar{x}_i$ на l. Значения u_i и σ_i $(i = 1, ..., k)$ позволяют найти для $p(u, \varepsilon)$ приближение гауссовского типа:

$$p(u, \varepsilon) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon\sigma_i} \exp\left(-\frac{(u - u_i)^2}{2\varepsilon^2\sigma_i^2}\right).$$

На рис. 3.2.9 для $r = 224.5$ представлены графики плотности $p(u, \varepsilon)$, полученные для прямой l, проходящей через точки $(-29.3661, 52.3208, 259.8750)$ и $(-28.4776, 44.4044, 256.8549)$. Для малого шума ($\varepsilon = 0.2$) кривая функции плотности вероятности имеет два узких пика (рис. 3.2.9а). С ростом ε ширина этих пиков растет и начинается процесс их слияния (см. рис. 3.2.9б). Как можно видеть, общая форма графика остается бимодальной. Для некоторого порогового значения интенсивности шума происходит качественное изменение формы $p(u)$ – кривая становится унимодальной (см. рис. 3.2.9в). Два отдельные пики сливаются в один и кривая имеет единственный максимум. Дальнейшее увеличение ε приводит только к увеличению ширины этого одиночного пика. Такую трансформацию $p(u, \varepsilon)$ от бимодальной к унимодальной форме можно использовать как формальный индикатор обратной стохастической бифуркации (P-бифуркации "2$\to$1").

Для циклов более высокой кратности наблюдается цепочка последовательных обратных стохастических бифуркаций. Каждая ОСБ сопровождается изменением количества максимумов плотности. Рассмотрим подробно изменение формы кривой $p(u, \varepsilon)$ для 4-цикла с $r = 217.2$ (см. рис. 3.2.10) и для 8-цикла с $r = 215.75$ (см. рис. 3.2.11).

Как видно на рис. 3.2.10, для малых шумов ($\varepsilon = 0.02$) четыре острых пика плотности подтверждают, что стохастический аттрактор на рис. 3.2.8а является стохастическим 4-циклом. Для $\varepsilon = 0.2$, форма $p(u, \varepsilon)$ становится бимодальной, а стохастический аттрактор на рис. 3.2.8б становится стохастическим 2-циклом. Здесь наблюдается первая ОСБ "4$\to$2".

При дальнейшем росте ε форма кривой $p(u, \varepsilon)$ становится унимодальной, а стохастический аттрактор (см. рис. 3.2.8в для $\varepsilon = 1$) преобразуется в стохастический 1-цикл – происходит вторая ОСБ "2$\to$1". Значения ε, которые соответствуют изменениям модальности графика плотности, позволяют оценить точки последовательных обратных стохастических бифуркаций: "$4 \to 2 \to 1$".

Цепочка последовательных ОСБ "$8 \to 4 \to 2 \to 1$"для стохастически возмущенного 8-цикла с $r = 215.75$ представлена на рис. 3.2.11.

Детально описание обратных стохастических бифуркаций может быть получено по взаимному расположению и изменению количества экстремумов функции $p(u, \varepsilon)$. На рис. 3.2.12 показаны максимумы (сплошные линии) и минимумы (пунктирные линии) этой функции в зависимости от интенсивности шума ε. Каждая ОСБ соответствует "аннигиляции" максимумов через слияние с соответствующими минимумами.

Сопоставим изученные здесь качественные изменения формы плотности

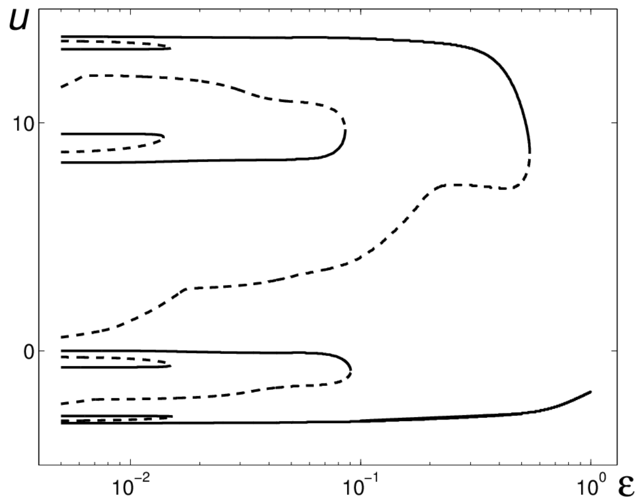


Рис. 3.2.12 – Максимумы (сплошные линии) и минимумы (пунктиры) плотности распределения для $r = 215.75$.

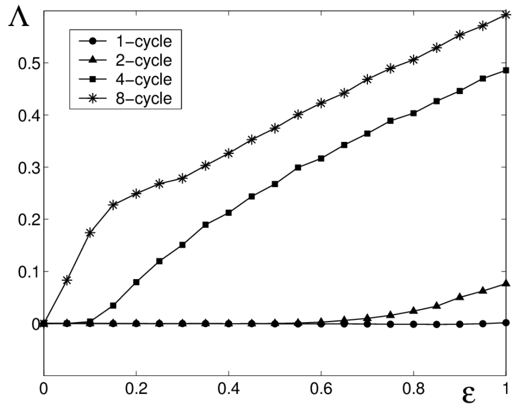


Рис. 3.2.13 – Старший показатель Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$ для 1-цикла (кружки), 2-цикла (треугольники), 4-цикла (квадраты) и 8-цикла (звездочки).

(P-бифуркации) с изменением динамических свойств системы Лоренца (D-бифуркации). На рис. 3.2.13 представлены графики старшего показателя Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$ для рассмотренных выше значений параметра r, отвечающих циклам различной кратности. Для предельных циклов $\Lambda(0) = 0$. Для $\varepsilon > 0$ показатель Ляпунова существенно зависит от кратности рассматриваемых предельных циклов. Для циклов кратности два и выше значения $\Lambda(\varepsilon)$ с ростом шума становятся положительными – в системе происходит D-бифуркация, которая знаменует начало хаотизации, вызванной шумом. Пороговая интенсивность шума, соответствующая переходу от порядка к хаосу, существенно зависит от кратности циклов: чем выше кратность, тем при меньших интенсивностях шума система становится хаотической.

3.2.3. Переходы между частями цикла в модели Чена

Применение функции стохастической чувствительности к анализу другого сценария индуцированных шумом переходов между близкими фрагментами цикла рассмотрим на примере стохастически возмущенной системы Чена [281]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(-x+y)+\varepsilon\dot{w}_1 \\ \dot{y} &= (c-a)x+cy-xz+\varepsilon\dot{w}_2 \\ \dot{z} &= -bz+xy+\varepsilon\dot{w}_3\,. \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Здесь $w_i(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы, $\mathrm{E}(w_i(t)-w_i(s))=0$, $\mathrm{E}(w_i(t)-w_i(s))^2=|t-s|$ $(i=1,2,3)$, а параметр ε – интенсивность шумов.

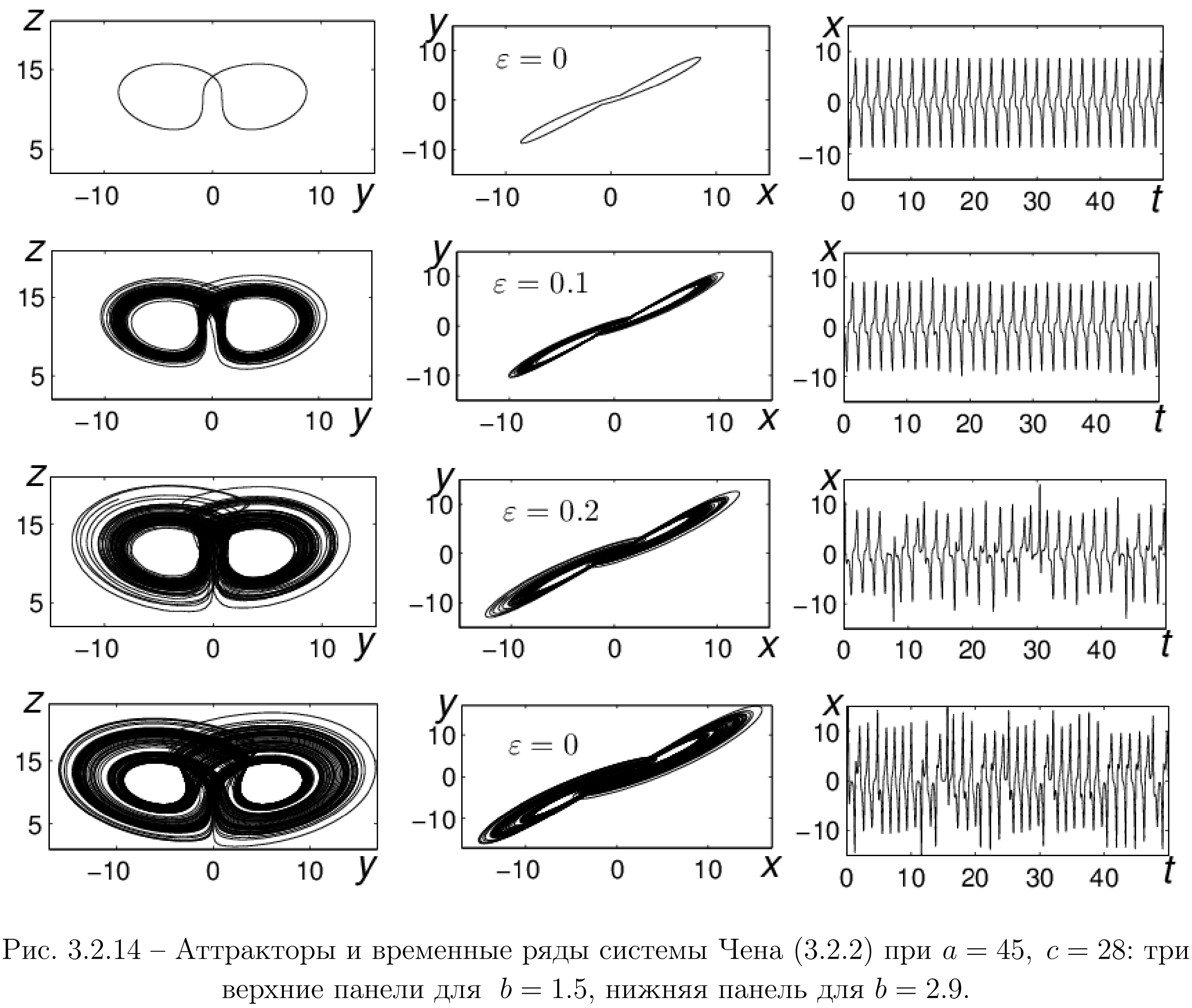


Рис. 3.2.14 – Аттракторы и временные ряды системы Чена (3.2.2) при $a=45$, $c=28$: три верхние панели для $b=1.5$, нижняя панель для $b=2.9$.

Зафиксируем $a=45$ и $c=28$. Для $\varepsilon=0$ на интервале $1.5\leqslant b\leqslant 2.9$ детерминированная система (3.2.2) демонстрирует последовательность бифуркаций удвоения периода циклов с переходом от порядка (см. цикл на верх-

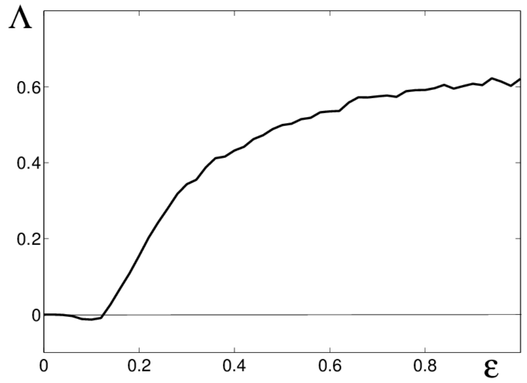


Рис. 3.2.15 – Старший показатель Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$ стохастической системы (3.2.2) при $a = 45,\ b = 1.5,\ c = 28.$

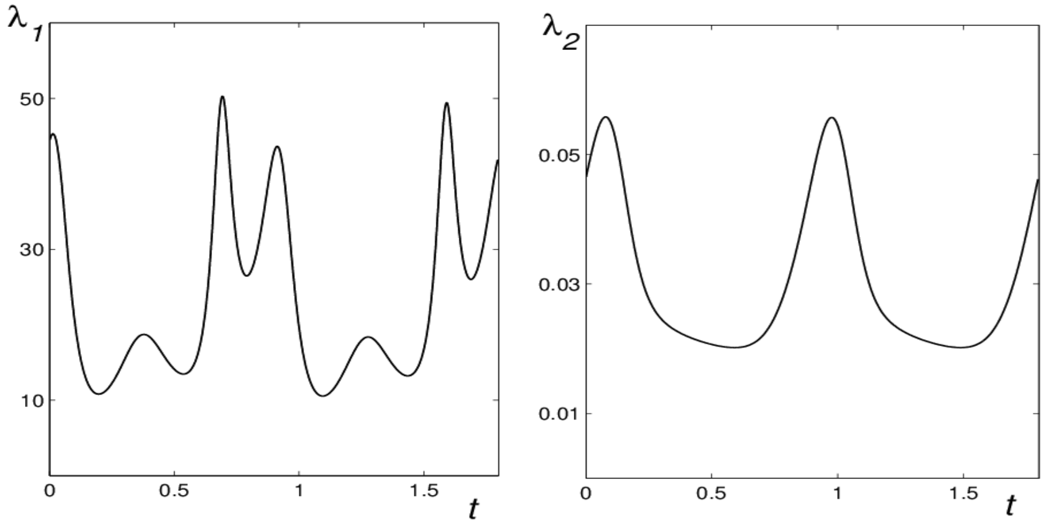


Рис. 3.2.16 – Стохастическая чувствительность цикла системы (3.2.2) при $a = 45,\ b = 1.5,\ c = 28.$

ней панели рис. 3.2.14) к хаосу (см. хаотический аттрактор на нижней панели рис. 3.2.14).

Рассмотрим систему (3.2.2) для фиксированного $b = 1.5$ и меняющейся интенсивности шума ε. На трех верхних панелях рис. 3.2.14 изображены YOZ и XOY-проекции решений системы (3.2.2) и временные ряды при разных значениях интенсивности шума.

Координата $x(t)$ детерминированного цикла монотонно осциллирует между амплитудными значениями ± 8.7. При малых шумах случайные состояния стохастического цикла концентрируются в малой окрестности детерминированного цикла. При увеличении интенсивности шума разброс случайных траекторий увеличивается и появляются стохастические аномалии на интервалах между амплитудными значениями. С дальнейшим ростом интенсивности шума (см. рис. 3.2.14 при $\varepsilon = 0.2$) начинают происходить случайные переходы между различными частями цикла. Эти переходы локализованы в централь-

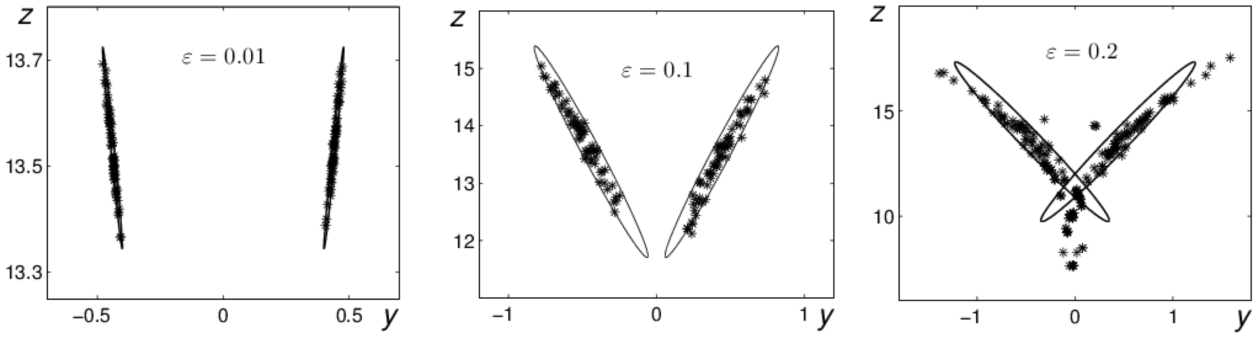


Рис. 3.2.17 – Доверительные эллипсы и точки пересечения (звездочки) случайных траекторий с плоскостью Пуанкаре $x = 0$ при $b = 1.5$, $P = 0.95$.

ной части аттрактора около точки $(0, 0, 13)$. Здесь вблизи $x = 0$ регулярность осцилляций нарушается и начинают наблюдаться возвраты траектории к только что пройденному амплитудному значению. По мере увеличения интенсивности шума данный эффект усиливается.

Вследствие таких переходов существенно изменяется форма пучка случайных траекторий. Геометрически пучок случайных траекторий становится подобен хаотическому аттрактору невозмущенной детерминированной системы (см. две нижние панели рис. 3.2.14). Такое качественное изменение формы стохастического аттрактора может быть интерпретировано как индуцированный шумом переход от порядка к хаосу. Здесь, однако, необходимо проверить, являются ли эта хаосоподобная стохастическая динамика системы действительно хаотической.

Индикатором хаоса является положительность показателя Ляпунова. На рис. 3.2.15 изображен график старшего показателя Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$. Здесь $\Lambda(0) = 0$, что очевидно теоретически. Для малых $\varepsilon > 0$ функция $\Lambda(\varepsilon)$ имеет значения, близкие к нулю. После некоторого порогового значения интенсивности шума функция $\Lambda(\varepsilon)$ становится положительной, происходит D-бифуркация. Далее функция $\Lambda(\varepsilon)$ монотонно возрастает до $\Lambda \approx 0.6$. Это значение близко к величине старшего показателя Ляпунова хаотического аттрактора детерминированной системы Чена при $b = 2.9$. Таким образом, стохастический аттрактор системы (3.2.2) при $b = 1.5$ и $\varepsilon = 0.2$ и хаотический детерминированный аттрактор системы (3.2.2) при $b = 2.9$ подобны не только геометрически, но и имеют близкие динамические характеристики.

Далее исследуем вероятностный механизм этого индуцированного шумом явления с помощью метода стохастической чувствительности и техники доверительных эллипсов.

Пространственное расположение случайных траекторий вокруг детерминированного цикла задается матрицей стохастической чувствительности $W(t)$ (см. раздел 2.2.3). Ее собственные значения $\lambda_1(t) > \lambda_2(t)$ используются в качестве основных скалярных характеристик чувствительности цикла. На рис. 3.2.16 представлены графики функций $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ для цикла системы (3.2.2) при $b = 1.5$. Отметим существенный перепад значений $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ на интервале $[0, T]$. Значения $\lambda_1(t)$ превосходят значения $\lambda_2(t)$ на несколько порядков, что подтверждает значительную неравномерность разброса случайных траекторий.

Доверительные эллипсы, построенные по собственным числам $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ и собственным векторам матрицы стохастической чувствительности, дают наглядное геометрическое описание пространственного расположения вероятностных распределений случайных состояний стохастического цикла в сечениях Пуанкаре. Будем использовать такие эллипсы для анализа индуцированных шумом переходов от регулярных стохастических циклов к хаотическим. Прежде всего, выберем подходящее положение плоскости для сечения Пуанкаре. Мы ищем "переходной мостик," по которому случайные траектории переходят от одной части цикла к другой. Как видно из предыдущий рисунков, такой переход чаще всего происходит вблизи точки (0,0,13). Следовательно, в качестве секущей удобно взять плоскость $x = 0$. Это сечение Пуанкаре расположено в центре "переходного мостика". Именно здесь индуцированные шумом переходы начинаются при меньших шумах, чем в других возможных сечениях Пуанкаре.

На рис. 3.2.17 изображены точки (звездочки) пересечения случайных траекторий с плоскостью $x = 0$ и доверительные эллипсы с $P = 0.95$ для различных интенсивностей шума. При достаточно малых шумах доверительные эллипсы локализованы вблизи точек детерминированного цикла. Эти эллипсы достаточно малы и хорошо отделены один от другого (см. рис. 3.2.17 для $\varepsilon = 0.01$). При увеличении интенсивности шума доверительные эллипсы увеличиваются (см. рис. 3.2.17 для $\varepsilon = 0.1$) и начинают пересекаться (см. рис. 3.2.17 для $\varepsilon = 0.2$). Это пересечение может служить индикатором начала индуцированных шумом переходов. Отметим, что результаты прямого численного моделирования (звездочки) хорошо подтверждают теоретический прогноз, полученный с помощью техники функции стохастической чувствительности и метода доверительных эллипсов.

Такие индуцированные шумом переходы и являются причиной описанного выше явления трансформации динамики системы из регулярной в хаотическую (см. рис. 3.2.15).

Аналогичные явления стохастических переходов между близкими фрагментами циклов наблюдаются в системе (3.2.2) для циклов более высокой кратности. Так, например, при $b = 2.3$ детерминированная система имеет два сосуществующих несимметричных 2-цикла. Представленный здесь алгоритм анализа может быть использован и в этом, более сложном случае. Подробности такого анализа описаны в [193].

3.2.4. Стохастические переходы между частями хаотического аттрактора

Покажем, как представленный метод анализа стохастических переходов между отдельными частями регулярных аттракторов может быть применен к изучению переходов между частями многокусочного хаотического аттрактора. В качестве примера рассмотрим стохастически возмущенное логистическое уравнение

$$x_{t+1} = f(x_t, \eta_t), \qquad f(x, \eta) = \mu x(1 - x) + \eta, \quad \eta_t = \varepsilon \xi_t, \tag{3.2.3}$$

где ξ_t – скалярный некоррелированный случайный процесс с параметрами $\mathrm{E}\xi_t = 0$, $\mathrm{E}\xi_t^2 = 1$, ε – интенсивность шума.

В отсутствие случайных возмущений эта динамическая система демонстрирует большое разнообразие как регулярных, так и многокусочных хаотических аттракторов. На рис. 3.2.18 черным цветом выделен 2-кусочный хаотический аттрактор $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ при $\mu = 3.6$. На примере этого аттрактора мы покажем, как с помощью техники стохастической чувствительности можно анализировать индуцированные шумом переходы между его частями.

Для аттрактора $\mathcal{A}$ в п.1.4.3 найдены границы частей $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ и их стохастическая чувствительность. Границы b_1, a_1 части $\mathcal{A}_1$ равны $b_1 = 0.324$, $a_1 = 0.6004$, а границы a_2, b_2 аттрактора $\mathcal{A}_2$ равны $b_2 = 0.9$, $a_2 = 0.7885$. Здесь значения стохастической чувствительности

$$M(b_1) = 9.2944, \ M(a_1) = 69.706, \ M(a_2) = 15.925, \ M(b_2) = 1.$$

По этим значениям, следуя правилу трех сигм, можно записать уравнения границ доверительных интервалов:

$$\tilde{b}_1(\varepsilon) = b_1 - \sqrt{M(b_1)}\varepsilon, \ \ \tilde{a}_1(\varepsilon) = a_1 + \sqrt{M(a_1)}\varepsilon,$$

$$\tilde{a}_2(\varepsilon) = a_2 - \sqrt{M(a_2)}\varepsilon, \ \ \tilde{b}_2(\varepsilon) = b_2 + \sqrt{M(b_2)}\varepsilon,$$

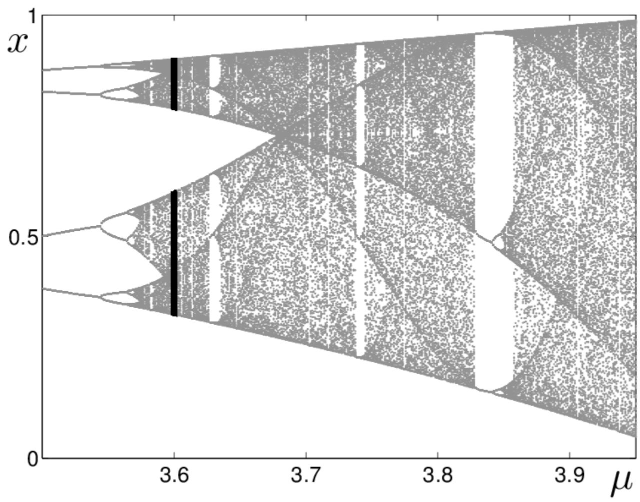


Рис. 3.2.18 – Бифуркационная диаграмма системы (3.2.3) при $\varepsilon = 0$.

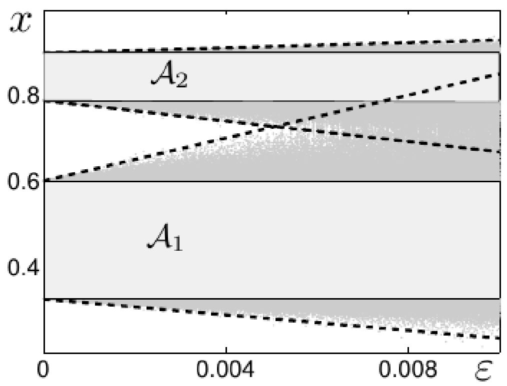


Рис. 3.2.19 – Система (3.2.3) с $\mu = 3.6$: детерминированный хаотический 2-кусочный аттрактор $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ (светло-серый), случайные состояния (темно-серый), выходящие за границы детерминированного хаотического аттрактора и границы доверительных интервалов (пунктир).

На рис. 3.2.19 эти границы изображены черными пунктирными линиями, детерминированный хаотический 2-кусочный аттрактор $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}$ – светло-серым, случайные состояния, выходящие за границы детерминированного хаотического аттрактора – темно-серым. Пересечение границ (черный пунктир) локализует пороговую интенсивность шума $\varepsilon^* \approx 0.005$, соответствующую началу индуцированного шумом слияния стохастически возмущенных частей $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ хаотического аттрактора. Как видно, эта оценка хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования.

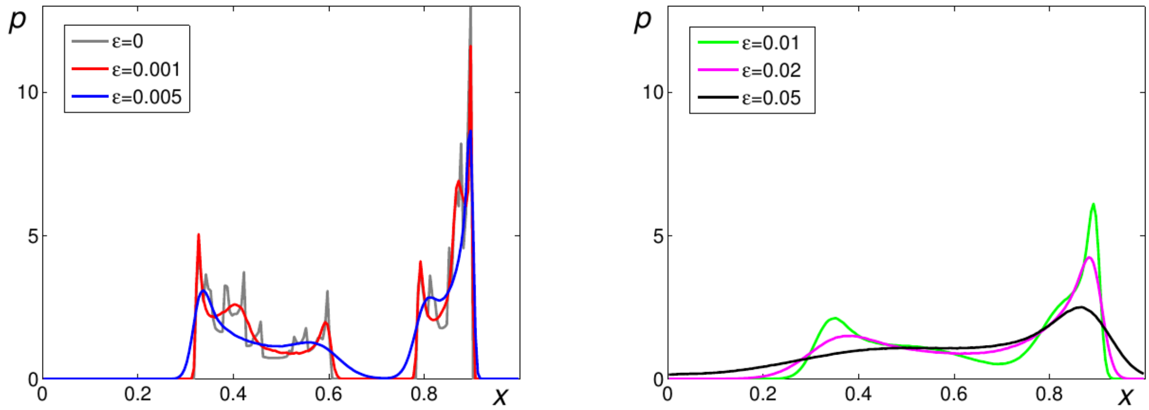


Рис. 3.2.20 – Плотность распределения случайных состояний системы (3.2.3) с $\mu = 3.6$.

Заметим, что исходная детерминированная система при $\mu = 3.67857$ демонстрирует бифуркацию внутреннего кризиса, при котором отдельные части $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ сливаются вместе и образуют 1-кусочный хаотический аттрактор. При наличии шума эта точка этой бифуркации слияния сдвигается влево. Таким образом, описанное выше явление внутреннего слияния двух фрагментов распределения можно трактовать как индуцированную шумом бифуркацию внутреннего кризиса.

На рис. 3.2.20 иллюстрируются последовательные преобразования плотности вероятности случайных состояний стохастической системы (3.2.3) при увеличении шума. Как видно, шум не только сглаживает нерегулярную структуру плотности детерминированного аттрактора, но и объединяет две отдельные его части в единое целое. При дальнейшем увеличении шума график плотности вероятности преобразуется из 4-пиковой формы в 2-пиковую и далее в 1-пиковую. Эти качественные изменения можно рассматривать как некоторую стохастическую P-бифуркацию.

В разделе 3.2 был описан метод параметрического анализа индуцированных шумом переходов между фрагментами аттракторов и соответствующих стохастических бифуркаций на примере систем Рулькова, Лоренца, Чена и логистической модели на базе техники стохастической чувствительности и доверительных областей. Представленные здесь результаты опубликованы в работах [193, 199, 212, 221] автора диссертации.

Отметим, что описанные здесь явления стохастических переходов между отдельными частями аттрактора изучались также в [259].

3.3. Стохастическая генерация новых аттракторов

Конструктивная роль шумов в нелинейных системах состоит в том, что при некоторых условиях под действием случайных возмущений происходит генерация новых аттракторов.

3.3.1. Стохастическая возбудимость вблизи касательной бифуркации

Явление стохастической возбудимости можно наблюдать в динамических системах, имеющих устойчивое равновесие в качестве единственного аттрактора. Для таких систем бассейн притяжения равновесия может быть разделен на две зоны. Если начальная точка принадлежит первой, допороговой зоне, локализованной вблизи равновесия, система быстро релаксирует обратно в устойчивое равновесие. Как только начальная точка лежит во второй, надпороговой зоне, наблюдаются большие выбросы траекторий. В этом случае система демонстрирует колебания большой амплитуды.

Рассмотрим дискретную нелинейную динамическую систему [200]

$$x_{t+1} \;=\; f(x_t, \mu), \quad f(x, \mu) = \mu x(1 - x)(ax^2 + bx + c), \tag{3.3.1}$$

где

$$a = \frac{1}{1 - s_1 + s_2 - s_3}, \quad b = a(1 - s_1), \quad c = a(1 - s_1 + s_2),$$
$$s_1 = r_1 + r_2 + r_3, \quad s_2 = r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1, \quad s_3 = r_1 r_2 r_3.$$

При любом μ система (3.3.1) имеет тривиальное равновесие $\bar{x}_0 = 0$.

При $\mu_1 = 1$ значения $r_1,\ r_2,\ r_3\ \ (r_1 \le r_2 \le r_3)$ определяют нетривиальные равновесия системы (3.3.1): $\bar{x}_1 = r_1,\ \bar{x}_2 = r_2,\ \bar{x}_3 = r_3$. При изменении параметра μ эти равновесия меняются. Обозначим их функциями $\bar{x}_1(\mu),\ \bar{x}_2(\mu),\ \bar{x}_3(\mu)$.

Зафиксируем $r_1 = r_2 = 0.25,\ r_3 = 0.85$ и будем менять μ. Изменение параметра μ меняет функцию $f(x, \mu)$ (см. рис. 3.3.1а), и, следовательно,

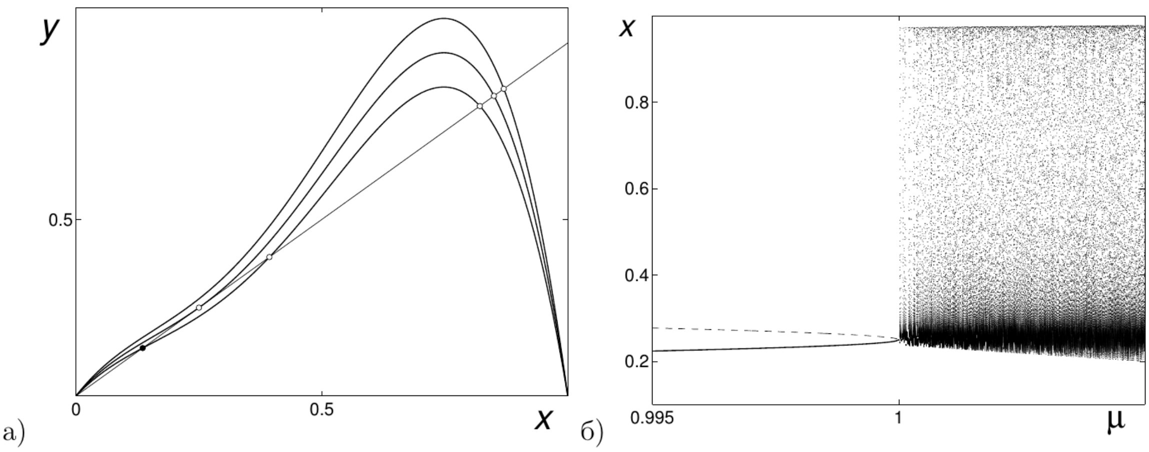


Рис. 3.3.1 – Детерминированная система (3.3.1): а) графики $y = f(x, \mu)$ для $\mu > \mu_*$ (верхний); $\mu = \mu_*$ (средний); $\mu < \mu_*$ (нижний); б) аттракторы детерминированной системы.

может качественно менять динамику системы (3.3.1). На рис. 3.3.1б изображены аттракторы системы (3.3.1) на интервале $\mu \in (0.995, 1.005)$. Отметим, что на этом интервале равновесия $\bar{x}_0$, $\bar{x}_3(\mu)$ являются неустойчивыми. При $\mu < 1$ равновесие $\bar{x}_1(\mu)$ (сплошная линия) устойчиво, а равновесие $\bar{x}_2(\mu)$ (пунктир) – неустойчиво. Значение $\mu_* = 1$ является точкой касательной бифуркации. При $\mu = \mu_*$ равновесия $\bar{x}_1(\mu)$ и $\bar{x}_2(\mu)$ сливаются в одно полуустойчивое равновесие $\bar{x}_1(\mu_*) = \bar{x}_2(\mu_*)$. При $\mu > \mu_*$ это равновесие исчезает и появляется новый хаотический аттрактор.

Зафиксируем значение параметра $\mu = 0.997$. При этом равновесия системы (3.3.1) имеют вид $\bar{x}_1 = 0.22977$ и $\bar{x}_2 = 0.27094$. На рис. 3.3.2 показаны итерации системы (3.3.1) при $\mu = 0.997$, стартующие из двух разных точек. Здесь устойчивое равновесие $\bar{x}_1$ отмечено черным кружком, а неустойчивое $\bar{x}_2$ – пустым кружком. Как видим, оба решения сходятся к единственному аттрактору – точке $\bar{x}_1$, однако характер сходимости может быть двух типов: если начальная точка принадлежит интервалу $(0, \bar{x}_2)$, то решение сходится к $\bar{x}_1$ монотонно. Если же нет, то решение сначала удаляется от $\bar{x}_1$, совершает хаосоподобные большеамплитудные осцилляции, и только потом, попав в интервал $(0, \bar{x}_2)$, монотонно сходится к $\bar{x}_1$.

Рассмотрим поведение этой системы в присутствии случайных возмущений, когда последовательные итерации формируются стохастическим уравнением

$$x_{t+1} = f(x_t, \mu) + \varepsilon \xi_t, \tag{3.3.2}$$

где ξ_t - некоррелированный гауссовский процесс с параметрами $\mathrm{E}\xi_t = 0, \quad \mathrm{E}\xi_t^2 = 1$, ε - интенсивность шума.

На рис. 3.3.3а показаны итерации стохастической системы (3.3.2) для

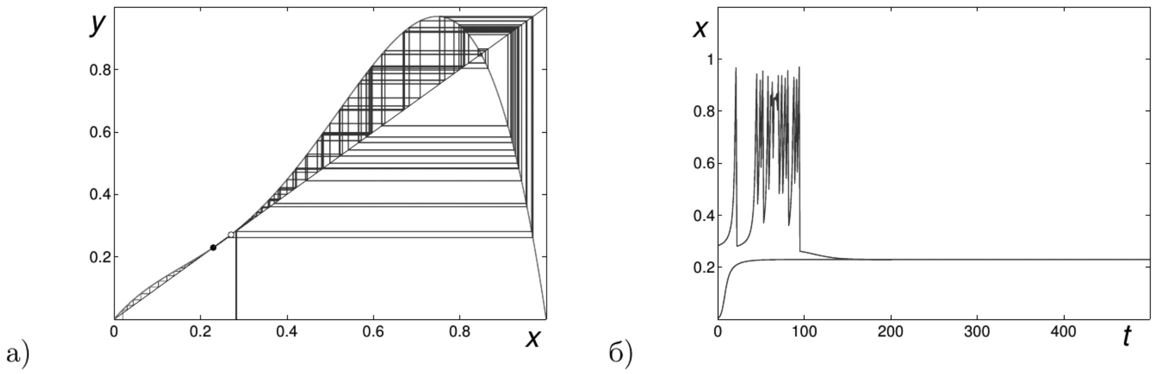


Рис. 3.3.2 – Итерации детерминированной системы (3.3.1) при $\mu = 0.997$.

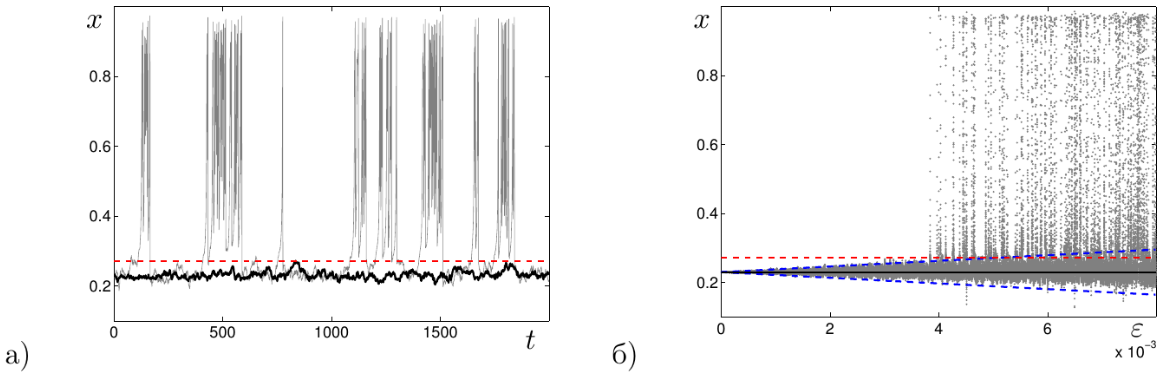


Рис. 3.3.3 – Стохастическая система (3.3.2) с $\mu = 0.997$: а) итерации при $\varepsilon = 0.003$ (черный), $\varepsilon = 0.006$ (серый); б) случайные состояния (серый), устойчивое равновесие $\bar{x}_1$ (черный), границы доверительных интервалов (синий пунктир). Неустойчивое равновесие $\bar{x}_2$ отмечено красным пунктиром.

$\varepsilon = 0.003$ и $\varepsilon = 0.006$, стартующие с устойчивого равновесия $\bar{x}_1$. При малом шуме ($\varepsilon = 0.003$) случайная траектория (черная) локализована вблизи $\bar{x}_1$ и не выходит из интервала $(0, \bar{x}_2)$ монотонной сходимости детерминированной системы. При увеличении шума ($\varepsilon = 0.006$) разброс увеличивается, траектория (серая) пересекает границу (псевдосепаратрису) $\bar{x}_2$ и продолжает движение в форме большеамплитудных осцилляций, пока снова не попадет в $(0, \bar{x}_2)$. Такие переходы порождают перемежаемость малоамплитудных и большеамплитудных осцилляций. Как видим, в системе с единственным аттрактором – устойчивым равновесием – наблюдается режим индуцированного шумом возбуждения. Детали формирования возбужденного режима показаны на рис. 3.3.3б.

Для параметрического анализа стохастической возбудимости будем использовать разработанную технику стохастической чувствительности. Стохастическая чувствительность $M(\bar{x}_1)$ и границы $\tilde{x}_{1,2}$ доверительных интервалов (см. п. 1.1.2, 1.1.3) равновесия $\bar{x}_1$ имеют вид

$$M(\bar{x}_1) = 7.479, \quad \tilde{x}_{1,2} = \bar{x}_1 \pm 3\sqrt{M(\bar{x}_1)}\varepsilon.$$

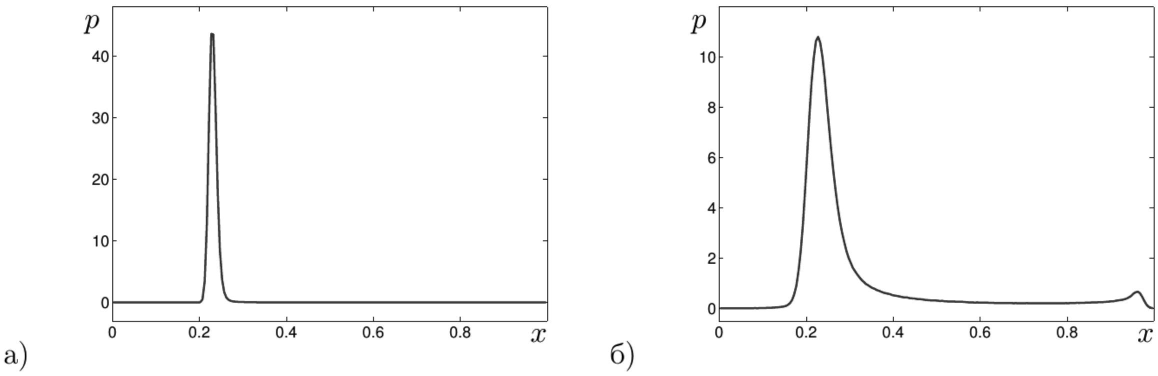


Рис. 3.3.4 – Плотность распределения случайных состояний системы (3.3.2) с $\mu = 0.997$: а) для $\varepsilon = 0.003$, б) для $\varepsilon = 0.01$.

Эти границы изображены на рис. 3.3.3б синим пунктиром. Здесь точка пересечения верхней границы доверительного интервала с псевдосепаратрисой $\bar{x}_2$ позволяет локализовать зону интенсивностей шума, при которых начинается генерация сложных осцилляций с перемежаемостью колебаний малых и больших амплитуд.

Индуцированное шумом возбуждение сопровождается стохастическими P- и D-бифуркациями. Стохастическая P-бифуркация, связанная с качественным изменением формы плотности $p(x)$, иллюстрируется на рис. 3.3.4. Как видим, при $\varepsilon = 0.003$ эта кривая унимодальна, а при $\varepsilon = 0.01$ – бимодальна. Один из пиков, узкий, расположенный над устойчивым равновесием, отражает долю малоамплитудных колебаний, а второй, достаточно размытый, соответствует большеамплитудным колебаниям.

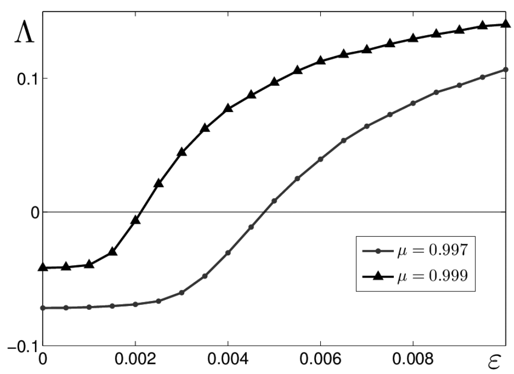


Рис. 3.3.5 – Показатели Ляпунова для системы (3.3.2) с $\mu = 0.997$ и $\mu = 0.999$.

Стохастическая D-бифуркация, связанная с изменением знака ляпуновского показателя Λ с минуса на плюс (переход от порядка к хаосу), проиллюстрирована на рис. 3.3.5. Точка смены знака располагается как раз в зоне интенсивностей шума, отвечающего началу генерации сложных колебаний (см. рис. 3.3.3б). На рис. 3.3.5 также показан график $\Lambda(\varepsilon)$ для $\mu = 0.999$.

Как видим, чем ближе параметр μ к точке касательной бифуркации $\mu_* = 1$, тем раньше начинается переход к хаосу.

Стохастическая возбудимость и локальные асимптотики касательной бифуркации

Стохастическая возбудимость, приводящая к индуцированной шумом перемежаемости, может быть параметрически описана локальными асимптотиками функции $f(x)$ в зоне касательной бифуркации.

Для проведения асимптотического анализа рассмотрим следующую модель одномерного отображения:

$$x_{t+1} = f(x_t)+\varepsilon\xi_t, \quad f(x) = x-\delta(x-\bar{x}_1)+l|x-\bar{x}_1|^m+g(x), \quad \delta \geq 0, \ l > 0. \quad (3.3.3)$$

Здесь $\bar{x}_1$ – фиксированное равновесие, параметры δ, l и m задают асимптотики $f(x)$ в точке касательной бифуркации. Параметр δ характеризует субкритичность, $m > 1$ – порядок контакта кривой $y = f(x)$ с $y = x$ в точке $\bar{x}_1$ при $\delta = 0$. Для $\delta > 0$ система (3.3.3) имеет неустойчивое равновесие $\bar{x}_2 = \bar{x}_1 + (\delta/l)^{\frac{1}{m-1}}$ наряду с устойчивым равновесием $\bar{x}_1$. Функция $g(x)$ обеспечивает возврат траектории в окрестность точки $\bar{x}_1$ и равна нулю в этой окрестности. Возврат системы после большеамплитудных осцилляций в окрестность равновесия x_1 может происходить различными путями. Здесь конкретный механизм этого возврата не играет роли.

Здесь можно найти стохастическую чувствительность w и доверительный интервал $(\bar{x}_1 - r, \bar{x}_1 + r)$:

$$w(\delta) = \frac{1}{2\delta - \delta^2}, \quad r = k\,\varepsilon \left(\delta - \frac{\delta^2}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отметим, что стохастическая чувствительность зависит лишь от параметра δ.

Асимптотика критического значения ε^* для интенсивности шума, соответствующего началу индуцированной шумом перемежаемости может быть найдена из уравнения $r(\varepsilon) = \bar{x}_2 - \bar{x}_1$ в явном виде:

$$\varepsilon^* \approx \frac{1}{k}\, l^p\, \delta^q, \quad p = -\frac{1}{m-1}, \ \ q = \frac{m+1}{2m-2}.$$

Отметим, что коэффициент k зависит от доверительной вероятности $P : k = \mathrm{erf}^{-1}(P)$.

3.3.2. Стохастическая возбудимость вблизи бифуркации Хопфа

Классическим примером стохастической возбудимости в зоне устойчивых равновесий в классе динамических моделей с непрерывным временем яв-

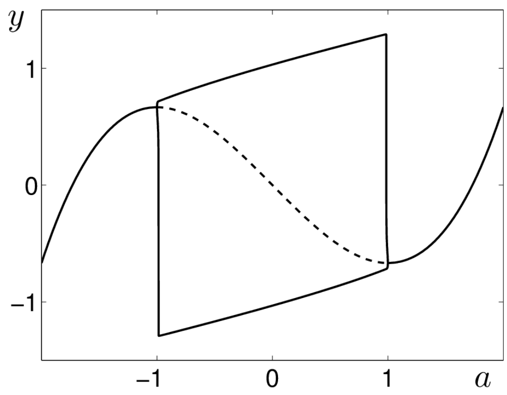


Рис. 3.3.6 – Аттракторы детерминированной системы Фитцхью-Нагумо.

ляется система Фитцхью-Нагумо [282], описывающая динамику нейрона. Явление стохастической возбудимости в этой модели изучалось в [47,48]. В данном разделе показано, как это явление может быть исследовано с помощью техники стохастической чувствительности.

Рассмотрим следующий вариант стохастически возмущенной системы Фитцхью-Нагумо

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a + \varepsilon \dot{w}, \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс с параметрами $\mathrm{E}(w(t+h) - w(t)) = 0$, $\mathrm{E}(w(t+h) - w(t))^2 = h$, ε – интенсивность шума.

Детерминированная система (3.3.4) ($\varepsilon = 0$) имеет равновесие

$$\bar{x} = -a, \ \bar{y} = \frac{a^3}{3} - a.$$

При $|a| > 1$ это равновесие устойчиво. При $|a| < 1$ вокруг неустойчивого равновесия появляется устойчивый предельный цикл. Точки $a = \pm 1$ отвечают бифуркации Андронова–Хопфа.

Зафиксируем $\delta = 0.1$. На рис. 3.3.6 сплошной линией изображены значения переменной y детерминированных аттракторов (равновесий и циклов) в сечении Пуанкаре $x = \bar{x}$, а пунктиром – неустойчивых равновесий. Отметим, что зона перехода между устойчивыми равновесиями и предельными циклами максимальной амплитуды весьма узкая.

Рассмотрим геометрию фазового портрета этой модели в зоне $a > 1$ устойчивых равновесий. Малые начальные отклонения от равновесия порождают затухающие колебания малой амплитуды (субкритический отклик системы). Если взять начальные отклонения больше некоторого порогового значения, траектории сначала совершают большеамплитудный выброс, и только

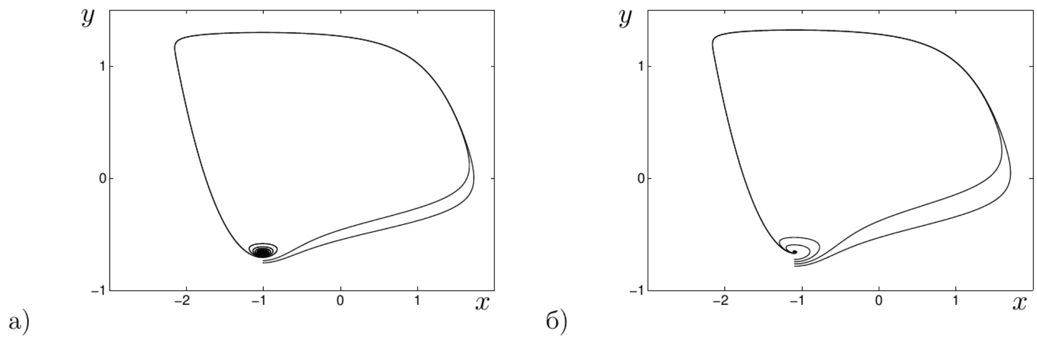


Рис. 3.3.7 – Фазовые портреты детерминированной системы Фитцхью-Нагумо при а) $a = 1.01$, б) $a = 1.1$.

после него стремятся к равновесию (суперкритический отклик системы). Вокруг равновесия можно найти множество начальных точек, соответствующих субкритическому отклику. Размер этой субкритической зоны существенно зависит от параметра a (см. рис. 3.3.7). При приближении параметра a к бифуркационному значению $a = 1$ размер субкритической зоны уменьшается.

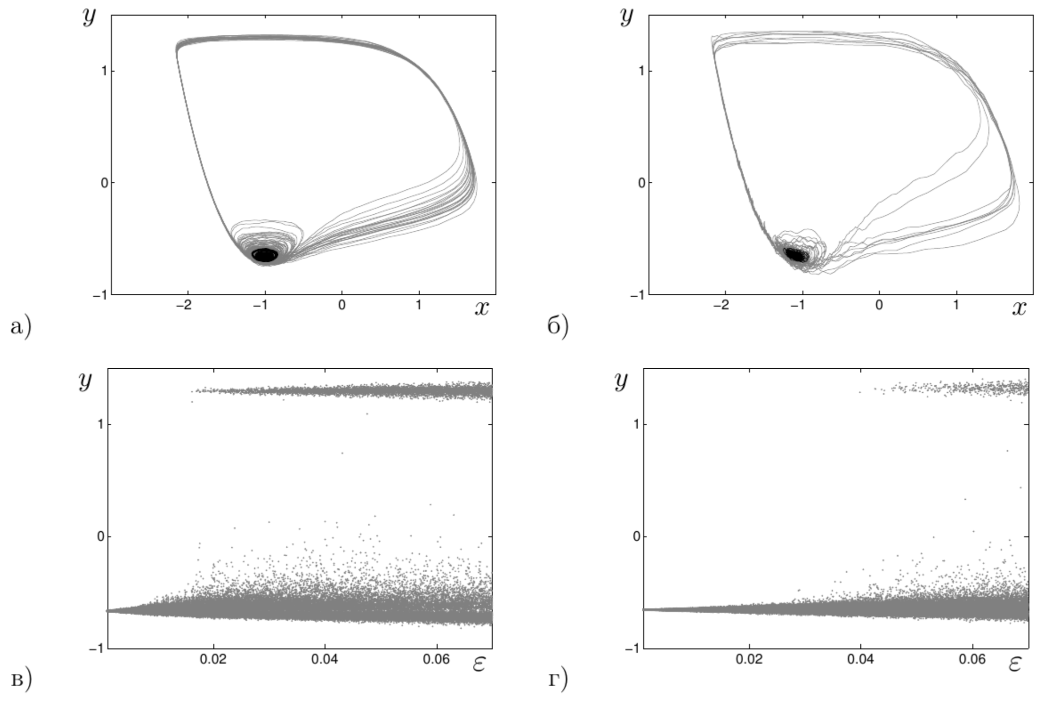


Рис. 3.3.8 – Стохастические система Фитцхью-Нагумо: фазовые траектории при а) $a = 1.01$, $\varepsilon = 0.01$ (черный), $\varepsilon = 0.03$ (серый), б) $a = 1.1$, $\varepsilon = 0.03$ (черный), $\varepsilon = 0.1$ (серый); случайные состояния в сечении Пуанкаре $x = \bar{x}$ при в) $a = 1.01$, г) $a = 1.1$.

Перейдем к изучению стохастической динамики. Рассмотрим поведение решений системы (3.3.4), стартующих с равновесия. На рис. 3.3.8 представлены результаты прямого численного моделирования при $a = 1.01$ и $a = 1.1$. При $a = 1.01$ (см. рис. 3.3.8а) случайные траектории для $\varepsilon = 0.01$ концентрируются около устойчивого равновесия. Для $\varepsilon = 0.03$ наблюдаются стохастические осцилляции большой амплитуды, свидетельствующие о переходе в режим стохастического возбуждения. При $a = 1.1$ (см. рис. 3.3.8б) переход в режим стохастического возбуждения происходит при большем шуме.

Изменения распределения случайных состояний в сечении Пуанкаре $x = \bar{x}$ при увеличении интенсивности шума представлены на рис. 3.3.8в,г. Как видим, при удалении от точки бифуркации для стохастической генерации большеамплитудных колебаний требуется шум большей интенсивности.

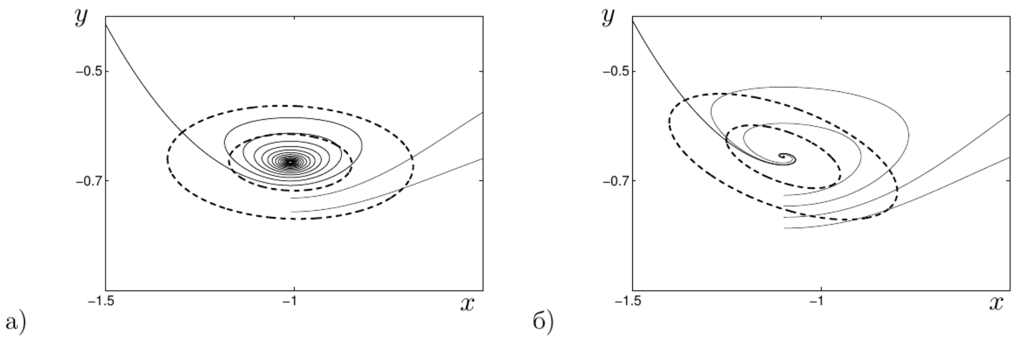


Рис. 3.3.9 – Траектории детерминированной системы и доверительные эллипсы при а) $a = 1.01$, $\varepsilon = 0.01$, $\varepsilon = 0.02$; б) $a = 1.1$, $\varepsilon = 0.03$, $\varepsilon = 0.06$.

Для параметрического анализа стохастической возбудимости применим метод доверительных эллипсов, конструируемых с помощью техники функций стохастической чувствительности (см. п. 2.1.2).

В зоне устойчивых равновесий $|a| > 1$ матрица W стохастической чувствительности имеет элементы:

$$w_{11} = \frac{1}{2(a^2-1)}, \quad w_{12} = w_{21} = -\frac{1}{2}, \quad w_{22} = \frac{\delta}{2(a^2-1)} + \frac{a^2-1}{2}.$$

Следует отметить, что при около точки бифуркации при $|a| \to 1$ элементы $w_{11}, w_{22} \to \infty$, то есть чувствительность равновесия к шуму неограниченно растет.

Рассмотрим взаимное расположение доверительных эллипсов и детерминированных фазовых кривых в окрестности устойчивого равновесия (см. рис. 3.3.9). Здесь доверительная вероятность $P = 0.9$.

При достаточно малом шуме доверительные эллипсы локализованы вблизи устойчивого равновесия и целиком расположены внутри субкритической зоны. При увеличении интенсивности шума эти эллипсы увеличиваются и начинают захватывать суперкритическую зону. Это означает, что случайные траектории возмущенной системы могут выйти за границы невозбужденного режима и продолжить движение вдали от равновесия. Интенсивность шума, соответствующая началу выходу эллипсов в суперкритическую зону, может служить оценкой критического значения интенсивности.

На рис. 3.3.9а для $a = 1.01$ малый эллипс для $\varepsilon = 0.01$ лежит в субкритической зоне. Большой эллипс для $\varepsilon = 0.02$ содержит точки из суперкритической зоны.

На рис. 3.3.9б для $a = 1.1$ малый эллипс для $\varepsilon = 0.03$ также лежит в субкритической зоне, а большой эллипс для $\varepsilon = 0.06$ уже попадает в субкритическую зону. Попадание эллипса в субкритическую зону сигнализирует о переходе системы в режим стохастического возбуждения с генерацией большеамплитудных осцилляций.

3.3.3. Стохастическая генерация фантомного аттрактора

В данном разделе описано и исследовано недавно обнаруженное явление индуцированного шумом сдвига случайных состояний системы в зону, где исходная детерминированная система не имеет никаких аттракторов. Это явление получило название стохастической генерации фантомного аттрактора.

Рассмотрим систему двух нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = (y - a)x, \\ \dot{y} = \mu + y - y^3 - x^2. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

Эта модельная система была предложена в [283].

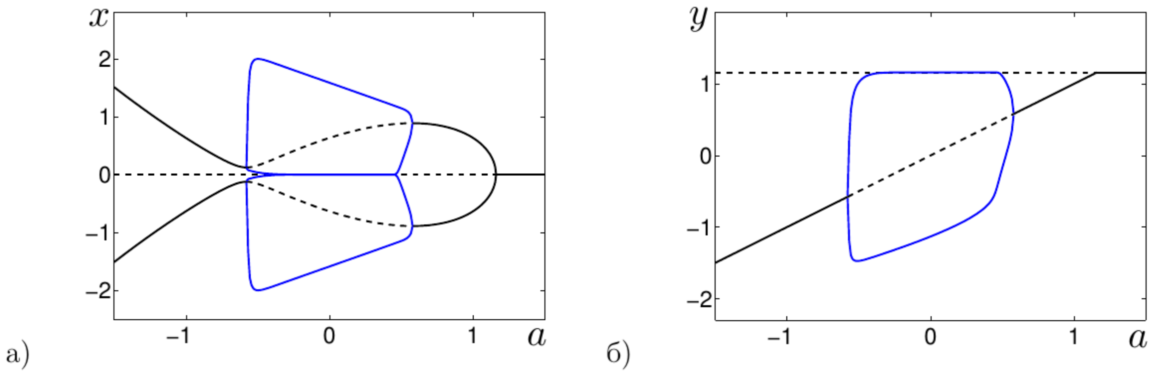


Рис. 3.3.10 – Бифуркационная диаграмма детерминированной системы $\mu = 0.4$.

Анализируя матрицу Якоби

$$F = \begin{pmatrix} y - a & x \\ -2x & 1 - 3y^2 \end{pmatrix},$$

имеем $\mathrm{tr}F = 1 - a + y - 3y^2$, $\det F = (y - a)(1 - 3y^2) + 2x^2$. В дальнейшем мы фиксируем $\mu = 0.4$. В этом случае система (3.3.5) имеет равновесия $M_0(0, \hat{y})$

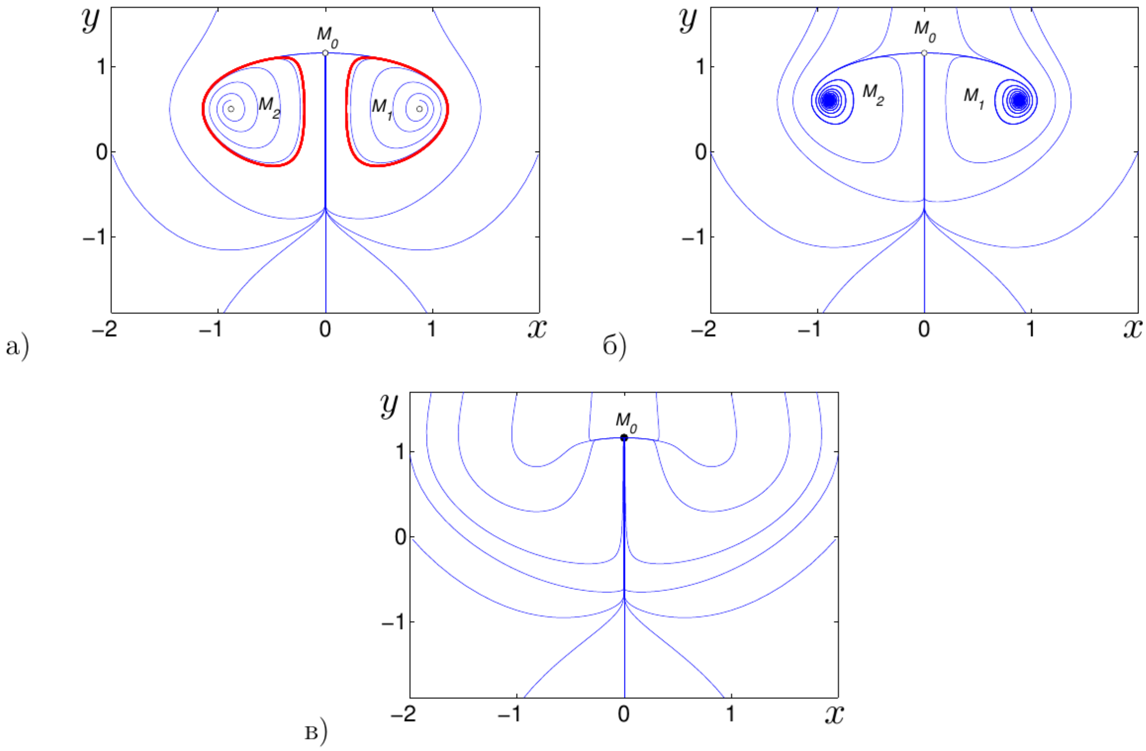


Рис. 3.3.11 – Фазовые портреты системы (3.3.5) для а) $a = 0.5$ (предельные циклы показаны красным цветом), б) $a = 0.6$, в) $a = 1.2$.

и $M_{1,2}(\pm\sqrt{0.4 + a - a^3}, a)$. Значение $\hat{y} \approx 1.1597$ является единственным решением уравнения $0.4 + y - y^3 = 0$. Заметим, что равновесия $M_{1,2}$ существуют только для $a \leq \hat{y}$.

В точке M_0 имеем $\mathrm{tr}F = -1.875 - a$, $\det F = 3.0347(a - \hat{y})$. Для равновесий $M_{1,2}$ получаем $\mathrm{tr}F = 1 - 3a^2$, $\det F = 2(0.4 + a - a^3)$.

Итак, для системы (3.3.5) при $\mu = 0.4$ можно отметить три точки бифуркации: $a_1 = -\sqrt{3}/3$, $a_2 = \sqrt{3}/3$, $a_3 = \hat{y} = 1.1597$. Равновесие M_0 устойчиво при $a > a_3$ и неустойчиво в противном случае. Точки $M_{1,2}$ устойчивы для $a < a_1$ и для $a_2 < a < a_3$ и неустойчивы для $a_1 < a < a_2$. Здесь a_3 – точка бифуркации типа вилка, а $a_{1,2}$ – точки бифуркации Андронова-Хопфа. Для $a_1 < a < a_2$ у системы существуют два устойчивых цикла. Аттракторы и репеллеры системы (3.3.5) изображены на рис. 3.3.10, где показаны устойчивые равновесия (сплошные линии), неустойчивые равновесия (черные пунктиры) и экстремумы координат предельных циклов (синие сплошные линии).

На рис. 3.3.11 представлены фазовые портреты системы (3.3.5) для трех значений параметра a. При $a = 0.5$ сосуществуют два устойчивых цикла (красные линии на рис. 3.3.11а). Для $a = 0.6$ эта система бистабильна с двумя устойчивыми равновесиями M_1 и M_2. Заметим, что в случае бистабильности бассейны притяжения симметричных аттракторов разделяются линией $x = 0$. Эта линия является устойчивым многообразием седловой точки M_0. Для $a = 1.2$ система (3.3.5) моностабильна с единственным устойчивым равновесием M_0.

Рассмотрим систему (3.3.5) в присутствии случайных возмущений

$$\begin{cases} \dot{x} = (y-a)x + \varepsilon\dot{w} \\ \dot{y} = \mu + y - y^3 - x^2. \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Здесь ε – интенсивность шума, а $w(t)$ – стандартный винеровский процесс с параметрами $\mathrm{E}(w(t+h) - w(t)) = 0$, $\mathrm{E}(w(t+h) - w(t))^2 = h$.

Рассмотрим влияние шума на аттракторы системы (3.3.5). На рис. 3.3.12, 3.3.13,3.3.14 для трех значений параметра a показаны случайные состояния системы (3.3.6) и соответствующие функции плотности вероятности для различных значений интенсивности шума.

Как видно, для слабых шумов случайные состояния сосредоточены вблизи детерминированных аттракторов. Этот факт сопровождается однопиковой или кратероподобной формой плотности над устойчивыми равновесиями или предельными циклами. Например, для $a = 0.5$ существуют два кратера над двумя устойчивыми предельными циклами исходной детерминированной системы (см. рис. 3.3.12 для $\varepsilon = 0.02$). При $a = 0.6$ детерминированная система имеет два устойчивых равновесия, и, соответственно, при небольшом шуме плотность имеет два пика (см. рис. 3.3.13 для $\varepsilon = 0.05$). При $a = 1.2$ один пик плотности располагается над единственным устойчивым равновесием (см. рис. 3.3.14 для $\varepsilon = 0.05$).

С увеличением шума графики функции плотности вероятности изменяются. Здесь следует упомянуть два феномена.

Первый из них совершенно очевиден: увеличение шума сглаживает пики и кратеры. В случаях бистабильности (см. рис. 3.3.12, 3.3.13) случайные траектории могут пересекать сепаратрису $x = 0$ и демонстрировать переходы между симметричными аттракторами (равновесиями или циклами). Такие индуцированные шумом переходы приводят к новой детали в форме плотности: теперь "долина"между пиками (для равновесий) и кратерами (для циклов) исчезает, и на ее месте появляется узкий гребень, соединяющий соответствующие пики и кратеры (рис. 3.3.12 для $\varepsilon = 0.05$ и рис. 3.3.13 для $\varepsilon = 0.15$).

Второе явление неожиданно: у плотности возникает дополнительный пик в некоторой зоне фазовой плоскости, где детерминированная система (3.3.5) не имеет никаких аттракторов. Для слабых шумов этот дополнительный пик довольно мал, но с дальнейшим увеличением шума он растет и начинает возвышаться над всеми другими пиками или кратерами. При достаточно сильном шуме наблюдается только этот дополнительный пик.

Заметим, что это явление структурно устойчиво. Стохастическая система (3.3.6) демонстрирует это явление в широком диапазоне параметра a, где исходная детерминированная система имеет разные типы моно- и бистабильных динамических режимов.

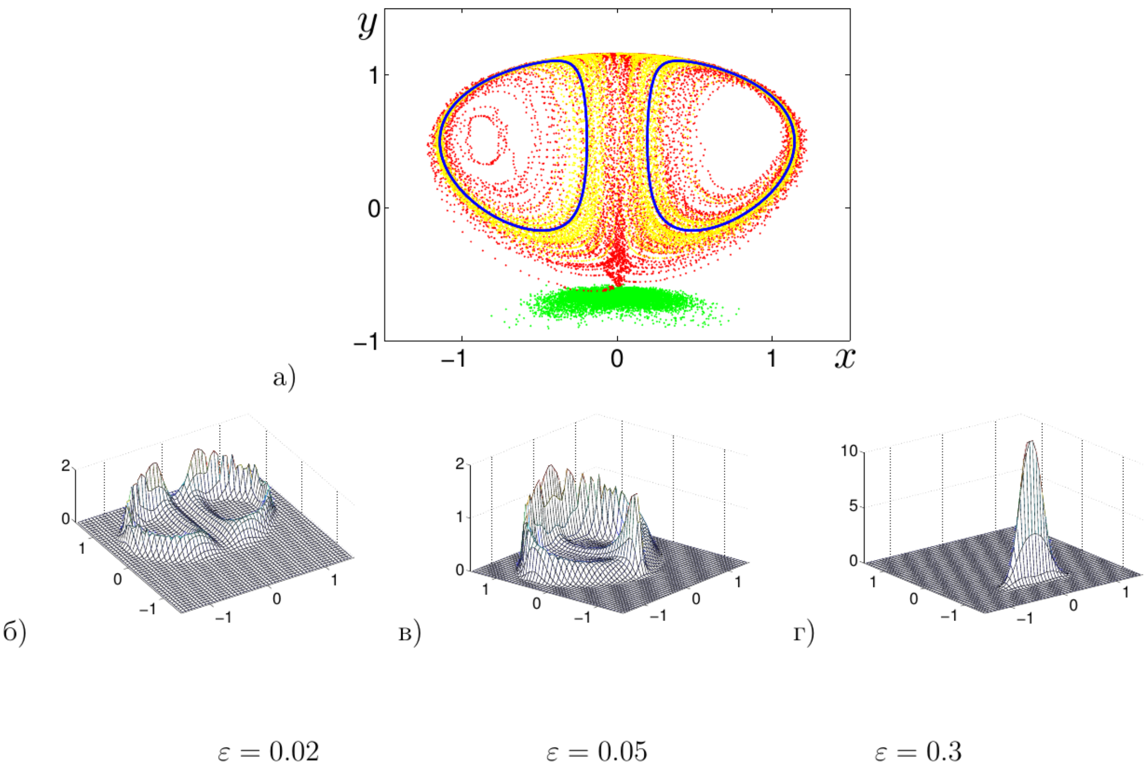
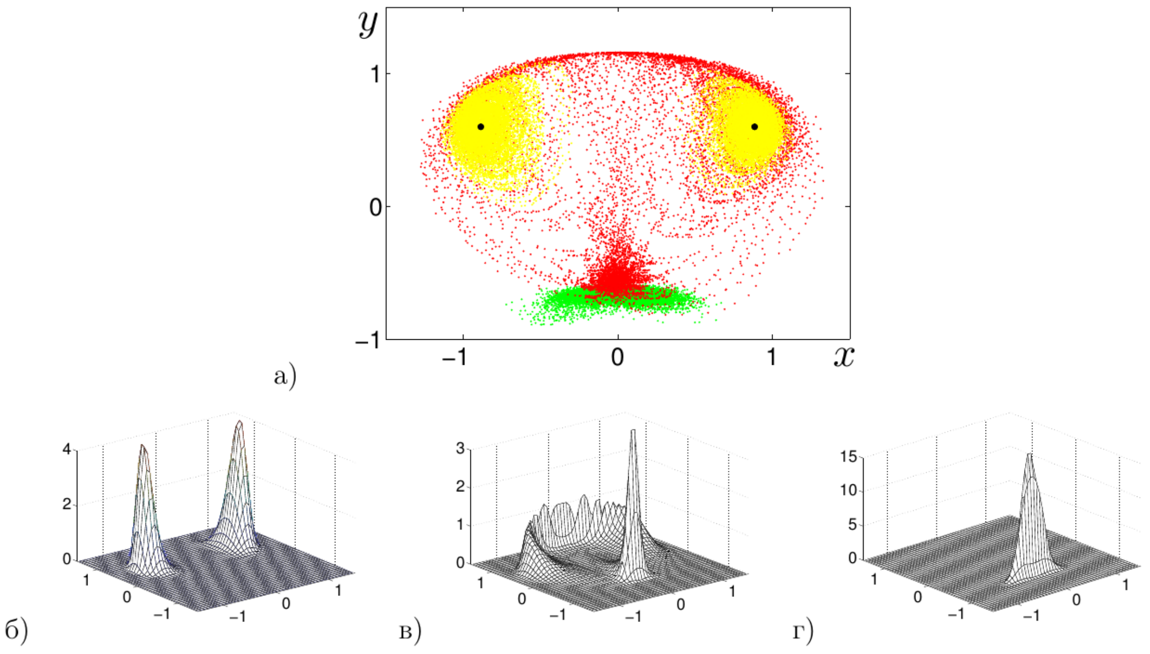


Рис. 3.3.12 – Случайные состояния стохастической системы (3.3.6) с $a = 0.5$ и интенсивностью шума $\varepsilon = 0.02$ (желтый), $\varepsilon = 0.05$ (красный), $\varepsilon = 0.3$ (зеленый). Графики соответствующих плотностей показаны в нижней панели.

В результате таких преобразований случайные состояния существенно сдвигаются вниз вдоль оси y на фазовой плоскости. Статистические детали этого сдвига хорошо видны на рис. 3.3.15, где показаны средние значения m и дисперсия D для y-координат случайных состояний. Заметим, что переходный ε-интервал преобразования плотности от появления дополнительного пика до его доминирования довольно узкий. Действительно, этот интервал соответствует резкому падению значения $m(\varepsilon)$. После этого падения значения $m(\varepsilon)$ начинают медленно уменьшаться и почти не зависят от параметра a. Заметим, что в этом переходном ε-интервале дисперсия $D(\varepsilon)$ имеет острый пик. В целом можно сделать вывод, что в этой системе под влиянием аддитивного шума наблюдается некоторая P-бифуркация. Здесь аддитивный шум подавляет аттракторы (равновесия или циклы) детерминированной системы и генерирует новый «фантомный» аттрактор. Далее представлено математическое описание

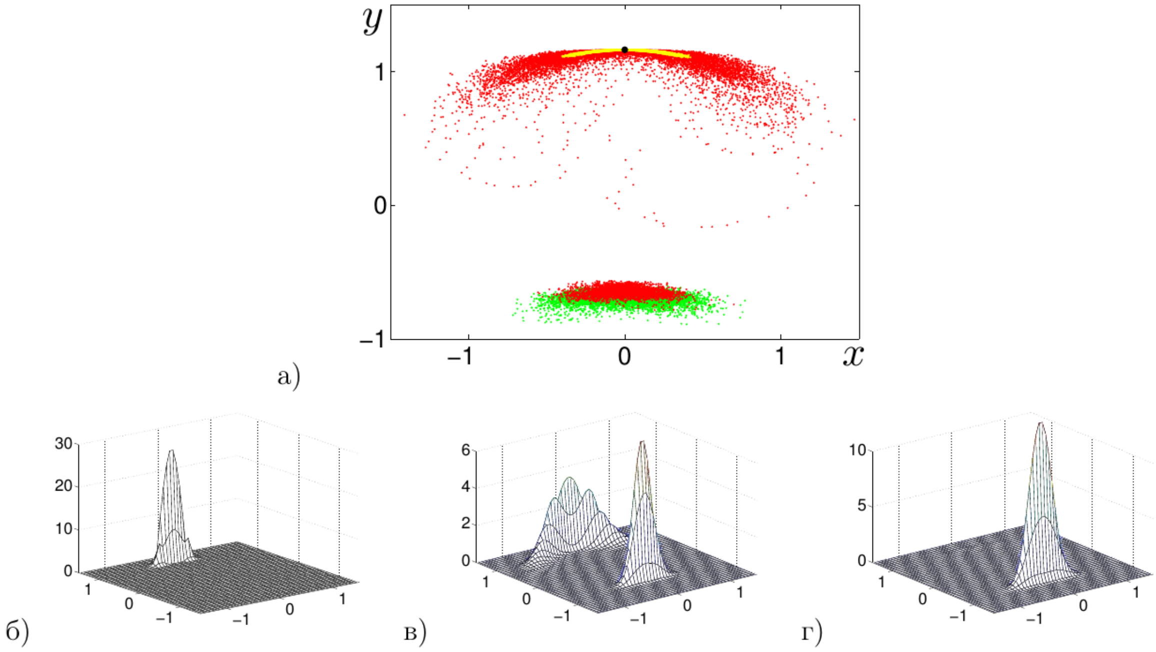


$\varepsilon = 0.05$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon = 0.15$ $\qquad\qquad$ $\varepsilon = 0.3$

Рис. 3.3.13 – Случайные состояния стохастической системы (3.3.6) с $a = 0.6$ и интенсивностью шума $\varepsilon = 0.05$ (желтый), $\varepsilon = 0.15$ (красный), $\varepsilon = 0.3$ (зеленый). Графики соответствующих плотностей показаны в нижней панели.

основных причин и механизмов появления этого «фантомного» аттрактора.

Свяжем пространственное расположение «фантомного» аттрактора с особенностями фазовых портретов детерминированной системы (3.3.5). На рис. 3.3.16 показаны устойчивые равновесия (черные кружки), неустойчивые равновесия (пустые кружки), предельные циклы (толстые черные кривые), нульклины $\dot{x} = 0$ (тонкие черные линии) и $\dot{y} = 0$ (светло-голубые линии). Форма графика нульклины $\dot{y} = 0$ выглядит как перевернутая бутылка с узкой горловиной, а вертикальная нульклина $x = 0$ служит осью симметрии. Отрезок $[N_1, N_2]$, где $N_{1,2}(\pm 0.1229, -0.577)$, локализующий самую узкую часть этой бутылки, отмечен толстой красной линией (см. рис. 3.3.16г). Для части любой детерминированной траектории, лежащей внутри бутылки, y-координаты увеличиваются, а для части, лежащей вне этой бутылки – уменьшаются. Пунктирными красными линиями показаны фазовые траектории, стартующие с N_1, N_2 в обратном времени. Эти линии играют роль сепаратрис, разделяющих две зоны на фазовой плоскости. Одна зона содержит исходные данные траекторий, которые попадают внутрь бутылки через стенки, а вторая зона соответствует исходным данным траекторий, которые попадают внутрь бутылки через узкое «горлышко» $[N_1, N_2]$.



$\varepsilon = 0.05$ $\varepsilon = 0.32$ $\varepsilon = 0.4$

Рис. 3.3.14 – Случайные состояния стохастической системы (3.3.6) с $a = 1.2$ и интенсивностью шума $\varepsilon = 0.05$ (желтый), $\varepsilon = 0.32$ (красный), $\varepsilon = 0.4$ (зеленый). Графики соответствующих плотностей показаны в нижней панели.

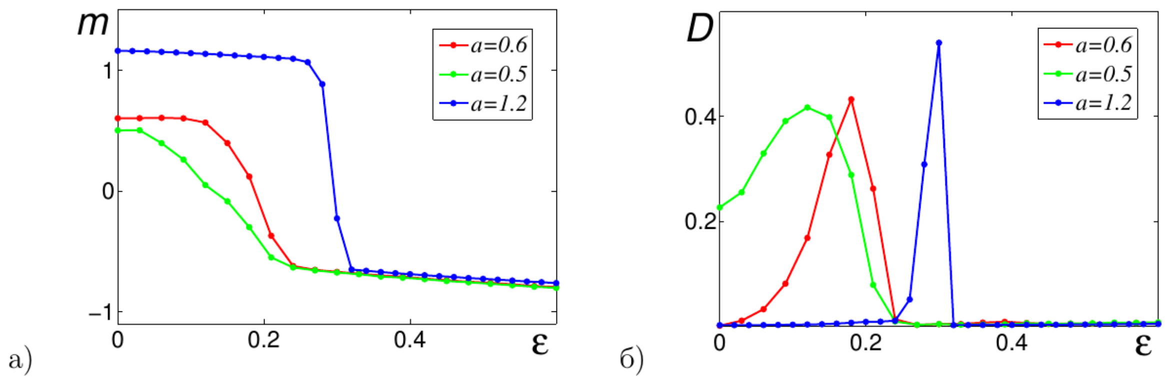


Рис. 3.3.15 – Средние значения (а) и дисперсии (б) y-координат случайных состояний стохастической системы (3.3.6).

Рассмотрим поведение стохастической системы для слабых и сильных шумов. Для слабого шума интенсивности $\varepsilon = 0.1$ на рисунке рис. 3.3.16 зеленым цветом изображены случайные траектории стохастической системы (3.3.6), стартующие с точки $(0, -1.3)$. Синим цветом показаны случайные траектории стохастической системы (3.3.6) с интенсивностью шума $\varepsilon = 0.5$, стартующие с детерминированного аттрактора: с правого предельного цикла для $a = 0.5$, с устойчивого равновесия M_1 для $a = 0.6$ и с устойчивого равновесия M_0 для $a = 1.2$.

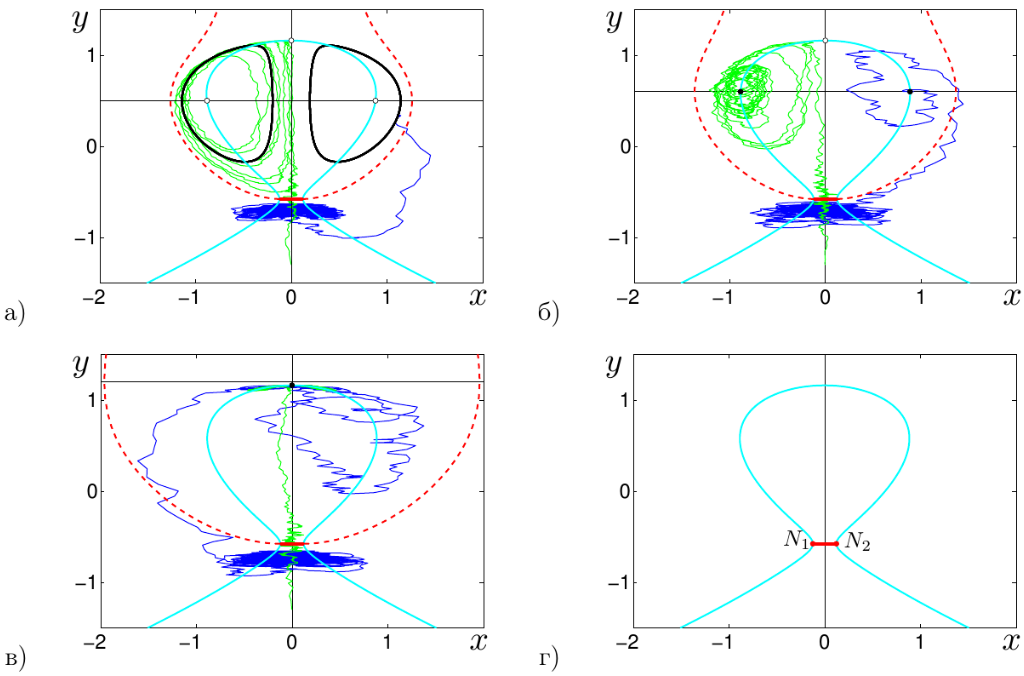


Рис. 3.3.16 – Стохастическая система (3.3.6) при а) $a = 0.5$, б) $a = 0.6$, в) $a = 1.2$: устойчивые равновесия (черные кружки), неустойчивые равновесия (пустые кружки), предельные циклы (толстые черные кривые), нульклины $\dot{x} = 0$ (тонкие черные линии), $\dot{y} = 0$ (светло-голубые линии); случайные траектории для $\varepsilon = 0.1$ (зеленый) и для $\varepsilon = 0.5$ (синий). На г) отрезком $[N_1, N_2]$ (красный) показано "бутылочное горлышко".

Как видно, для сильного шума (интенсивность шума $\varepsilon = 05$) случайные траектории уходят от детерминированного аттрактора, пересекают сепаратрису (красная пунктирная линия) и из-за детерминированного сдвига переходят в некоторую зону фазовой плоскости ниже «горлышка» и остаются там. В результате в этой зоне локализуется «фантомный» аттрактор. Это похоже на то, что случайная траектория вследствие большого разброса застревает в этом узком месте. Заметим, что для слабого шума ($\varepsilon = 0.1$) случайная траектория, стартующая ниже «горлышка», имея малый разброс, свободно проходит через него и далее локализуется вблизи детерминированного аттрактора. Это явление практически не зависит от параметра a (рис. 3.3.16а,б,в), и его можно объяснить, ограничиваясь анализом особенностей фазового портрета в окрестности этого узкого места.

Вблизи узкого места переменная y – медленная, а переменная x является быстрой. Это позволяет нам заморозить переменную y в стохастической системе (3.3.6) и рассмотреть динамику быстрой подсистемы

$$\dot{x} = (y - a)x + \varepsilon\dot{w}. \tag{3.3.7}$$

Для любого фиксированного $y < a$ это линейное стохастическое уравнение имеет гауссовское стационарное распределение с нулевым средним значением и дисперсией $D = \mathrm{E}x^2 = \dfrac{\varepsilon^2}{2(a-y)}$.

Теперь динамику медленной переменной y можно описать путем усреднения по быстрой переменной x. Используя явное представление для D и приближение $\mathrm{E}y^3 \approx \bar{y}^3$, получаем следующее замкнутое уравнение для динамики среднего значения $\bar{y} = \mathrm{E}y$:

$$\dot{\bar{y}} = \mu + \bar{y} - \bar{y}^3 - \frac{\varepsilon^2}{2(a-\bar{y})}. \qquad (3.3.8)$$

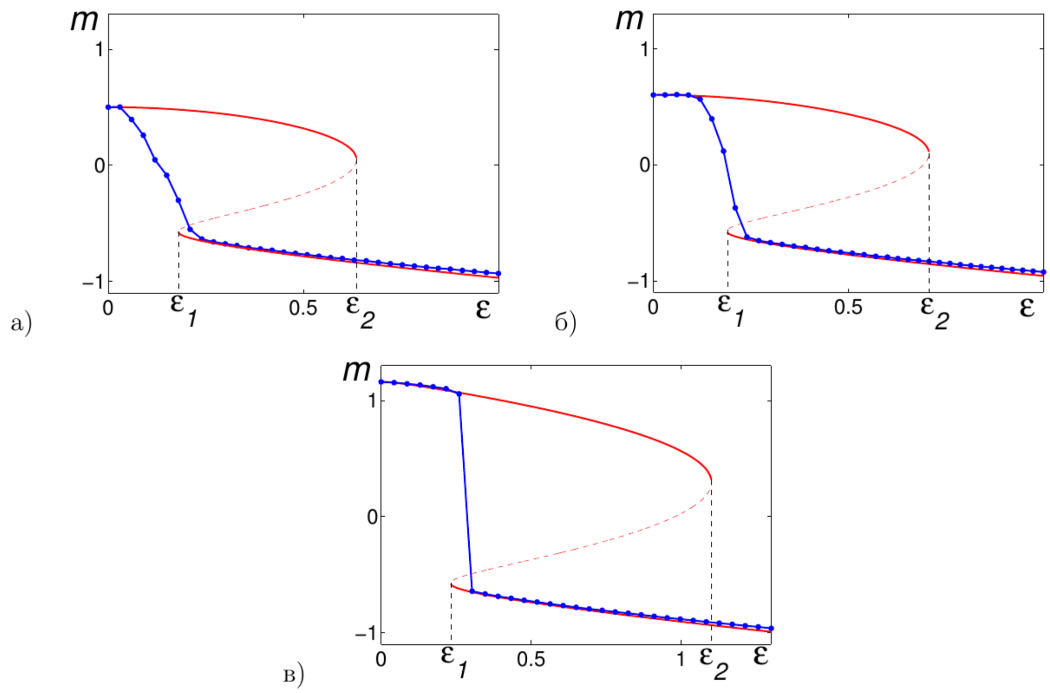
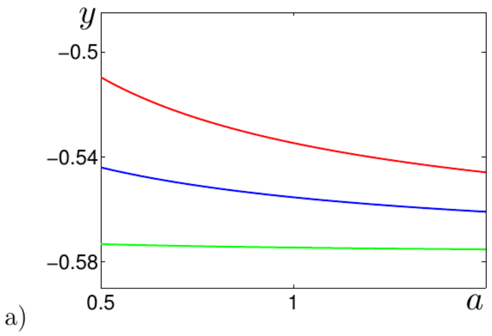


Рис. 3.3.17 – Устойчивые равновесия (красные сплошные линии) и неустойчивые равновесия (красные пунктирные линии) уравнения (3.3.8) с $\mu = 0.4$ для а) $a = 0.5$, б) $a = 0.6$, в) $a = 1.2$. Синим цветом показаны средние значения y-координат случайных состояний стохастической системы (3.3.6), найденные методом прямого численного моделирования.

Рассмотрим, как уравнение (3.3.8), полученное из теории усреднения, описывает случайные явления, найденные прямым численным моделированием решений системы (3.3.6). На рис. 3.3.17 синим цветом показаны представленные выше графики функции $m(\varepsilon)$ средних значений переменной y (см. рис. 3.3.15а). Сравним эти функции с графиками равновесий уравнения (3.3.8). Здесь устойчивые равновесия показаны сплошными красными линиями, а неустойчивые равновесия – красным пунктиром. При слабом шуме уравнение (3.3.8) имеет только одно равновесие (верхняя красная линия). С увеличением шума в точке ε_1 происходит седло-узловая бифуркация и появляется дополнительная пара равновесий (устойчивое и неустойчивое). Обозначим нижнее равновесие через $y_1(\varepsilon)$ $(\varepsilon \geq \varepsilon_1)$.

При дальнейшем увеличении ε неустойчивое равновесие сдвигается от нижнего устойчивого равновесия к верхнему и сливается с ним при второй седло-узловой бифуркации в ε_2. Для $\varepsilon > \varepsilon_2$ нижнее равновесие $y_1(\varepsilon)$ становится единственным аттрактором.

Как видно, для слабого шума $m(\varepsilon)$ практически совпадает с верхним равновесием и медленно уменьшается. При дальнейшем увеличении шума функция $m(\varepsilon)$ скачком перемещается вниз от верхнего равновесия к нижнему и остается вблизи этого нижнего равновесия, медленно уменьшаясь. Заметим, что этот переход к нижнему равновесию наблюдается вблизи точки бифуркации ε_1. Таким образом, равновесия уравнения (3.3.8) адекватно описывают значения $m(\varepsilon)$. Точка ε_1 хорошо локализует скачок функции $m(\varepsilon)$, а функция $y_1(\varepsilon)$ дает хорошее приближение y-координаты "фантомного"аттрактора для $\varepsilon > \varepsilon_1$.



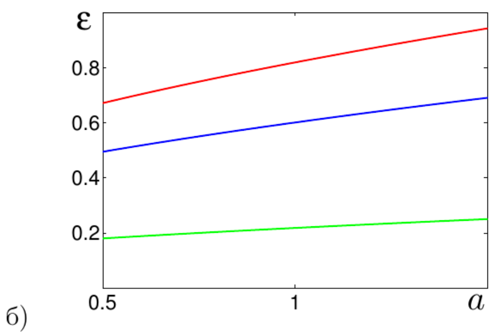


Рис. 3.3.18 – Графики y_1 и ε_1 по параметру a для $\mu = 0.4$ (зеленый), $\mu = 0.5$ (синий), $\mu = 0.6$ (красный).

Чтобы найти ε_1 и $y_1 = y_1(\varepsilon_1)$ для фиксированных a и μ, нужно решить следующую систему

$$\begin{cases} \mu + y - y^3 = \dfrac{\varepsilon^2}{2(a-y)}, \\ 1 - 3y^2 = \dfrac{\varepsilon^2}{2(a-y)^2}. \end{cases}$$

Второе уравнение отражает тот факт, что ε_1 является точкой касательной (седло-узловой) бифуркации. Из этой системы следует, что

$$4y^3 - 3ay^2 - 2y + a - \mu = 0, \tag{3.3.9}$$

и y_1 является меньшим корнем уравнения (3.3.9). Следовательно,

$$\varepsilon_1 = \sqrt{2(\mu + y_1 - y_1^3)(a - y_1)}.$$

Графики функций $\varepsilon_1(a)$ и $y_1(a)$ представлены на рис. 3.3.18 для трех значений параметра μ.

Таким образом, бифуркационный анализ уравнения (3.3.8), полученного путем усреднения по быстрой переменной x, позволяет провести полное параметрическое описание явления генерации «фантомного» стохастического аттрактора.

Представленные в разделе 3.3 результаты по анализу стохастической возбудимости в дискретных системах с касательной бифуркацией опубликованы в [200], в непрерывных системах вблизи бифуркации Хопфа – в [191], по генерации фантомного аттрактора – в [217]. Отметим, что явление стохастической генерации фантомного аттрактора было также обнаружено и исследовано в моделях популяционной и вулканической динамики. Результаты исследований этого явления опубликованы в работах автора диссертации: по модели Траскотт-Бриндли, описывающей динамику фито- и зоопланктона, в [235]; по трехмерной модели вулканической активности в [284].

В моделях с дискретным временем явление стохастической возбудимости было также обнаружено в зоне других бифуркаций. Вблизи бифуркации кризиса это явление исследовалось в работе [264]. В зоне бифуркации Неймарка-Сакера результаты анализа этого явления опубликованы в работах [232, 233] автора диссертации и описаны в разделе 5.4.1 на примере двумерной нейронной модели Рулькова.

Наряду с представленными в главе 3 стохастическими феноменами, можно отметить еще одно индуцированное шумом явление расщепления стохастического цикла. Результаты анализа этого явления опубликованы в работах [235, 285] автора диссертации и описано в разделе 5.5.3 на примере модели Траскотт-Бриндли со слабым Олли эффектом.

Глава 4. Управление стохастическими системами

Во многих естественно-научных и технических задачах возникает необходимость изменения вероятностных свойств динамических режимов систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Такая корректировка динамики стохастических систем приводит к задачам управления и стабилизации. В данной главе представлена теория синтеза желаемых стохастических режимов нелинейных систем с дискретным и непрерывным временем. Эта теория основана на идее управления стохастической чувствительностью и конфигурацией доверительных областей, методы анализа которых представлены в предыдущих главах.

4.1. Синтез стохастических режимов в дискретных системах

В данном разделе представлена теория синтеза наперед заданных стохастических режимов в системах с дискретным временем в условиях полной и неполной информации.

4.1.1. Управление стохастической чувствительностью равновесий

Рассмотрим управляемую детерминированную систему

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t), \qquad x, f \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^l, \tag{4.1.1}$$

задаваемую достаточно гладкой вектор-функцией $f(x, u)$, зависящей от вектора управляющих параметров u.

Будем исходить из того, что система (4.1.1) при $u = 0$ имеет равновесие $x_t \equiv \bar{x}$. Устойчивость $\bar{x}$ не предполагается.

Рассмотрим случай полной информации, когда множество $\mathcal{U}$ допустимых управлений формируется при помощи обратных связей $u = u(x)$. При этом предполагается, что достаточно гладкие функции $u(x)$ удовлетворяют условию

$$u(\bar{x}) \ = \ 0 \tag{4.1.2}$$

и гарантируют экспоненциальную устойчивость равновесия $\bar{x}$ для замкнутой системы

$$x_{t+1} \ = \ f(x_t, u(x_t)). \tag{4.1.3}$$

Условие (4.1.2) означает, что $x_t \equiv \bar{x}$ остается равновесием системы (4.1.1) при всех допустимых управлениях.

Необходимым и достаточным условием экспоненциальной устойчивости равновесия $\bar{x}$ для нелинейной системы (4.1.3) является экспоненциальная устойчивость решения $z_t \equiv 0$ системы первого приближения для малых отклонений $z_t = x_t - \bar{x}$

$$z_{t+1} \ = \ (A + BK)z_t, \tag{4.1.4}$$

где

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0), \ \ B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, 0), \ \ K = \frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}).$$

Рассмотрим множество матриц $\mathbb{K} = \{K \in \mathbb{R}^{l \times n}, \quad \rho(A + BK) < 1\}$, для которых система (4.1.4) является экспоненциально устойчивой. Здесь $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы A.

Будем предполагать, что множество $\mathbb{K}$ непусто (пара (A, B) – стабилизируема) [286]).

Рассмотрим теперь соответствующую (4.1.1) стохастически возмущенную систему

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) + \varepsilon\sigma(x_t, u_t)\xi_t, \qquad x, f \in \mathbb{R}^n, \ u \in \mathbb{R}^l, \ \xi \in \mathbb{R}^m, \ \sigma \in \mathbb{R}^{n \times m}. \tag{4.1.5}$$

Здесь $\sigma(x, u)$ – достаточно гладкая $n \times m$- матричная функция, характеризующая зависимость возмущений от состояния и управления, ξ_t – стандартный некоррелированный дискретный случайный процесс с параметрами

$$\mathrm{E}\xi_t = 0, \quad \mathrm{E}\xi_t\xi_t^\top = \mathrm{I}, \quad \mathrm{E}\xi_t\xi_k^\top = 0 \ \ (t \neq k),$$

ε – скалярный параметр интенсивности возмущений.

В замкнутой стохастической системе

$$x_{t+1} = f(x_t, u(x_t)) + \varepsilon\sigma(x_t, u(x_t))\xi_t, \tag{4.1.6}$$

при каждом $u \in \mathcal{U}$ матрица стохастической чувствительности W устойчивого равновесия $\bar{x}$ удовлетворяет уравнению (см. п. 1.1.2)

$$W \ = \ (A + BK)W(A + BK)^\top + S, \quad S = GG^\top, \ \ G = \sigma(\bar{x}, 0). \tag{4.1.7}$$

Вследствие того, что $u \in \mathcal{U}$, матрица $K \in \mathbb{K}$. При любом $K \in \mathbb{K}$ уравнение (4.1.7) имеет единственное решение.

Матрица W стохастической чувствительности равновесия $\bar{x}$ системы (4.1.6) зависит лишь от локальных характеристик $K = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\bar{x})$ обратной связи $u(x)$, поэтому, не теряя общности, можно ограничиться классом управлений вида

$$u(x) = K(x - \bar{x}), \tag{4.1.8}$$

так как возможные дополнительные нелинейные члены в управлении не влияют на стохастическую чувствительность.

В этих обстоятельствах представляет интерес задача управления стохастической чувствительностью равновесия $\bar{x}$ в замкнутой системе (4.1.6), (4.1.8).

Рассмотрим множество допустимых матриц стохастической чувствительности $\mathbb{M}$, состоящее из симметрических положительно определенных $n \times n$-матриц:

$$\mathbb{M} = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} | M \succ 0\}.$$

В случае невырожденных шумов $(\operatorname{rank} G = n)$, при любом $K \in \mathbb{K}$ решение W_K уравнения (4.1.7) принадлежит $\mathbb{M}$. Требование невырожденности шумов можно ослабить: условие $W_K \in \mathbb{M}$ будет выполняться (см., например, [286]), если потребовать для $K \in \mathbb{K}$ управляемость пары $(A + BK, G)$.

Таким образом, задача синтеза заданной стохастической чувствительности может быть формализована следующим образом.

Задача. Для заданной матрицы $\bar{W} \in \mathbb{M}$ требуется подобрать такую матрицу $K \in \mathbb{K}$, чтобы матрица W_K – решение уравнения (4.1.7) – удовлетворяла равенству

$$W_K = \bar{W}. \tag{4.1.9}$$

Решение этой задачи предполагает отыскание подходящей матрицы обратной связи K в регуляторе (4.1.8).

Поставленная задача задача разрешима не всегда. Действительно, далеко не всякую матрицу $\bar{W}$ из $\mathbb{M}$ можно с помощью регулятора (4.1.8) сделать матрицей стохастической чувствительности равновесия $\bar{x}$. Здесь возникает необходимость введения понятия достижимости.

Определение 4.1. Если элемент $\bar{W} \in \mathbb{M}$ при некотором $K \in \mathbb{K}$ удовлетворяет равенству (4.1.9), то $\bar{W}$ называется *достижимым* в системе (4.1.6) с регулятором (4.1.8).

Определение 4.2. Множество всех достижимых элементов

$$\mathbb{W} = \{\bar{W} \in \mathbb{M} \mid \exists K \in \mathbb{K} \quad W_K = \bar{W}\}$$

называется *множеством достижимости* замкнутой системы (4.1.6), (4.1.8).

Перейдем к описанию множества достижимости. Из уравнения (4.1.7) следует, что $W_K \succeq S$ при любых A, B и K (напомним, что в соотношении $Q \succeq P$ знак $\succeq$ означает, что матрица $Q-P$ является неотрицательно определенной). Это означает, что

$$\mathbb{W} \subseteq \mathbb{M}_S, \tag{4.1.10}$$

где $\mathbb{M}_S = \{V \in \mathbb{M} \,|\, V \succeq S\}$.

Выясним, при каких условиях множество достижимости $\mathbb{W}$ совпадает с $\mathbb{M}_S$. Ответ на этот вопрос существенно зависит от ранга матрицы B.

Случай $\mathrm{rank} B = n$

Теорема 4.1. Пусть шумы в системе (4.1.5) не вырождены ($S \succ 0$). Если матрица B является квадратной и невырожденной ($\mathrm{rank} B = n = l$), то $\mathbb{W} = \mathbb{M}_S$. При этом для любой матрицы $\bar{W} \in \mathbb{M}_S$ уравнение (4.1.7) имеет решение

$$K = B^{-1}\left[\left(\bar{W}-S\right)^{\frac{1}{2}}\, U^\top \bar{W}^{-\frac{1}{2}} - A\right] \in \mathbb{K}, \tag{4.1.11}$$

где U – произвольная ортогональная матрица размера $n \times n$.

Доказательство.

Рассмотрим произвольный элемент $\bar{W} \in \mathbb{M}_S$. Запишем уравнение (4.1.7) в виде

$$(A+BK)\bar{W}(A+BK)^\top = \bar{W} - S. \tag{4.1.12}$$

Для положительно определенной матрицы $\bar{W}$ и неотрицательно определенной матрицы $\bar{W}-S$ можно найти положительно определенную матрицу $V = \bar{W}^{\frac{1}{2}}$ и неотрицательно определенную матрицу $Q = (\bar{W}-S)^{\frac{1}{2}}$, для которых справедливы разложения

$$\bar{W} = VV^\top, \quad \bar{W} - S = QQ^\top. \tag{4.1.13}$$

С помощью этих разложений уравнение (4.1.12) можно записать в виде системы двух матричных уравнений

$$XX^\top = QQ^\top, \tag{4.1.14}$$

$$(A+BK)V = X \tag{4.1.15}$$

для неизвестных матриц X и K.

Множество решений уравнения (4.1.14) можно записать [287] в виде

$$X = QU^\top, \tag{4.1.16}$$

где U – произвольная ортогональная $n \times n$-матрица. То, что X из (4.1.15) есть решение, легко проверить подстановкой в (4.1.14) с учетом свойства $U^\top U = I$ ортогональных матриц.

Подставляя X из (4.1.16) в (4.1.15), получаем

$$(A + BK)V = QU^\top,$$

откуда с учетом невырожденности B следует явная формула для матрицы обратной связи

$$K = B^{-1}\left[QU^\top V^{-1} - A\right]. \tag{4.1.17}$$

Подставляя в (4.1.17) $V = \bar{W}^{\frac{1}{2}}$ и $Q = (\bar{W} - S)^{\frac{1}{2}}$, получаем (4.1.11).

Поскольку найденные матрицы K удовлетворяют исходному уравнению (4.1.7) с положительно определенными матрицами $W = \bar{W}$ и S, то спектральный радиус $\rho\ (A + BK)\ <\ 1$ и, следовательно, $K \in \mathbb{K}$. Таким образом, в условиях теоремы, произвольно выбранный элемент $\bar{W}$ из $\mathbb{M}_S$ принадлежит множеству достижимости $\mathbb{W}$. Теорема доказана.

Замечание 4.1. Если мы хотим подобрать параметры регулятора так, чтобы стохастическая чувствительность равновесия $\bar{x}$ системы (4.1.6), (4.1.8) была минимальной среди всех возможных, следует взять в качестве $\bar{W}$ минимальный элемент в $\mathbb{W}$. В условиях теоремы таковым является $\bar{W} = S$. В этом случае по формуле (4.1.11) матрица обратной связи находится единственным образом $K = -B^{-1}A$.

Замечание 4.2. Количественной мерой затрат на управление может служить квадратичный функционал $J = \mathrm{E}(u^\top Ru)$, где R – симметрическая положительно определенная $(l \times l)$-матрица. В рассматриваемой задаче синтеза желаемой матрицы стохастической чувствительности $\bar{W}$ у системы (4.1.6) с регулятором (4.1.8) для J справедливо параметрическое представление

$$J(K) = \varepsilon^2 \mathrm{tr}(K^\top RK\bar{W}). \tag{4.1.18}$$

В случае, когда решение задачи синтеза не является единственным, естественно перейти к задаче оптимального управления с критерием
$J(K) \to \min$. При этом построение оптимального регулятора сводится к задаче минимизации критерия (4.1.18) с квадратичными ограничениями (4.1.7).

Скалярный случай

При $n = 1$ коэффициент k обратной связи регулятора $u = k(x - \bar{x})$, решающего задачу синтеза системы с наперед заданной стохастической чувствительностью $\bar{w}$ равновесия $\bar{x}$, выражается формулой

$$k = \frac{1}{b}\left(-a \pm \sqrt{1 - \frac{s}{\bar{w}}}\right).$$

Здесь $a = f'_x(\bar{x}, 0)$, $\quad b = f'_u(\bar{x}, 0)$, $\quad s = \sigma^2(\bar{x}, 0)$. Неединственность выбора параметров регулятора, в общем случае связанная с присутствием в формуле (4.1.17) произвольной ортогональной матрицы, здесь, в скалярном случае, приводит к двум возможным значениям коэффициента k. При минимально допустимом значении стохастической чувствительности $\bar{w} = s$ решение задачи управления единственно: $k = -\dfrac{a}{b}$. При $\bar{w} > s$ из двух возможных значений k, минимизируя критерий $J = \mathrm{E}(u^2) = \varepsilon^2 k^2 \bar{w}$, разумно выбирать наименьший по модулю.

Случай $\mathrm{rank} B < n$

Здесь потребуются некоторые дополнительные построения, так как множество достижимости $\mathbb{W}$ уже не совпадает с $\mathbb{M}_S$.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ линейное подпространство $\mathbb{B}_1 =< b_1, ..., b_l >$, натянутое на вектор-столбцы $b_1, ..., b_l$ матрицы B, и его ортогональное дополнение $\mathbb{B}_2$. Обозначим через P_1 и P_2 проекторы на $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$. Отметим их некоторые свойства:

$$\begin{array}{l} P_1 B = B, \;\; B^\top P_1 = B^\top, \;\; P_2 B = 0, \;\; B^\top P_2 = 0, \;\; P_1 = BB^+, \\ P_1 + P_2 = I, \;\; P_1^2 = P_1, \;\; P_2^2 = P_2, \;\; P_1^\top = P_1, \;\; P_2^\top = P_2. \end{array} \tag{4.1.19}$$

Здесь знак $+$ означает псевдообращение.

Теорема 4.2.

Пусть $\mathrm{rank} B < n$ и шумы в системе (4.1.5) не вырождены ($S \succ 0$). Элемент $\bar{W} \in \mathbb{M}_S$ является достижимым тогда и только тогда, когда матрица $\bar{W}$ является решением уравнения

$$P_2 A \bar{W} A^\top P_2 = P_2 (\bar{W} - S) P_2. \tag{4.1.20}$$

При этом уравнение (4.1.7) для матрицы K имеет решение

$$K \;=\; B^+ \left[Q\, U^\top V^{-1} - A \right] \in \mathbb{K}, \tag{4.1.21}$$

где Q и V – матрицы разложения (4.1.13), U – произвольная ортогональная $n \times n$-матрица, удовлетворяющая уравнению

$$P_2 A V \;=\; P_2 Q U^\top. \tag{4.1.22}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathrm{rank} B < n$. Это означает, что проектор $P_2 = I - BB^+ \neq 0$. Умножая уравнение (4.1.12) слева и справа на P_2, с учетом $P_2B \;= 0,\; B^\top P_2 = 0$ (см. (4.1.19)), получаем соотношение (4.1.20).

Достаточность. Из (4.1.20) и разложения (4.1.13) следует, что

$$P_2AVV^\top A^\top P_2 \;=\; P_2QQ^\top P_2. \tag{4.1.23}$$

Равенство (4.1.23) влечет (4.1.22) при некоторой ортогональной матрице U. Благодаря (4.1.22), для матрицы K из (4.1.21), справедливы равенства:

$$\begin{gathered} BK \;=\; BB^+\left[Q\,U^\top V^{-1} - A\right] \;=\; P_1\left[Q\,U^\top V^{-1} - A\right] \;= \\ =\; (I - P_2)\left[Q\,U^\top V^{-1} - A\right] \;=\; \left[Q\,U^\top V^{-1} - A\right], \end{gathered}$$

$$(A + BK)V \;=\; QU^\top. \tag{4.1.24}$$

Из равенства (4.1.24) следует, что матрица K удовлетворяет уравнению (4.1.7). Как видно из этого доказательства, матрица K из (4.1.21) является решением (4.1.7) при любой ортогональной матрице U, удовлетворяющей условию (4.1.22). Теорема доказана.

Лемма 4.1. В случае, когда $\mathrm{rank} B < n$ и шумы в системе (4.1.5) не вырождены ($S \succ 0$), множество достижимости $\mathbb{W}$ не совпадает с $\mathbb{M}_S$: $\mathbb{W} \neq \mathbb{M}_S$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть имеет место равенство $\mathbb{W} = \mathbb{M}_S$. В этом случае элементы $\bar{W}_1 = S \in \mathbb{M}_S$, $\bar{W}_2 = 2S \in \mathbb{M}_S$ должны быть достижимы. Тогда для $\bar{W}_1$ из условия (4.1.20) следует равенство

$$P_2ASA^\top P_2 = 0. \tag{4.1.25}$$

Из (4.1.25) в условиях $S \succ 0$ вытекает равенство

$$P_2A = 0. \tag{4.1.26}$$

С другой стороны для $\bar{W}_2$ из условия достижимости (4.1.20) получим

$$2P_2ASA^\top P_2 = P_2SP_2. \tag{4.1.27}$$

Левая часть равенства (4.1.27) в силу (4.1.26) равна нулю, а правая, в силу $S \succ 0$, не равна нулю. Полученное противоречие доказывает, что хотя бы один элемент из пары $\bar{W}_1$, $\bar{W}_2$ не является достижимым. Таким образом, $\mathbb{W} \neq \mathbb{M}_S$.

Представленные здесь общие теоретические результаты по синтезу стохастической чувствительности равновесия опубликованы в работах [190, 201] автора диссертации.

Пример. Управление стохастической чувствительностью равновесия системы с квадратичным отображением

Рассмотрим стохастическую систему с квадратичным отображением

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t) + u_t + \varepsilon\xi_t, \;\; 2 \le \mu \le 4 \tag{4.1.28}$$

где u_t – управление, ξ_t – некоррелированные случайные величины с параметрами $\mathrm{E}\xi_t = 0, \; \mathrm{E}\xi_t^2 = 1$, а ε – интенсивность шума.

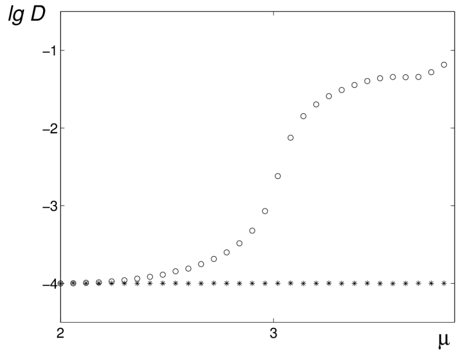


Рис. 4.1.1 – Дисперсия случайных состояний системы с квадратичным отображением при $\varepsilon = 0.01$ без управления (кружки) и с управлением, формирующим стохастическую чувствительность $\bar{w} = 1$ (звездочки).

При $u = 0$ в отсутствие случайных возмущений ($\varepsilon = 0$) детерминированная модель (4.1.28) имеет равновесие $\bar{x}(\mu) = 1 - \frac{1}{\mu}$. На интервале $2 \le \mu \le 3$ это равновесие устойчиво. При переходе параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 3$ в зону $3 < \mu \le 4$ это равновесие теряет устойчивость и в системе наблюдаются другие типы динамики. На интервале $(3, 3.5699)$ происходят бифуркации удвоения периода, аттракторами системы являются циклы кратности 2^n $(n = 1, 2, 3, ...)$, а на интервале $(3.5699, 4)$ зоны порядка чередуются с зонами хаоса.

При $u = 0$ под действием случайных возмущений решения, стартующие с равновесия $\bar{x}$, формируют некоторое распределение. Дисперсия $D(\mu)$ этого распределения при $\varepsilon = 0.01$ представлена кружками на рис. 4.1.1.

Как видим, с ростом параметра μ функция $D(\mu)$ монотонно возрастает на три порядка. При этом наиболее быстрый рост наблюдается вблизи точки $\mu_* = 3$, где равновесие $\bar{x}(\mu)$ становится неустойчивым. Решения стохастической системы с квадратичным отображением при $u = 0, \; \varepsilon = 0.01$ показаны серым цветом на рис. 4.1.1а для $\mu = 3.2$ и на рис. 4.1.1б для $\mu = 3.85$.

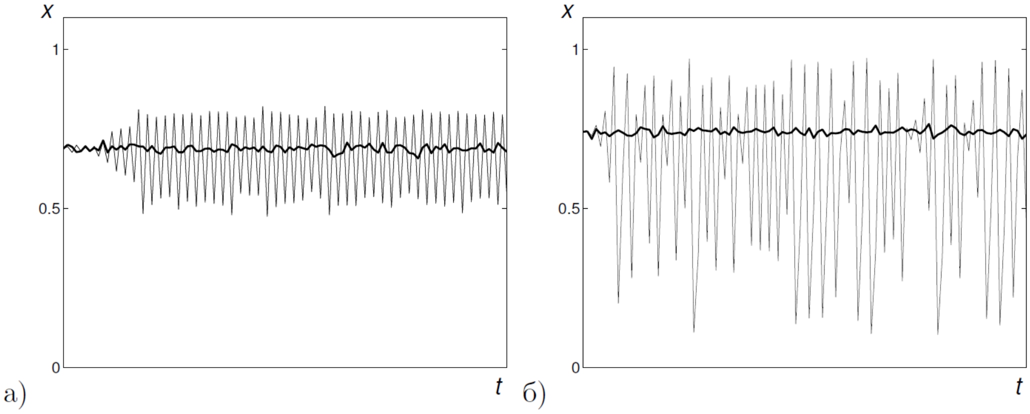


Рис. 4.1.2 – Решения стохастической системы с квадратичным отображением при $\varepsilon = 0.01$ без управления (серый цвет) и с управлением, формирующим стохастическую чувствительность $\bar{w} = 1$ (черный цвет), для а) $\mu = 3.2$, б) $\mu = 3.85$.

При $u = 0$ стохастическая чувствительность равновесия $\bar{x}(\mu)$ существенно зависит от параметра μ:

$$w(\mu) = \frac{1}{1 - (2 - \mu)^2}.$$

При $\mu = 2$ стохастическая чувствительность минимальна: $w = 1$. При увеличении μ функция $w(\mu)$ монотонно возрастает, что и объясняет рост дисперсии на интервале $2 \leq \mu < 3$.

Выбор управления диктуется требованием обеспечить устойчивость равновесия $\bar{x}(\mu)$ на всем интервале $2 \leq \mu \leq 4$ и минимизировать дисперсию случайных состояний вокруг него.

Для формирования управления будем использовать регулятор

$$u(x) = k(x - \bar{x}). \tag{4.1.29}$$

Множество допустимых значений коэффициента k, при которых равновесие $\bar{x}(\mu)$ экспоненциально устойчиво в детерминированной системе (4.1.28),(4.1.29) при $\varepsilon = 0$, удовлетворяет неравенству $\mu - 3 < k < \mu - 1$. При этом стохастическая чувствительность этого равновесия в стохастической системе (4.1.28) с управлением (4.1.29) имеет вид

$$w(\mu, k) = \frac{1}{1 - (2 - \mu + k)^2}.$$

Зададим требуемую чувствительность $\bar{w}$. Условие допустимости в данном примере означает, что $\bar{w} \geq 1$. Из уравнения $w(\mu, k) = \bar{w}$ находим два значения коэффициента обратной связи

$$k = \mu - 2 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{\bar{w}}}.$$

Для того, чтобы минимизировать дисперсию, выберем минимально возможное значение $\bar{w} = 1$. Тогда коэффициент обратной связи находится однозначно: $k = \mu - 2$. Возможности управления разбросом случайных траекторий рассматриваемой стохастически возмущенной системы с шумом интенсивности $\varepsilon = 0.01$ иллюстрируются на рис. 4.1.1, 4.1.2.

На рис. 4.1.1 звездочками показана дисперсия случайных состояний системы (4.1.28),(4.1.29) при $\varepsilon = 0.01$ и $k = \mu - 2$. На рис. 4.1.2 приведены черным цветом решения системы (4.1.28) с управлением (4.1.29) при $\mu = 3.2$ и $\mu = 3.85$. Как видим, использование регулятора, синтезирующего минимальную чувствительность, позволяет не только сделать равновесие $\bar{x}(\mu)$ устойчивым на всем интервале $2 \leq \mu \leq 4$, но и существенно уменьшить разброс случайных состояний.

На рис. 4.1.3 изображены случайные состояния управляемой системы для $2 \leq \mu \leq 4$ при двух значениях интенсивности шума $\varepsilon = 0.001$ и $\varepsilon = 0.01$. Как видно, построенный регулятор обеспечивает структурную стабилизацию во всем диапазоне изменения параметра μ.

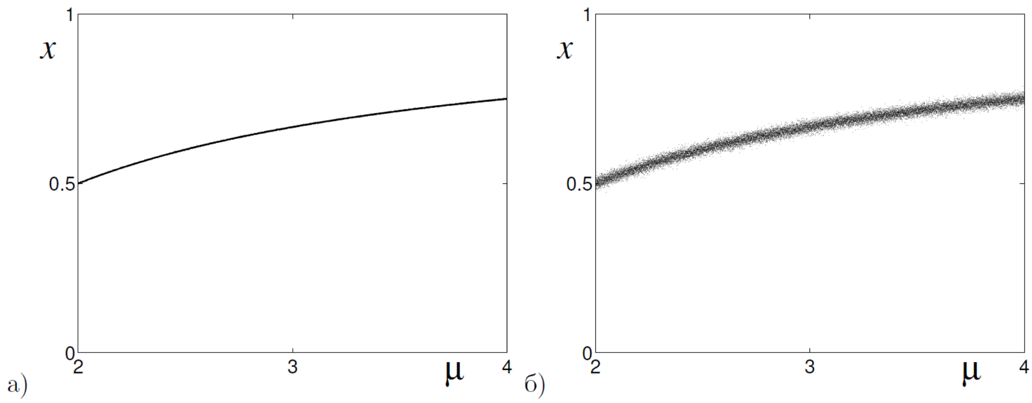


Рис. 4.1.3 – Случайные состояния системы (4.1.28) с регулятором (4.1.29), синтезирующим стохастическую чувствительность $\bar{w} = 1$ при а) $\varepsilon = 0.001$, б) $\varepsilon = 0.01$.

Количественной мерой затрат на управление может служить величина

$$J(u) = \mathrm{E}(u^2).$$

В данном примере $J = \varepsilon^2 k^2 w$. При $\bar{w} = 1$ имеем $J = \varepsilon^2(\mu - 2)^2$. При $\mu = 2$ стохастическая чувствительность и без управления принимает минимально возможное значение $\bar{w} = 1$, поэтому $u = 0$ и, как следствие, $J = 0$. С ростом параметра μ расходы на управление, гарантирующее постоянный минимально возможный уровень чувствительности равновесия, монотонно растут.

4.1.2. Анализ достижимости в двумерных системах

Рассмотрим детали анализа достижимости наперед заданной матрицы стохастической чувствительности в двумерном случае ($n = 2$). Благодаря симметричности матриц W и S, имеем

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix},\ S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}),\ \ a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}),$$
$$a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}),\ \ a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}).$$

Рассмотрим сначала случай, когда в системе (4.1.6), (4.1.8) 2×2-матрица B является невырожденной: $\mathrm{rank}B = 2$. В этом случае по Теореме 4.1 множество достижимых матриц $\mathbb{W}$ совпадает с множеством $\mathbb{M}_S$. В рассматриваемом здесь двумерном случае элементы достижимых матриц W должны удовлетворять системе трех неравенств:

$$\begin{aligned} &w_{11} \geq s_{11}, \quad w_{22} \geq s_{22}, \\ &(w_{11} - s_{11})(w_{22} - s_{22}) \geq (w_{12} - s_{12})^2. \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

При $w_{12} = s_{12}$ условия достижимости для диагональных элементов матрицы W задаются неравенствами $w_{11} \geq s_{11},\ \ w_{22} \geq s_{22}$.

При $w_{12} \neq s_{12}$, множество достижимости задается как

$$w_{11} > s_{11},\ \ w_{22} \geq s_{22} + \frac{(w_{12} - s_{12})^2}{w_{11} - s_{11}}.$$

Геометрически это означает, что область достижимости ограничена снизу соответствующей гиперболой. Заметим, что здесь недиагональный элемент w_{12} достижимой матрицы W можно выбрать произвольно, но достижимые диагональные элементы $w_{11},\ w_{22}$ должны удовлетворять указанным выше неравенствам. Эти неравенства дают широкую свободу выбора элементов матрицы W. В проблеме подавления стохастических колебаний большой амплитуды разумно использовать регулятор, обеспечивающий минимальные значения стохастической чувствительности. В рассматриваемом случае эти значения равны $w_{11} = s_{11},\ \ w_{12} = s_{12},\ \ w_{22} = s_{22}$.

Рассмотрим теперь случай, когда матрица B имеет размерность 2×1 и ранг $\mathrm{rank}B = 1$. Не теряя общности, можно положить $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. В этом случае множество достижимости уменьшается: из (4.1.20) следует дополнительное ограничение

$$(a_{11}^2-1)w_{11}+2a_{11}a_{12}w_{12}+a_{12}^2w_{22}+s_{11}=0. \tag{4.1.31}$$

Здесь пара (A,B) полностью управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}[B,AB]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & a_{12}\\ 1 & a_{22}\end{bmatrix}=2.$$

Это условие выполняется при $a_{12}\neq 0$.

Рассмотрим два подслучая.

1) $a_{12}\neq 0,\ a_{11}\neq 0$.

Из (4.1.31) следует, что

$$w_{12}=\frac{(1-a_{11}^2)w_{11}-a_{12}^2w_{22}-s_{11}}{2a_{11}a_{12}}. \tag{4.1.32}$$

Подставляя w_{12} в (4.1.30), получим

$$\begin{aligned}&w_{11}\geq s_{11},\quad w_{22}\geq s_{22},\\ &w_{22}^2+p(w_{11})w_{22}+q(w_{11})\leq 0,\end{aligned} \tag{4.1.33}$$

где

$$p(w_{11})=\frac{-2\left[(1+a_{11}^2)w_{11}-(1+2a_{11}^2)s_{11}-2a_{11}a_{12}s_{12}\right]}{a_{12}^2},$$

$$q(w_{11})=\frac{s_{11}^2+4a_{11}^2a_{12}^2(s_{12}^2-s_{11}s_{22})+4a_{11}a_{12}s_{11}s_{12}}{a_{12}^4}.$$

Система (4.1.33) задает условия достижимости для диагональных элементов $w_{11},\ w_{22}$ матрицы W. Для любой достижимой пары $w_{11},\ w_{22}$ недиагональный элемент w_{12} однозначно находится из (4.1.32).

2) $a_{12}\neq 0,\ a_{11}=0$.

Из (4.1.31) следует, что

$$w_{22}=\frac{w_{11}-s_{11}}{a_{12}^2}. \tag{4.1.34}$$

Подставляя w_{22} в (4.1.30), имеем

$$\begin{aligned}&w_{11}\geq s_{11},\\ &w_{11}^2-(2s_{11}+a_{12}^2s_{22})w_{11}+\\ &+s_{11}(s_{11}+a_{12}^2s_{22})\geq a_{12}^2(w_{12}-s_{12})^2.\end{aligned} \tag{4.1.35}$$

Здесь для любого w_{12} можно найти достижимые значения w_{11} из (4.1.35) и w_{22} из (4.1.34).

Рассмотрим случай $a_{12} = 0$, когда пара (A, B) не является полностью управляемой. Из условия стабилизируемости следует неравенство $a_{11}^2 < 1$. Из (4.1.30),(4.1.31) следует, что

$$w_{11} = \frac{s_{11}}{1 - a_{11}^2}, \quad w_{22} \geq s_{22} + \frac{(w_{12} - s_{12})^2(1 - a_{11}^2)}{s_{11} a_{11}^2}.$$

Среди достижимых w_{22}, минимальным является $w_{22} = s_{22}$ для $w_{12} = s_{12}$.

Конструктивные возможности этого анализа достижимости продемонстрируем на примере системы Эно.

Пример

Рассмотрим систему Эно со случайными возмущениями

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - \mu x_t^2 - 0.5 y_t + \varepsilon \sigma_1 \xi_t\,, \\ y_{t+1} &= x_t + \varepsilon \sigma_2 \nu_t, \quad 1 \leq \mu \leq 2.4\,, \end{aligned} \tag{4.1.36}$$

где ξ_t, ν_t – последовательности независимых гауссовских процессов с параметрами $\mathrm{E}\xi_t = \mathrm{E}\nu_t = \ 0$, $\mathrm{E}\xi_t^2 = 1$, $\mathrm{E}\nu_t^2 = 1$, $\mathrm{E}\xi_t\nu_t = 0$, а ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Соответствующая детерминированная система (4.1.36) с ($\varepsilon = 0$) имеет равновесие $(\bar{x}, \bar{y})$, где

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\sqrt{9 + 16\mu} - 3}{4\mu}.$$

Устойчивость равновесия определяется критерием $\rho(A) < 1$. Для модели Эно

$$A = \begin{bmatrix} a & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

с $a = -2\mu\bar{x} = (3 - \sqrt{9 + 16\mu})/2$. Собственные числа матрицы A являются решениями следующего уравнения

$$\lambda^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{9 + 16\mu} - 3)\lambda + \frac{1}{2} = 0.$$

Здесь критерий устойчивости равновесия $(\bar{x}, \bar{y})$ дает неравенство

$$\mu < \mu_* = \frac{27}{16} = 1.6875.$$

При $\mu \in [1, 1.6875)$ это равновесие является экспоненциально устойчивым. При переходе параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 1.6875$ это равновесие становится неустойчивым. На интервале $(1.6875, 2.5]$ система Эно демонстрирует как периодические, так и хаотические осцилляции.

Рассмотрим в деталях анализ достижимости для системы Эно при разных вариантах управления. Сначала рассмотрим систему Эно с двумя управляющими входами u_1, u_2 (Управление I). Затем рассмотрим случай, когда управление u_1 входит только в первое уравнение (Управление II). Третий вариант – управление u_2 входит только во второе уравнение (Управление III). Эти три случая позволяют прояснить основные положения представленной выше теории и показать конструктивные возможности ее приложений.

Управление I

Рассмотрим стохастическую систему

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - \mu x_t^2 - 0.5 y_t + u_{1,t} + \varepsilon\sigma_1\xi_t\,, \\ y_{t+1} &= x_t + u_{2,t} + \varepsilon\sigma_2\nu_t \end{aligned} \qquad (4.1.37)$$

с двумя управлениями $u_{1,t},\ u_{2,t}$.

Целью управления является обеспечение устойчивости равновесий $(\bar{x}, \bar{y})$ на всем интервале $1 \le \mu \le 2.4$ и синтез наперед заданной матрицы стохастической чувствительности W. Будем использовать регулятор

$$\begin{aligned} u_1 &= k_{11}(x - \bar{x}) + k_{12}(y - \bar{y}) \\ u_2 &= k_{21}(x - \bar{x}) + k_{22}(y - \bar{y}) \end{aligned}\,. \qquad (4.1.38)$$

Здесь матрица B является единичной 2×2-матрицей и имеет полный ранг, равный двум. По Теореме 4.1 для системы (4.1.37), (4.1.38) элементы достижимых матриц W ограничены неравенствами (4.1.30). Множества достижимости для случаев $w_{12} = 0$ и $w_{12} \ne 0$ представлены заштрихованными областями на рис. 4.1.4а, рис. 4.1.4б, соответственно.

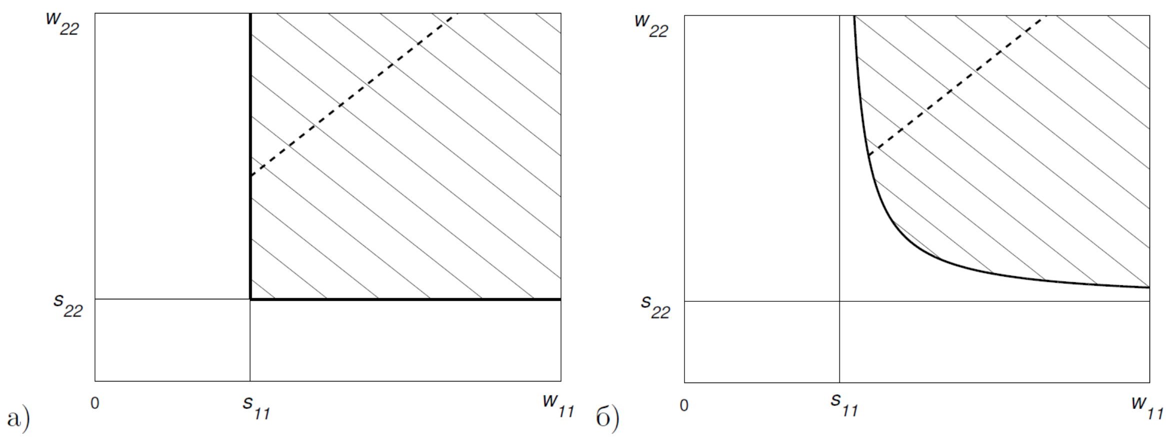


Рис. 4.1.4 – Области достижимости для а) $w_{12} = 0$, б) $w_{12} \ne 0$: в системе (4.1.37) заштрихованная область, в системе (4.1.39) – пунктирная линия.

Положим $w_{12} = 0$. Тогда элементы w_{11}, w_{22} достижимых матриц W ограничены неравенствами

$$w_{11} \geq s_{11}, \quad w_{22} \geq s_{22}, \;\; s_{11} = \sigma_1^2, \;\; s_{22} = \sigma_2^2.$$

Как следует из (4.1.11), коэффициенты регулятора (4.1.38), обеспечивающего требуемые значения $w_{11} \geq s_{11}$, $w_{12} = 0$, $w_{22} \geq s_{22}$ матрицы стохастической чувствительности, могут быть найдены по формулам

$$k_{11} = \sqrt{1 - \frac{s_{11}}{w_{11}}} - a \; , \quad k_{12} = 0.5 \; ,$$

$$k_{21} = -1 \; , \qquad k_{22} = \sqrt{1 - \frac{s_{22}}{w_{22}}} \; .$$

Здесь матрица U в (4.1.11) была выбрана единичной. Возможности этого регулятора формировать разброс случайных состояний различных пространственных конфигураций показаны на рис. 4.1.5 для $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

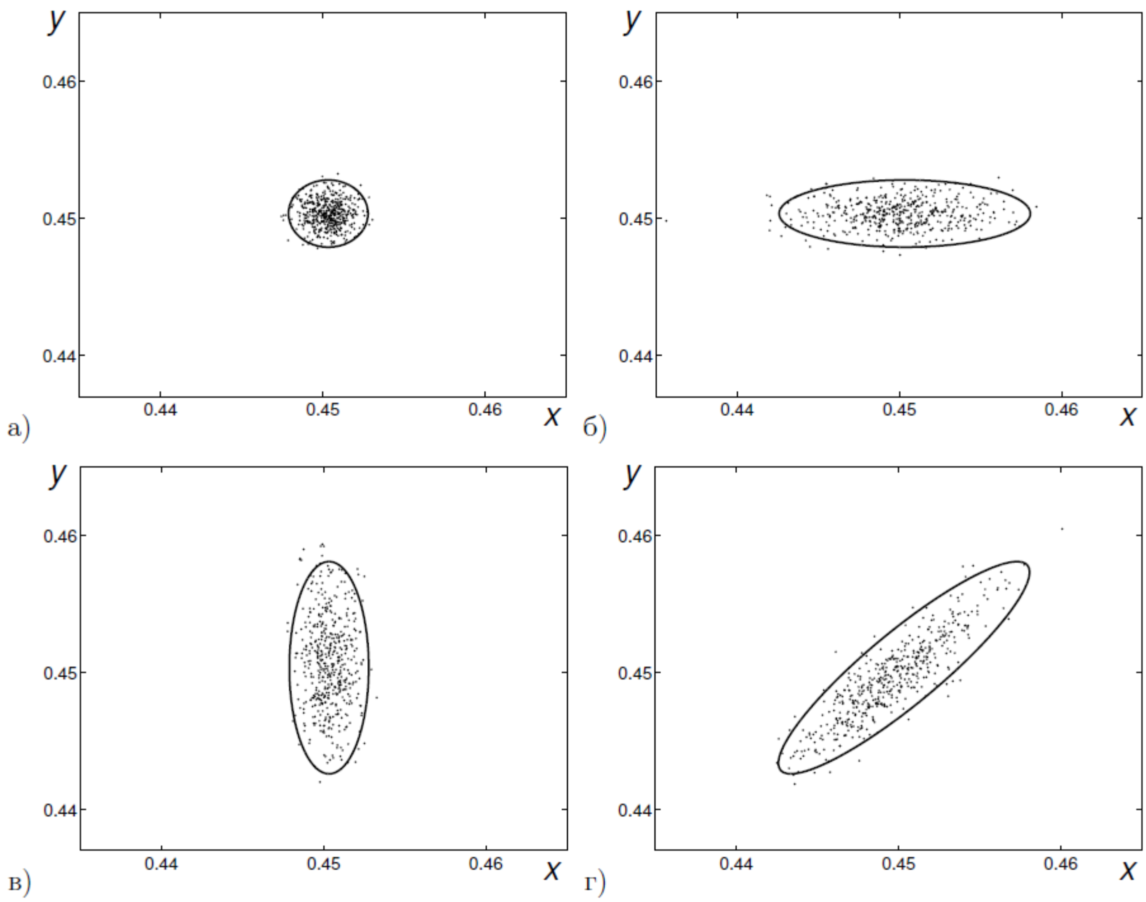


Рис. 4.1.5 – Случайные состояния и доверительные эллипсы стохастической системы (4.1.37), (4.1.38) при $\mu = 1.6$, $\varepsilon = 0.001$, $s_{11} = s_{22} = 1$, доверительной вероятности $P = 0.95$ и регуляторе, синтезирующем различные матрицы стохастической чувствительности с элементами: а) $w_{11} = 1$, $w_{22} = 1$, $w_{12} = 0$; б) $w_{11} = 10$, $w_{22} = 1$, $w_{12} = 0$; в) $w_{11} = 1$, $w_{22} = 10$, $w_{12} = 0$; г) $w_{11} = 10$, $w_{22} = 10$, $w_{12} = 9$.

Отметим, что при $W \neq S$ матрица K коэффициентов регулятора в (4.1.11) зависит от выбора ортогональной матрицы U. Пусть $W = 2S$. Тогда для системы (4.1.37) с $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ имеем

$$W = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad W^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},$$

$$(W-S)^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Здесь $U = U(\varphi)$ – однопараметрическое семейство ортогональных 2×2-матриц. Тогда матрицы K, синтезирующие заданную матрицу W, также составляют однопараметрическое семейство:

$$K(\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi + 2\mu\bar{x} & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi + \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi - 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Функция затрат $J = \mathrm{E}u^2$ имеет вид

$$J(\varphi) = \varepsilon^2 \mathrm{tr}(K^\top K W) =$$

$$= \varepsilon^2 \left[4\sqrt{2}\mu\bar{x}\cos\varphi + 3\sqrt{2}\sin\varphi + 8\mu^2\bar{x}^2 + \frac{9}{2} \right].$$

Эта функция принимает минимальное значение

$$J_0 = \varepsilon^2 \left(4.5 + 8\mu^2\bar{x}^2 - \sqrt{18 + 32\mu^2\bar{x}^2} \right)$$

при $\varphi_0 = \mathrm{arctg}\dfrac{3}{4\mu\bar{x}}$.

Управление II

Рассмотрим теперь стохастическую систему Эно

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - \mu x_t^2 - 0.5 y_t + u_{1,t} + \varepsilon\sigma_1\xi_t\,, \\ y_{t+1} &= x_t + \varepsilon\sigma_2\nu_t \end{aligned} \tag{4.1.39}$$

с одним управлением $u_{1,t}$.

В этом случае

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rank}[B, AB] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & -2\mu\bar{x} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

поэтому пара (A, B) полностью управляема.

Будем использовать регулятор

$$u_1 \;=\; k_{11}(x-\bar{x})+k_{12}(y-\bar{y})\ . \tag{4.1.40}$$

Для системы (4.1.39), (4.1.40)

$$B^+=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad BB^+=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_2=I-BB^+=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\mathrm{rank}(B)<2$, то в анализе достижимости и построении управления будем использовать Теорему 4.2.

Из условия достижимости (4.1.20) следует, что элементы матрицы W стохастической чувствительности должны удовлетворять системе

$$\begin{array}{l} w_{11}\ge s_{11},\;\; (w_{11}-s_{11})(w_{22}-s_{22})\ge w_{12}^2, \\ w_{22}=w_{11}+s_{22}. \end{array} \tag{4.1.41}$$

Множества достижимости системы (4.1.39), (4.1.40) для случаев $w_{12}=0$ и $w_{12}\neq 0$ представлены пунктирами на рис. 4.1.4а, рис. 4.1.4б, соответственно. Как видим, для системы с одним управляющим входом, в условиях (4.1.41), множество достижимости существенно меньше, чем в случае системы с двумя управляющими входами. Отметим, что здесь множества достижимости не зависят от параметра μ.

Положим $w_{12}=0$. Тогда элементы w_{11}, w_{22} достижимых матриц W ограничены условиями

$$w_{11}\ge s_{11},\;\; w_{22}=w_{11}+s_{22}.$$

Здесь

$$W^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix} \sqrt{w_{11}} & 0 \\ 0 & \sqrt{w_{11}+s_{22}} \end{bmatrix},$$

$$(W-S)^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix} \sqrt{w_{11}-s_{11}} & 0 \\ 0 & \sqrt{w_{11}} \end{bmatrix}.$$

Теперь мы должны найти ортогональную 2×2-матрицу U, удовлетворяющую условию (4.1.22). Пусть

$$U=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$P_2 A W^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{w_{11}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$P_2 (W - S)^{\frac{1}{2}} U^\top = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{w_{11}} \sin\varphi & \sqrt{w_{11}} \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Из (4.1.22) следует, что $\sin\varphi = 1, \; \cos\varphi = 0$, поэтому ортогональная матрица U однозначно находится:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя эту матрицу в (4.1.21), находим коэффициенты

$$k_{11} = 2\mu\bar{x} \; , \quad k_{12} = 0.5 - \sqrt{\frac{w_{11} - s_{11}}{w_{11} + s_{22}}} \tag{4.1.42}$$

регулятора (4.1.40), обеспечивающего назначенную достижимую матрицу стохастической чувствительности для системы (4.1.39).

Аналогичная конструктивная процедура позволяет найти коэффициенты регулятора (4.1.40) для случая $w_{12} \neq 0$.

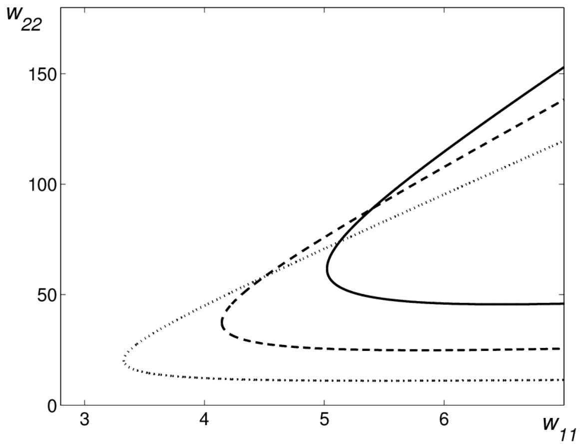


Рис. 4.1.6 – Области достижимости для системы (4.1.43) с $s_{11} = s_{22} = 1$ для $\mu = 1.6$ (точки), $\mu = 2$ (пунктир), $\mu = 2.4$ (сплошная).

Управление III

Рассмотрим стохастическую систему

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - \mu x_t^2 - 0.5 y_t + \varepsilon\sigma_1\xi_t \, , \\ y_{t+1} &= x_t + u_{2,t} + \varepsilon\sigma_2\nu_t \end{aligned} \tag{4.1.43}$$

с одним управлением $u_{2,t}$ во втором уравнении.

В этом случае

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \ \mathrm{rank}[B, AB] = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2,$$

поэтому пара (A, B) полностью управляема.

Будем строить регулятор в форме обратной связи

$$u_2 \ = \ k_{21}(x - \bar{x}) + k_{22}(y - \bar{y}) \ . \tag{4.1.44}$$

Для системы (4.1.43), (4.1.44)

$$B^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, BB^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = I - BB^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из условия достижимости (4.1.20) следуют ограничения на элементы матрицы W стохастической чувствительности:

$$w_{11} \geq s_{11}, \ \ w_{22} \geq s_{22},$$

$$(w_{11} - s_{11})(w_{22} - s_{22}) \geq w_{12}^2, \tag{4.1.45}$$

$$(a^2(\mu) - 1)w_{11} - a(\mu)w_{12} + 0.25w_{22} + s_{22} = 0,$$

где $a(\mu) = -2\mu\bar{x}(\mu) = (3 - \sqrt{9 + 16\mu})/2$. Элемент w_{12} однозначно определяется по элементам w_{11}, w_{22}:

$$w_{12} = \frac{a^2(\mu) - 1}{a(\mu)} w_{11} + \frac{1}{4a(\mu)} w_{22} + \frac{s_{22}}{a(\mu)}. \tag{4.1.46}$$

Исключая w_{12} из (4.1.45), мы получаем следующее квадратное неравенство для области достижимости:

$$w_{22}^2 + 8[(2a^2 + 1)s_{11} - (a^2 + 1)w_{11}]w_{22} +$$

$$+16[(s_{11} + (a^2 - 1)w_{11})^2 + a^2 s_{22}(w_{11} - s_{11})] \leq 0.$$

Здесь, в отличие от двух предыдущих случаев (Управление I, Управление II), область достижимости для w_{11}, w_{22} существенно зависит от параметра μ. Эта зависимость продемонстрирована на рис. 4.1.6, где границы областей достижимости построены для различных значений $\mu = 1.6$ (точками), $\mu = 2$

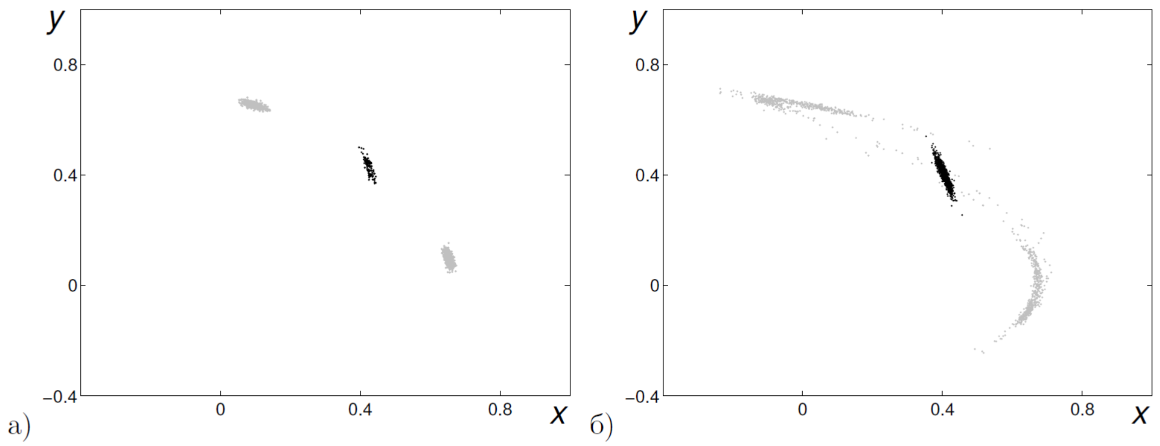


Рис. 4.1.7 – Случайные состояния системы Эно при $\varepsilon = 0.005,\ s_{11} = s_{22} = 1,\ p = 0.95$ без управления (серый) и с управлением (черный) (4.1.43), синтезирующим матрицы стохастической чувствительности: а) $w_{11} = 4.5,\ w_{22} = 40,\ w_{12} = -11.48$ для $\mu = 2$; б) $w_{11} = 6,\ w_{22} = 50,\ w_{12} = 15.52$ для $\mu = 2.4$.

(пунктиром), $\mu = 2.4$ (сплошной). Соответствующие области достижимости располагаются справа от границ.

Обсудив вопросы достижимости, перейдем теперь к задаче подавления стохастических большеамплитудных колебаний методом управления стохастической чувствительностью. Такие большеамплитудные колебания в системе Эно без управления (4.1.36) с $\varepsilon = 0.005,\ s_{11} = s_{22} = 1$ показаны серым цветом для $\mu = 2$ на рис. 4.1.7а и $\mu = 2.4$ на рис. 4.1.7б.

Чтобы подавить стохастические колебания большой амплитуды в системе (4.1.36) при $\mu = 2$, мы перейдем к системе (4.1.43) с управлением, формируемым регулятором (4.1.44). Этот регулятор должен стабилизировать равновесие $(\bar{x}, \bar{y})$ и обеспечить малую стохастическую чувствительность. Положим $w_{11} = 4.5,\ w_{22} = 40$. Эти значения лежат в области достижимости (см. рис. 4.1.6). Из (4.1.45) следует, что $w_{12} = -11.48$. Используя (4.1.21), (4.1.22) для синтеза этой матрицы стохастической чувствительности, построим регулятор (4.1.44) с коэффициентами обратной связи $k_{21} = 4.622,\ k_{22} = 1.467$. Этот регулятор обеспечивает колебания малой амплитуды вблизи устойчивого равновесия $(\bar{x}, \bar{y})$ (см. рис. 4.1.7а, рис. 4.1.8а).

Чтобы подавить хаотические колебания в системе (4.1.36) при $\mu = 2.4$, положим $w_{11} = 6,\ w_{22} = 50$. Эти значения принадлежат соответствующей области достижимости (см. рис. 4.1.6). Из (4.1.45) следует, что $w_{12} = -15.52$. Тот же алгоритм, основанный на (4.1.21), (4.1.22), дает нам коэффициенты обратной связи $k_{21} = 4.752,\ k_{22} = 1.342$. На рис. 4.1.7б, рис. 4.1.8б показано, что регулятор (4.1.44) с этими коэффициентами успешно подавляет хаотические колебания.

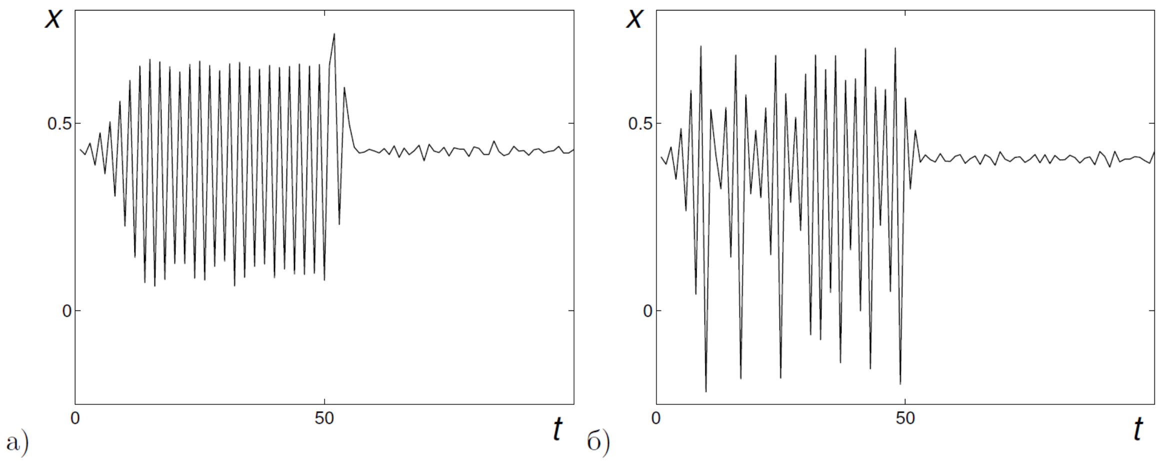


Рис. 4.1.8 – Стабилизация стохастических осцилляций для того же набора параметров, что и в рис. 4.1.7. Здесь показана x-координата случайной траектории. Управление включено при $t = 50$.

Результаты, представленные в этом разделе опубликованы в работе [201] автора диссертации.

4.1.3. Управление при неполной информации

Рассмотрим нелинейную дискретную стохастическую систему с управлением

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t, \alpha_t), \quad \alpha_t = \varepsilon \xi_t, \tag{4.1.47}$$

где $x, f \in R^n$, $u \in R^l$, $\alpha \in R^q$. Здесь u – управление, α – случайное возмущение, ξ_t – некоррелированный случайный процесс с параметрами $\mathrm{E}\xi_t = 0$, $\mathrm{E}\xi_t\xi_t^\top = \Pi$, где $\Pi \in R^{q\times q}$ – симметрическая положительно определенная матрица, а ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Предполагается, что соответствующая детерминированная система (4.1.47) (с $\varepsilon = 0$ и $u = 0$) имеет равновесие $\bar{x}:\ \bar{x} = f(\bar{x}, 0, 0)$. Устойчивость $\bar{x}$ не предполагается.

Рассмотрим случай, когда вся доступная информация содержится в векторе наблюдений v_t:

$$v_t = g(x_t, \beta_t), \quad \beta_t = \varepsilon \eta_t, \tag{4.1.48}$$

где $v, g \in R^m$, и $\eta_t \in R^r$ – некоррелированный случайный процесс с параметрами $\mathrm{E}\eta_t = 0$, $\mathrm{E}\eta_t\eta_t^\top = H$, и $H \in R^{r\times r}$ – симметрическая положительно определенная матрица.

В этих обстоятельствах используется регулятор

$$u_t = K\left[v_t - \bar{v}\right], \quad \bar{v} = g(\bar{x}, 0), \tag{4.1.49}$$

где $K \in R^{l\times m}$ – постоянная матрица обратной связи.

Замкнутую систему (4.1.47)-(4.1.49) можно записать в виде:

$$x_{t+1} = f(x_t, K\left[g(x_t, \varepsilon\eta_t) - g(\bar{x}, 0)\right], \varepsilon\xi_t). \tag{4.1.50}$$

Для отклонений решений x_t^ε системы (4.1.50) от равновесия $\bar{x}$ рассмотрим следующую асимптотику

$$z_t = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x_t^\varepsilon - \bar{x}}{\varepsilon}$$

и уравнение, задающее ее динамику:

$$z_{t+1} = (F + BKC)\, z_t + BK\varphi\eta_t + \sigma\xi_t. \tag{4.1.51}$$

Здесь

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0, 0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, 0, 0), \quad C = \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}, 0),$$

$$\varphi = \frac{\partial g}{\partial \beta}(\bar{x}, 0),\ \sigma = \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\bar{x}, 0, 0).$$

Матрица вторых моментов $M_t = \mathrm{E}\left(z_t z_t^\top\right)$ является решением уравнения

$$M_{t+1} = (F + BKC)\, M_t\, (F + BKC)^\top + BK\Phi K^\top B^\top + S, \tag{4.1.52}$$

где

$$\Phi = \varphi H\varphi^\top,\ S = \sigma\Pi\sigma^\top.$$

Множество матриц K, обеспечивающих экспоненциальную устойчивость равновесия $\bar{x}$ замкнутой детерминированной системы (4.1.50) (с $\varepsilon = 0$) имеет вид

$$\mathbb{K} = \left\{K \mid\ \rho(F + BKC) < 1\right\}, \tag{4.1.53}$$

где $\rho(A)$ – спектральный радиус матрицы A. Предполагается, что множество $\mathbb{K}$ не пусто.

Уравнение (4.1.52) для $K \in \mathbb{K}$ имеет единственное устойчивое стационарное решение W, удовлетворяющее уравнению

$$W = (F + BKC)\, W\, (F + BKC)^\top + BK\Phi K^\top B^\top + S. \tag{4.1.54}$$

Матрица W является матрицей стохастической чувствительности равновесия $\bar{x}$ системы (4.1.50).

Теперь задачу управления нелинейной стохастической системой (4.1.50) можно рассматривать в терминах управления матрицей стохастической чувствительности W путем выбора матрицы K регулятора (4.1.49). Следуя логике и обозначениям п.4.1.1, обозначим через W_K решение (4.1.54) при $K \in \mathbb{K}$ и введем множество достижимости

$$\mathbb{W} = \{W \in \mathbb{M} \mid \exists K \in \mathbb{K} \quad W_K = W\}.$$

Определим матричные функции

$$G(W) = \left(CWC^\top + \Phi\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$R(W) = FWC^\top \left(CWC^\top + \Phi\right)^{-1} CWF^\top - FWF^\top - S + W.$$

Следующая теорема дает описание множеств достижимости и конструктивные формулы для матрицы K, обеспечивающей назначенную матрицу стохастической чувствительности $W: \ W = W_K$.

Теорема 4.3. Пусть шумы в системе (4.1.47) и наблюдениях (4.1.48) являются невырожденными ($S \succ 0, \ \Phi \succ 0$).
(а) Если матрица B является квадратной и невырожденной ($\mathrm{rank} B = n = l$), то

$$\mathbb{W} = \{W \in \mathbb{M} \,|\, R(W) \succeq 0\},$$

и для любой матрицы $W \in \mathbb{W}$ уравнение (4.1.54) имеет решение

$$K = B^{-1}\left(R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^\top G^{-1}(W)\right) G^{-1}(W) \in \mathbb{K}; \tag{4.1.55}$$

(б) Если $\mathrm{rank}(B) < n$, то множество достижимости $\mathbb{W}$ задается соотношениями

$$R(W) \succeq 0, \quad P(FWF^\top + S - W)P = 0,$$
$$P\left(R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^\top G^{-1}(W)\right) = 0,$$

и для любой матрицы $W \in \mathbb{W}$ уравнение (4.1.54) имеет решение

$$K = B^{+}\left(R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^\top G^{-1}(W)\right) G^{-1}(W) \in \mathbb{K}. \tag{4.1.56}$$

Здесь J – произвольная ортогональная $n \times n$-матрица и $P = I - BB^+$ – матрица проектирования.

Доказательство

Перепишем уравнение (4.1.54) в виде

$$BK\left(CWC^\top + \Phi\right)K^\top B^\top + BKCWF^\top + FWC^\top K^\top B^\top + FWF^\top + S - W = 0. \tag{4.1.57}$$

В силу $\Phi \succ 0$, матрица $CWC^\top + \Phi$ –невырожденная, а матрица $G(W)$ – положительно определенная ($G(W) \succ 0$).

Подстановка

$$N = BKG(W), \quad F_1 = FWC^\top G^{-1}(W) \tag{4.1.58}$$

преобразует (4.1.57) в уравнение

$$(N + F_1)(N + F_1)^\top = R(W). \tag{4.1.59}$$

Неравенство

$$R(W) \succeq 0 \tag{4.1.60}$$

является необходимым условием разрешимости уравнения (4.1.59).

При условии (4.1.60), квадратное уравнение (4.1.59)) эквивалентно [287] следующему семейству линейных матричных уравнений:

$$N + F_1 = R^{\frac{1}{2}}(W)J, \tag{4.1.61}$$

J – произвольная ортогональная $n \times n$-матрица.

Из (4.1.58), (4.1.61) следует, что

$$BKG(W) = R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^\top G^{-1}(W).$$

Таким образом, матрица K регулятора (4.1.49), синтезирующего матрицу стохастической чувствительности W, удовлетворяет линейному уравнению

$$BK = \left(R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^\top G^{-1}(W)\right) G^{-1}(W). \tag{4.1.62}$$

Рассмотрим сначала случай а), когда матрица B – квадратная и невырожденная ($\mathrm{rank}B = n = l$). Из (4.1.62) следует, что

$$K = B^{-1} \left(R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^\top G^{-1}(W)\right) G^{-1}(W) \in \mathbb{K}.$$

Здесь множество достижимости имеет вид

$$\mathbb{W} = \left\{W \in \mathbb{M} \,|\, R(W) \succeq 0\right\}.$$

Случай а) доказан.

Рассмотрим теперь случай б), когда $\mathrm{rank}(B) < n$. В этом случае для достижимости матрицы W неравенство (4.1.60) не является достаточным и возникают дополнительные ограничения.

Умножая уравнение (4.1.57) на $P = I - BB^+$ слева и справа, с учетом $PB = 0$, получим

$$P(FWF^\top + S - W)P = 0. \tag{4.1.63}$$

Отметим, что всякая достижимая матрица W должна удовлетворять этому уравнению.

Кроме того, следует добавить условие

$$P\left(R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^{\top}G^{-1}(W)\right) = 0$$

разрешимости уравнения (4.1.62).

Таким образом, здесь множество достижимости $\mathbb{W}$ задается соотношениями

$$R(W) \succeq 0, \quad P(FWF^{\top} + S - W)P = 0,$$
$$P\left(R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^{\top}G^{-1}(W)\right) = 0.$$

Для любой матрицы $W \in \mathbb{W}$, уравнение (4.1.62) имеет решение

$$K = B^{+}\left(R^{\frac{1}{2}}(W)J - FWC^{\top}G^{-1}(W)\right)G^{-1}(W) \in \mathbb{K}.$$

Случай б) теоремы доказан.
Теорема 4.3 и ее доказательство опубликованы в работе [222] автора диссертации.

Замечание. Эта теорема позволяет решить задачу синтеза заданной матрицы стохастической чувствительности W. Здесь получены условия достижимости этой матрицы и явные формулы для матрицы K регулятора обратной связи (4.1.49), которая обеспечивает такую стохастическую чувствительность. Но в рамках управления стохастической чувствительностью актуальной является задача минимизации стохастической чувствительности. Эта задача важна, поскольку минимизация стохастической чувствительности позволяет минимизировать дисперсию случайных состояний вокруг равновесия.

Далее мы обсуждаем эту проблему и даем ее решение для двумерных систем.

Управление стохастической чувствительностью двумерных систем

Для решения задачи управления стохастической чувствительностью W нужно найти функцию $W(K)$ и множество $\mathbb{K}$ допустимых матриц K (см. (4.1.53)). Здесь множество $\mathbb{K}$ играет роль области определения функции $W(K)$. Рассмотрим подробно, как построить функцию $W(K)$ и явно описать $\mathbb{K}$ для двумерных систем в зависимости от разных вариантов управляющего входа.

Управление с двумя входами

Рассмотрим двумерную дискретную стохастическую управляемую систему с двумя управляющими входами

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f_1(x_t, y_t) + u_{1,t} + \varepsilon\xi_{1,t}, \\ y_{t+1} &= f_2(x_t, y_t) + u_{2,t} + \varepsilon\xi_{2,t} \end{aligned} \tag{4.1.64}$$

и зашумленными наблюдениями

$$v_t = g(x_t, y_t) + \varepsilon\eta_t. \qquad (4.1.65)$$

Здесь $x,\ y$ – скалярные переменные состояний, $v,\ u_1,\ u_2$ – скалярные переменные выхода и управляющих входов; $\xi_{1,t},\ \xi_{2,t},\ \eta_t$ – некоррелированные случайные последовательности с параметрами $\mathrm{E}\xi_{1,t} = \mathrm{E}\xi_{2,t} = 0,\ \mathrm{E}\xi_{1,t}^2 = s_1,\ \mathrm{E}\xi_{2,t}^2 = s_2,\ \mathrm{E}\eta_t = 0,\ \mathrm{E}\eta_t^2 = \varphi$, и ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Предполагается, что соответствующая детерминированная система без управления (4.1.64) с $\varepsilon = 0$ и $u_{1,2} = 0$ имеет равновесие $(\bar{x}, \bar{y})$.

Здесь будем использовать регулятор

$$\begin{aligned} u_{1,t} &= k_1 \left(v_t - g(\bar{x}, \bar{y})\right) \\ u_{2,t} &= k_2 \left(v_t - g(\bar{x}, \bar{y})\right). \end{aligned} \qquad (4.1.66)$$

Для замкнутой системы (4.1.64)-(4.1.66), параметры B, K, C, Φ, S и $A = F + BKC$ в уравнении (4.1.54) имеют вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \varphi, \quad S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + k_1\frac{\partial g}{\partial x}, \quad a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + k_1\frac{\partial g}{\partial y}, \quad a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x} + k_2\frac{\partial g}{\partial x}, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y} + k_2\frac{\partial g}{\partial y},$$

$$c_1 = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad c_2 = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Здесь частные производные функций f_1, f_2, g вычисляются в точке $(\bar{x}, \bar{y})$.

Для (4.1.64)-(4.1.66), множество $\mathbb{K}$ может быть описано конструктивно. Действительно, элементы k_1, k_2 допустимых матриц $K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{K}$ (см. (4.1.53)), обеспечивающих условие устойчивости $\rho(A(k_1, k_2)) < 1$, удовлетворяют следующему квадратному неравенству:

$$-1 + |a_{11}(k_1) + a_{22}(k_2)| < a_{11}(k_1)a_{22}(k_2) - a_{21}(k_2)a_{12}(k_1) < 1. \qquad (4.1.67)$$

Чтобы найти элементы матрицы стохастической чувствительности

$$W(k_1, k_2) = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix}$$

для каждой пары (k_1, k_2), удовлетворяющей (4.1.47), следует решить уравнение (4.1.54). Здесь это матричное уравнение может быть записано как

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2 - 1 & a_{12}^2 & 2a_{11}a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 - 1 & 2a_{21}a_{22} \\ a_{11}^2 a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{22} \\ w_{12} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s_1 + k_1^2\varphi \\ s_2 + k_2^2\varphi \\ k_1k_2\varphi \end{pmatrix}. \tag{4.1.68}$$

В результате, функции $w_{11}(k_1, k_2),\ w_{12}(k_1, k_2),\ w_{22}(k_1, k_2)$ могут быть найдены из (4.1.68) в явном виде.

Система с одним управляющим входом

Рассмотрим двумерную стохастическую систему с одним управлением

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f_1(x_t, y_t) + u_t + \varepsilon\xi_{1,t}, \\ y_{t+1} &= f_2(x_t, y_t) + \varepsilon\xi_{2,t} \end{aligned} \tag{4.1.69}$$

и зашумленными наблюдениями (4.1.65). Здесь будем использовать регулятор

$$u_t = k\left(v_t - g(\bar{x}, \bar{y})\right). \tag{4.1.70}$$

Для замкнутой системы (4.1.69), (4.1.65), (4.1.70), параметры B, K, C, Φ, S и $A = F + BKC$ в уравнении (4.1.54) имеют вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$K = k, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \varphi,$$

где

$$a_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + kc_1, \quad a_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial y} + kc_2, \quad a_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad a_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

$$c_1 = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad c_2 = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Здесь матричное уравнение (4.1.54) может быть записано как

$$\begin{pmatrix} a_{11}^2 - 1 & a_{12}^2 & 2a_{11}a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 - 1 & 2a_{21}a_{22} \\ a_{11}^2 a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{22} \\ w_{12} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s_1 + k^2\varphi \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1.71}$$

Скалярный коэффициент k обратной связи в регуляторе (4.1.70), обеспечивающем неравенство $\rho(A(k)) < 1$, удовлетворяет линейному неравенству:

$$-1 + \left|\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + c_1 k\right| < \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}c_1 - \frac{\partial f_2}{\partial x}c_2\right)k + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x} < 1. \tag{4.1.72}$$

Все решения k неравенства (4.1.72) составляют множество $\mathbb{K}$. Рассмотрим, как общее условие достижимости (4.1.63) выглядит для (4.1.69), (4.1.65), (4.1.70). Здесь

$$B^+ = [1 \;\; 0]\,, \quad P = I - BB^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, условие достижимости (4.1.63) для матрицы W может быть записано как единственное уравнение для ее элементов w_{11}, w_{12}, w_{22}:

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 w_{11} + 2\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y}w_{12} + \left(\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 - 1\right) w_{22} + s_2 = 0. \tag{4.1.73}$$

Здесь матричная функция $W(k)$ может быть найдена из (4.1.71) в явной форме. Область определения $\mathbb{K}$ этой функции состоит из решений (4.1.72).

Таким образом, в двумерном случае матрица стохастической чувствительности может быть найдена в явном виде как функция коэффициентов обратной связи. При этом ограничения на эти коэффициенты удается найти в виде квадратичных (для управления с двумя входами) или линейных (для одного входа) параметрических неравенств. Далее эти аналитические результаты будут применены к стабилизации стохастической нелинейной модели Эно.

Пример

Рассмотрим стохастически возмущенную систему Эно

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 - \mu x_t^2 - 0.5 y_t + u_t + \varepsilon\xi_{1,t}, \\ y_{t+1} &= x_t + \varepsilon\xi_{2,t} \end{aligned} \tag{4.1.74}$$

с зашумленными наблюдениями

$$v_t = c_1 x_t + c_2 y_t + \varepsilon\eta_t, \tag{4.1.75}$$

где $\xi_{1,t}$, $\xi_{2,t}$, η_t – некоррелированные случайные последовательности с параметрами $\mathrm{E}\xi_{1,t} = \mathrm{E}\xi_{2,t} = 0$, $\mathrm{E}\xi_{1,t}^2 = s_1$, $\mathrm{E}\xi_{2,t}^2 = s_2$, $\mathrm{E}\eta_t = 0$, $\mathrm{E}\eta_t^2 = \varphi$, и ε – скалярный параметр интенсивности шума.

В отсутствие управления детерминированная модель (4.1.74) ($\varepsilon = 0$) имеет равновесие $(\bar{x}, \bar{y})$, где

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\sqrt{9 + 16\mu} - 3}{4\mu}.$$

Устойчивость этого равновесия определяется условием $\rho(A) < 1$, где

$$A = \begin{bmatrix} -a & -0.5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad a(\mu) = 2\mu\bar{x} = \frac{\sqrt{9 + 16\mu} - 3}{2}.$$

Равновесие $(\bar{x}, \bar{y})$ является экспоненциально устойчивым при $\mu < \mu_* = 1.6875$.

Будем использовать регулятор вида

$$u \;=\; k(v - \bar{v}) = k\left(c_1(x - \bar{x}) + c_2(y - \bar{y}) + \varepsilon\eta\right). \qquad (4.1.76)$$

Здесь

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = k, \quad C = [\, c_1 \quad c_2 \,].$$

Согласно (4.1.72), допустимые значения параметра k удовлетворяют системе неравенств

$$(c_1 + c_2)k < 1.5 + a(\mu), \quad (c_1 - c_2)k > -1.5 + a(\mu), \quad c_2 k > -0.5.$$

Для случая $c_1 = 1,\ c_2 = 0$, допустимые значения k удовлетворяют неравенству

$$-1.5 + a(\mu) < k < 1.5 + a(\mu).$$

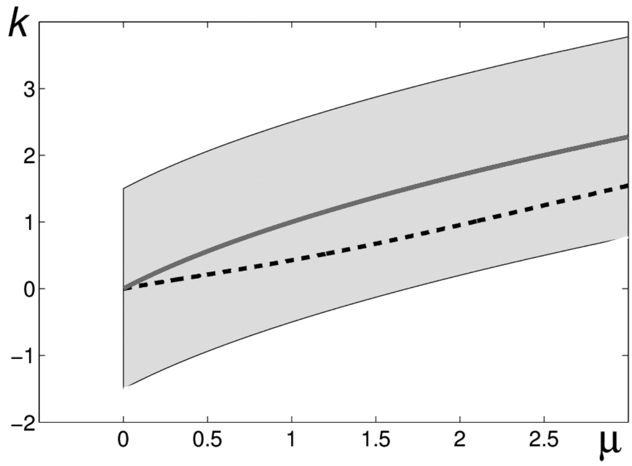


Рис. 4.1.9 – Множество допустимых коэффициентов k для $c_1 = 1, c_2 = 0$. Оптимальное $\bar{k}(\mu)$ построено для $\varphi = 0$ (сплошная) и для $\varphi = 1$ (пунктир).

На рис. 4.1.9 в плоскости (μ, k) показано семейство допустимых множеств $\mathbb{K}(\mu)$. Как видно, множество $\mathbb{K}(\mu)$ непусто при всех $\mu > 0$. Это означает, что регулятор (4.1.76), использующий наблюдения (4.1.75) при $c_1 = 1,\ c_2 = 0$ может стабилизировать равновесие $(\bar{x}, \bar{y})$ при всех $\mu > 0$.

При каждом $k \in \mathbb{K}(\mu)$, случайные состояния замкнутой системы (4.1.74)-(4.1.76) имеют некоторое распределение. Меняя k в $\mathbb{K}$, можно менять параметры этого распределения.

Рассмотрим теперь задачу управления дисперсией случайных состояний замкнутой стохастической системы (4.1.74)-(4.1.76) соответствующим выбором k. Дисперсии D_x и D_y координат x и y этой системы при каждом

$k \in \mathbb{K}(\mu)$ могут быть аппроксимированы: $D_x \approx \varepsilon^2 w_{11}(k), \quad D_y \approx \varepsilon^2 w_{22}(k)$, где $w_{11}(k), \; w_{22}(k)$ – диагональные элементы матрицы стохастической чувствительности $W(k)$ замкнутой системы (4.1.74)-(4.1.76). Таким образом, уменьшение дисперсий D_x и D_y может быть обеспечено минимизацией функций $w_{11}(k), \; w_{22}(k)$ на множестве $\mathbb{K}(\mu)$. Таким образом, здесь возникают две задачи минимизации:

$$w_{11}(k) \to \min_{k \in \mathbb{K}(\mu)}, \tag{4.1.77}$$

$$w_{22}(k) \to \min_{k \in \mathbb{K}(\mu)}. \tag{4.1.78}$$

Для модели (4.1.74)-(4.1.76), система (4.1.71) для элементов матрицы W стохастической чувствительности имеет вид

$$\begin{pmatrix} (kc_1 - a)^2 - 1 & (kc_2 - 0.5)^2 & 2(kc_1 - a)(kc_2 - 0.5) \\ 1 & -1 & 0 \\ kc_1 - a & 0 & kc_2 - 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{22} \\ w_{12} \end{pmatrix} =$$

$$= - \begin{pmatrix} s_1 + k^2\varphi \\ s_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Условие достижимости (4.1.73) имеет здесь простой вид:

$$w_{22} = w_{11} + s_2.$$

Это означает, что задачи (4.1.77),(4.1.78) минимизации функций $w_{11}(k)$ и $w_{22}(k)$ являются эквивалентными.

Решение этих задач минимизации имеет вид:

$$\bar{k}(\mu) = \mathrm{argmin}_{k \in \mathbb{K}(\mu)} w_{11}(k, \mu), \quad \bar{w}_{11}(\mu) = \min_{k \in \mathbb{K}(\mu)} w_{11}(k, \mu).$$

Регулятор (4.1.76) с $k = \bar{k}(\mu)$, обеспечивающим минимум для $w_{11}(k, \mu)$, будем называть оптимальным. На рис. 4.1.9 кривая $\bar{k}(\mu)$ изображена для $\varphi = 0$ сплошной линией, а для $\varphi = 1$ – пунктирной. Здесь $s_1 = s_2 = 1$.

Рассмотрим теперь, как оптимальный регулятор меняет распределение случайных состояний. На рис. 4.1.10 черным цветом показаны случайные состояния системы с оптимальным регулятором, минимизирующим стохастическую чувствительность равновесия. Случайные состояния системы без управления показаны серым цветом. Как видим, случайные состояния управляемой системы хорошо локализованы около равновесия $(\bar{x}(\mu), \bar{y}(\mu))$, независимо

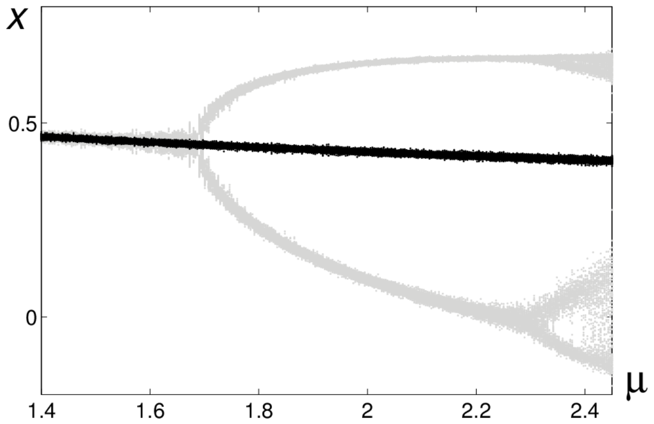


Рис. 4.1.10 – Аттракторы стохастической модели (4.1.74) с оптимальным управлением (черный) и без управления (серый) для $\varepsilon = 0.002,\ s_1 = s_2 = \varphi = 1,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0$.

от того, является это равновесие устойчивым или нет в исходной системе без управления.

Случай $c_1 = 0,\ c_2 = 1$, а также вариант системы Эно с двумя управлениями, входящими в каждое уравнение, подробно разобраны в [222].

4.1.4. Управление стохастической чувствительностью циклов

Рассмотрим стохастическую систему с управлением

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t) + \varepsilon\sigma(x_t, u_t)\xi_t. \tag{4.1.79}$$

Здесь $f(x, u)$ и $\sigma(x, u)$ – достаточно гладкие скалярные функции. Функция $f(x, u)$ формирует детерминированную динамику, $\sigma(x, u)$ характеризует зависимость возмущений от состояния и управления, ξ_t – некоррелированный случайный процесс с параметрами $\mathrm{E}\xi_t = 0,\ \mathrm{E}\xi_t^2 = 1$, ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ и $u = 0$ система (4.1.79) имеет n-цикл $\Gamma = \{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\}$. Устойчивость цикла Γ не предполагается.

Будем выбирать регулятор из класса U допустимых обратных связей $u = u(x)$, удовлетворяющих условиям:

а) $u(x)$ – достаточно гладкая функция и $u|_\Gamma = 0$;

б) цикл Γ в замкнутой детерминированной системе

$$x_{t+1} = f(x_t, u(x_t)) \tag{4.1.80}$$

является экспоненциально устойчивым.

Для любого $u(x) \in U$, цикл Γ системы (4.1.79) имеет функцию стохастической чувствительности $w[u]$. Меняя $u(x) \in U$, можно изменять значение $w[u]$.

Стохастическая чувствительность состояний n-цикла $\Gamma = \{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\}$ стохастической системы (4.1.79) задается набором $w_1, ..., w_n$, где w_i – стохастическая чувствительность элемента $\bar{x}_i$. Следуя п. 1.2.5, для значений $w_1, ..., w_n$ можно записать систему

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_1^2 w_1 = w_2 - \sigma_1^2,\\
&\ .\ \ .\ \ .\\
&\bar{a}_{n-1}^2 w_{n-1} = w_n - \sigma_{n-1}^2,\\
&\bar{a}_n^2 w_n = w_1 - \sigma_n^2.
\end{aligned} \tag{4.1.81}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
&\bar{a}_i = a_i + b_i k_i, \quad a_i = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_i, 0), \quad b_i = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}_i, 0),\\
&k_i = \frac{du}{dx}(\bar{x}_i), \quad \sigma_i = \sigma(\bar{x}_i, 0).
\end{aligned} \tag{4.1.82}$$

Из (4.1.81) и (4.1.82) следует, что

$$\begin{aligned}
&(a_1 + b_1 k_1)^2 w_1 = w_2 - \sigma_1^2,\\
&\ .\ \ .\ \ .\\
&(a_{n-1} + b_{n-1} k_{n-1})^2 w_{n-1} = w_n - \sigma_{n-1}^2,\\
&(a_n + b_n k_n)^2 w_n = w_1 - \sigma_n^2.
\end{aligned} \tag{4.1.83}$$

Как видно, вариация управления $u(x)$ изменяет только коэффициенты $k_i = \dfrac{du}{dx}(\bar{x}_i)$ в системе (4.1.83), следовательно результат управления реально зависит только от производных функции $u(x)$ в точках цикла. Это позволяет существенно упростить структуру регулятора. Таким образом, возможности синтеза стохастической чувствительности w_i полностью определяются линейной частью функции $u(x)$ в окрестностях X_i точек $\bar{x}_i$ цикла Γ и не зависят от членов более высокого порядка.

Это позволяет нам без потери общности использовать более простые регуляторы

$$u(x)|_{X_i} = k_i(x - \bar{x}_i), \quad i = 1, \dots n. \tag{4.1.84}$$

Таким образом, регулятор (4.1.84) полностью определен вектором $k = (k_1, ..., k_n)$.

Условие а) для $u(x)$ из (4.1.84) выполняется для всех $k \in \mathrm{R}^n$. Условие б) накладывает ограничения на выбор k. Значения k должны принадлежать множеству

$K = \{\ k \in \mathrm{R}^n \ |$ цикл Γ системы (4.1.80), (4.1.84) является экспоненциально устойчивым $\}$.

Это множество может быть описано конструктивно:

$$K = \left\{ k \in \mathrm{R}^n \mid \prod_{i=1}^{n} |a_i + b_i k_i| < 1 \right\}.$$

Если хотя бы одно $b_i \neq 0$, то $K \neq \emptyset$.

В этих условиях, рассмотрим задачу синтеза стохастической чувствительности цикла Γ в системе (4.1.80) с помощью подходящего выбора регулятора (4.1.84). В силу (4.1.83), значения w_i $(i = 1, 2, .., n)$ должны принадлежать множеству

$$B = \{w \in R^n \,|\, w_i \geq \sigma_{i-1}^2 \; (i = 2, ..., n), \; w_1 \geq \sigma_n^2\}$$

допустимых функций стохастической чувствительности.

Обозначим через $w(k)$ решение системы (4.1.83) для фиксированного вектора $k \in K$.

Задача управления

Для любого назначенного вектора $\bar{w} \in B$ требуется найти вектор $k \in K$, гарантирующий выполнение равенства

$$w(k) = \bar{w}. \tag{4.1.85}$$

Определение 4.3. Элемент $\bar{w} \in B$ называется достижимым в системе (4.1.79), (4.1.84), если при некотором $k \in K$ выполняется равенство (4.1.85).

Определение 4.4. Множество всех достижимых элементов

$$W = \{\bar{w} \in B \mid \exists k \in K \quad w(k) = \bar{w}\}$$

называется множеством достижимости для системы (4.1.79), (4.1.84).

Опишем множество достижимости. Будем рассматривать случай невырожденных шумов: $\sigma(x, 0)|_\Gamma \neq 0$. Это означает, что $\sigma_i^2 > 0$ и $w_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ при всех $w \in B$.

Утверждение 4.1. Если $w \in B$ и k удовлетворяет (4.1.83), то $k \in K$.

Доказательство. Из (4.1.83) следует, что

$$\prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i k_i)^2 = \left(1 - \frac{\sigma_n^2}{w_1}\right) \left(1 - \frac{\sigma_1^2}{w_2}\right) ... \left(1 - \frac{\sigma_{n-1}^2}{w_n}\right).$$

Это означает, что $\prod_{i=1}^{n} |a_i + b_i k_i| < 1$ и следовательно $k \in K$.

Благодаря Утверждению 4.1, множество достижимости W совпадает с множеством значений w, для которых система (4.1.83) разрешима относительно k_i.

Утверждение 4.2. $W = B$ тогда и только тогда когда $b_i \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$.

Доказательство. Пусть $b_i \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Тогда для любого $w \in B$ из (4.1.83) следует, что

$$
\begin{aligned}
k_i &= \frac{1}{b_i}\left(-a_i \pm \sqrt{\frac{w_{i+1} - \sigma_i^2}{w_i}}\right), \quad (i = 1, ..., n-1) \\
k_n &= \frac{1}{b_n}\left(-a_n \pm \sqrt{\frac{w_1 - \sigma_n^2}{w_n}}\right).
\end{aligned}
\tag{4.1.86}
$$

Следовательно, $W = B$.
Докажем теперь импликацию в другую сторону: если $W = B$, то $b_i \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ от противного. Пусть для некоторого j коэффициент $b_j = 0$. Тогда значения w_j и w_{j+1} связаны линейным уравнением

$$a_j^2 w_j = w_{j+1} - \sigma_j^2$$

и не могут выбираться независимо. Это означает, что $W \neq B$. Полученное противоречие завершает доказательство Утверждения 4.2.

В случае, когда $b_i \neq 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, коэффициенты $k_1, ..., k_n$ регулятора (4.1.84), обеспечивающего заданные значения $w_1, ..., w_n$ стохастической чувствительности $w \in B$, вычисляются по формулам (4.1.86). При этом значения $w_1 = \sigma_n^2, w_2 = \sigma_1^2, ..., w_n = \sigma_{n-1}^2$ являются минимальными элементами множества достижимости W. Для этих значений, коэффициенты регулятора (4.1.84) определяются единственным образом: $k_i = -a_i/b_i$ $(i = 1, ..., n)$. В общем случае, выбор k_i не является единственным: для каждого k_i мы имеем два возможных значения.

Рассмотрим функцию $J = \mathrm{E}(u^2)$ среднеквадратичных затрат на управление. В рассматриваемой задаче, при малых шумах, мы можем использовать следующее асимптотическое приближение:

$$J \approx \bar{J} = \frac{\varepsilon^2}{n}(k_1^2 w_1 + ... + k_n^2 w_n).$$

Для $b_i \neq 0$ $(i = 1, ..., n)$, задача синтеза стохастической чувствительности с минимальными расходами на управление $(\bar{J} \to \min)$ имеет единственное решение

$$k_i = \frac{1}{b_i}\left(-a_i + \mathrm{sgn}(a_i)\sqrt{\frac{w_{i+1}-\sigma_i^2}{w_i}}\right), \quad (i = 1, ..., n-1)$$

$$k_n = \frac{1}{b_n}\left(-a_n + \mathrm{sgn}(a_n)\sqrt{\frac{w_1-\sigma_n^2}{w_n}}\right).$$

Случай 2-цикла

При $n = 2$, система (4.1.83) имеет вид

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1k_1)^2 w_1 &= w_2 - \sigma_1^2, \\ (a_2 + b_2k_2)^2 w_2 &= w_1 - \sigma_2^2. \end{aligned} \tag{4.1.87}$$

При $b_{1,2} \neq 0$, множество достижимости W задается неравенствами $w_1 \geq \sigma_2^2,\ w_2 \geq \sigma_1^2$. Коэффициенты $k_1,\ k_2$ регулятора, обеспечивающего синтез значений $w_1,\ w_2$ стохастической чувствительности элементов $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2$ 2-цикла имеют вид:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{b_1}\left(-a_1 \pm \sqrt{\frac{w_2-\sigma_1^2}{w_1}}\right), \\ k_2 &= \frac{1}{b_2}\left(-a_2 \pm \sqrt{\frac{w_1-\sigma_2^2}{w_2}}\right). \end{aligned} \tag{4.1.88}$$

При $b_1 = 0,\ b_2 \neq 0$, множество достижимости задается системой $w_1 \geq \sigma_2^2,\ w_2 = a_1^2 w_1 + \sigma_1^2$. Как видим, область достижимости становится одномерным множеством.

Пример

Рассмотрим логистическую модель

$$x_{t+1} = \mu x_t(1 - x_t) + u_t + \varepsilon\xi_t \tag{4.1.89}$$

с управлением u_t и случайными возмущениями ξ_t.

При $3 < \mu \leq 4$, соответствующая детерминированная система без управления ($u = 0,\ \varepsilon = 0$) имеет 2-цикл с элементами

$$\bar{x}_1(\mu) = \frac{\mu + 1 + \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}, \quad \bar{x}_2(\mu) = \frac{\mu + 1 - \sqrt{(\mu+1)(\mu-3)}}{2\mu}.$$

Этот цикл устойчив на интервале $3 < \mu < \mu_* = 1 + \sqrt{6}$. При переходе параметра μ через бифуркационное значение $\mu_* = 3.44949$, этот цикл теряет устойчивость, и в системе наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода с последующей перемежаемостью регулярных и хаотических аттракторов. Под воздействием шума вокруг аттракторов системы формируется некоторое распределение случайных состояний, тонкая структура детерминированных аттракторов размывается (см. рис. 4.1.11 для $\varepsilon = 0.01$, серый цвет).

Целью управления является стабилизация этого 2-цикла на всем интервале $3 < \mu \leq 4$ и синтез заданной стохастической чувствительности $w = w(\mu)$.

Будем использовать регулятор (4.1.84) вида

$$u(x)|_{X_1} = k_1(x - \bar{x}_1), \quad u(x)|_{X_2} = k_2(x - \bar{x}_2). \tag{4.1.90}$$

Окрестности $X_1,\ X_2$ точек $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2$ зададим как $X_1 = ((\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2, 1),\ X_2 = (0, (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)/2)$.

Для рассматриваемой системы, достижимые значения $w_1,\ w_2$ ограничены неравенствами $w_1 \geq 1,\ w_2 \geq 1$. Положим $w_1(\mu) \equiv 1,\ w_2(\mu) \equiv 1$. Это означает, что цель управления – обеспечить постоянную и минимально возможную стохастическую чувствительность элементов 2-цикла на всем интервале $3 < \mu \leq 4$. Из (4.1.88) следует, что регулятор (4.1.90) определяется однозначно: $k_1 = -a_1,\ k_2 = -a_2$, где

$$a_1 = -1 - \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}, \;\; a_2 = -1 + \sqrt{(\mu + 1)(\mu - 3)}.$$

На рис. 4.1.11, случайные состояния замкнутой системы (4.1.89) при $\varepsilon = 0.01$ с выбранным оптимальным регулятором (4.1.90) показаны черным цветом. Как видим, эти состояния хорошо локализованы вблизи элементов 2-цикла на всем интервале $3 < \mu \leq 4$.

Рассмотрим теперь случаи с дополнительными ограничениями. Сначала пусть контролируемая система может формировать управляющий импульс только в окрестности X_1. Это означает, что $k_2 = 0$ регулятор зависит только от выбора k_1. В этом случае множество достижимости (4.1.89), (4.1.90) задается соотношениями $w_2 \geq 1,\ w_1 = a_2^2 w_2 + 1$. Положим $w_2 = 1$. Тогда $w_1 = a_2 + 1$ – единственно возможное достижимое значение w_1, соответствующее назначенному w_2. Тогда параметры регулятора $k_1 = -a_1,\ k_2 = 0$. На рис. 4.1.12а изображены случайные состояния системы с таким регулятором для $\varepsilon = 0.001$.

Рассмотрим симметричный вариант с ограничением $k_1 = 0$. Здесь множество достижимости имеет вид $w_1 \geq 1,\ w_2 = a_1^2 w_1 + 1$. Положим $w_1 = 1$, тогда $w_2 = a_1^2 + 1$ – единственно возможное достижимое значение w_2, соответствующее назначенному w_1. Для синтеза такой чувствительности следует использовать регулятор с коэффициентами $k_1 = 0,\ k_2 = -a_2$. На рис. 4.1.12б изображены случайные состояния системы с таким регулятором для $\varepsilon = 0.001$.

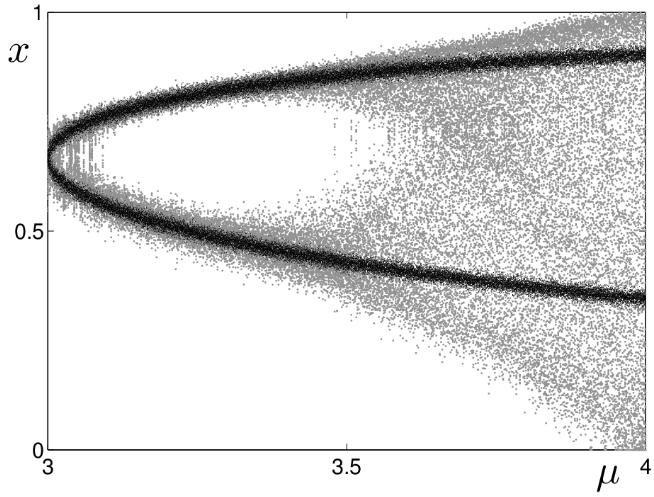


Рис. 4.1.11 – Случайные состояния модели (4.1.74) для $\varepsilon = 0.01$ без управления (серый) и с управлением (черный), синтезирующим стохастическую чувствительность $w_1 = w_2 = 1$ регулятором $k_1 = -a_1,\ k_2 = -a_2$.

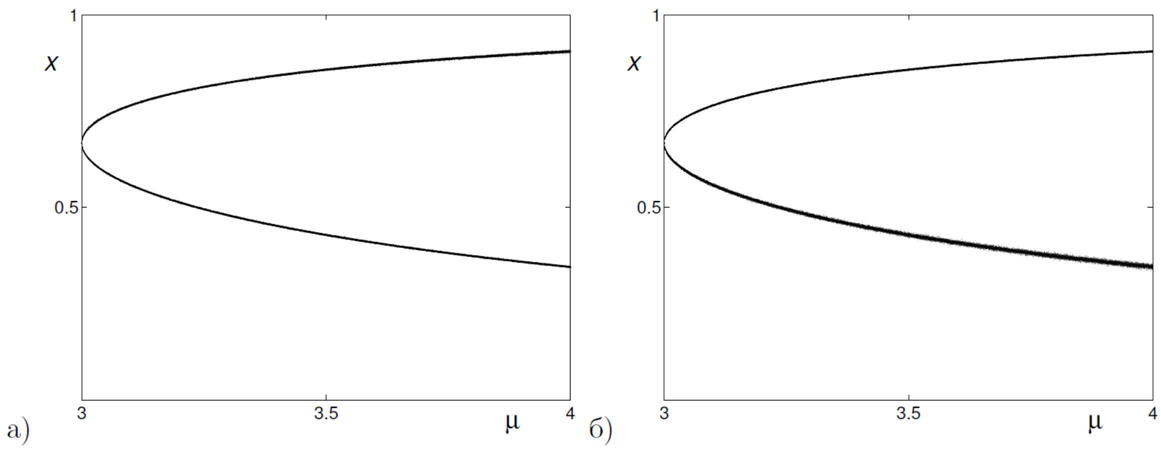


Рис. 4.1.12 – Случайные состояния модели (4.1.74) для $\varepsilon = 0.001$ с регуляторами а) $k_1 = -a_1, k_2 = 0$, б) $k_1 = 0, k_2 = -a_2$.

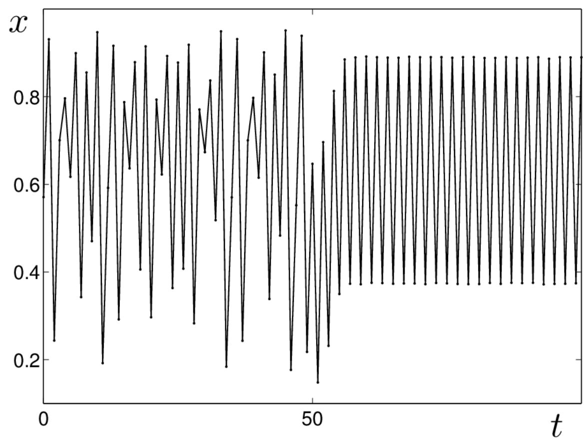


Рис. 4.1.13 – Подавление хаоса. Стабилизация 2-цикла регулятором, синтезирующим $w_1 \equiv w_2 \equiv 1$. Показана случайная траектория для $\varepsilon = 0.001, \mu = 3.8$, управление включено при $t = 50$.

Как видим, представленный здесь метод, основанный на синтезе стохастической чувствительности, позволяет стабилизировать цикл $\Gamma = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2\}$ и в зоне неустойчивости $3.44949 < \mu \le 4$, а также обеспечить в этой зоне малую дисперсию случайных состояний вблизи точек цикла $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2$. Эти результаты можно интерпретировать с точки зрения управления хаосом. Действительно, интервал $3.56995 < \mu \le 4$ является известной зоной, где детерминированная система (4.1.89) без управления демонстрирует хаотическое поведение. Здесь, по мере увеличения параметра μ наблюдается сложное чередование хаоса и подинтервалов порядка. Набор этих подинтервалов имеет фрактальную структуру. Таким образом, система демонстрирует структурную неустойчивость на этом интервале.

Представленный здесь метод синтеза чувствительности позволяет построить стабилизирующий регулятор и подавить хаотические осцилляции. На рис. 4.1.13 показан такой пример. Здесь для $\mu = 3.8,\ \varepsilon = 0.001$ изображена хаотическая траектория системы (4.1.89) без управления для временного интервала $0 \le t \le 50$. Далее, при $t > 50$ мы включаем регулятор (4.1.90), синтезирующий минимально возможную стохастическую чувствительность $w_1 = w_2 = 1$, что позволяет переключить систему из режима хаоса в режим периодических колебаний с малой дисперсией.
Результаты, представленные в разделе 4.1 опубликованы в работах [190, 194, 201, 222] автора диссертации.

4.2. Синтез стохастических режимов в системах с непрерывным временем

В данном разделе представлена теория синтеза наперед заданных стохастических режимов в системах с непрерывным временем в условиях полной и неполной информации.

4.2.1. Управление стохастической чувствительностью равновесий

В данном разделе решается проблема построения регуляторов в форме обратной связи, стабилизирующего равновесие и синтезирующего заданные дисперсии случайных состояний стохастической системы вокруг этого равновесия. Детально исследуется достижимость в случае двумерных систем. Для стохастического брюсселятора проведено полное параметрическое описание возможных областей достижимости для различных видов входных воздействий.

Показано, что построенный регулятор обеспечивает низкий уровень стохастической чувствительности и может подавлять колебания большой амплитуды.

Рассмотрим нелинейную стохастическую систему с управлением

$$dx = f(x, u(x))dt + \varepsilon\sigma(x, u(x))dw(t), \quad x, f \in R^n, \ u \in R^l, \tag{4.2.1}$$

где $f(x, u)$ – непрерывно дифференцируемая n-вектор-функция, $w(t)$ – m-мерный стандартный винеровский процесс, $\sigma(x)$ – $n \times m$-матричная функция, характеризующая зависимость возмущений от состояния и управления, ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Предполагается, что соответствующая детерминированная система (4.2.1) (с $\varepsilon = 0$ и $u = 0$) имеет равновесие $\bar{x}$, устойчивость которого не предполагается.

Рассмотрим класс $\mathfrak{U}$ допустимых обратных связей $u = u(x)$, удовлетворяющих условиям:

(а) $u(x)$ – непрерывно дифференцируема и $u(\bar{x}) \ = \ 0$;

(б) обратная связь $u(x)$ обеспечивает экспоненциальную устойчивость $\bar{x}$ для замкнутой детерминированной системы

$$dx = f(x, u(x))dt \tag{4.2.2}$$

в некоторой окрестности равновесия $\bar{x}$.

Условие а) означает, что $\bar{x}$ остается равновесием системы (4.2.2) при любых $u \in \mathfrak{U}$.

Система первого приближения для отклонений $y(t) = x(t) - \bar{x}$ имеет вид

$$dy = (F + BK)ydt, \tag{4.2.3}$$

где $F = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0)$, $B = \dfrac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, 0)$, $K = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\bar{x})$.

Условие б) эквивалентно экспоненциальной устойчивости тривиального решения системы (4.2.3).

Будем рассматривать регуляторы в форме обратной линейной связи

$$u(x) = K(x - \bar{x}). \tag{4.2.4}$$

Множество матриц K, обеспечивающих экспоненциальную устойчивость тривиального решения системы (4.2.3), имеет вид

$$\mathbb{K} = \{K | \mathrm{Re}\lambda_i(F + BK) < 0\}.$$

Здесь $\lambda_i(F + BK)$ – собственные числа матрицы $F + BK$. Предполагается, что пара (F, B) стабилизируема. Это означает, что множество $\mathbb{K}$ и класс $\mathfrak{U}$ не пусты.

Под воздействием малых стохастических возмущений ($\varepsilon \neq 0$) решения $x^\varepsilon(t)$ стохастической системы (4.2.1) покидают равновесие $\bar{x}$.

Для асимптотики $z(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^\varepsilon(t) - \bar{x}}{\varepsilon}$ отклонения решений $x^\varepsilon(t)$ от $\bar{x}$ справедлива следующая стохастическая система

$$dz = (F + BK)zdt + Gdw, \quad G = \sigma(\bar{x}, 0). \tag{4.2.5}$$

Ковариационная матрица $V(t) = \mathrm{cov}(z(t), z(t))$ решений системы (4.2.5) удовлетворяет уравнению

$$\dot{V} = (F + BK)V + V(F + BK)^\top + S, \quad S = GG^\top. \tag{4.2.6}$$

Для любого $K \in \mathbb{K}$ это уравнение имеет единственное стационарное решение W, удовлетворяющее матричному алгебраическому уравнению

$$(F + BK)W + W(F + BK)^\top + S = 0. \tag{4.2.7}$$

В случае невырожденных шумов ($\det S \neq 0$) матрица W – положительно определенная.

При $K \in \mathbb{K}$ все решения $V(t)$ системы (4.2.6) сходятся к решению W системы (4.2.7)

$$\lim_{t \to \infty} V(t) = W.$$

Матрица стохастической чувствительности W (см. главу 2) устанавливает связь между интенсивностью шума и разбросом случайных состояний вокруг равновесия.

Будем рассматривать задачу управления, где требуется не только стабилизировать равновесие, но также, в присутствии стохастических возмущений, обеспечить малый разброс случайных состояний вокруг него. Управление таким разбросом будем осуществлять за счет синтеза подходящей матрицы W.

Пусть $\mathbb{M}$ – множество симметрических, положительно определенных $n \times n$-матриц. При каждом $K \in \mathbb{K}$ регулятор (4.2.4) формирует матрицу W_K стохастической чувствительности, удовлетворяющей уравнению (4.2.7).

Задача синтеза стохастической чувствительности равновесия

Для наперед заданной матрицы $W \in \mathbb{M}$ требуется найти матрицу $K \in \mathbb{K}$, обеспечивающую равенство $W_K = W$, где W_K – решение уравнения (4.2.7).

В некоторых случаях эта задача может быть неразрешимой. Поэтому введем понятие достижимости и стохастической управляемости.

Определение 4.5

Элемент $W \in \mathbb{M}$ называется достижимым в системе (4.2.1) с регулятором (4.2.4), если при некотором $K \in \mathbb{K}$ выполняется равенство $W_K = W$.

Определение 4.6

Множество всех достижимых элементов

$$\mathbb{W} = \{W \in \mathbb{M} \mid \exists K \in \mathbb{K} \quad W_K = W\}$$

называется множеством достижимости системы (4.2.1), (4.2.4).

Определение 4.7

Равновесие $\bar{x}$ называется полностью стохастически управляемым в системе (4.2.1),(4.2.4), если

$$\forall\, W \in \mathbb{M} \quad \exists\, K \in \mathbb{K} \ : \quad W_K \equiv W.$$

Таким образом, равновесие $\bar{x}$ называется полностью стохастически управляемым тогда и только тогда когда справедливо равенство

$$\mathbb{W} = \mathbb{M}.$$

Опишем множество достижимости. Связь между назначенной матрицей W и коэффициентом обратной связи K устанавливается уравнением (4.2.7), которое может быть переписано в форме:

$$\begin{aligned} &BKW + WK^{\top}B^{\top} + H(W) = 0, \\ &H(W) = S + FW + WF^{\top}. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Решение проблемы синтеза матрицы стохастической чувствительности дается теоремой.

Теорема 4.4.

Пусть шумы в системе (4.2.1) являются невырожденными ($\det S \neq 0$).

а) Если матрица B является квадратной и невырожденной ($\mathrm{rank} B = n = l$), то $\mathbb{W} = \mathbb{M}$ и при любой матрице $W \in \mathbb{M}$ уравнение (4.2.8) имеет решение

$$\begin{aligned} &K = \bar{K} + B^{-1}Z\bar{W}^{-1} \in \mathbb{K}, \\ &\bar{K} = -B^{-1}\left(\tfrac{1}{2}SW^{-1} + F\right), \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

где Z – произвольная кососимметрическая $n \times n$-матрица.

б) Если $\mathrm{rank}(B) < n$, то элемент $W \in \mathbb{M}$ будет достижим тогда и только тогда когда матрица W удовлетворяет уравнению

$$P_2 H(W) P_2 = 0. \tag{4.2.10}$$

При этих условиях для любой матрицы $W \in \mathbb{M}$, удовлетворяющей (4.2.10), уравнение (4.2.8) имеет решение

$$\begin{aligned} &K = \bar{K} + C \in \mathbb{K}, \\ &\bar{K} = B^{+}H(W)\left(\tfrac{1}{2}P_1 - I\right)W^{-1}, \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

где C – произвольная $l \times n$-матрица, удовлетворяющая условию

$$BCW + WC^\top B^\top = 0. \tag{4.2.12}$$

Здесь знак "+" означает псевдообращение, $P_1 = BB^+$ и $P_2 = I - P_1$ – матрицы проектирования.

в) Если $\mathrm{rank}B = 1$, то уравнение (4.2.8) имеет единственное решение $K = \bar{K}$. Теорема 4.4 доказана в [288].

Эта теорема может быть использована для анализа и конструктивного описания множеств достижимости. Если размерность управляющих воздействий совпадает с размерностью динамической системы ($\mathrm{rank}B = n$), то с помощью регулятора (4.2.4) для равновесия можно обеспечить любую наперед заданную матрицу стохастической чувствительности. Если же $\mathrm{rank}B < n$, то мы сталкиваемся с необходимостью предварительного анализа и описания множеств достижимости. Эти множества достижимости можно описать параметрически, используя общее решение матричного уравнения (4.2.10). Далее для случая двумерных систем будет дано детальное геометрическое описание множеств достижимости, соответствующих различным вариантам управления.

4.2.2. Анализ достижимости для двумерных систем

В случае двумерных систем ($n = 2$), в силу симметричности матриц W и S, имеем

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}, 0), \quad f_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}, 0),$$

$$f_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}, 0), \quad f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}, 0).$$

Сначала рассмотрим систему (4.2.1), (4.2.4) в случае невырожденной 2×2-матрицы B: $\mathrm{rank}B = 2$. В этом случае, по Теореме 4.4, множество достижимых матриц $\mathbb{W}$ совпадает с множеством $\mathbb{M}$ всех положительно определенных матриц. Элементы достижимой матрицы W удовлетворяют системе из двух неравенств:

$$w_{11} > 0, \quad w_{11}w_{22} - w_{12}^2 > 0. \tag{4.2.13}$$

Отметим, что здесь внедиагональный элемент w_{12} достижимой матрицы W можно выбирать произвольно. Для фиксированного значения w_{12}, достижимые диагональные элементы w_{11}, w_{22} должны удовлетворять неравенствам, приведенным выше. Геометрически это означает, что множество достижимости лежит в первом квадранте плоскости w_{11}, w_{22} и ограничено снизу соответствующей гиперболой $w_{22} = \frac{w_{12}^2}{w_{11}}$. Неравенства (4.2.13) оставляют большую свободу в выборе элементов матрицы W.

В задаче подавления стохастических осцилляций больших амплитуд, целесообразно использовать регулятор, обеспечивающий минимальные значения стохастической чувствительности. Таким образом, для формирования малых значений w_{11}, w_{22} разумно брать $w_{12} = 0$ (или около нуля).

В двумерном случае произвольная кососимметрическая матрица может быть записана в виде $Z = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, где α – скалярный параметр. В этом случае, по Теореме 4.4, формула (4.2.9) дает явное представление для коэффициента K регулятора (4.2.4):

$$\begin{aligned} K_\alpha &= \bar{K} + \alpha Q, \\ \bar{K} &= -B^{-1}\left(\tfrac{1}{2} S W^{-1} + F\right), \\ Q &= B^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} W^{-1}. \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

Таким образом, здесь мы получаем однопараметрическое семейство матриц K_α, соответствующих выбранной матрице W. В этих обстоятельствах имеет смысл конструировать оптимальный регулятор. Рассмотрим функцию затрат на управление $J = \mathrm{E}(u^T u)$ с критерием $J \longrightarrow \min$.

Для регулятора (4.2.4) с матрицей обратной связи K_α из (4.2.14), функция $J(\alpha)$ является квадратичной по параметру α:

$$\begin{aligned} &J(\alpha) = \mathrm{tr}[K_\alpha^\top K_\alpha W] = \alpha^2 \mathrm{tr}(Q^\top Q W) + \\ &+ \alpha \mathrm{tr}\left((\bar{K}^\top Q + Q^\top \bar{K}) W\right) + \mathrm{tr}(\bar{K}^\top \bar{K} W). \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Матрица K_{α_0} оптимального регулятора (4.2.4) может быть найдена из (4.2.14) при

$$\alpha_0 = -\frac{\mathrm{tr}\left((\bar{K}^\top Q + Q^\top \bar{K}) W\right)}{2\mathrm{tr}(Q^\top Q W)}. \tag{4.2.16}$$

Минимальные затраты на управление будут следующими:

$$J(\alpha_0) = \mathrm{tr}(\bar{K}^\top \bar{K} W) - \frac{\mathrm{tr}^2\left((\bar{K}^\top Q + Q^\top \bar{K}) W\right)}{4\mathrm{tr}(Q^\top Q W)}.$$

Рассмотрим теперь систему (4.2.1), (4.2.4) с 2×1-матрицей B: $\mathrm{rank} B = 1$. Без ограничения общности, мы можем считать, что $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

В этом случае множество достижимости уменьшается: из (4.2.10) следует дополнительное ограничение

$$f_{11}w_{11} + f_{12}w_{12} = -\frac{s_{11}}{2}. \qquad (4.2.17)$$

Для двумерной системы пара (F, B) является полностью управляемой тогда и только тогда когда $\mathrm{rank}[B, FB] = 2$. Для $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, имеем

$$[B, FB] = \begin{bmatrix} 0 & f_{12} \\ 1 & f_{22} \end{bmatrix}.$$

В этом случае необходимым и достаточным условием полной управляемости является неравенство $f_{12} \neq 0$.

Рассмотрим два подслучая.

1) $f_{12} \neq 0,\ f_{11} \neq 0$.

Из (4.2.17) следует, что

$$w_{12} = -\frac{\frac{s_{11}}{2} + f_{11}w_{11}}{f_{12}} \qquad (4.2.18)$$

Подставляя w_{12} в (4.2.13), имеем

$$w_{11} > 0, \quad w_{11}^2 + p(w_{22})w_{11} + q < 0, \qquad (4.2.19)$$

где

$$p(w_{22}) = \frac{s_{11}}{f_{11}} - \frac{f_{12}^2}{f_{11}^2}w_{22}, \quad q = \frac{s_{11}^2}{4f_{11}^2}.$$

Система (4.2.19) задает множество достижимости для диагональных элементов $w_{11},\ w_{22}$ матрицы W. Для каждой достижимой пары $w_{11},\ w_{22}$ внедиагональный элемент w_{12} может быть найден единственным образом из (4.2.18).

Второе неравенство в (4.2.19) можно переписать в форме

$$w_{11}w_{22} > \left(\frac{s_{11}}{2f_{12}} + \frac{f_{11}}{f_{12}}w_{11}\right)^2. \qquad (4.2.20)$$

Из (4.2.20) следует, что если $f_{11} < 0$, то гипербола, которая ограничивает область достижимости, касается w_{11}-оси в точке $w_{11} = -\frac{s_{11}}{2f_{11}}$.

Если $f_{11} > 0$, тогда гипербола лежит выше этой оси.

Перейдем ко второму подслучаю.

2) $f_{12} \neq 0,\ f_{11} = 0$.

Из (4.2.17) следует

$$w_{12} = -\frac{s_{11}}{2f_{12}}. \tag{4.2.21}$$

Подставляя w_{12} в (4.2.13), имеем

$$w_{11} > 0, \;\; w_{11}w_{22} > \frac{s_{11}^2}{4f_{12}^2}. \tag{4.2.22}$$

Здесь область достижимости принадлежит первому квадранту плоскости $w_{11},\ w_{22}$ и ограничена снизу гиперболой

$$w_{22} = \frac{s_{11}^2}{4f_{12}^2 w_{11}}.$$

Рассмотрим теперь случай $f_{12} = 0$, когда пара (F, B) не является полностью управляемой. Условие стабилизируемости влечет $f_{11} < 0$. Из (4.2.13),(4.2.17) следует, что в этом случае элемент w_{11} определен единственным образом: $w_{11} = -\dfrac{s_{11}}{2f_{11}}$, а элементы $w_{12},\ w_{22}$ удовлетворяют неравенству

$$w_{22} > -\frac{2f_{11}}{s_{11}} w_{12}^2.$$

Если выбрать $w_{12} = 0$, то ограничение на w_{22} минимально: $w_{22} > 0$.

По Теореме 4.4 (случай в) для любой достижимой матрицы W уравнение (4.2.8) имеет единственное решение

$$\begin{gathered} \bar{K} = (k_1,\ k_2) = -(s_{12} + (f_{11} + f_{22})w_{12} + f_{21}w_{11} + \\ + f_{12}w_{22}, \;\; \tfrac{1}{2}s_{22} + f_{21}w_{12} + f_{22}w_{22})W^{-1}. \end{gathered} \tag{4.2.23}$$

Управление стохастическим брюсселятором

Рассмотрим стохастический брюсселятор

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a - (b+1)x_1 + x_1^2 x_2 + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{x}_2 &= b x_1 - x_1^2 x_2 + \varepsilon \dot{w}_2, \qquad a, b > 0, \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

где w_1, w_2 – независимые винеровские процессы, ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Соответствующая детерминированная модель (4.2.24) ($\varepsilon = 0$) имеет равновесие $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, где

$$\bar{x}_1 = a, \;\; \bar{x}_2 = \frac{b}{a}.$$

Это равновесие устойчиво при

$$b < a^2 + 1. \tag{4.2.25}$$

Когда параметр b увеличивается и проходит бифуркационное значение $b^* = a^2 + 1$, равновесие теряет устойчивость и в системе наблюдаются периодические осцилляции. При малых шумах ($\varepsilon > 0$), стохастические траектории системы (4.2.24) формируют соответствующие стохастические аттракторы. Пусть $(\bar{x}_1^\varepsilon, \bar{x}_2^\varepsilon)$ – стационарно распределенные случайные состояния системы (4.2.24). График среднеквадратичных отклонений $D(b) = \mathrm{E}[(\bar{x}_1^\varepsilon - \bar{x}_1)^2 + (\bar{x}_2^\varepsilon - \bar{x}_2)^2]$, найденный при $\varepsilon = 0.001,\ a = 0.2$ прямым численным моделированием, представлен на рис. 4.2.1 кружками. Как видим, функция $D(b)$ резко возрастает после того, как параметр b проходит бифуркационное значение $b^* = 1.04$. Здесь равновесие становится неустойчивым и в системе генерируются периодические осцилляции.

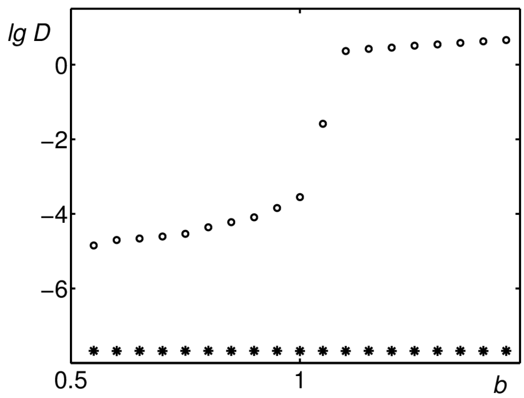


Рис. 4.2.1 – Дисперсия случайных состояний брюсселятора для $\varepsilon = 0.001,\ a = 0.2,$ при $u_1 = u_2 = 0$ (кружки) и при управлениях $u_1,\ u_2$, обеспечивающих матрицу стохастической чувствительности W_A (звездочки).

Рассмотрим два варианта управляющих воздействий. В первом варианте (Управление I), в каждое уравнение системы (4.2.24) входит свое управление u_1 или u_2. Во втором варианте (Управление II), управление u входит только во второе уравнение системы (4.2.24).

Управление I

Рассмотрим стохастически возмущенный управляемый брюсселятор

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a - (b+1)x_1 + x_1^2 x_2 + u_1 + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{x}_2 &= b x_1 - x_1^2 x_2 + u_2 + \varepsilon \dot{w}_2, \end{aligned} \tag{4.2.26}$$

с управляющими воздействиями $u_1,\ u_2$.

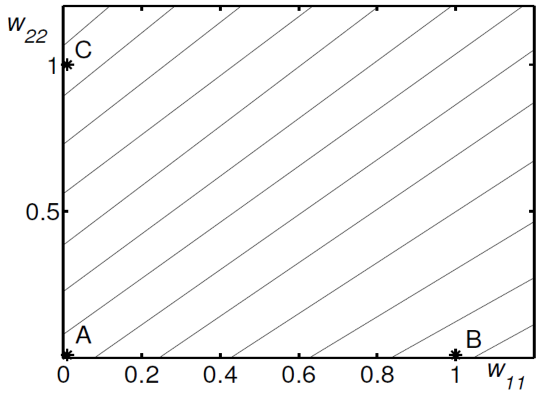
Целью управления является стабилизация равновесия этой системы при всех $a, b > 0$ и синтез требуемой матрицы стохастической чувствительности W.

Здесь будем использовать регулятор вида

$$\begin{aligned} u_1 &= k_{11}(x_1 - \bar{x}_1) + k_{12}(x_2 - \bar{x}_2) \\ u_2 &= k_{21}(x_1 - \bar{x}_1) + k_{22}(x_2 - \bar{x}_2) \end{aligned}. \tag{4.2.27}$$

В этом случае $\mathrm{rank} B = 2$ и равновесие полностью стохастически управляемо. По Теореме 4.4 в системе (4.2.26), (4.2.27) элементы достижимых матриц стохастической чувствительности ограничены только неравенствами (4.2.13). Таким образом, здесь область достижимости не зависит от параметров a, b.

Если положить $w_{12} = 0$, то все положительные w_{11}, w_{22} являются достижимыми. В случае $w_{12} \neq 0$, множество достижимости значений w_{11}, w_{22} определяется неравенствами $w_{22} > w_{12}^2/w_{11},\ w_{11} > 0$. Соответствующие этим двум случаям множества достижимости изображены на рис. 4.2.2.



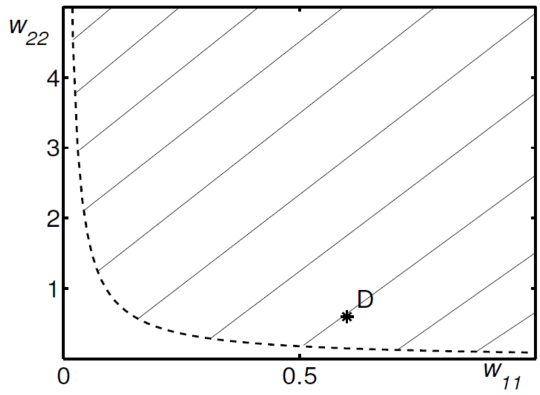


Рис. 4.2.2 – Области достижимости для брюсселятора: а) $w_{12} = 0$; б) $w_{12} = 0.3$.

Рассмотрим для управляемого стохастического брюсселятора с $a = 0.2,\ b = 0.8$ четыре варианта синтезируемых матриц стохастической чувствительности:

$$W_A = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix},\ W_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix},$$
$$W_C = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ W_D = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Точки $A,\ B,\ C,\ D$, соответствующие этим достижимым матрицам, представлены звездочками на рис. 4.2.2.

На рис. 4.2.3 изображены случайные состояния стохастического равновесия для неуправляемого (серый цвет) и управляемого (черный цвет) брюсселятора. Здесь случайные состояния системы (4.2.26) формируются регулятором (4.2.27), который синтезирует представленные выше матрицы стохастической чувствительности W_A, W_B, W_C, W_D. Как можно видеть, изменяя на-

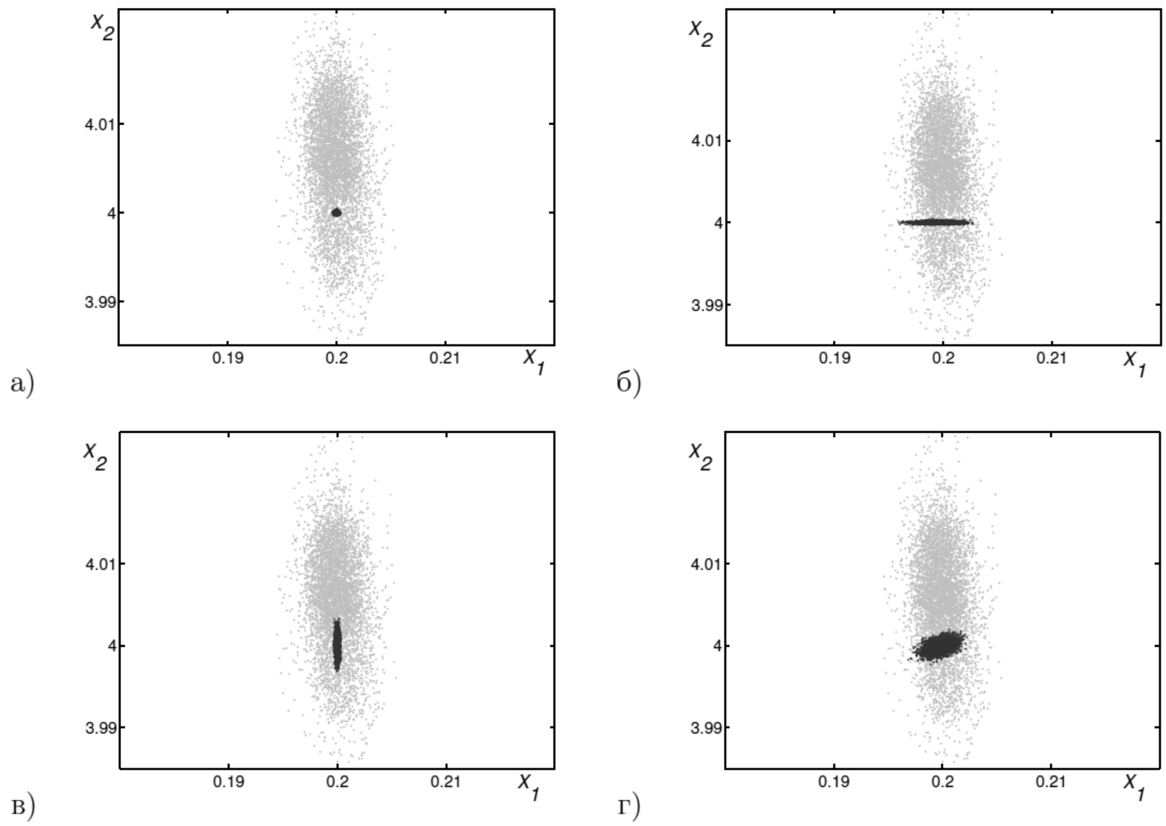


Рис. 4.2.3 – Случайные состояния стохастического брюсселятора (4.2.26) с $a = 0.2,\ b = 0.8,\ \varepsilon = 0.001$ для $u_1 = u_2 = 0$ (серый) и для управлений $u_1\ u_2$, обеспечивающих различные матрицы стохастической чувствительности (черный) с элементами а) $w_{11} = 0.01, w_{22} = 0.01, w_{12} = 0$, б) $w_{11} = 1, w_{22} = 0.01, w_{12} = 0$, в) $w_{11} = 0.01, w_{22} = 1, w_{12} = 0$, г) $w_{11} = 0.6, w_{22} = 0.6, w_{12} = 0.3$.

значенную матрицу стохастической чувствительности, можно синтезировать различную конфигурацию случайных состояний замкнутой системы. Для того, чтобы уменьшить разброс случайных состояний, следует выбирать достижимые матрицы стохастической чувствительности с малыми элементами (см. рис. 4.2.3а).

В системе (4.2.26) мы можем синтезировать матрицу $W = W_A$ при любых параметрах $a,\ b$. На рис. 4.2.1 показана звездочками дисперсия случайных состояний для системы с управлением, обеспечивающим матрицу W_A. Таким образом, предложенный метод позволил обеспечить структурную стабилизацию брюсселятора в широкой зоне его параметров.

Отметим, что здесь матрица коэффициентов K регулятора (4.2.27), синтезирующего заданную матрицу стохастической чувствительности, находилась по формулам (4.2.14),(4.2.16), обеспечивающих минимум функции затрат.

Управление II

Рассмотрим теперь стохастический брюсселятор

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= a - (b+1)x_1 + x_1^2 x_2 + \varepsilon \dot{w}_1, \\ \dot{x_2} &= bx_1 - x_1^2 x_2 + u + \varepsilon \dot{w}_2, \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

с единственным управляющим воздействием u, формируемым регулятором

$$u \ = \ k_1(x_1 - \bar{x}_1) + k_2(x_2 - \bar{x}_2) \ . \tag{4.2.29}$$

В этом случае $\mathrm{rank}B = 1,\ f_{11} = b - 1,\ f_{12} = a^2$. Здесь $f_{12} \neq 0$, так что пара (F, B) полностью управляема. Для анализа достижимости и построения регулятора будем использовать часть б) Теоремы 4.4.

При таком варианте управления, условие достижимости для элементов назначаемой матрицы стохастической чувствительности W удовлетворяет либо системе (4.2.19) (когда $b \neq 1$), либо системе (4.2.22) (когда $b = 1$).

В случае $b \neq 1$, область достижимости (4.2.18),(4.2.19) задается соотношениями

$$\begin{aligned} & w_{12} = -\frac{0.5 + (b-1)w_{11}}{a^2}, \\ & w_{11} > 0, \\ & w_{11}^2 + p(w_{22})w_{11} + q < 0, \end{aligned}$$

где

$$p(w_{22}) = \frac{1}{b-1} - \frac{a^4}{(b-1)^2} w_{22}, \quad q = \frac{1}{4(b-1)^2}.$$

Для $b = 1$, область достижимости (4.2.21),(4.2.22) задается соотношениями

$$w_{12} = -\frac{1}{2a^2}, \ \ w_{11} > 0, \quad w_{22} > \frac{1}{4a^4 w_{11}}.$$

Таким образом, в этом случае области достижимости зависят от параметров a, b. Разнообразие конфигураций этих областей для различных значений параметра b демонстрируется на рис. 4.2.4.

С инженерной точки зрения важно строить оптимальный регулятор, позволяющий достичь минимальных дисперсий случайных состояний при заданном значении

$$\|K\|^2 = k_1^2 + k_2^2.$$

Здесь $\|K\|^2$ играет роль функции затрат.

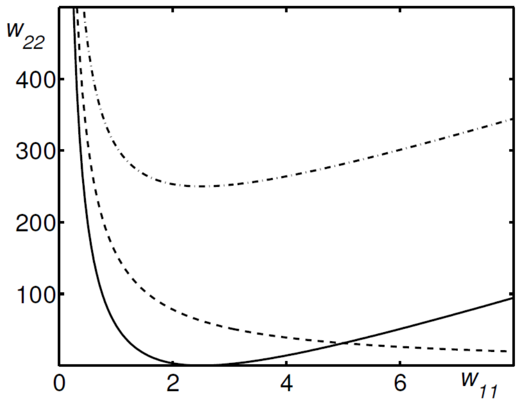


Рис. 4.2.4 – Разные конфигурации границ областей достижимости для стохастического брюсселятора (4.2.28) с $a = 0.2$ для: $b = 0.8$ (сплошная линия), $b = 1$ (пунктир), $b = 1.2$ (штрих-пунктир).

Рассмотрим управляемый стохастический брюсселятор при $a = 0.2,\ b = 1.1$. Неуправляемая детерминированная система ($u = 0,\ \varepsilon = 0$) при этих параметрах имеет неустойчивое равновесие, в системе наблюдаются периодические осцилляции (см. временные ряды $x_1(t), x_2(t)$ для $0 \le t \le 1000$ на рис. 4.2.6).

На рис. 4.2.5 пунктиром изображена граница области достижимости, а сплошными кривыми – множества достижимых элементов, соответствующих различным фиксированным значениям $\|K\|^2$. Положим $\|K\|^2 = 1$. Точка со-

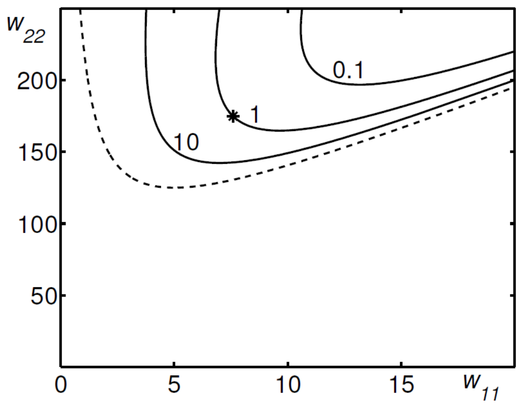


Рис. 4.2.5 – Граница области достижимости (пунктир) для стохастического брюсселятора с $a = 0.2,\ b = 1.1$ и кривые (сплошные линии) достижимых элементов для $\|K\|^2 = 10, 1, 0.1$.

ответствующей кривой (рис. 4.2.5), обеспечивающая матрицу W с минимальной дисперсией случайных состояний, может быть получена решением соответствующей задачи минимизации

$$w_{11} + w_{22} \longrightarrow \min .$$

Это решение $w_{11} = 7.596,\ w_{22} = 174.9$ показано звездочкой на рис. 4.2.5.

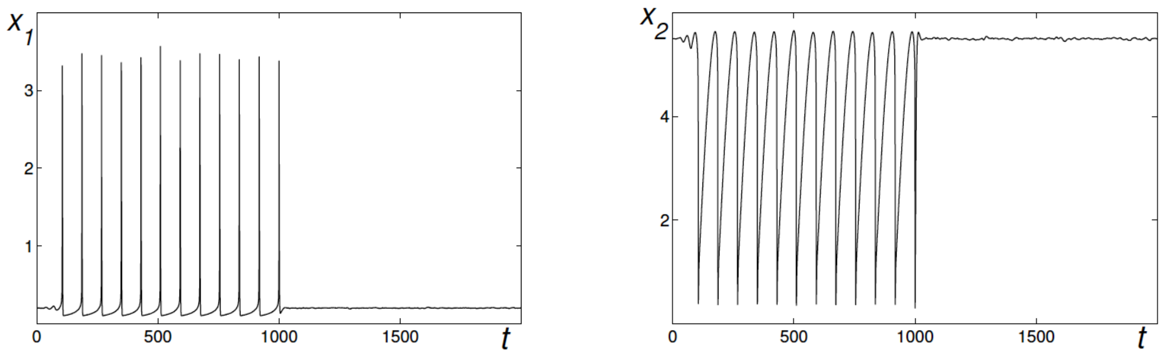


Рис. 4.2.6 – Стабилизация стохастических осцилляций брюсселятора при $a = 0.2,\ b = 1.1,\ \varepsilon = 0.001$.

На рис. 4.2.6 представлены результаты работы регулятора, сконструированного по назначенной матрице $W = \begin{bmatrix} 7.596 & -31.49 \\ -31.49 & 174.9 \end{bmatrix}$, элементы которой удовлетворяют условию, обсужденному выше. Здесь управление включается в момент $t = 1000$. Как видно из рис. 4.2.6, до включения управления брюсселятор демонстрирует стохастические осцилляции большой амплитуды вблизи детерминированного предельного цикла. Для $t > 1000$, после включения управления, построенный регулятор переводит случайные траектории в малую окрестность детерминированного равновесия.

Это означает, что данный регулятор подавляет осцилляции большой амплитуды, решая тем самым важную задачу структурной стабилизации.

Результаты детального анализа достижимости в задаче синтеза стохастической чувствительности двумерных систем опубликованы в работе [213] автора диссертации. Случай трехмерных систем в связи с задачей подавления хаоса представлен ниже в разделе 4.2.5. Приложения теории раздела 4.2.1 к задачам управления стохастическими режимами в моделях естествознания представлены в разделе 5.2 на примере стабилизации проточного химического реактора и в разделе 5.5.2 для решения задачи предотвращения нежелательных экологических сдвигов. Конструктивные возможности метода синтеза стохастической чувствительности показаны в работе [289] автора диссертации для решения задачи стабилизации рабочего режима преобразователя оптических изображений, функционирующего в условиях случайных возмущений.

4.2.3. Управление при неполной информации

Известно, что на практике доступная информация о текущем состоянии системы зачастую не является полной, например, измерению доступна лишь часть координат или данные содержат случайные ошибки. В данном разделе теория синтеза стохастической чувствительности распространяется на эти случаи неполной информации.

Управление статическими регуляторами с шумами

Рассмотрим систему с управлением

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u + \varepsilon\sigma(x)\xi(t), \tag{4.2.30}$$

где $x, f \in R^n$, $u \in R^l$, $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция, $\xi(t) \in R^m$ – дельта-коррелированный белый гауссовский шум с параметрами $\mathrm{E}\xi(t) = 0$, $\mathrm{E}\xi(t)\xi^\top(\tau) = \delta(t-\tau)I$, I – единичная матрица, $\sigma(x)$ – $n \times m$-матричная функция, характеризующая зависимость возмущений от состояния, ε – скалярный параметр интенсивности шума.

Пусть соответствующая детерминированная система (4.2.30) без управления (с $\varepsilon = 0$ и $u = 0$) имеет равновесие $\bar{x}$, устойчивость которого не предполагается.

Синтез требуемой функции стохастической чувствительности для равновесия нелинейной стохастической системы при полной информации изучался в п. 4.2.1. При этом для синтеза управления использовались точные значения состояний x системы.

На практике доступная информация о текущем состоянии $x(t)$ обычно содержит случайный шум или ошибки.

Рассмотрим здесь случай, когда известен только вектор измерения $y(t)$:

$$y(t) = x(t) + \varepsilon\varphi(x(t))\eta(t),$$

где $\varphi(x)$ – $n \times q$-матричная функция, $\eta(t)$ – белый гауссовский q-векторный шум, некоррелированный с $\xi(t)$, удовлетворяющий $\mathrm{E}\eta(t) = 0$, $\mathrm{E}\eta(t)\eta^\top(\tau) = \delta(t-\tau)I$. В этом случае будем использовать следующий регулятор с зашумленными наблюдениями y:

$$u = K(y - \bar{x}) = K(x - \bar{x}) + \varepsilon K\varphi(x)\eta. \tag{4.2.31}$$

Динамика замкнутой системы (4.2.30) с регулятором (4.2.31) определяется уравнением

$$\dot{x} = f(x) + g(x)K(x - \bar{x}) + \varepsilon\left(g(x)K\varphi(x)\eta(t) + \sigma(x)\xi(t)\right). \tag{4.2.32}$$

Для асимптотики

$$z(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^\varepsilon(t) - \bar{x}}{\varepsilon}$$

отклонений решений $x^\varepsilon(t)$ замкнутой системы (4.2.32) от равновесия $\bar{x}$ запишем динамическую систему

$$\dot{z} = (F + BK)z + BKR\eta + G\xi, \tag{4.2.33}$$

где

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad B = g(\bar{x}), \ \ R = \varphi(\bar{x}), \ \ G = \sigma(\bar{x}).$$

Множество матриц K, обеспечивающих экспоненциальную устойчивость равновесия $\bar{x}$ детерминированной системы (4.2.32) (с $\varepsilon = 0$), имеет вид:

$$\mathbb{K} = \{K|\mathrm{Re}\lambda_\mathrm{i}(\mathrm{F} + \mathrm{BK}) < 0\},$$

где $\lambda_i(F + BK)$ – собственные числа матрицы $F + BK$. Предположим, что пара (F, B) стабилизируема [286]. Это означает, что множество $\mathbb{K}$ не пусто.

Для любого $K \in \mathbb{K}$, матрица стохастической чувствительности W равновесия $\bar{x}$ системы (4.2.32) является единственным решением уравнения

$$\begin{array}{l} (F + BK)W + W(F + BK)^\top + BK\Phi K^\top B^\top + S = 0, \\ \Phi = RR^\top, \ \ S = GG^\top. \end{array} \tag{4.2.34}$$

Перейдем к задаче синтеза матрицы W за счет выбора K.

Пусть $\mathbb{M}$ – множество симметрических положительно определенных $n \times n$-матриц. Для любого $K \in \mathbb{K}$ регулятор (4.2.31) формирует матрицу стохастической чувствительности W_K – решение уравнения (4.2.34).

Задача синтеза стохастической чувствительности. Для заданной матрицы $W \in \mathbb{M}$ найти матрицу $K \in \mathbb{K}$ такую, что $W_K = W$, где W_K– решение уравнения (4.2.34).

Элемент $W \in \mathbb{M}$ называется достижимым в системе (4.2.32) если при некотором $K \in \mathbb{K}$ выполняется $W_K = W$. Все достижимые элементы составляют множество

$$\mathbb{W} = \{W \in \mathbb{M} \mid \exists K \in \mathbb{K} \quad W_K = W\}.$$

В анализе достижимости будем использовать проекционные матрицы $P_1 = BB^+$ и $P_2 = I - P_1$. Умножая (4.2.34) слева и справа на P_2, получаем для W необходимое условие достижимости:

$$P_2\left(FW + WF^\top + S\right)P_2 = 0. \tag{4.2.35}$$

Заметим, что в случае полной информации это условие также является достаточным для достижимости матрицы $W \in \mathbb{M}$.

В случае, когда состояния x системы (4.2.30) известны точно ($\Phi = 0$), уравнение (4.2.34) – линейно по K. В этом случае полный анализ разрешимости этого линейного уравнения и описание множеств достижимости даны в п. 4.2.1.

Сейчас мы фокусируемся на случае регулятора (4.2.31) с невырожденными случайными возмущениями (Φ является положительно определенной). В этом случае матричное уравнение (4.2.34) квадратично по K. Следующая теорема дает конструктивное решение синтеза стохастической чувствительности в рассматриваемом случае неполной информации.

Теорема 4.5.

Пусть шумы в системе (4.2.32) является невырожденными:

$$\operatorname{rank}\sigma(\bar{x}) = \operatorname{rank}\varphi(\bar{x}) = n.$$

а) Если $\operatorname{rank}(B) = n$, то множество достижимости состоит из матриц $W \in \mathbb{M}$, удовлетворяющих неравенству

$$Q = W\Phi^{-1}W - FW - WF^{\top} - S \succeq 0. \tag{4.2.36}$$

Для любой достижимой матрицы W уравнение (4.2.34) имеет решение

$$K = B^{-1}\left(Q^{\frac{1}{2}}Z\Phi^{-\frac{1}{2}} - W\Phi^{-1}\right), \tag{4.2.37}$$

где Z – произвольная ортогональная $n \times n$-матрица.

б) Если $\operatorname{rank}(B) < n$, то элемент $W \in \mathbb{M}$ является достижимым, если матрица W удовлетворяет неравенству (4.2.36), равенству (4.2.35) и равенству

$$P_2\left(Q^{\frac{1}{2}}Z\Phi^{-\frac{1}{2}} - W\Phi^{-1}\right) = 0. \tag{4.2.38}$$

В этих условиях уравнение (4.2.34) имеет решение

$$K = B^{+}\left(Q^{\frac{1}{2}}Z\Phi^{-\frac{1}{2}} - W\Phi^{-1}\right). \tag{4.2.39}$$

Доказательство.

Перепишем уравнение (4.2.34) в терминах новой неизвестной матрицы

$$L = BK\Phi^{\frac{1}{2}} \tag{4.2.40}$$

в форме

$$LL^{\top} + (F + L\Phi^{-\frac{1}{2}})W + W(F + L\Phi^{-\frac{1}{2}})^{\top} + S = 0$$

и

$$(L + W\Phi^{-\frac{1}{2}})(L + W\Phi^{-\frac{1}{2}})^{\top} - W\Phi^{-1}W + FW + WF^{\top} + S = 0. \tag{4.2.41}$$

Из (4.2.41) для

$$N = L + W\Phi^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.2.42}$$

следует

$$NN^\top = W\Phi^{-1}W - FW - WF^\top - S. \tag{4.2.43}$$

Обозначим через $Q = W\Phi^{-1}W - FW - WF^\top - S$ правую часть (4.2.43). Неравенство (4.2.36) является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (4.2.43). Для любой матрицы W, удовлетворяющей (4.2.36), уравнение (4.2.43) имеет решение

$$N = Q^{\frac{1}{2}}Z, \tag{4.2.44}$$

где Z – произвольная ортогональная $n \times n$-матрица. Из (4.2.40), (4.2.42), (4.2.44) следует

$$BK = Q^{\frac{1}{2}}Z\Phi^{-\frac{1}{2}} - W\Phi^{-1}. \tag{4.2.45}$$

Таким образом, мы свели задачу решения квадратного уравнения (4.2.34) к решению линейного матричного уравнения (4.2.45).

В случае $\operatorname{rank} B = n = l$ уравнение (4.2.45) имеет единственное решение (4.2.37). Часть а) теоремы доказана.

Рассмотрим случай $\operatorname{rank} B < n$. Пусть матрица W достижима. Это означает, что W удовлетворяет (4.2.35), (4.2.36). Дополнительное неравенство (4.2.38) обеспечивает разрешимость уравнения (4.2.45). Поэтому для матрицы W, удовлетворяющей необходимым и достаточным условиям достижимости (4.2.35), (4.2.36), (4.2.38), уравнение (4.2.34) имеет решение (4.2.39).

Часть б) теоремы доказана.

Теорема 4.5 и ее доказательство опубликованы в работе [223] автора диссертации.

Минимизация стохастической чувствительности

Во многих практически важных инженерных задачах требуется построить регулятор, который существенно уменьшает разброс случайных состояний вокруг равновесий, соответствующих основному режиму работы. При фиксированном уровне шума уменьшение этого разброса означает уменьшение стохастической чувствительности. Поэтому далее рассмотрим задачу управления, связанную с минимизацией стохастической чувствительности.

Рассмотрим критерий

$$J(W) = \langle W, D \rangle. \tag{4.2.46}$$

Здесь скалярное произведение определено как $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^\top B)$, а D – положительно определенная симметрическая $n \times n$-матрица. Тогда задача минимизации стохастической чувствительности с критерием (4.2.46) имеет следующую формальную запись

$$J(W) \;\to\; \min_{W \in \mathbb{W}}. \tag{4.2.47}$$

Поскольку W является решением (4.2.34), то задача (4.2.47) может быть переписана как задача минимизации функции $J(W)$ при ограничении (4.2.34). Для решения этой задачи оптимизации можно использовать метод множителей Лагранжа. Здесь функция Лагранжа

$$\mathcal{L}(W, K, \Lambda) = \langle W, D\rangle + \langle \Lambda, \mathcal{F}(W, K)\rangle,$$

где Λ – $n \times n$-матричный множитель Лагранжа и

$$\mathcal{F}(W, K) = (F + BK)W + W(F + BK)^\top + BK\Phi K^\top B^\top + S.$$

Теорема 4.6. Система матричных уравнений

$$\begin{array}{l} (F + BK)^\top \Lambda + \Lambda(F + BK) + D = 0, \\ B^\top \Lambda W + B^\top \Lambda BK\Phi = 0, \\ (F + BK)W + W(F + BK)^\top + BK\Phi K^\top B^\top + S = 0, \end{array} \tag{4.2.48}$$

является необходимым условием минимума J.

Доказательство. Необходимым условием для условных экстремумов J является следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = 0, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = 0. \tag{4.2.49}$$

Используя соотношения

$$\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle = \langle A^\top, B^\top\rangle, \qquad \langle AB, C\rangle = \langle B, A^\top C\rangle,$$

$$\frac{\partial \langle A, X\rangle}{\partial X} = A, \qquad \frac{\partial \langle A, XB\rangle}{\partial X} = AB^\top, \quad \frac{\partial \langle A, BX\rangle}{\partial X} = B^\top A,$$

$$\frac{\partial \langle A, BXC\rangle}{\partial X} = B^\top AC^\top, \qquad \frac{\partial \langle A, BX^\top C\rangle}{\partial X} = CA^\top B,$$

можно найти явно производные в (4.2.49):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W} = D + (F + BK)^\top \Lambda + \Lambda(F + BK),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = B^\top \Lambda W + B^\top \Lambda BK\Phi,$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Lambda} = \mathcal{F}(W, K).$$

Теорема доказана.

Скалярный случай

Для $n = 1$ из системы (4.2.48) следует, что

$$W = -BK\Phi, \qquad B^2\Phi K^2 + 2BF\Phi K - S = 0.$$

При $B \neq 0$ с учетом положительности $W > 0$ находим единственные значения оптимальных

$$K = -\frac{1}{B}\left(F + \sqrt{F^2 + \frac{S}{\Phi}}\right), \tag{4.2.50}$$

$$W = \Phi F + \sqrt{\Phi^2 F^2 + \Phi S}. \tag{4.2.51}$$

Здесь формула (4.2.50) дает значение K коэффициента обратной связи оптимального регулятора, который обеспечивает минимально возможное значение W стохастической чувствительности (4.2.51).

Стабилизация равновесия нелинейного стохастического осциллятора

Рассмотрим нелинейный стохастический осциллятор с управлением

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) + g(x, \dot{x})u + \varepsilon\sigma(x, \dot{x})\xi, \tag{4.2.52}$$

где f, g и σ – скалярные функции, ξ – белый гауссовский шум с $\mathrm{E}\xi(t) = 0$, $\mathrm{E}\xi(t)\xi(\tau) = \delta(t-\tau)$, ε – интенсивность шума.

Перепишем уравнение (4.2.52) в форме системы:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2, \\ \dot{x_2} &= f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)u + \varepsilon\sigma(x_1, x_2)\xi. \end{aligned} \tag{4.2.53}$$

Пусть детерминированная система без управления (4.2.53) ($u = 0$, $\varepsilon = 0$) имеет равновесие $(\bar{x}_1, 0)$. Рассмотрим регулятор

$$u = k_1(y_1 - \bar{x}_1) + k_2 y_2,$$

$$y_1 = x_1 + \varepsilon\varphi_1(x_1, x_2)\eta_1, \quad y_2 = x_2 + \varepsilon\varphi_2(x_1, x_2)\eta_2,$$

где k_1, k_2 – коэффициенты обратной связи, φ_1, φ_2 – скалярные функции, η_1, η_2 – некоррелированные белые гауссовские шумы с $\mathrm{E}\eta_{1,2}(t) = 0$, $\mathrm{E}\eta_{1,2}(t)\eta_{1,2}(\tau) = \delta(t-\tau)$, $\mathrm{E}\eta_{1,2}(t)\xi(\tau) = 0$.

Целью управления является синтез устойчивого равновесия $(\bar{x}_1, 0)$ с назначенной стохастической чувствительностью. Для системы (4.2.53), имеем

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \qquad \Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1^2 & 0 \\ 0 & \varphi_2^2 \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_1, 0), \;\; \beta = \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}_1, 0),$$

$$b = g(\bar{x}_1, 0), \;\; \sigma = \sigma(\bar{x}_1, 0), \;\; \varphi_{1,2} = \varphi_{1,2}(\bar{x}_1, 0).$$

Элементы матрицы стохастической чувствительности $W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix}$ удовлетворяют системе (см. (4.2.34)):

$$\begin{aligned} &2w_2 = 0, \\ &(\alpha + bk_1)w_1 + (\beta + bk_2)w_2 + w_3 = 0, \\ &2(\alpha + bk_1)w_2 + 2(\beta + bk_2)w_3 + b^2(k_1^2\varphi_1^2 + k_2^2\varphi_2^2) + \sigma^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.2.54}$$

Из (4.2.54) следует, что $w_2 = 0$. Это означает, что допустимая матрица стохастической чувствительности должна быть диагональной.

Для k_1 получаем явную формулу:

$$k_1 = -\frac{1}{b}\left(\alpha + \frac{w_3}{w_1}\right). \tag{4.2.55}$$

Коэффициент k_2 удовлетворяет квадратному уравнению:

$$b^2\varphi_2^2 k_2^2 + 2bw_3k_2 + 2\beta w_3 + \varphi_1^2\left(\alpha + \frac{w_3}{w_1}\right)^2 + \sigma^2 = 0. \tag{4.2.56}$$

Из (4.2.36) следует:

$$\left(w_1^2 - \varphi_1^2\varphi_2^2\right) w_3^2 - 2\varphi_2^2(\beta w_1^2 + \alpha\varphi_1^2 w_1)w_3 - \varphi_2^2\left(\sigma^2 + \alpha^2\varphi_1^2\right) w_1^2 \geq 0. \tag{4.2.57}$$

Это неравенство означает, что дискриминант уравнения (4.2.56) – неотрицательный, поэтому (4.2.56) имеет решение.

Неравенство (4.2.57) играет важную роль в рассматриваемой задаче синтеза. Это неравенство дает простое параметрическое описание множества $\mathbb{W}$ пар (w_1, w_3), для которых матрица стохастической чувствительности $W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_3 \end{pmatrix}$ является достижимой.

В поставленной задаче оптимальной стабилизации (4.2.53) следует выбрать регулятор, который минимизирует стохастическую чувствительность равновесия $(\bar{x}_1, 0)$. Здесь критерий можно записать в виде

$$J(w_1, w_3) = q_1 w_1 + q_3 w_3 \ \to \min, \quad q_1 > 0, \ q_3 > 0,$$

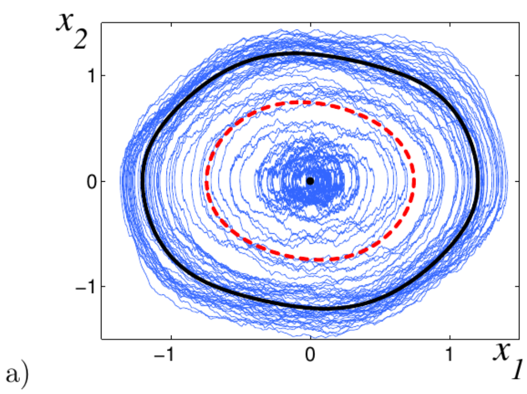
где (w_1, w_3) удовлетворяют (4.2.57).

Синтез минимальной стохастической чувствительности осциллятора Ван-дер-Поля

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (\delta + \mu x_1^2 - x_1^4) x_2 + u + \varepsilon\sigma\xi, \end{aligned} \tag{4.2.58}$$

где ξ – стандартный белый гауссовский шум. Детерминированная система без управления (4.2.58) ($\varepsilon = 0, \ u = 0$) является хорошо известным осциллятором Ван-дер-Поля с седлоузловой бифуркацией при $\delta = -\mu^2/8$. Для $\mu = 1, \delta = -0.1$, эта система имеет устойчивое равновесие $(0, 0)$ (черный кружок) и устойчивый предельный цикл (сплошная линия), разделенные неустойчивым предельным циклом (пунктир) (см. рис. 4.2.7а).



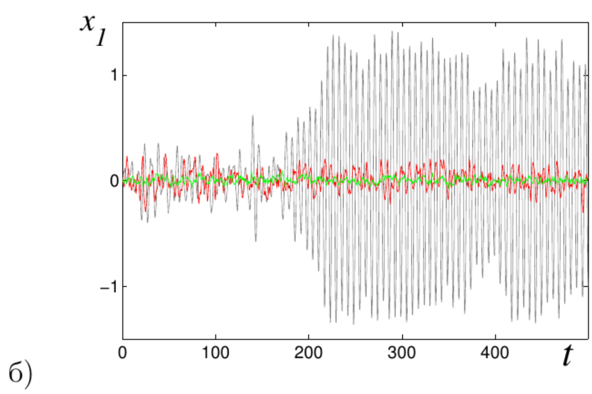


Рис. 4.2.7 – Система (4.2.58) с $\mu = 1, \ \delta = -0.1, \ \sigma = 1, \ \varepsilon = 0.1$: а) генерация большеамплитудных осцилляций в отсутствие управления; б) стабилизация осцилляций оптимальными регуляторами, минимизирующими стохастическую чувствительность при $\varphi = 0.2$ (зеленый), $\varphi = 1$ (красный). Осцилляции в системе без управления показаны серым.

При стохастических возмущениях случайные траектории системы без управления покидают устойчивое равновесие, но при слабом шуме эти траектории локализованы в бассейне притяжения невозмущенного равновесия. По мере увеличения интенсивности шума случайные траектории начинают выходить из этого бассейна притяжения, пересекают сепаратрису (неустойчивый цикл) и далее продолжают большеамплитудные осцилляции вблизи устойчивого предельного цикла (см. фазовые траектории на рис. 4.2.7а и временной ряд на рис. 4.2.7б при $u = 0,\ \sigma = 1,\ \varepsilon = 0.1$).

Для того, чтобы подавить нежелательные переходы от равновесия к таким колебаниям большой амплитуды, применим метод управления, представленный выше.

Стохастическая матрица чувствительности $W = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma^2}{2\delta} & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma^2}{2\delta} \end{pmatrix}$ системы без управления (4.2.58) является решением уравнения (4.2.33) при $K = 0$, где

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемых значений $\sigma = 1,\ \delta = -0.1$, имеем $W = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Для предотвращения нежелательных стохастических колебаний большой амплитуды, мы построим регулятор обратной связи, который обеспечивает меньшие значения стохастической чувствительности.

Здесь мы используем регулятор обратной связи, рассмотренный выше:

$$u = k_1(x_1 + \varepsilon\varphi_1\eta_1) + k_2(x_2 + \varepsilon\varphi_2\eta_2), \tag{4.2.59}$$

где $\eta_{1,2}$ – некоррелированные гауссовские шумы.

Для системы (4.2.58),(4.2.59), элементы достижимых матриц $W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_3 \end{pmatrix}$ удовлетворяют неравенству (4.2.57) с $\alpha = -1,\ \beta = l$.

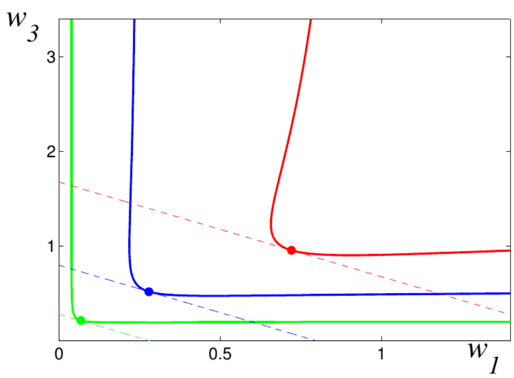


Рис. 4.2.8 – Множества достижимости для $\sigma = 1$: $\varphi = 0.2$ (зеленый); $\varphi = 0.5$ (синий); $\varphi = 1$ (красный).

На рис. 4.2.8 изображены множества достижимости для значений (w_1, w_3) при $\mu = 1,\ \delta = -0.1, \sigma = 1,\ \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Здесь показаны границы этих множеств при разных $\varphi:\ \varphi = 1$ (красный), $\varphi = 0.5$ (синий) и $\varphi = 0.2$

(зеленый). Как видно, чем меньше φ, тем больше множество достижимости. Когда φ стремится к нулю, множество достижимости расширяется до первого квадранта: $w_1 > 0,\ w_3 > 0$.

Найдем коэффициенты k_1, k_2 регулятора (4.2.59) из решения следующей задачи оптимальной стабилизации с критерием:

$$J(w_1, w_3) = \mathrm{tr}W = w_1 + w_3 \ \to \min,$$

где точки (w_1, w_3) принадлежат соответствующим областям достижимости. Геометрически, минимально возможное достижимое значение критерия $J_0 = \min J$ будет в точке, где прямая $w_1 + w_3 = J_0$ касается границы множества достижимости. На рис. 4.2.8 для трех значений φ эти касательные прямые показаны пунктирами, а оптимальные точки из множеств достижимости – кружками.

При $\varphi = 0.2$ минимальное значение критерия $J_0 = 0.282$ достигается при стохастической чувствительности $w_1 = 0.068,\ w_3 = 0.214$, синтезируемой оптимальным регулятором с коэффициентами $k_1 = -2.162,\ k_2 = -4.834$.

Для $\varphi = 0.5$ получим $J_0 = 0.799,\ w_1 = 0.279,\ w_3 = 0.520,\ k_1 = -0.857,\ k_2 = -1.992$.

Для $\varphi = 1$ имеем $J_0 = 1.678,\ w_1 = 0.721,\ w_3 = 0.957,\ k_1 = -0.327,\ k_2 = -0.947$.

Напомним, что стохастическая чувствительность системы без управления была $w_1 = w_3 = 5$. Таким образом, оптимальные регуляторы даже при наличии шума позволяют существенно снизить стохастическую чувствительность равновесий.

Стохастическая динамика системы (4.2.58) с построенными оптимальными регуляторами представлена на рис. 4.2.7б. Здесь временные ряды системы без управления показаны серым цветом, временные ряды, соответствующие оптимальному регулятору для $\varphi = 0.2$ – зеленым цветом, а для $\varphi = 1$ – красным цветом. Как можно видеть, построенные оптимальные регуляторы стабилизируют случайные траектории системы (4.2.58), (4.2.59) вблизи равновесия $(0, 0)$.

Как видим, новый метод обеспечивает низкий уровень стохастической чувствительности и подавляет колебания большой амплитуды даже в том случае, если регулятор обратной связи содержит случайные возмущения. Стоит отметить, что этот метод может быть использован и для систем более высоких размерностей. Так, в работе [223] автора диссертации решена задача стабилизации стохастически возмущенного трехмерного нелинейного осциллятора.

Управление динамическими регуляторами

Рассмотрим нелинейную стохастическую систему с управлением

$$\dot{x} = f(x,u) + \varepsilon\sigma(x)\xi(t) \tag{4.2.60}$$

где x – n-мерный вектор состояния, $f(x,u)$ – n-мерная вектор-функция, $\sigma(x)$ – $n{\times}m$-матричная функция, $\xi(t)$ – стандартный белый гауссовский m-векторный шум с параметрами $\mathrm{E}\xi(t) = 0,\ \mathrm{E}\xi(t)\xi^\top(\tau) = \delta(t-\tau)I$, u – r-мерный управляющий вход.

Предполагается, что соответствующая детерминированная система (4.2.60) (с $\varepsilon = 0$ и $u = 0$) имеет равновесие $\bar{x}$, устойчивость которого не предполагается.

Рассмотрим случай, когда информация о состоянии системы задается вектором измерений $y(t)$, содержащим случайные ошибки:

$$y = g(x) + \varepsilon\varphi(x)\eta(t). \tag{4.2.61}$$

Здесь y – p-мерный вектор измерений, $g(x)$ – p-мерная вектор-функция, $\varphi(x)$ – $p{\times}q$-матричная функция и $\eta(t)$ – стандартный белый гауссовский q-векторный шум, некоррелированный с $\xi(t)$ и удовлетворяющий $\mathrm{E}\eta(t) = 0,\ \mathrm{E}\eta(t)\eta^\top(\tau) = \delta(t-\tau)I$.

Будем использовать динамический регулятор, состоящий из управления

$$u = -K(\hat{x} - \bar{x}) \tag{4.2.62}$$

и фильтра

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x},u) + L\left(y - g(\hat{x})\right). \tag{4.2.63}$$

Здесь $\hat{x}$ – оценка неизвестного состояния x, K – постоянная $r \times n$-матрица, L – постоянная $n \times p$-матрица. Таким образом, стабилизирующие возможности этого регулятора определяются выбором матриц K и L.

Для состояний x и $\hat{x}$ системы (4.2.60), (4.2.61) с регулятором (4.2.62), (4.2.63) можно записать замкнутую систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, -K\left(\hat{x} - \bar{x}\right)) + \varepsilon\sigma(x)\xi(t)\\ \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}, -K\left(\hat{x} - \bar{x}\right)) + L\left(g(x) - g(\hat{x})\right) + \varepsilon L\varphi(x)\eta(t).\end{aligned} \tag{4.2.64}$$

Детерминированная система (4.2.64) ($\varepsilon = 0$) имеет равновесие $[\bar{x},\bar{x}]^\top$.

Для асимптотики

$$z = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^\varepsilon - \bar{x}}{\varepsilon}, \qquad \hat{z} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\hat{x}^\varepsilon - \bar{x}}{\varepsilon}$$

отклонений решений $x^\varepsilon(t)$, $\hat{x}^\varepsilon(t)$ системы (4.2.64) от равновесия можно записать следующую систему

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az - BK\hat{z} + S\xi(t) \\ \dot{\hat{z}} &= A\hat{z} - BK\hat{z} + LC(z - \hat{z}) + L\Phi\eta(t). \end{aligned} \tag{4.2.65}$$

Здесь

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, 0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, 0), \quad C = \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{x}), \quad S = \sigma(\bar{x}), \quad \Phi = \varphi(\bar{x}).$$

Рассмотрим множество матриц K и L, обеспечивающих экспоненциальную устойчивость равновесия $[\bar{x}, \bar{x}]^\top$ детерминированной системы (4.2.64) с $\varepsilon = 0$:

$$\mathbb{K} = \{K \mid Re\lambda_i(A - BK) < 0\}, \qquad \mathbb{L} = \{L \mid Re\lambda_i(A - LC) < 0\},$$

где $\lambda_i(F)$ – собственные числа матрицы F. Предположим, что пара (A, B) – стабилизируема, а пара (A, C) – восстанавливаема [286]. Это означает, что множества $\mathbb{K}$, $\mathbb{A}$ непусты.

Перепишем систему (4.2.65) в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\hat{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \hat{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & L\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}. \tag{4.2.66}$$

Для переменной $\tilde{z} = \hat{z} - z$ можно записать следующую отдельную подсистему:

$$\dot{\tilde{z}} = (A - LC)\tilde{z} + L\Phi\eta(t) - S\xi(t).$$

Для переменных z, $\tilde{z}$ выполняется

$$\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\tilde{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S & 0 \\ -S & L\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix}. \tag{4.2.67}$$

При любых $K \in \mathbb{K}$, $L \in \mathbb{L}$ матрица стохастической чувствительности

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

состоит из блоков

$$W_{11} = \mathrm{E}zz^\top, \qquad W_{12} = \mathrm{E}z\tilde{z}^\top, \qquad W_{21} = \mathrm{E}\tilde{z}z^\top, \qquad W_{22} = \mathrm{E}\tilde{z}\tilde{z}^\top.$$

Эта матрица является единственным решением матричного алгебраического уравнения

$$\begin{bmatrix} A-BK & -BK \\ 0 & A-LC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (A-BK)^\top & 0 \\ -K^\top B^\top & (A-LC)^\top \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} S & 0 \\ -S & L\Phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} S^\top & -S^\top \\ 0 & \Phi^\top L^\top \end{bmatrix} = 0. \tag{4.2.68}$$

С учетом $W_{21} = W_{12}^\top$ можно переписать систему (4.2.68) следующим образом

$$\begin{aligned} &(A-BK)W_{11} + W_{11}(A-BK)^\top - BKW_{12}^\top - W_{12}K^\top B^\top + SS^\top = 0 \\ &(A-BK)W_{12} - BKW_{22} + W_{12}(A-LC)^\top - SS^\top = 0 \\ &(A-LC)W_{22} + W_{22}(A-LC)^\top + SS^\top + L\Phi\Phi^\top L^\top = 0. \end{aligned} \tag{4.2.69}$$

Здесь можно рассматривать следующую задачу

Пусть $\mathbb{M}$ – множество симметрических и положительно определенных $n \times n$-матриц. Для любых $K \in \mathbb{K}$, $L \in \mathbb{L}$, регулятор (4.2.62),(4.2.63) формирует для равновесия $\bar{x}$ матрицу стохастической чувствительности $W_{11}(K, L)$, которая является $n \times n$-блоком в $(2n) \times (2n)$-матрице решения системы (4.2.69).

Задача синтеза стохастической чувствительности

Для наперед заданной матрицы $W_{11} \in \mathbb{M}$ найти матрицы $K \in \mathbb{K}$, $L \in \mathbb{L}$ такие, что выполняется равенство $W_{11}(K, L) = W_{11}$.

Вопрос об описании множества достижимости матриц стохастической чувствительности требует дополнительных исследований.

Выбирая матрицу L в фильтре (4.2.63), можно следовать теории оптимальной фильтрации Калмана-Бьюси:

$$L_* = W_{22}C^\top \left(\Phi\Phi^\top\right)^{-1}, \tag{4.2.70}$$

где

$$AW_{22} + W_{22}A^\top - W_{22}C^\top \left(\Phi\Phi^\top\right)^{-1} CW_{22} + SS^\top = 0.$$

Синтез стохастической чувствительности в одномерных системах

Пусть в системе (4.2.60), (4.2.61) переменные x, y, u и шумы ξ, η являются одномерными: $n = m = r = p = q = 1$. В этом случае обратная связь

(4.2.62) и фильтр (4.2.63) можно записать как

$$u = -k(\hat{x} - \bar{x}), \qquad \dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + l\,(y - g(\hat{x}))\,. \tag{4.2.71}$$

Элементы соответствующей 2×2-матрицы стохастической чувствительности

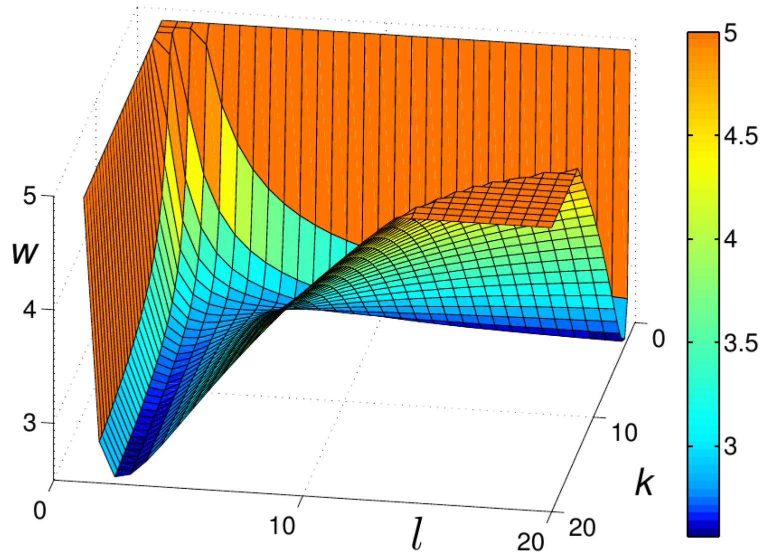


Рис. 4.2.9 – Стохастическая чувствительность $w = w_{11}(k,l)$ для $a = b = c = \varphi = s = 1$.

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$$

удовлетворяют системе

$$\begin{aligned} &2(a - bk)w_{11} - 2bkw_{12}^{\top} + s^2 = 0 \\ &(2a - bk - lc)w_{12} - bkw_{22} - s^2 = 0 \\ &2(a - lc)w_{22} + s^2 + l^2\varphi^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.2.72}$$

Здесь

$$a = f'_x(\bar{x}, 0), \quad b = f'_u(\bar{x}, 0), \quad c = g'(\bar{x}), \quad s = \sigma(\bar{x}), \quad \varphi = \varphi(\bar{x}).$$

В одномерном случае имеем $\mathbb{K} = \{k \mid a - bk < 0\}$, and $\mathbb{L} = \{l \mid a - lc < 0\}$.

Для любых $k \in \mathbb{K},\ l \in \mathbb{L}$, система (4.2.72) имеет явное решение:

$$w_{22}(l) = \frac{s^2 + l^2\varphi^2}{2(lc - a)}, \qquad w_{12}(k,l) = \frac{bkw_{22}(l) + s^2}{2a - bk - lc},$$

$$w_{11}(k,l) = \frac{s^2 - 2bkw_{12}(k,l)}{2(bk - a)}.$$

В системе (4.2.60), (4.2.61) с регулятором (4.2.71), стохастическая чувствительность равновесия $\bar{x}$ задается функцией $w = w_{11}(k,l)$. На рис. 4.2.9 представлен

график функции $w = w_{11}(k, l)$ при $a = b = c = \varphi = s = 1$.
Результаты раздела 4.2.2 опубликованы в следующих работах автора по управлению: регулятором, содержащим случайные возмущения в [223]; динамическим регулятором [290]. Возможности статических регуляторов в задаче синтеза стохастической чувствительности исследованы и опубликованы в работе [231] и продемонстрированы в п. 5.2 в задаче стабилизации проточного химического реактора.

4.2.4. Управление стохастической чувствительностью циклов

Кратко изложим общий подход к решению задачи синтеза стохастических циклов для многомерных управляемых систем вида

$$\dot{x} = f(x, u) + \varepsilon\sigma(x, u)\dot{w}(t), \tag{4.2.73}$$

где x – n-мерный вектор состояния, u – m-мерный вектор управления, $f(x, u)$ – достаточно гладкая n-вектор-функция, $w(t)$ – стандартный n-мерный винеровский процесс, $\sigma(x, u)$ – достаточно гладкая $(n \times n)$-матричная функция, характеризующая зависимость возмущений от состояния и управления, ε – скалярный параметр интенсивности возмущений.

Пусть система (4.2.73) при $\varepsilon = 0$ и $u = 0$ имеет T-периодическое решение $x = \bar{x}(t)$ с фазовой траекторией Γ (цикл). Устойчивость цикла Γ не предполагается.

Рассмотрим класс допустимых обратных связей U, состоящий из достаточно гладких функций $u(x)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{4.2.74}$$

в замкнутой детерминированной системе

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \tag{4.2.75}$$

решение $x = \bar{x}(t)$ является экспоненциально орбитально устойчивым в окрестности цикла Γ.

Условие (4.2.74) означает, что функция $x = \bar{x}(t)$ остается решением системы (4.2.73) при всех допустимых управлениях.

Вопрос об устойчивости цикла детерминированной системы (4.2.75) решается по мультипликаторам $\rho_1 = 1, \rho_2, ..., \rho_n$ соответствующей системы первого приближения для малых отклонений $z(t) = x(t) - \bar{x}(t)$:

$$dz \;=\; (F(t) + B(t)K(t))zdt, \tag{4.2.76}$$

где

$$F(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t),0),\quad B(t)=\frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t),0),\quad K(t)=\frac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}(t)).$$

Необходимым и достаточным условием экспоненциальной орбитальной устойчивости цикла Γ для нелинейной системы (4.2.75) являются условия [291]: $|\rho_i|<1,\ i=2,...,n$. Мультипликаторы системы (4.2.76) при фиксированных F и B являются функциями от K: $\rho_i=\rho_i(K)$.

Рассмотрим множество T-периодических $(m\times n)$-матриц

$$\mathbb{K}=\{K:\ |\rho_i(K)|<1, i=2,...,n\}.$$

Будем предполагать, что множество $\mathbb{K}$ не пусто.

Случайные траектории стохастической системы (4.2.73) покидают детерминированный цикл Γ и формируют вокруг него стохастический аттрактор, имеющий стационарную плотность распределения $\rho(x,\varepsilon)$.

Следуя теории из главы 2, для описания функции $\rho(x,\varepsilon)$ будем использовать аппарат функций стохастической чувствительности.

Пусть $K\in\ \mathbb{K}$. Опишем вероятностное распределение случайных состояний системы (4.2.73) вокруг устойчивого цикла Γ при помощи сечений Пуанкаре. Пусть Π_t – гиперплоскость, ортогональная циклу в точке $\bar{x}(t)$ $(0\le t<T)$. Для сечения Пуанкаре Π_t в окрестности точки $\bar{x}(t)$ соответствующая гауссова аппроксимация стационарной плотности распределения имеет вид:

$$\rho_t(x,\varepsilon)\approx\ C\exp\left(-\frac{(x-\bar{x}(t))^\top W^+(t)(x-\bar{x}(t))}{2\varepsilon^2}\right).\tag{4.2.77}$$

Здесь матричная функция стохастической чувствительности $W(t)$ цикла Γ, в силу $K\in\ \mathbb{K}$, является единственным решением уравнения Ляпунова

$$\dot{W}=\left(F(t)+B(t)K(t)\right)W+W\left(F(t)+B(t)K(t)\right)^\top+P(t)S(t)P(t)\tag{4.2.78}$$

с условиями:

$$W(0)=W(T),\tag{4.2.79}$$

$$W(t)r(t)\equiv 0,\tag{4.2.80}$$

где $S(t)=\sigma(\bar{x}(t),0)\sigma^\top(\bar{x}(t),0)$, $r(t)=f(\bar{x}(t))$, $P(t)$ – матрица ортогонального проектирования на гиперплоскость Π_t. Матрица $\varepsilon^2W(t)$ задает ковариацию случайных состояний в окрестности точки $\bar{x}(t)$ в сечении Π_t. Из условия (4.2.74) следует, что

$$K(t)P(t)\equiv K(t).\tag{4.2.81}$$

Как видно, вариация управления u позволяет изменять в уравнении (4.2.78) только коэффициент $K(t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(\bar{x}(t))$, поэтому результат управления – матрица стохастической чувствительности $W(t)$ – зависит только от производной $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Это позволяет упростить структуру регулятора и, не теряя общности, использовать в дальнейшем обратную связь

$$u = K(t(x))\Delta(x), \tag{4.2.82}$$

где $\Delta(x) = x - \gamma(x)$ – отклонение стохастической траектории от детерминированного цикла, $\gamma(x) = \operatorname{argmin}_{y \in \Gamma} \|x - y\|,\ t(x) = \operatorname{argmin}_{t \in [0,T)} \|x - \bar{x}(t)\|$.

Целью управления является формирование у цикла Γ заданной функции стохастической чувствительности W. Матрица обратной связи $K(t)$ регулятора (4.2.82), формирующего в системе (4.2.73) наперед заданную T-периодическую матрицу стохастической чувствительности $W(t)$, должна в силу (4.2.78) удовлетворять матричному линейному алгебраическому уравнению

$$\begin{aligned} &B(t)K(t)W(t) + W(t)K^\top(t)B^\top(t) = \\ &= \dot{W}(t) - F(t)W(t) - W(t)F^\top(t) - P(t)S(t)P(t) \end{aligned} \tag{4.2.83}$$

и условию (4.2.81).

Естественно, здесь возникает ряд вопросов, касающихся описания класса допустимых матриц $W(t)$, условий разрешимости системы (4.2.81),(4.2.83), и построения его решений, а также оценки затрат на управление.

Обозначим через $\mathbb{M}$ класс допустимых матриц. Здесь $\mathbb{M}$ – множество симметрических, неотрицательно определенных $n \times n$-матричных функций $W(t)$, удовлетворяющих условию $P(t)$-положительной определенности и условиям (4.2.79), (4.2.80). Матричная функция $W(t)$ называется $P(t)$-положительно определенной, если

$$\forall t \in [0,T]\ \forall x : P(t)x \neq 0 \rightarrow (x, W(t)x) > 0.$$

При каждом $K \in \mathbb{K}$ в замкнутой системе (4.2.73),(4.2.82) синтезируется цикл с соответствующей матрицей $W_K(t) \in \mathbb{M}$ стохастической чувствительности, удовлетворяющей уравнению (4.2.78).

Задача синтеза стохастической чувствительности цикла

Для наперед заданной матрицы $W(t) \in \mathbb{M}$ требуется найти матрицу $K(t) \in \mathbb{K}$, обеспечивающую тождество $W_K(t) \equiv W(t)$, где $W_K(t)$ – решение системы (4.2.78)-(4.2.80).

В некоторых случаях эта задача может быть неразрешимой. Поэтому введем понятие достижимости и стохастической управляемости.

Определение 4.8

Элемент $W(t) \in \mathbb{M}$ называется достижимым в системе (4.2.73) с регулятором (4.2.82), если при некотором $K(t) \in \mathbb{K}$ выполняется тождество $W_K(t) \equiv W(t)$.

Определение 4.9

Множество всех достижимых элементов

$$\mathbb{W} = \{W(t) \in \mathbb{M} \mid \exists K(t) \in \mathbb{K} \quad W_K(t) \equiv W(t)\}$$

называется множеством достижимости системы (4.2.73), (4.2.82).

Определение 4.10

Цикл Γ называется полностью стохастически управляемым в системе (4.2.73), (4.2.82), если

$$\forall\, W(t) \in \mathbb{M} \quad \exists\, K(t) \in \mathbb{K} \; : \quad W_K(t) \equiv W(t).$$

Таким образом, цикл Γ является полностью стохастически управляемым тогда и только тогда, когда справедливо равенство

$$\mathbb{W} = \mathbb{M}.$$

Решение проблемы синтеза матрицы стохастической чувствительности дается теоремой.

Теорема 4.6

Пусть шумы в системе (4.2.73) невырожденные ($\det S(t) \neq 0$) и матрица $B(t)$ является квадратной и невырожденной ($\mathrm{rank} B(t) = n = m$). Тогда при любой матрице $W(t) \in \mathbb{M}$ система уравнений (4.2.81),(4.2.83) имеет решение

$$\begin{aligned} &K(t) = \bar{K}(t) + B^{-1}(t)Z(t)W^{+}(t) \in \mathbb{K}, \\ &\bar{K}(t) = B^{-1}(t)\left[\tfrac{1}{2}\left(\dot{W}(t)P(t) + \dot{P}(t)W(t)\right) - F(t)W(t) - \right. \\ &\left.\tfrac{1}{2}P(t)S(t)P(t)\right]W^{+}(t), \end{aligned} \tag{4.2.84}$$

где $Z(t)$ – произвольная кососимметрическая $n \times n$-матрица, удовлетворяющая тождеству

$$Z(t)P(t) \equiv Z(t). \tag{4.2.85}$$

Доказательство.

Покажем, что $\bar{K}(t)$ является частным решением системы (4.2.81),(4.2.83). В доказательстве зависимость от t опущена.

Из равенств $W^+W = P = P^2$, $WP = W$ следует, что

$$B\bar{K}W = BB^{-1}\left[\frac{1}{2}\left(\dot{W}P + \dot{P}W\right) - FW - \frac{1}{2}PSP\right]W^+W =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\dot{W}P + \dot{P}W\right) - FW - \frac{1}{2}PSP.$$

Транспонируя это равенство, получаем

$$W\bar{K}^\top B^\top = \left(B\bar{K}W\right)^\top = \frac{1}{2}\left(P\dot{W} + W\dot{P}\right) - WF^\top - \frac{1}{2}PSP,$$

откуда следует

$$B\bar{K}W + W\bar{K}^\top B^\top = \frac{1}{2}\left(\dot{W}P + \dot{P}W + P\dot{W} + W\dot{P}\right) - FW - WF^\top - PSP =$$

$$= \dot{W} - FW - WF^\top - PSP.$$

Таким образом, $\bar{K}(t)$ является решением уравнения (4.2.83). Справедливость (4.2.81) вытекает из свойства $W^+P = W^+$.

Для (4.2.81),(4.2.83) опишем общее решение соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} BLW + WL^\top B^\top = 0, \\ LP = L. \end{cases} \tag{4.2.86}$$

Покажем, что общее решение (4.2.86) имеет вид

$$L = B^{-1}ZW^+, \;\; ZP = Z, \; Z + Z^\top = 0, \tag{4.2.87}$$

где Z – произвольная кососимметрическая $n \times n$-матрица.

Из $W^+P = W^+$ следует, что $LP = L$. Подставляя L в первое уравнение системы (4.2.86), получим

$$BB^{-1}ZW^+W + WW^+Z^\top(B^{-1})^\top B^\top = ZP + PZ^\top = Z + Z^\top = 0.$$

Таким образом, $L = B^{-1}ZW^+$ действительно является решением системы (4.2.86).

Докажем теперь, что любое решение этой системы имеет вид (4.2.87). Пусть L – произвольное фиксированное решение этой системы. Тогда матрица $Q = BLW$ – кососимметрическая и $LW = B^{-1}Q$. Умножая последнее равенство справа на W^+, получим

$$LP = B^{-1}QW^+,$$

откуда, с учетом $LP = L$, получим $L = B^{-1}QW^{+}$. Условие $QP = Q$ непосредственно следует из соотношений

$$QP = BLWP = BLW = Q.$$

Теорема доказана.

Как видим, в случае, когда матрица $B(t)$ квадратная и невырожденная ($\operatorname{rank}(B(t)) = n$), множество достижимости совпадает с множеством допустимых значений ($\mathbb{M} = \mathbb{W}$) и цикл в системе (4.2.73), (4.2.82) является полностью стохастически управляемым.

В случае, когда $\operatorname{rank}(B(t)) < n$, не все элементы из множества допустимых значений $\mathbb{M}$ являются достижимыми. Рассмотрим проекторы

$$P_1(t) = B(t)B^{+}(t), \quad P_2(t) = I - P_1(t).$$

Необходимое условие достижимости дает следующая теорема.

Теорема 4.7

Для того, чтобы элемент $W(t) \in \mathbb{M}$ был достижим, необходимо выполнение тождества:

$$P_2(t)\left[\dot{W}(t) - F(t)W(t) - W(t)F^{\top}(t) - P(t)S(t)P(t)\right]P_2(t) \equiv 0. \qquad (4.2.88)$$

Доказательство.

Домножим равенство (4.2.83) слева и справа на $P_2(t)$. Тогда требуемое условие (4.2.88) непосредственно следует из тождества

$$P_2(t)B(t) \equiv 0.$$

Доказательство теорем 4.6, 4.7 опубликовано в работе [207] автора диссертации.

Подробное исследование вопросов управляемости и достижимости проводится далее для двумерных систем. Будут представлены условия полной управляемости, при которых удается синтезировать произвольную допустимую функцию стохастической чувствительности.

В отсутствие полной управляемости, задача синтеза регулятора становится некорректной. Для ее регуляризации будет предложен конструктивный подход, позволяющий синтезировать заданную функцию стохастической чувствительности с любой степенью точности.

В случае трехмерных систем также возможно конструктивное развитие представленной общей теории.

Эффективность предложенных методов демонстрируется далее на примере решения задачи синтеза регулятора для стохастической модели брюсселятора (двумерная система) и модели Лоренца (трехмерная система).

Для оценки затрат на управление u в стохастической системе (4.2.73) будем использовать функцию $J_t = \mathrm{E}\left(u^\top(x)\, R\, u(x)\right)$, где математическое ожидание $\mathrm{E}(\cdot)$ вычисляется по распределению (4.2.77), R – симметрическая положительно определенная $(m \times m)$-матрица. Для этой функции затрат справедливо явное представление:

$$J_t = \varepsilon^2 \mathrm{tr}\left(K^\top(t) R K(t) W(t)\right). \tag{4.2.89}$$

Напомним, что матрица $\varepsilon^2 W(t)$ задает ковариацию точек пересечения случайных траекторий с гиперплоскостью Π_t, ортогональной циклу в точке $\bar{x}(t)$. В качестве интегрального критерия расходов на управление по всей орбите можно использовать

$$J = \varepsilon^2 \int\limits_0^T \mathrm{tr}\left(K^\top(t) R K(t) W(t)\right) dt.$$

Управление стохастическими циклами двумерных систем

В случае $n = 2$ матрица проектирования $P(t)$ имеет представление: $P(t) = p(t)p^\top(t)$, где $p(t)$ – единичный вектор, ортогональный касательному вектору $f(\bar{x}(t))$. В силу условия (4.2.80) матрица $W(t)$ может быть записана в виде $W(t) = \mu(t)P(t)$, где $\mu(t)$ – T-периодическая скалярная функция стохастической чувствительности (см. раздел 2.2.2).

Функция стохастической чувствительности $\mu(t)$ цикла Γ удовлетворяет краевой задаче

$$\dot{\mu} = a(t)\mu + b(t), \quad \mu(0) = \mu(T), \tag{4.2.90}$$

где

$$\begin{aligned} &a(t) = p^\top(t)\left[(F(t) + B(t)K(t)) + (F(t) + B(t)K(t))^\top\right] p(t), \\ &b(t) = p^\top(t) S(t) p(t). \end{aligned} \tag{4.2.91}$$

Коэффициент $a(t)$, зависящий от $K(t)$, можно записать в виде:

$$a(t) = a_0(t) + 2\beta^\top(t) k(t), \tag{4.2.92}$$

где

$$a_0(t) = p^\top(t)[F^\top(t) + F(t)]p(t), \quad \beta(t) = B^\top(t)p(t), \quad k(t) = K(t)p(t). \tag{4.2.93}$$

Функция $\mu(t)$ дает детальное описание изменения стохастической чувствительности вдоль цикла. Удобной характеристикой стохастической чувствительности цикла в целом является величина

$$m = \max_{t\in[0,T]} \mu(t).$$

Отметим, что для мультипликатора ρ_2 справедливо [292] явное представление:

$$\rho_2 = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T a(t)dt\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T a_0(t)dt + \int_0^T \beta^\top(t)k(t)dt\right).$$

Неравенство $\rho_2 < 1$ является критерием экспоненциальной орбитальной устойчивости детерминированного цикла Γ. Из этого критерия непосредственно следуют два утверждения.

Утверждение 4.3. Множество $\mathbb{K}$ матриц $K(t)$ регуляторов (4.2.82), стабилизирующих цикл Γ системы (4.2.75), задается условием

$$\int_0^T \beta^\top(t)K(t)p(t)dt < -\frac{1}{2}\int_0^T a_0(t)dt. \tag{4.2.94}$$

Утверждение 4.4. Пусть цикл Γ системы (4.2.75) при $u = 0$ неустойчив $\left(\int_0^T a_0(t)dt \geq 0\right)$. Необходимым и достаточным условием стабилизируемости ($\mathbb{K} \neq \emptyset$) является требование $\beta(t) \not\equiv 0$.

Таким образом, решение задачи формирования наперед заданной функции стохастической чувствительности $\mu(t)$ цикла Γ системы (4.2.73) с регулятором (4.2.82) сводится к решению системы уравнений:

$$\beta^\top(t)k(t) = \frac{\dot{\mu} - a_0(t)\mu - b(t)}{2\mu}, \tag{4.2.95}$$

$$K(t)p(t) = k(t) \tag{4.2.96}$$

относительно искомой матрицы $K(t)$, удовлетворяющей неравенству (4.2.94).

Здесь допустимые функции стохастической чувствительности составляют множество $\mathbb{M} = \{\mu(t) \in C^1[0,T] \,\Big|\, \mu(0) = \mu(T),\ \mu(t) > 0\}$.

Отметим, что с формальной точки зрения система (4.2.95),(4.2.96) является эквивалентом общей системы (4.2.81),(4.2.83) в рассматриваемом здесь двумерном случае.

Утверждение 4.5. Для того чтобы замкнутая система (4.2.73), (4.2.82) имела заданную функцию стохастической чувствительности $\mu(t) \in \mathbb{M}$, необходимо и достаточно, чтобы матрица $K(t)$ обратной связи (4.2.82) удовлетворяла системе (4.2.95), (4.2.96) и неравенству (4.2.94).

Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из соотношений (4.2.92), (4.2.93) и утверждения 4.3.

При решении системы (4.2.95), (4.2.96) возможны разные случаи.

Полная стохастическая управляемость

Рассмотрим уравнение (4.2.95). Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4.6. Для того чтобы уравнение (4.2.95) было разрешимо при любой функции $\mu(t) \in \mathbb{M}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall\, t \in [0, T] \quad \beta(t) \neq 0. \tag{4.2.97}$$

При условии (4.2.97) для любой наперед заданной $\bar{\mu} \in \mathbb{M}$ система (4.2.95), (4.2.96) имеет бесконечное множество решений, т. е. регулятор, формирующий заданную функцию стохастической чувствительности, не является единственным. Регуляризация этой некорректной задачи может быть обеспечена за счет введения дополнительных условий оптимизации. Рассмотрим два способа, позволяющих обеспечить единственность решения задачи.

Первый способ предполагает введение формального дополнительного условия оптимальности

$$\|k(t)\|^2 \longrightarrow \min\,. \tag{4.2.98}$$

Утверждение 4.7. Пусть выполняется условие (4.2.97). Тогда решение задачи (4.2.95), (4.2.98) единственно и имеет вид

$$k(t) = \frac{\alpha(t)\beta(t)}{\beta^\top(t)\beta(t)}, \qquad \alpha(t) = \frac{\dot{\mu} - a_0(t)\mu - b(t)}{2\mu}. \tag{4.2.99}$$

Доказательство этого утверждения вытекает из теории нормальных псевдорешений [258].

Подставляя найденное $k(t)$ в (4.2.96), получим для матрицы $K(t)$ регулятора (4.2.82) уравнение

$$K(t)p(t) = \frac{\alpha(t)}{\beta^\top(t)\beta(t)} B^\top p(t). \tag{4.2.100}$$

Уравнение (4.2.100) всегда разрешимо. Его решением, например, является матрица $K(t) = \dfrac{\alpha(t)}{\beta^\top(t)\beta(t)} B^\top(t)$.

Добавив вновь условие оптимальности

$$\|K(t)\|^2 \longrightarrow \min, \tag{4.2.101}$$

получим единственное решение

$$K(t) = k(t)p^\top(t), \tag{4.2.102}$$

где $k(t)$ удовлетворяет (4.2.99).

В качестве альтернативного способа обеспечения единственности решения системы (4.2.95), (4.2.96) рассмотрим задачу поиска оптимального управления, минимизирующего затраты (4.2.89) на синтез заданной функции чувствительности. В рассматриваемом здесь случае для функции затрат справедливо представление

$$J_t = \varepsilon^2 \mu(t) k^\top(t) R k(t). \tag{4.2.103}$$

Добавив к уравнению (4.2.95) критерий

$$J_t \longrightarrow \min,$$

переходим к задаче минимизации, единственное решение которой имеет вид

$$\bar{k}(t) = \frac{\alpha(t) R^{-1} \beta(t)}{\beta^\top(t) R^{-1} \beta(t)}, \tag{4.2.104}$$

а соответствующее ему минимальное значение функции затрат может быть найдено по формуле

$$\bar{J}_t = \frac{\varepsilon^2 \mu(t) \alpha^2(t)}{\beta^\top(t) R^{-1} \beta(t)}. \tag{4.2.105}$$

При этом $\bar{K}(t) = \bar{k}(t) p^\top(t)$.

Таким образом, при условии (4.2.97) всегда можно выбором матрицы $K(t)$ регулятора (4.2.82) синтезировать в замкнутой системе (4.2.73), (4.2.82) любую наперед заданную функцию стохастической чувствительности $\mu \in \mathbb{M}$. В этом случае цикл в системе (4.2.73), (4.2.82) будем называть *полностью стохастически управляемым.*

В случае постоянных матриц $B(t) \equiv B$ условие (4.2.97) эквивалентно требованию $\operatorname{rank}(B) = 2$. Таким образом, в системах, у которых матрица B полного ранга, имеем полную стохастическую управляемость. В случае, когда матрица B имеет неполный ранг, задача синтеза стохастической чувствительности становится некорректной и требует дополнительных процедур регуляризации.

4.2.5. Регуляризация в задаче управления циклами на плоскости

В случае $\operatorname{rank}(B) = 1$ вектор-функция $\beta(t)$ может обращаться в ноль, что приводит к невозможности синтеза некоторых функций из $\mathbb{M}$. Последнее означает неполную стохастическую управляемость. Далее подробно исследуем этот случай.

Пусть на отрезке $[0,T]$ существует непустое множество I, на котором $\beta(t)$ обращается в ноль:

$$\begin{array}{ll} \forall t \in I & \beta(t)=0, \\ \forall t \in [0,T]\backslash I & \beta(t)\neq 0. \end{array}$$

В этом случае все достижимые функции стохастической чувствительности составляют множество $\mathbb{A}=\{\mu(t)\in\mathbb{M}|\ \ \forall t\in I \quad \dot{\mu}=a_0(t)\mu+b(t)\}$.

Утверждение 4.8. Система (4.2.95), (4.2.96) разрешима при любой функции $\mu(t)$ из множества достижимости $\mathbb{A}$. При этом матрица $K(t)$ оптимального регулятора, синтезирующего $\mu(t)\in\mathbb{A}$ с критерием (4.2.103), задается следующим образом:

$$K(t)=\begin{cases} \dfrac{\alpha(t)R^{-1}\beta(t)p^{\top}(t)}{\beta^{\top}(t)R^{-1}\beta(t)}, & t\in[0,T]\backslash I, \\ 0, & t\in I. \end{cases}$$

Доказательство. Разрешимость системы (4.2.95), (4.2.96) доказывается прямой подстановкой заданного $K(t)$, а оптимальность следует из (4.2.104).

Рассмотрим ситуацию, когда желаемая функция чувствительности не является достижимой. В этом случае естественной представляется задача синтеза функции чувствительности, близкой к желаемой.

Пусть желаемая функция стохастической чувствительности $\mu(t)$ такова, что на некотором подмножестве I_α множества I функция $\alpha(t)$ не равна нулю. Тогда уравнение (4.2.95) неразрешимо. Это означает, что не всякая функция $\mu\in\mathbb{M}$ является достижимой. Таким образом, здесь возникает необходимость решения некорректной задачи: система (4.2.95), (4.2.96) на множестве I_α несовместна, а в остальных точках интервала $[0,T]$ она имеет бесконечное множество решений.

В данном разделе для этой некорректной задачи рассматривается следующий метод регуляризации.

Изложим предлагаемый метод для достаточно распространенного случая, когда матрица B постоянна и имеет ранг, равный единице: $B=b$, где b – постоянный двумерный вектор. Тогда скалярная функция $\beta(t)=b^{\top}p(t)$ обращается в ноль в точках цикла, где касательная к циклу параллельна вектору b. Для любого цикла таких точек по крайней мере две. Пусть $\beta(t_{1,2})=0$, а в остальных точках интервала $[0,T]$ выполнено условие $\beta(t)\neq 0$. Обозначим через $\bar{\mu}(t)$ желаемую функцию стохастической чувствительности. Уравнение

(4.2.95) для скалярной функции $k(t)$ имеет вид:

$$\beta(t)k(t) = \alpha(t) = \frac{\dot{\bar{\mu}} - a_0(t)\bar{\mu} - b(t)}{2\bar{\mu}}. \tag{4.2.106}$$

Формальное решение $k(t) = \alpha(t)/\beta(t)$ уравнения (4.2.106) вблизи точек t_1, t_2 при $\alpha(t_{1,2}) \neq 0$ неограниченно возрастает. Чтобы избежать возникающей вырожденности, связанной с неограниченным ростом $k(t)$, проведём следующую процедуру регуляризации.

Рассмотрим малые интервалы $I_1 = [t_1 - \delta, t_1 + \delta]$, $I_2 = [t_2 - \delta, t_2 + \delta]$. Величина δ играет роль параметра регуляризации. На интервалах I_1, I_2 положим $k(t) \equiv 0$. Тогда динамика реальной функции чувствительности $\mu(t)$ на $I_{1,2}$ не зависит от управления и определяется свойствами системы (4.2.73) при $u = 0$. Связь значений $\mu(t_i - \delta)$ и $\mu(t_i + \delta)$ функции $\mu(t)$ на концах интервала I_i находится из решения соответствующих задач Коши. Действительно, $\mu(t_i + \delta) = m(t_i + \delta)$, где $m(t)$ – решение уравнения

$$\dot{m} = a_0(t)m + b(t) \tag{4.2.107}$$

с начальным условием

$$m(t_i - \delta) = \mu(t_i - \delta). \tag{4.2.108}$$

Связь между значениями $\mu(t_i - \delta)$ и $\mu(t_i + \delta)$ можно найти в явном виде

$$\mu(t_i + \delta) = \varphi_i \mu(t_i - \delta) + \psi_i, \tag{4.2.109}$$

где $\varphi_i = \varphi(t_i + \delta)$, $\psi_i = \psi(t_i + \delta)$, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ являются решениями задач Коши:

$$\begin{aligned} &\dot{\varphi} = a_0(t)\varphi, && \varphi(t_i - \delta) = 1, \\ &\dot{\psi} = a_0(t)\psi + b(t), && \psi(t_i - \delta) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.110}$$

и имеют явное представление

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_i-\delta}^{t} a_0(s)ds\right), \quad \psi(t) = \varphi(t)\int_{t_i-\delta}^{t} \frac{b(s)}{\varphi(s)}ds. \tag{4.2.111}$$

На следующем шаге процедуры регуляризации проведём "склейку" значений функции $\mu(t)$ на правом конце отрезка I_i со значением $\bar{\mu}(t_i{+}2\delta)$ заданной функции $\bar{\mu}(t)$ в точке $t_i + 2\delta$. Чтобы добиться непрерывности $\mu(t)$ и избежать разрыва на правом конце интервала I_i, на отрезке $\hat{I}_i = [t_i + \delta, t_i + 2\delta]$ будем задавать функцию $\mu(t)$ как линейную функцию $\upsilon(t)$ с условиями интерполяции:

$$\upsilon(t_i + \delta) = \mu(t_i + \delta), \qquad \upsilon(t_i + 2\delta) = \bar{\mu}(t_i + 2\delta). \tag{4.2.112}$$

Итак, множество достижимости в классе δ-регуляризованных управлений составляют функции $\mu(t)$, построенные следующим образом:

а) на $[0,T]/(I_1 \cup I_2 \cup \hat{I}_1 \cup \hat{I}_2)$ функция $\mu(t)$ совпадает с наперед заданной произвольной функцией $\bar{\mu}(t) \in \mathbb{M}$. Коэффициент оптимального регулятора $K(t)$, соответствующий заданной функции $\bar{\mu}(t)$, на этом участке траектории задаётся формулой $K(t) = \dfrac{\alpha(t)}{\beta(t)} p^\top(t)$;

б) значение $\mu(t)$ внутри интервалов I_1 и I_2 определяется решением уравнения (4.2.107) с начальными значениями (4.2.108);

в) на интервалах $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$ задаем $\mu(t) = v(t)$, где $v(t)$ – линейная функция, построенная по правилу (4.2.112).

Конструируемые таким образом функции $\mu(t)$ являются непрерывными, а их производные могут иметь разрывы в точках $t_i + \delta$ и $t_i + 2\delta$. Функция $\mu(t)$ отличается от заданной $\bar{\mu}(t)$ только на множестве $L = I_1 \cup I_2 \cup \hat{I}_1 \cup \hat{I}_2$. При малых δ значения $\mu(t)$ на L близки к значениям заданной функции $\bar{\mu}(t)$.

Таким образом, описанный здесь метод регуляризации основан на замене недостижимой функции стохастической чувствительности некоторой близкой достижимой.

Второй способ регуляризации

Для решения обсуждаемой здесь некорректной задачи может быть применен и более общий метод, использующий регуляризацию Тихонова [293].

В соответствии с этим методом решение уравнения (4.2.95) сводится к минимизации квадратичной функции:

$$\left(\beta^\top(t)k(t) - \alpha(t)\right)^2 + \delta\|k(t)\|^2 \longrightarrow \min. \tag{4.2.113}$$

Здесь δ – малый положительный параметр регуляризации. Задача (4.2.113) всегда имеет единственное решение

$$k(t) = \frac{\alpha(t)}{\beta^\top(t)\beta(t) + \delta} \cdot \beta(t). \tag{4.2.114}$$

Из (4.2.96), (4.2.114) получаем уравнение для матрицы $K(t)$ обратной связи регулятора (4.2.82):

$$K(t)p(t) = \frac{\alpha(t)}{p^\top(t)B(t)B^\top(t)p(t) + \delta}\, B^\top p(t). \tag{4.2.115}$$

Это уравнение всегда разрешимо. Очевидно, матрица

$$K(t) = \frac{\alpha(t)}{p^\top(t)B(t)B^\top(t)p(t) + \delta}\, B^\top$$

является одним из его решений.

Если добавить условие оптимальности $\|K(t)\|^2 \longrightarrow \min$, то единственным оптимальным решением будет

$$K(t) = \frac{\alpha(t)}{p^\top(t)B(t)B^\top(t)p(t) + \delta}\, B^\top p(t)p^\top(t). \tag{4.2.116}$$

Рассмотрим случай $m = 1$, когда система (4.2.73) имеет единственное скалярное управляющее воздействие. В этом случае $B(t)$ – двумерный вектор-столбец, $\beta(t) = B^\top(t)p(t)$ – скалярная функция,

$$k(t) = \frac{\alpha(t)\beta(t)}{\beta^2(t) + \delta}$$

в (4.2.114) – скалярная функция, и двумерная вектор-строка $K(t)$ в (4.2.116) может быть записана как

$$K(t) = k(t)p^\top(t). \tag{4.2.117}$$

В этом случае регулятор (4.2.82) имеет явное представление:

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2) \;\; = \;\; & k(t(x_1, x_2))[p_1(t(x_1, x_2))(x_1 - \bar{x}_1(t(x_1, x_2)))+ \\ & +p_2(t(x_1, x_2))(x_2 - \bar{x}_2(t(x_1, x_2)))]. \end{aligned} \tag{4.2.118}$$

Пример. Управление циклом стохастического брюсселятора

Рассмотрим стохастически возмущённую модель брюсселятора с управлением:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + u + \varepsilon\dot{w}_1, \qquad && f_1(x_1, x_2) = a - (b+1)x_1 + x_1^2 x_2, \\ &\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + \varepsilon\dot{w}_2, && f_2(x_1, x_2) = bx_1 - x_1^2 x_2, \end{aligned} \tag{4.2.119}$$

где w_1, w_2 – независимые винеровские процессы, ε – интенсивность случайных возмущений, u – управление.

При $u = 0$ соответствующая детерминированная система ($\varepsilon = 0$) для $b > b^* = 1 + a^2$ имеет устойчивый предельный цикл Γ, задаваемый T-периодическим решением $(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t))$.

В присутствии стохастических возмущений ($\varepsilon \neq 0$) случайные траектории покидают детерминированный цикл и формируют вокруг него некоторый стохастический аттрактор. На рис. 4.2.10 серым цветом приведены случайные траектории стохастического брюсселятора с параметрами $a = 0.4,\ b = 1.2,\ \varepsilon = 0.001$, а черным – соответствующий детерминированный цикл. Расчеты проводились методом Рунге–Кутта четвертого порядка с шагом по времени $h = 0.001$. Видно, что разброс случайных траекторий вдоль цикла весьма неравномерный. График функции стохастической чувствительности для этого случая приведён на рис. 4.2.11. Как видим, значительный разброс случайных траекторий вокруг детерминированного цикла на рис. 4.2.10 объясняется большими значениями функции стохастической чувствительности. Здесь коэффициент стохастической чувствительности $m = 574$.

Рассмотрим задачу конструирования регулятора

$$u(x_1, x_2) = k_1(t(x_1, x_2))(x_1 - \bar{x}_1(t(x_1, x_2))) + k_2(t(x_1, x_2))(x_2 - \bar{x}_2(t(x_1, x_2))), \tag{4.2.120}$$

формирующего у цикла брюсселятора заранее заданную функцию стохастической чувствительности $\bar{\mu}(t) \in \mathbb{M}$.

В данном примере

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ p(t) = \frac{1}{\sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}} \begin{pmatrix} f_2(t) \\ -f_1(t) \end{pmatrix}, \ \begin{array}{c} f_1(t) = f_1(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)), \\ f_2(t) = f_2(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)) \end{array}.$$

Поскольку $\mathrm{rank}(B) = 1$, то цикл в системе (4.2.119), (4.2.120) не будет полностью стохастически управляемым. Действительно, функция

$$\beta(t) = B^\top p(t) = \frac{f_2(t)}{\sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}}$$

обращается в ноль в точках t_1 и t_2, где $f_2 = 0$.

В данном примере система (4.2.95), (4.2.96), связывающая параметры $k_1(t), k_2(t)$ регулятора (4.2.120) с заданной функцией $\bar{\mu}(t)$, имеет вид:

$$\frac{f_2(t)}{\sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}} k(t) = \alpha(t), \qquad \frac{f_2(t)k_1(t) - f_1(t)k_2(t)}{\sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)}} = k(t), \tag{4.2.121}$$

где

$$\alpha(t) = \frac{\dot{\bar{\mu}}(t) - a_0(t)\bar{\mu}(t) - b(t)}{2\bar{\mu}(t)}.$$

Видно, что данная система является вырожденной в точках t_1 и t_2, где $f_2 = 0$.

Применим первый метод регуляризации.

Введем параметр δ, характеризующий размер интервалов I_1, I_2 – окрестностей точек t_1, t_2. Построим регулятор u_δ, обеспечивающий δ-достижимость любой функции $\bar{\mu}(t) \in \mathbb{M}$.

Вне множества $I_1 \cup I_2 \cup \hat{I}_1 \cup \hat{I}_2$ коэффициенты $k_1(t)$, $k_2(t)$ регулятора (4.2.120), формирующего заданную функцию $\bar{\mu}(t)$, удовлетворяют уравнению, вытекающему из системы (4.2.121),

$$f_2^2(t)k_1(t) - f_1(t)f_2(t)k_2(t) = \alpha(t)\left(f_1^2(t) + f_2^2(t)\right). \tag{4.2.122}$$

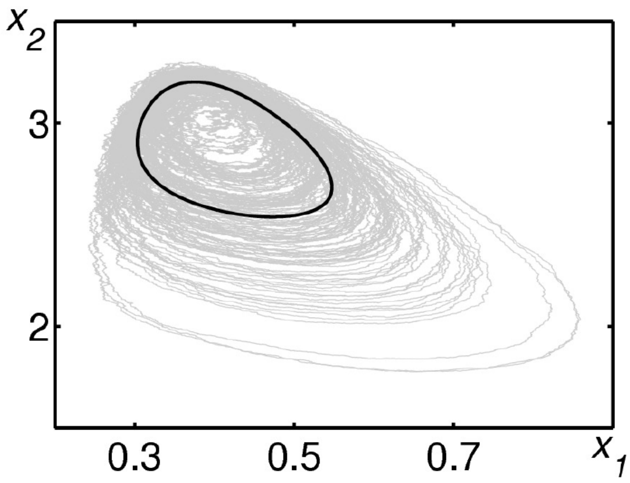


Рис. 4.2.10 – Случайные траектории стохастического брюсселятора с параметрами $a = 0.4,\ b = 1.2,\ \varepsilon = 0.001$ без управления (серый цвет); предельный цикл детерминированного брюсселятора (черный цвет).

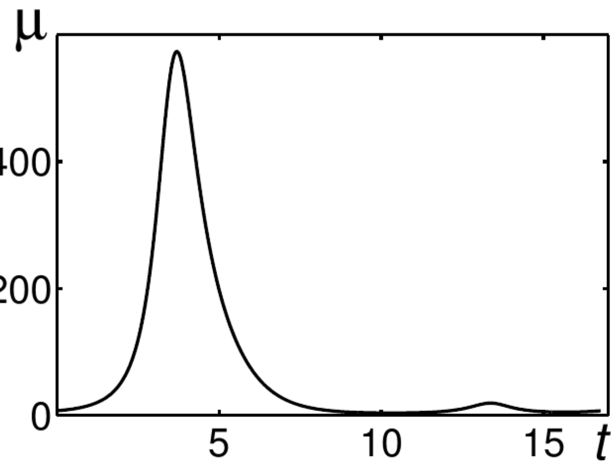


Рис. 4.2.11 – Функция стохастической чувствительности цикла брюсселятора с $a = 0.4,\ b = 1.2$ без управления.

Взяв в качестве дополнительного критерия оптимальности требование

$$k_1^2(t) + k_2^2(t) \longrightarrow \min,$$

получим единственное решение

$$k_1(t) = \alpha(t), \qquad k_2(t) = -\alpha(t)\frac{f_1(t)}{f_2(t)}. \tag{4.2.123}$$

На участке траектории, соответствующей моментам времени $t \in I_i$, положим $k_1(t) \equiv k_2(t) \equiv 0$.

Таким образом, осталось лишь доопределить значения $k_1(t)$ и $k_2(t)$ при $t \in \hat{I}_i = [t_i + \delta, t_i + 2\delta]$. Здесь, как и ранее, значения коэффициентов регулятора определяются по формулам (4.2.123), в которых

$$\alpha(t) = \frac{\dot{\upsilon}(t) - a_0(t)\upsilon(t) - b(t)}{2\upsilon(t)},$$

а линейная функция $\upsilon(t)$ находится по условиям (4.2.112) и задана явно следующим образом

$$\upsilon(t) = C_1 t + C_2, \;\; C_1 = \frac{\bar{\mu}(t_i + 2\delta) - \mu(t_i + \delta)}{\delta}, \;\; C_2 = \mu(t_i + \delta) - C_1(t_i + \delta), \tag{4.2.124}$$

где значение $\mu(t_i + \delta)$ задано по (4.2.109).

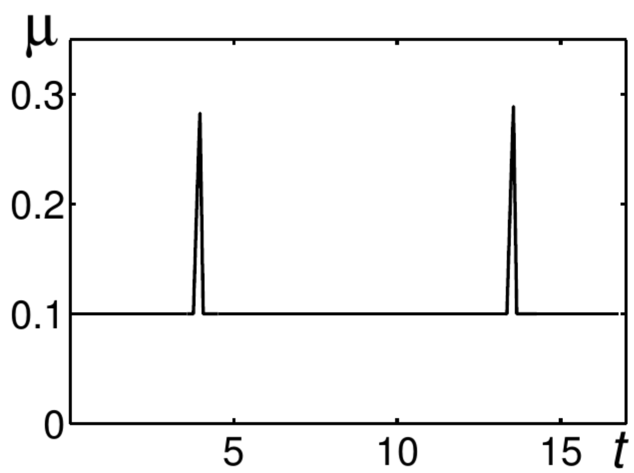


Рис. 4.2.12 – Функция стохастической чувствительности цикла брюсселятора с $a = 0.4,\ b = 1.2$ и регулятором для $\bar{\mu} = 0.1,\ \delta = 0.1$.

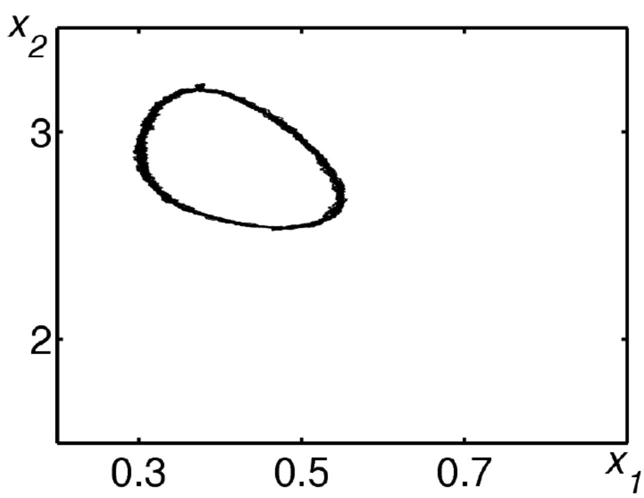


Рис. 4.2.13 – Стохастический брюсселятор с параметрами $a = 0.4,\ b = 1.2,\ \varepsilon = 0.001$ и регулятором для $\bar{\mu} = 0.1,\ \delta = 0.1$.

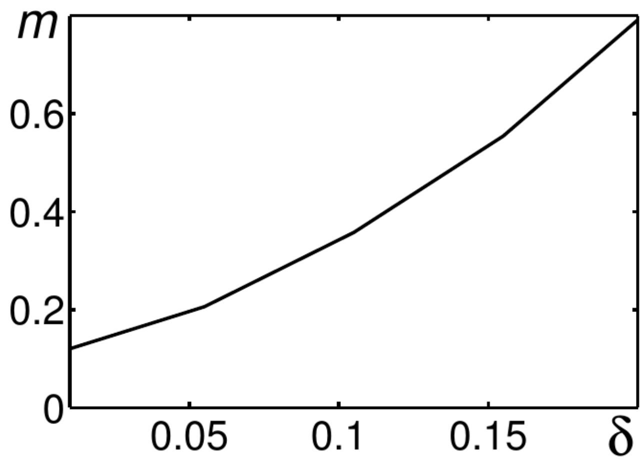


Рис. 4.2.14 – Зависимость коэффициента стохастической чувствительности цикла замкнутой системы от параметра регуляризации.

Возьмём $\bar{\mu} \equiv 0.1$ на всем интервале $[0, T]$. Такой выбор функции стохастической чувствительности обусловлен желанием получить пучок случайных траекторий с малым равномерным разбросом вокруг детерминированного цикла.

График функции стохастической чувствительности замкнутой системы (4.2.119) для $a = 0.4,\ b = 1.2$ с регулятором (4.2.120), соответствующим назначенной функции $\bar{\mu}$ и параметру $\delta = 0.1$, приведён на рис. 4.2.12. Здесь функция стохастической чувствительности отличается от назначенной $\bar{\mu} \equiv 0,1$ на малых интервалах, где имеет всплески, не превосходящие значения $m = 0.29$. Как видим, построенное управление, использующее δ-регуляризацию, уже при $\delta = 0.1$ позволило существенно уменьшить стохастическую чувствительность (для системы без управления $m = 574$) и на большей части интервала $[0, T]$ удерживать ее на уровне назначенной.

На рис. 4.2.13 приведены результаты прямого численного моделирования случайных траекторий построенной управляемой системы. Снижение уровня стохастической чувствительности позволило локализовать случайные траектории вблизи детерминированного цикла.

Уровень всплесков функции стохастической чувствительности может быть снижен за счет уменьшения параметра регуляризации δ (см. рис. 4.2.14).

Результаты этого раздела опубликованы в работ [202] автора диссертации.

4.2.6. Управление стохастическими циклами трехмерных систем

В данном разделе метод построения регулятора основан на технике сингулярного разложения для синтезируемой матрицы стохастической чувствительности цикла трехмерной стохастической нелинейной системы (см. раздел 2.2.3). Для параметров регулятора получены явные формулы. Конструктивность развитой теории иллюстрируется на примере стабилизации цикла для стохастических модели Лоренца в зоне индуцированных шумом переходов к хаосу. Построенный регулятор позволяет снизить стохастическую чувствительность цикла и подавить хаос.

Для описания матрицы стохастической чувствительности $W(t)$ будем использовать сингулярное разложение

$$W(t) = \lambda_1(t)v_1(t)v_1^\top(t) + \lambda_2(t)v_2(t)v_2^\top(t). \tag{4.2.125}$$

Здесь $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq 0$ – собственные числа, а $v_1(t), v_2(t)$ – ортонормированные собственные векторы матрицы $W(t)$. Обозначим через $g_1(t),\ g_2(t)$ некоторый ортонормированный базис плоскости, ортогональной циклу в точке $\bar{x}(t)$. Собственные векторы $v_1(t),\ v_2(t)$ могут быть найдены вращением базиса $g_1(t),\ g_2(t)$ на некоторый угол $\varphi(t)$

$$\begin{aligned} v_1(t) &= g_1(t)\cos\varphi(t) + g_2(t)\sin\varphi(t),\\ v_2(t) &= -g_1(t)\sin\varphi(t) + g_2(t)\cos\varphi(t). \end{aligned} \tag{4.2.126}$$

В результате, разложение (4.2.125), (4.2.126) позволяет параметризовать матрицу стохастической чувствительности $W(t)$ при помощи трех скалярных функций $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \varphi(t)$ (см. главу 2). Благодаря такому разложению, задача синтеза требуемой матрицы $W(t)$ сводится к синтезу трех скалярных T-периодических гладких функций $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \varphi(t)$. При этом матрица $K(t)$ регулятора (4.2.82) связана с этими функциями системой трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} &v_1^\top(t)[B(t)K(t) + K^\top(t)B^\top(t)]v_1(t) = \alpha_1(t)\\ &v_2^\top(t)[B(t)K(t) + K^\top(t)B^\top(t)]v_2(t) = \alpha_2(t)\\ &\lambda_2(t)v_1^\top(t)B(t)K(t)v_2(t) + \lambda_1(t)v_1^\top(t)K^\top(t)B^\top(t)v_2(t) = \alpha_3(t). \end{aligned} \tag{4.2.127}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \frac{\dot\lambda_1 - v_1^\top S v_1}{\lambda_1} - v_1^\top[F + F^\top]v_1\\ \alpha_2(t) &= \frac{\dot\lambda_2 - v_2^\top S v_2}{\lambda_2} - v_2^\top[F + F^\top]v_2\\ \alpha_3(t) &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\dot\varphi + \dot g_1^\top g_2) - \lambda_2 v_1^\top F v_2 - \lambda_1 v_1^\top F^\top v_2 - v_1^\top S v_2. \end{aligned} \tag{4.2.128}$$

Таким образом, задача достижимости назначенной матричной функции стохастической чувствительности $W(t)$ сводится к проблеме разрешимости алгебраической системы (4.2.127), (4.2.128). Полный анализ достижимости требует исследования связей между матрицами $F(t),\ B(t),\ S(t)$, векторами $g_1(t),\ g_2(t)$ и тремя скалярными функциями $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \varphi(t)$, которые задают матрицу стохастической чувствительности $W(t)$.

Для того, чтобы продемонстрировать конструктивность предлагаемого подхода к управлению циклами трехмерных стохастических систем, ограничимся здесь частным, но важным случаем $\mathrm{rank}(B) = 3$. Не теряя общности, можно считать $B = I$, где I – единичная 3×3-матрица.

Представим матрицу $K(t)$ обратной связи в следующей параметрической форме:

$$K(t) = k_1(t)v_1(t)v_1^\top(t) + k_2(t)v_2(t)v_2^\top(t) + k_3(t)v_1(t)v_2^\top(t) + k_4(t)v_2(t)v_1^\top(t), \tag{4.2.129}$$

где $k_i(t)(i = 1, 2, 3, 4)$ – неизвестные скалярные функции. Геометрическая структура этой матрицы гарантирует выполнение условия (4.2.81).

Подставляя $K(t)$ из (4.2.129) в систему (4.2.127), получаем

$$\begin{aligned} &2k_1 = \alpha_1, \qquad 2k_2 = \alpha_2, \\ &\lambda_2 k_3 + \lambda_1 k_4 = \alpha_3. \end{aligned} \tag{4.2.130}$$

Параметры $k_1 = \alpha_1/2$ и $k_2 = \alpha_2/2$ находятся однозначно. Параметры $k_3,\ k_4$ находятся неединственным образом. Однозначный выбор может быть обеспечен дополнительным условием минимальности затрат на управление. Для этого случая локальные затраты на управление имеют вид

$$J(t) = \varepsilon^2 \left[\lambda_1(k_1^2 + k_4^2) + \lambda_2(k_2^2 + k_3^2)\right].$$

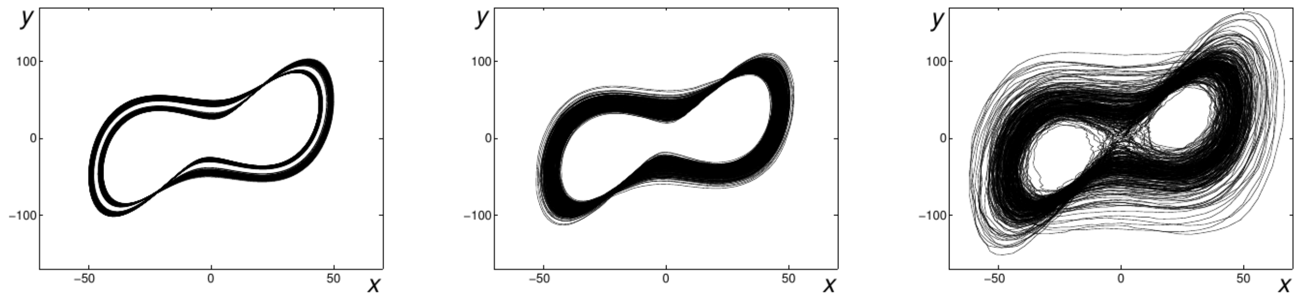
Отсюда можно найти единственные оптимальные значения $k_3 = k_4 = \alpha_3/(\lambda_1 + \lambda_2)$ и

$$\min J(t) = \varepsilon^2 \left[\frac{\lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2}{4} + \frac{\alpha_3^2}{\lambda_1 + \lambda_2}\right].$$

Таким образом, для матрицы обратной связи $K(t)$ имеем следующий набор оптимальных коэффициентов:

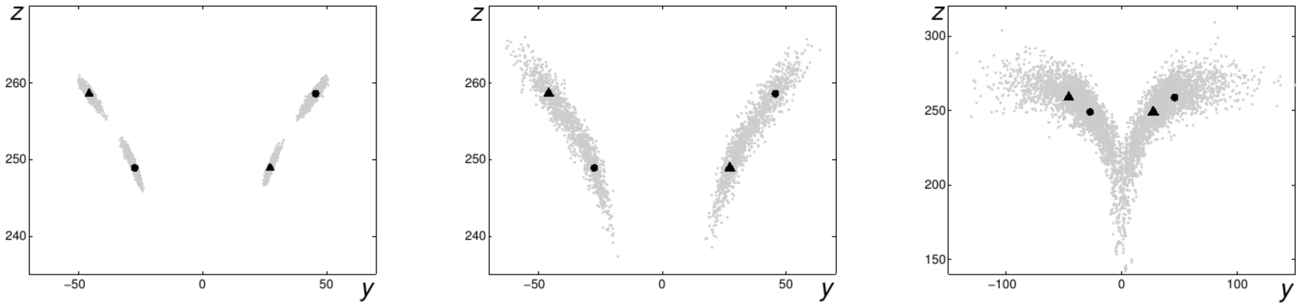
$$k_1 = \alpha_1/2,\ k_2 = \alpha_2/2,\ k_3 = k_4 = \alpha_3/(\lambda_1 + \lambda_2). \tag{4.2.131}$$

Как видим, в случае $\mathrm{rank}(B) = 3$ предложенный метод позволяет синтезировать любую матрицу стохастической чувствительности $W(t)$.



а) б) в)

Рис. 4.2.15 – Стохастические траектории системы Лоренца без управления при а) $\varepsilon = 0.5$, б) $\varepsilon = 2$, в) $\varepsilon = 10$.



а) б) в)

Рис. 4.2.16 – Случайные состояния в сечении Пуанкаре $x = 0$ для системы Лоренца без управления при а) $\varepsilon = 0.5$, б) $\varepsilon = 2$, в) $\varepsilon = 10$.

Рассмотрим стохастическую управляемую систему Лоренца:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) + u_1 + \varepsilon \dot{w}_1 \\ \dot{y} &= rx - y - xz + u_2 + \varepsilon \dot{w}_2 \\ \dot{z} &= -bz + xy + u_3 + \varepsilon \dot{w}_3. \end{aligned} \tag{4.2.132}$$

Здесь $u_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ – управления, $w_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ – независимые стандартные винеровские процессы с параметрами $E(w_i(t) - w_i(s)) = 0$, $E(w_i(t) - w_i(s))^2 = |t - s|$, а ε – интенсивность шума.

Зафиксируем параметры $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 300$. Рассмотрим сначала систему Лоренца без управления ($u_i = 0, i = 1, 2, 3$). При $\varepsilon = 0$ детерминированная система Лоренца (4.2.132) имеет два сосуществующих предельных цикла (см. рис. 3.1.15).

Под воздействием случайных возмущений $\varepsilon > 0$ стохастические траектории покидают детерминированную орбиту и при малых шумах концентрируются в окрестности соответствующих детерминированных циклов (см. рис. 4.2.15а для $\varepsilon = 0.5$). При увеличении шума разброс увеличивается, и два отдельных пучка случайных траекторий приближаются друг к другу и перемешиваются. Как видно из рис. 4.2.15б для $\varepsilon = 2$, шум трансформирует два несимметричных предельных цикла в один единый симметричный стохастический аттрактор. При дальнейшем увеличении шума (см. рис. 4.2.15в для $\varepsilon = 10$) индуцированные шумом переходы возникают и в центральной части стохастического аттрактора.

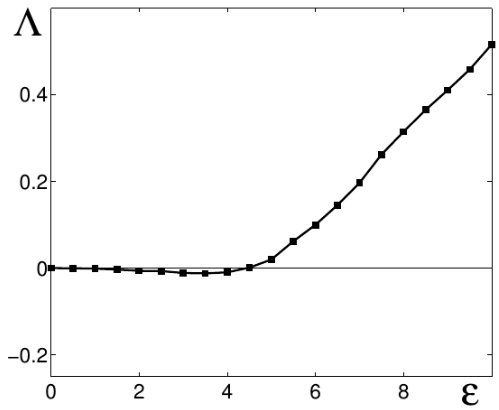


Рис. 4.2.17 – Старший показатель Ляпунова для стохастической системы Лоренца без управления.

На рис. 4.2.16 изображены стохастические состояния в сечении Пуанкаре $x = 0$ для трех значений интенсивности шума: $\varepsilon = 0.5,\ 2,\ 10$. Здесь точки пересечения двух невозмущенных детерминированных циклов изображены черными кружками и треугольниками.

Такие изменения формы стохастических траекторий сопровождаются изменением старшего показателя Ляпунова Λ. На рис. 4.2.17 представлен график $\Lambda(\varepsilon)$. Здесь $\Lambda(0) = 0$, и для малых $\varepsilon > 0$ функция Λ близка к нулю. После некоторого порогового значения $\varepsilon^* \approx 4.6$ функция $\Lambda(\varepsilon)$ становится положительной. Положительность Λ означает, что соответствующий стохастический аттрактор является хаотическим.

Причиной вызванной шумом дестабилизации цикла, сопровождающейся переходом от порядка к хаосу, является высокий уровень стохастической чувствительности детерминированного цикла исходной системы без управления. На рис. 3.1.17 изображены собственные значения $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t)$ матрицы стохастической чувствительности.

Для того, чтобы уменьшить разброс случайных траекторий вокруг детерминированного цикла и подавить нежелательный переход к хаосу, следует построить регулятор, обеспечивающий низкий уровень стохастической чувствительности. Таким образом, целью управления является синтез стохастического цикла с малыми постоянными значениями $\lambda_1(t) = \lambda_2(t) = \lambda$ и

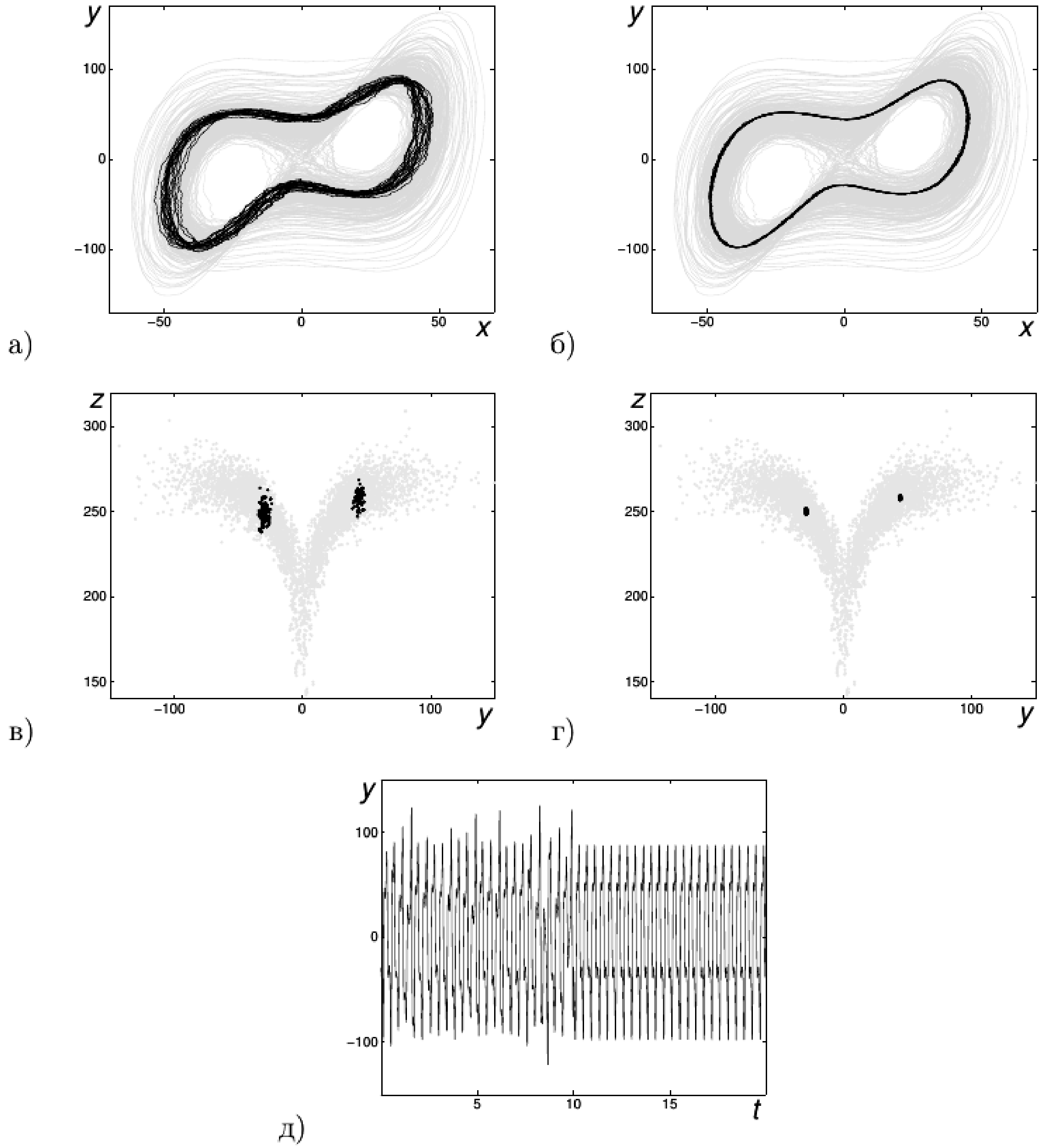


Рис. 4.2.18 – Стохастические аттракторы системы Лоренца без управления (серый) и с управлением (черный) при $\varepsilon = 10$ и а),в) $\lambda = 0.05$; б),г) $\lambda = 0.001$; д) координата y случайной траектории стохастической системы при $\varepsilon = 10$. Управление, синтезирующее $\lambda = 0.001$, включается в момент $t = 10$.

$\varphi(t) \equiv 0$. Такой выбор диктуется требованием синтеза колебательной системы с равномерно малой стохастической чувствительностью цикла. В этом случае $v_i(t) \equiv g_i(t)$ и из (4.2.128), (4.2.131) следует, что

$$k_1 = -\frac{1 + \lambda g_1^\top [F + F^\top] g_1}{2\lambda}, k_2 = -\frac{1 + \lambda g_2^\top [F + F^\top] g_2}{2\lambda}, k_3 = k_4 = -\frac{\lambda g_1^\top [F + F^\top] g_2}{2},$$

где

$$F(t) = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z(t) & -1 & -x(t) \\ y(t) & x(t) & -b \end{bmatrix},$$

T-периодические функции $x(t), y(t), z(t)$ – координаты детерминированного цикла.

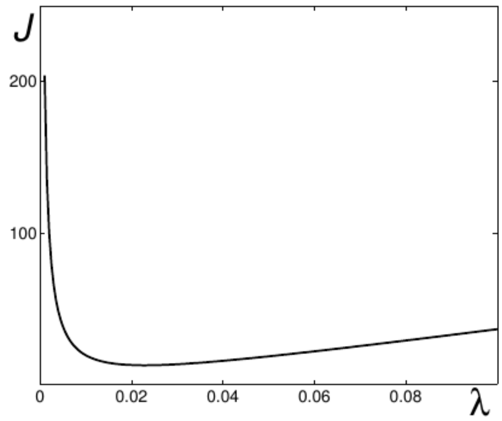


Рис. 4.2.19 – Функция затрат на управление.

На рис. 4.2.18 продемонстрированы результаты такого управления. Здесь серым цветом изображены стохастические траектории (см. рис. 4.2.18а,б) и точки пересечения (рис. 4.2.18в,г) с сечением Пуанкаре $x = 0$ для системы Лоренца без управления при $\varepsilon = 10$. Рассмотрим два варианта управления, синтезирующего различные малые значения стохастической чувствительности $\lambda = 0.05$ (рис. 4.2.18а,в, черный цвет) и $\lambda = 0.001$ (рис. 4.2.18б,г, черный цвет). Как видим, состояния управляемого стохастического цикла близки к орбите детерминированного цикла, и их дисперсия уменьшается при уменьшении уровня назначенной чувствительности λ.

На рис. 4.2.18д для $\varepsilon = 10$ изображена траектория системы Лоренца без управления на временном промежутке $0 \leq t \leq 10$. Далее, при $t > 10$, включается регулятор, синтезирующий $\lambda = 0.001$. Этот регулятор формирует колебания, близкие к периодическим, с малой дисперсией.

Важным следствием стабилизации цикла является подавление хаоса. В самом деле, для системы с управлением, синтезирующим $\lambda = 0.001$, даже при достаточно больших шумах старший показатель Ляпунова становится отрицательным: $\Lambda(5) = -0.04$, $\Lambda(10) = -0.08$.

В заключение рассмотрим зависимость функции затрат на управление от интенсивности шума ε и назначаемой стохастической чувствительности λ.

В данном примере

$$J = \int_0^T J(t)dt = \varepsilon^2 \lambda \int_0^T \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2\right) dt.$$

На рис. 4.2.19 представлена зависимость этой функции затрат от параметра λ. Как видим, при стремлении λ к нулю затраты на управление возрастают.

Как видно из рассмотренного примера, предложенная методика синтеза циклов с заданной стохастической чувствительностью позволяет не только стабилизировать случайно возмущенные автоколебания, но и предотвратить нежелательный переход к хаосу.

Результаты этого раздела опубликованы в работе [207] автора диссертации.

4.2.7. Управление доверительными областями

Возможности управления доверительными областями проиллюстрируем на примере решения задачи синтеза требуемого рабочего режима для стохастически возмущенного нелинейного осциллятора. Рассматривается случай, когда моделирующая осциллятор динамическая система имеет два сосуществующих аттрактора – равновесие и предельный цикл. Под действием случайных возмущений возможны переходы между этими аттракторами (см. раздел 3.1.2). Здесь будем рассматривать две задачи управления. Первая состоит в стабилизации цикла (предотвращение случайных переходов с цикла на равновесие), вторая – в стабилизации равновесия (предотвращение случайных переходов с равновесия на цикл).

Рассмотрим нелинейный стохастический осциллятор с управлением:

$$\ddot{x} = \varphi(x, \dot{x}, u) + \varepsilon\sigma(x, \dot{x})\dot{w}, \tag{4.2.133}$$

где φ и σ – скалярные функции, w – скалярный винеровский процесс, ε – интенсивность шума. Перепишем уравнение (4.2.133) в виде системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \varphi(x, y, u) + \varepsilon\sigma(x, y)\dot{w}. \end{aligned} \tag{4.2.134}$$

Предполагается, что неуправляемая детерминированная система (4.2.134) (с $u = 0$, $\varepsilon = 0$) имеет T-периодическое решение $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ – устойчивый предельный цикл.

Для системы (4.2.134) имеем

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varphi_x' & \varphi_y' \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_u' \end{pmatrix},$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{\bar{y}^2 + \varphi^2}} \begin{pmatrix} -\varphi \\ \\ \bar{y} \end{pmatrix},$$

$$a_0 = p^\top (F + F^\top) p = \frac{2\bar{y}}{\bar{y}^2 + \varphi^2} \Big(\bar{y}\varphi_y' - \varphi(1 + \varphi_x') \Big),$$

$$b = p^\top S p = \frac{\bar{y}^2 \sigma^2}{\bar{y}^2 + \varphi^2}, \qquad \beta = B^\top p = \frac{\bar{y}\varphi_u'}{\sqrt{\bar{y}^2 + \varphi^2}}.$$

Здесь матрицы F, S, векторы p, B и скалярные величины a_0, b, β являются T-периодическими функциями. Функция φ и ее производные вычисляются при $x = \bar{x}(t)$, $y = \bar{y}(t)$, $u = 0$. В приведенных выше формулах зависимость от переменной t опущена.

Предполагается, что предельный цикл детерминированной системы (4.2.134) без управления охватывает равновесие $(x_e, 0)$.

Рассмотрим множество $I = \{0 \le t < T \,|\, \bar{y}(t) = 0\}$.

Для системы (4.2.134) уравнение (4.2.106) можно записать в виде

$$\beta(t)k(t) = \frac{\dot{\mu}(t) - a_0(t)\mu(t) - b(t)}{2\mu(t)}. \tag{4.2.135}$$

Для $t \in I$ выполняется $\beta(t) = 0$, и уравнение (4.2.135) разрешимо не для всех $\mu \in M$. Выше для решения этой некорректной задачи были рассмотрены методы регуляризации. Однако в данном случае, благодаря особой структуре системы (4.2.134), может быть предложен другой метод решения уравнения (4.2.135). Действительно, для коэффициентов $\beta(t)$, $a_0(t)$, $b(t)$ справедливо представление:

$$\beta = \bar{y}\beta_1, \quad a_0 = \bar{y}a_1, \quad b = \bar{y}b_1, \tag{4.2.136}$$

где

$$\beta_1 = \frac{\varphi_u'}{\sqrt{\bar{y}^2 + \varphi^2}}, \quad a_1 = \frac{2}{\bar{y}^2 + \varphi^2} \Big(\bar{y}\varphi_y' - \varphi(1 + \varphi_x') \Big),$$

$$b_1 = \frac{\bar{y}\sigma^2}{\bar{y}^2 + \varphi^2}.$$

В результате, уравнение (4.2.135) можно записать в виде

$$\bar{y}(t)\beta_1(t)k(t) = \frac{\dot{\mu}(t) - \bar{y}(t)a_1(t)\mu(t) - \bar{y}(t)b_1(t)}{2\mu(t)}. \tag{4.2.137}$$

Рассмотрим множество $M_1 = \left\{\mu \in M \;\mid\; \dot{\mu}(t)/\bar{y}(t) \;\in C_{[0,T]}\right\}$. Пусть $\mu(t) \in M_1$. Для $\mu_1(t) = \dot{\mu}(t)/\bar{y}(t)$ из (4.2.137) следует, что

$$\beta_1(t)k(t) = \frac{\mu_1(t) - a_1(t)\mu(t) - b_1(t)}{2\mu(t)}. \tag{4.2.138}$$

Предположим, что $\varphi_u^{'} \neq 0$ и, следовательно, $\beta_1(t) \neq 0$. Тогда уравнение (4.2.138) имеет единственное решение:

$$k(t) = \frac{\mu_1(t) - a_1(t)\mu(t) - b_1(t)}{2\mu(t)\beta_1(t)}. \tag{4.2.139}$$

В этом случае регулятор имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x,y) = k(t(x,y))\Big[&p_1(t(x,y))(x - \bar{x}(t(x,y))) + \\ &+ p_2(t(x,y))\,(y - \bar{y}(t(x,y)))\Big]. \end{aligned} \tag{4.2.140}$$

Для цикла системы (4.2.134), регулятор (4.2.139), (4.2.140) обеспечивает выбранную функцию стохастической чувствительности $\mu(t) \in M_1$. Важно отметить, что все постоянные функции стохастической чувствительности принадлежат M_1.

Стабилизация стохастических колебаний в генераторе с жестким возбуждением

Рассмотрим стохастическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (a + bx^2 - x^4)y - x + u + \varepsilon\dot{w}, \end{aligned} \tag{4.2.141}$$

где $w(t)$ – скалярный винеровский процесс, u – скалярное управление. Детерминированная система (4.2.141) без управления ($\varepsilon = 0, u = 0$) является хорошо известной моделью генератора автоколебаний с жестким возбуждением [274]. В области параметров $-b^2/8 < a < 0$ эта система бистабильна и допускает наличие устойчивого равновесия ($x_e = 0, y_e = 0$) и устойчивого предельного цикла, разделенных неустойчивым предельным циклом.

Зафиксируем $b = 1$ и рассмотрим сначала $a = -0.12$. При этих значениях параметра устойчивый предельный цикл $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ изображен синим, а неустойчивый цикл красным цветом на рис. 4.2.20а,б.

При $\varepsilon = 0.05$ случайные траектории, стартующие с предельного цикла, совершив несколько оборотов вблизи него, переходят в бассейн притяжения

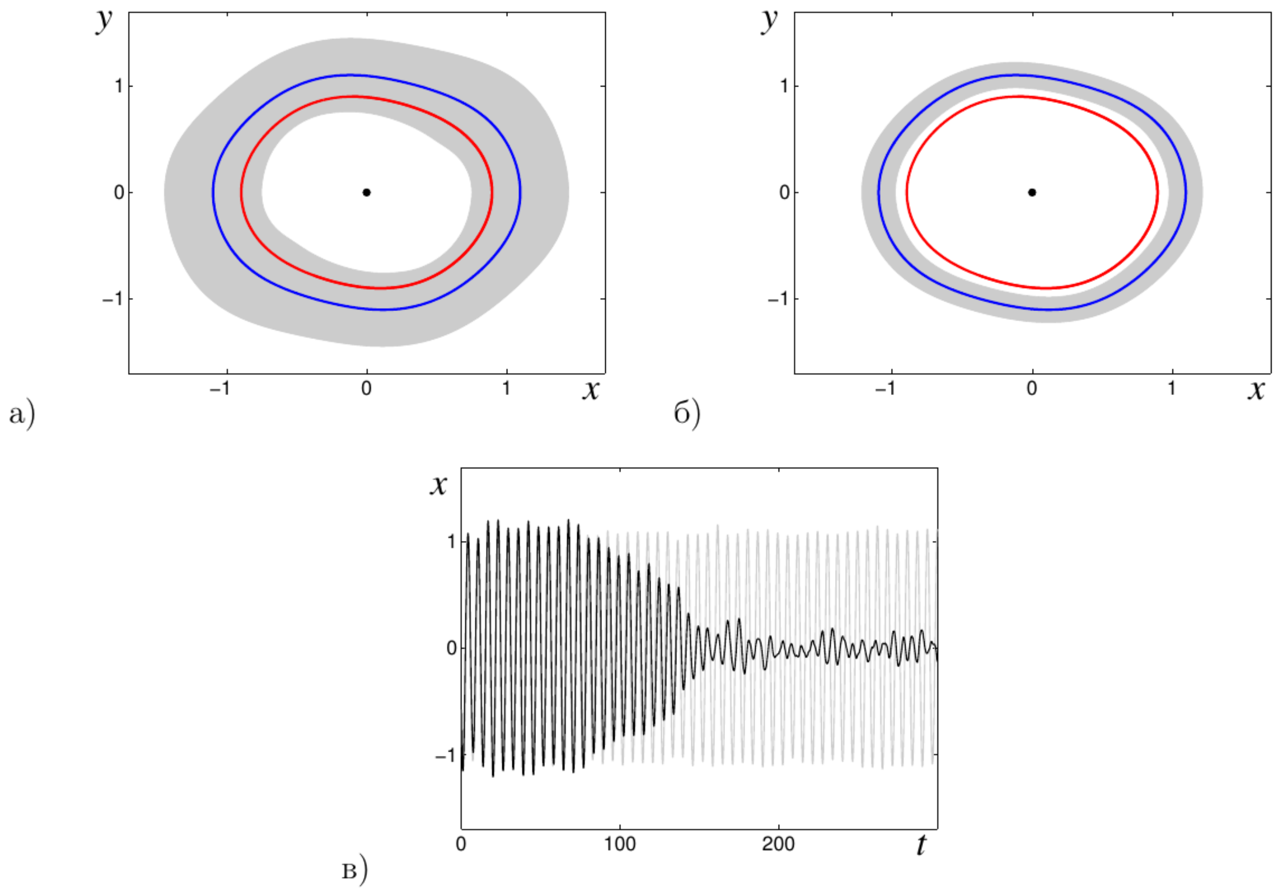


Рис. 4.2.20 – Управление доверительными полосами при $a = -0.12, b = 1$, $\varepsilon = 0.05$: а) полоса системы без управления, б) полоса системы с управлением, синтезирующим $\mu = 0.5$, в) временные ряды системы без управления (черный) и с управлением, синтезирующим чувствительность $\mu = 0.5$ (серый). Здесь синим цветом показан устойчивый, а красным – неустойчивый детерминированный цикл, устойчивое равновесие показано кружком.

равновесия и далее продолжают осциллировать вблизи него (см. временной ряд, показанный черным цветом на рис. 4.2.20в). Система демонстрирует индуцированный шумом срыв автоколебаний. В п. 3.1.2 вероятностный механизм этого явления был объяснен с помощью техники функции стохастической чувствительности и метода доверительных полос. Действительно, доверительная полоса при $\varepsilon = 0.05$ частично захватывает бассейн притяжения равновесия (0,0) (см. полосу серого цвета на рис. 4.2.20а). Ширина полосы определяется значениями соответствующей функции стохастической чувствительности. График этой функции стохастической чувствительности $\mu(t)$ изображен на рис. 3.1.7.

Рассмотрим теперь задачу стабилизации автоколебательного режима генератора с помощью управления доверительными полосами. Для того чтобы стабилизировать генератор, необходимо построить регулятор (4.2.140) таким образом, чтобы локализовать доверительную полосу внутри бассейна притяжения цикла. Следовательно, задача управления сводится к уменьшению ширины доверительной полосы.

Ширина доверительной полосы в точке $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ цикла Γ дается формулой: $d(t) = 2q\varepsilon\sqrt{2\mu(t)}$. Для того чтобы, например, сократить значение d в два раза, требуется в четыре раза уменьшить значение μ стохастической чувствительности. Функция $\mu(t)$ для системы без управления (4.2.141) изменяется (см. рис. 3.1.7) в пределах $3 < \mu(t) < 6$.

Выберем функцию стохастической чувствительности константой $\mu(t) \equiv 0.5$ и построим регулятор (4.2.140), который обеспечивает это уменьшенное значение стохастической чувствительности для замкнутой системы (4.2.141), (4.2.140). Для синтеза регулятора воспользуемся теорией, изложенной выше.

Регулятор (4.2.140), обеспечивающий $\mu(t) \equiv 0.5$, сжимает доверительную полосу и, как видно из рис. 4.2.20б, располагает ее внутри бассейна притяжения цикла. Временной ряд системы с управлением, синтезирующим $\mu(t) \equiv 0.5$, показан на рис. 4.2.20в серым цветом. В результате, этот регулятор предотвращает нежелательные индуцированные шумом переходы с цикла через сепаратрису в окрестность тривиального равновесия.

Представленный здесь метод может быть использован для стабилизации широкого класса стохастически возмущенных генераторов с жестким возбуждением. Действительно, с математической точки зрения, основной чертой таких генераторов является сосуществование устойчивых равновесий и циклов, разделенных неустойчивыми циклами.

Пусть R – расстояние между устойчивым и неустойчивым циклами. С помощью техники функции стохастической чувствительности может быть получена параметрическая формула $r(t) = q\varepsilon\sqrt{2\mu(t)}$ для расстояния между устойчивым циклом и границей доверительной полосы. Чтобы обеспечить устойчивость работы генератора, нужно выбором управления уменьшить доверительную полосу так, чтобы она не касалась неустойчивого цикла. Это геометрическое условие может быть записано неравенством $\max_{[0,T]} r(t) < R$. Это неравенство влечет условие:

$$\max_{[0,T]} \mu(t) < \frac{R^2}{2q^2\varepsilon^2}. \tag{4.2.142}$$

Неравенство (4.2.142) устанавливает взаимосвязь между функцией стохастической чувствительности $\mu(t)$, которая требуется для стабилизации, и параметрами R детерминированной системы и интенсивности шума ε. Чтобы стабилизировать колебательный режим генератора в присутствии шумов интенсивности ε, сначала нужно найти R для детерминированной системы, затем выбрать μ, удовлетворяющее (4.2.142) (например, константу), и наконец воспользоваться регулятором, обеспечивающим найденное значение μ.

Рассмотрим теперь, как метод управления доверительными областями может быть применен к решению задачи стабилизации тривиального равновесия. Положим теперь $a = -0.05$. Для этого значения устойчивый предельный цикл $\bar{x}(t), \bar{y}(t)$ изображен синим, а неустойчивый цикл показан красным цветом на рис. 4.2.21а.

Матрица стохастической чувствительности равновесия (0,0) диагональна и имеет вид $W = \mathrm{diag}\{10, 10\}$. Соответствующий доверительный эллипс в системе без управления при $\varepsilon = 0.05$ показан на рис. 4.2.21а светло-серым цветом. Этот эллипса захватывает точки бассейна притяжения цикла, что сигнализирует о возможных переходах случайных траекторий через сепаратрису. Временной ряд системы без управления, отвечающий решению с таким переходом, показан серым цветом на рис. 4.2.21б. Чтобы предотвратить такие

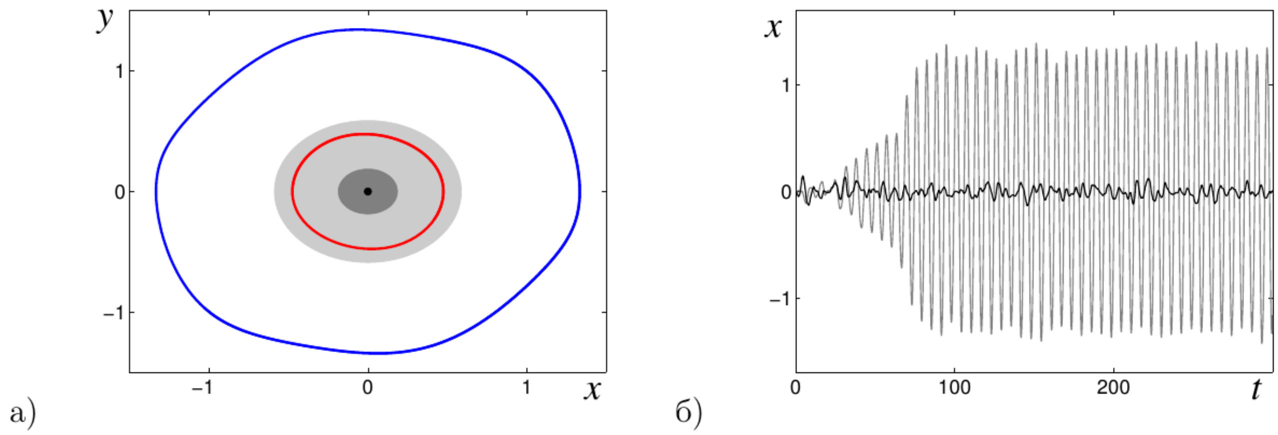


Рис. 4.2.21 – Управление доверительными эллипсами при $a = -0.05, b = 1$, $\varepsilon = 0.05$: а) устойчивый (синяя линия) и неустойчивый (красная линия) детерминированные циклы, устойчивое равновесие (кружок) и доверительные эллипсы системы без управления (серый) и с управлением, синтезирующим чувствительность $\mu = 1$ (черный), б) временные ряды системы без управления (серый) и с управлением, синтезирующим чувствительность $\mu = 1$ (черный).

нежелательные переходы, следует уменьшить размер доверительного эллипса. Назначим матрицу стохастической чувствительности $W = \mathrm{diag}\{1, 1\}$. Соответствующий доверительный эллипс в системе с управлением показан на рис. 4.2.21а темно-серым цветом. Как видим, он целиком содержится в бассейне притяжения равновесия (0,0). Временной ряд системы с управлением, синтезирующим выбранный пониженный уровень чувствительность $\mu = 1$, показан черным цветом на рис. 4.2.21б. Как видим, в системе с построенным регулятором наблюдаются малоамплитудные стохастические осцилляции вблизи равновесия.

Таким образом, метод управления доверительными областями является достаточно естественным и конструктивным способом синтеза требуемых стохастических режимов в мультистабильных нелинейных стохастических системах.

Результаты раздела 4.2.7 опубликованы в работе [203] автора диссертации. Возможности этого метода в предотвращении вызванных шумами экологических сдвигов показаны в разделе 5.5.2.

4.2.8. Структурная стабилизация и подавление хаоса

Явление индуцированного шумом хаоса привлекает внимание многих исследователей. Это явление было описано в ряде моделей главы 3. В данном разделе рассматривается задача структурной стабилизации и подавления хаоса в трехмерных системах на примере хаотической системы Чена [281] с использованием техники функции стохастической чувствительности.

Рассмотрим стохастическую систему Чена с управлением:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(-x+y) + \varepsilon \dot{w}_1 \\ \dot{y} &= (c-a)x + cy - xz + \varepsilon \dot{w}_2 \\ \dot{z} &= -bz + xy + u + \varepsilon \dot{w}_3. \end{aligned} \tag{4.2.143}$$

Здесь $w_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ – независимые стандартные винеровские процессы с параметрами $\mathrm{E}(w_i(t) - w_i(s)) = 0$, $\mathrm{E}(w_i(t) - w_i(s))^2 = |t - s|$, ε – интенсивность шума, u – скалярное управление.

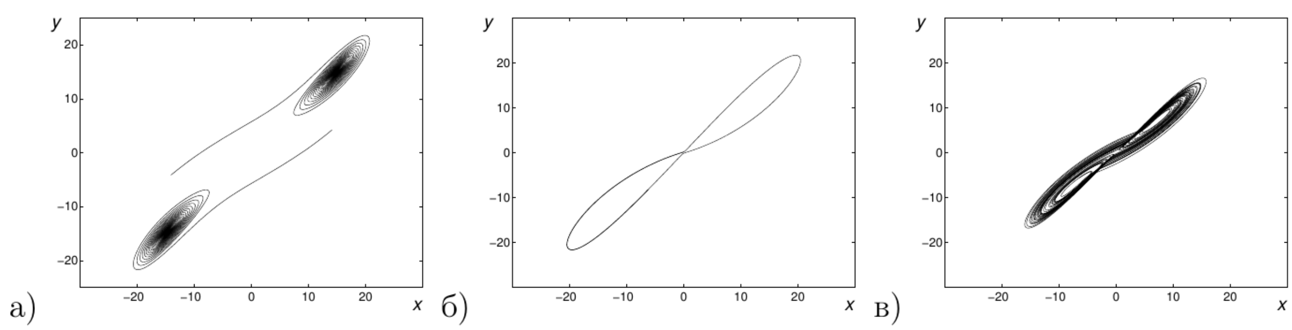


Рис. 4.2.22 – Аттракторы детерминированной системы Чена без управления при а) $b = 20$ (равновесия), б) $b = 15$ (цикл), в) $b = 5$ (хаос).

Детерминированная система (4.2.143) без управления ($u = 0,\ \varepsilon = 0$) имеет три равновесия: $C^0(0,0,0)$, $C^{\pm}(\pm\sqrt{b(2c-a)}, \pm\sqrt{b(2c-a)}, 2c-a)$ (для $2c - a > 0$). Зафиксируем $a = 45,\ c = 28$ и будем рассматривать систему на интервале $5 \le b \le 20$. При $18.357 < b < 20$ нетривиальные равновесия $C^{\pm}$ устойчивы. Когда параметр b, убывая, проходит бифуркационное значение $b_* = 18.357$, эти равновесия теряют устойчивость, и на интервале $[5, 18.357]$ система Чена демонстрирует хаотические и периодические аттракторы. На рис. 4.2.22 изображены аттракторы детерминированной системы (4.2.143) без управления ($u = 0,\ \varepsilon = 0$) для трех значений параметра b. На рис. 4.2.22а показаны устойчивые равновесия $C^{\pm}$ при $b = 20$. На рис. 4.2.22б изображен предельный цикл при $b = 15$, а на рис. 4.2.22в – хаотический аттрактор при $b = 5$.

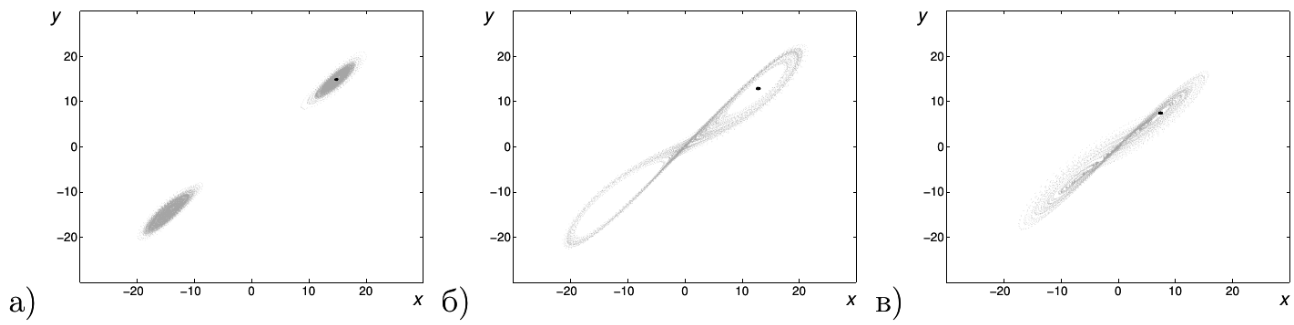


Рис. 4.2.23 – Случайные состояния стохастической системы Чена при $\varepsilon = 1$ и а) $b = 20$, б) $b = 15$, в) $b = 5$. Здесь серым показаны состояния системы без управления, черным – системы с регулятором (4.2.145), (4.2.147).

Под действием случайных возмущений решения системы (4.2.143), стартующие с детерминированных аттракторов, формируют соответствующее вероятностное распределение. На рис. 4.2.23 серым цветом показаны случайные состояния системы Чена без управления при $\varepsilon = 1$.

Рассмотрим интервал $18.357 < b \le 20$, на котором равновесие C^+ устойчиво. Матрица W стохастической чувствительности этого равновесия при $b = 20$ имеет вид

$$W = \begin{bmatrix} 3.20 & 3.19 & 2.62 \\ 3.19 & 4.06 & 1.68 \\ 2.62 & 1.68 & 3.21 \end{bmatrix}. \qquad (4.2.144)$$

На рис. 4.2.24 построен график функции $d(b) = trW(b) = w_{11}(b) + w_{22}(b) + w_{33}(b)$ на интервале $18.357 < b \le 20$. При приближении b к бифуркационному значению $b_* = 18.357$, стохастическая чувствительность $d(b)$ неограниченно возрастает.

Рассмотрим теперь систему (4.2.143) с управлением. Пусть цель управления – стабилизировать равновесие C^+ на всем интервале $5 \le b \le 20$ и обеспечить малый разброс случайных состояний в его окрестности путем синтеза подходящей матрицы стохастической чувствительности W.

Будем использовать регулятор

$$u = k_1(x-\bar{x}) + k_2(y-\bar{y}) + k_3(z-\bar{z}), \tag{4.2.145}$$

где $\bar{x} = \bar{y} = \sqrt{b(2c-a)}, \bar{z} = 2c - a$ – координаты равновесия C^+. Коэффициенты k_1, k_2, k_3 регулятора (4.2.145) в системе Чена (4.2.143) связаны с назначенной матрицей W системой (4.2.7), где

$$F = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & \bar{x} \\ \bar{x} & \bar{x} & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{12} & w_{22} & w_{23} \\ w_{13} & w_{23} & w_{33} \end{bmatrix}.$$

Условия достижимости матрицы W задаются равенствами

$$\begin{aligned} &-2aw_{11} + 2aw_{12} + 1 = 0 \\ &-cw_{11} + (c-a)w_{12} + aw_{22} - \bar{x}w_{13} = 0 \\ &-2cw_{12} + 2cw_{22} - 2\bar{x}w_{23} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Здесь для пяти элементов матрицы W мы имеем три уравнения.

Благодаря такой свободе, мы можем взять $w_{12} = w_{13} = 0$ и найти далее

$$w_{11} = \frac{1}{2a}, \;\; w_{22} = \frac{c}{2a^2}, \;\; w_{23} = \frac{a^2+c^2}{2\bar{x}a^2}.$$

Дополнительное ограничение положительной определенности матрицы W приводит к неравенству

$$w_{33} > \frac{(a^2+c^2)^2}{2a^2bc(2c-a)}.$$

Можно проверить, что для $a = 45, \;c = 28$ и $5 \le b \le 20$ фиксированное значение $w_{33} = 2$ удовлетворяет этому неравенству. Тогда назначенная матрица стохастической чувствительности имеет вид

$$W = \begin{bmatrix} 0.0111 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0069 & \frac{0.2091}{\sqrt{b}} \\ 0 & \frac{0.2091}{\sqrt{b}} & 2 \end{bmatrix}. \tag{4.2.146}$$

Как видим, элементы этой матрицы W для системы Чена с управлением существенно меньше элементов матрицы (4.2.144) системы без управления.

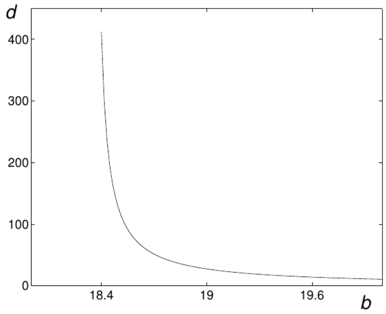


Рис. 4.2.24 – Стохастическая чувствительность равновесия C^+ системы Чена без управления.

Из (4.2.11) находим коэффициенты k_1, k_2, k_3 регулятора (4.2.145), обеспечивающего для равновесия C^+ требуемую матрицу стохастической чувствительности W из (4.2.146):

$$k_1 = -\frac{h_1}{w_{11}}, \quad k_2 = \frac{h_2 w_{33} - 0.5 h_3 w_{23}}{w_{23}^2 - w_{22} w_{33}}, \quad k_3 = \frac{0.5 h_3 w_{22} - h_2 w_{23}}{w_{23}^2 - w_{22} w_{33}}, \qquad (4.2.147)$$

где

$$h_1 = \bar{x} w_{11} + a w_{23}, \quad h_2 = \bar{x} w_{22} + (c-b) w_{23} - \bar{x} w_{33}, \quad h_3 = 2(\bar{x} w_{23} - b w_{33}) + 1.$$

Стабилизирующие возможности построенного регулятора демонстрируются на рис. 4.2.23,4.2.25,4.2.26.

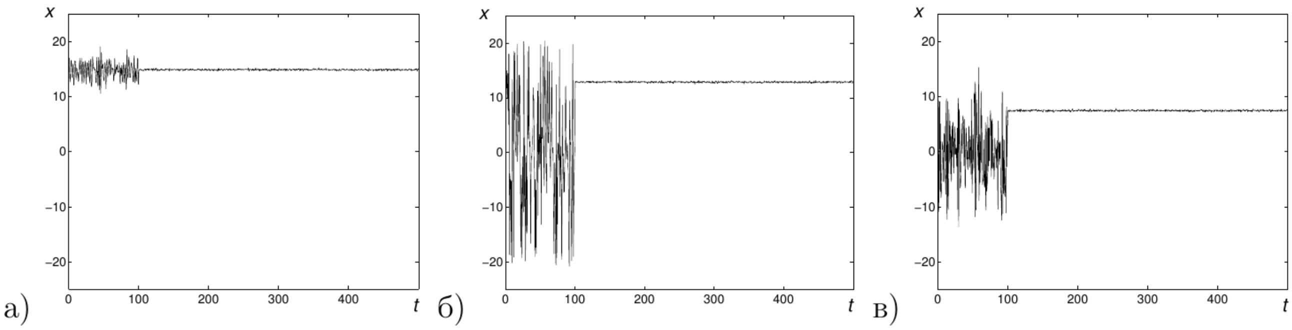


Рис. 4.2.25 – Стабилизация стохастических осцилляций. Показана x-координата решений системы Чена при $\varepsilon = 1$ а) $b = 20$, б) $b = 15$, в) $b = 5$. Управление включается в момент $t = 100$.

На рис. 4.2.23 черным цветом показаны случайные состояния системы с построенным регулятором при $\varepsilon = 1$. Благодаря малой стохастической чувствительности эти состояния концентрируются вблизи равновесия C^+, в то время как случайные состояния неуправляемой системы (серый цвет) имеют большой разброс.

На рис. 4.2.25 представлены графики $x(t)$-координаты решений при $\varepsilon = 1$ и $b = 20$, $b = 15$ и $b = 5$. Управление включается в момент времени $t = 100$. Как видим, регулятор, синтезирующий малую стохастическую чувствительность (4.2.146), обеспечивает хорошую стабилизацию решений.

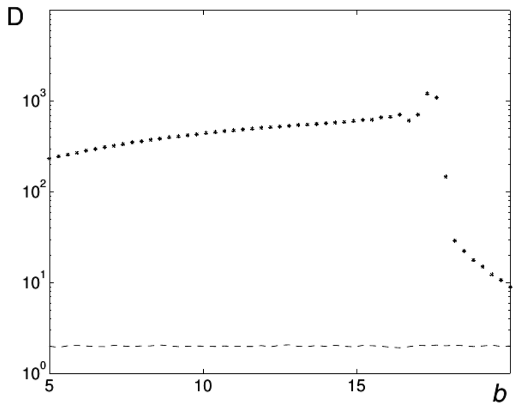


Рис. 4.2.26 – Дисперсия случайных состояний системы Чена без управления (звездочки) и с управлением (пунктир) для $\varepsilon = 1$.

На рис. 4.2.26 показана дисперсия случайных состояний во всей параметрической зоне $5 \leq b \leq 20$. Здесь дисперсия $D(b)$ системы Чена без управления изображена звездочками, а с регулятором – пунктиром. Как видим, построенный регулятор не только делает устойчивым равновесие C^+ детерминированной системы на всем интервале $5 \leq b \leq 20$, но и удерживает на этом интервале дисперсию случайных состояний стохастической системы на достаточно низком уровне уровне $D \approx 2$. Наряду с такой структурной стабилизацией можно отметить еще одно важное следствие: построенный регулятор успешно решает задачу подавления хаоса.

Результаты раздела 4.2.5 опубликованы в работе [195] автора диссертации.

Глава 5. Анализ стохастических феноменов в моделях естествознания

В данной главе показано, как теоретические разработки по методам анализа и синтеза стохастических режимов в нелинейных системах могут быть использованы в решении актуальных исследовательских задач, относящихся к разным разделам естествознания. Автор диссертации имеет большую серию публикаций по этой прикладной тематике, в данной главе представлены наиболее важные результаты.

5.1. Стохастические эффекты в модели течения сложной жидкости

В данном разделе исследуется течение концентрированной суспензии с N-образной зависимостью скорости сдвига от приложенного к системе сдвигового напряжения. Рассматривается математическая модель с двумя динамическими режимами – стационарным и автоколебательным. Показано, что в зоне стационарных потоков, обладающих детерминированной устойчивостью, даже малые флуктуации сдвигового напряжения могут вызывать колебания скорости течения большой амплитуды. Анализ таких индуцированных шумом осцилляций проводится с помощью техники функций стохастической чувствительности. Для обнаруженных в модели стохастических колебаний течения представлены теоретические результаты по параметрическому описанию их дисперсии.

В экспериментах с концентрированными суспензиями была обнаружена N-образная зависимость скорости сдвига от напряжения сдвига. Стационарные течения, соответствующие убывающему участку N-образной кривой, были неустойчивы и при затягивании эксперимента свыше нескольких секунд наблюдался срыв стационарного течения в автоколебательное. Подчеркнем, что автоколебания скорости течения происходили в условиях постоянного напряжения, приложенного к суспензии.

На основании гипотезы о влиянии эффектов контактного трения между частицами на реологические свойства суспензии N-образная реологическая кривая была получена теоретически [294] и было показано, что наблюдаемые в экспериментах автоколебания могут быть результатом комбинированного влияния эффектов вязкоупругости и абсолютной неустойчивости стационарного течения суспензии на убывающем участке N-образной кривой.

Математическое исследование предложенной реологической модели [294] в форме системы дифференциальных уравнений было продолжено в [295]. Анализ обнаруженных явлений в стохастической модели течения сложной жидкости методом функции стохастической чувствительности был проведен в работах [189, 196]. Краткое изложение этих результатов содержится в данном разделе.

Математическая модель. Между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми d, находится слой суспензии. Используется декартова система координат с осью Oz, перпендикулярной плоскостям, и началом координат на нижней плоскости. Нижняя плоскость $z = 0$ неподвижна, к верхней $z = d$ прикладывается параллельное сдвиговое напряжение Σ. Перемещение верхней плоскости приводит в движение весь слой суспензии $0 \leq z \leq d$. В силу симметрии удается ограничиться одной пространственной переменной z.

Предполагаем [294], что реологическая модель суспензии описывается обобщенным уравнением Максвелла

$$\dot{\gamma} = f(\sigma) + G\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Функция $f(\sigma)$ соответствует стационарной N-образной зависимости скорости сдвига $\dot{\gamma}$ от напряжения сдвига σ, G – параметр вязкоупругости, величина $1/G$ может рассматриваться как модуль упругости среды при высокочастотных процессах. В случае линейной функции $f(\sigma)$ выбранное реологическое уравнение совпадает с классическим уравнением Максвелла.

Зависимость $f(\sigma)$ может быть получена из результатов эксперимента. Ее конкретный вид здесь взят из предложенной ранее модели [294] и проиллюстрирован на рис. 5.1.1.

Было показано [294], что в рамках рассматриваемой модели уравнение движения суспензии в области $[0, \infty) \times [0, d]$ и краевые условия имеют вид (ρ – плотность среды)

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\left(f(\sigma) + G\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}; \quad \sigma(t, d) = \Sigma, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial z}(t, 0) = 0. \qquad (5.1.1)$$

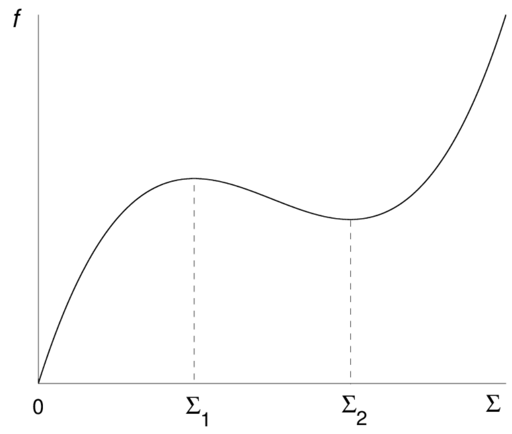


Рис. 5.1.1 – График функции $f(\sigma)$.

Первое из краевых условий отражает единственное внешнее воздействие на систему – постоянное приложенное к верхней плоскости сдвиговое напряжение Σ. Второе соответствует выполнению условия прилипания на нижней неподвижной плоскости щели. Начальные данные $\sigma(0,z) = \varphi(z)$ однозначно определяют решение этой краевой задачи. При каждом Σ система имеет стационарное решение

$$\sigma(t,z) \equiv \Sigma. \tag{5.1.2}$$

Анализ устойчивости стационарного потока. Рассмотрим малые возмущения стационарного решения (5.1.1). Представим возмущенное решение в виде

$$\sigma(t,z) = \Sigma + \delta\tilde{\sigma}(t,z)$$

где δ – малый параметр. В первом приближении имеем следующую линейную задачу:

$$\rho\left[\frac{\partial f}{\partial\sigma}(\Sigma)\frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial t} + G\frac{\partial^2\tilde{\sigma}}{\partial t^2}\right] = \frac{\partial^2\tilde{\sigma}}{\partial z^2}; \qquad \tilde{\sigma}(t,d) = 0, \quad \frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial z}(t,0) = 0$$

Функция $\tilde{\sigma}(t,z) = e^{At}\cos kz$ удовлетворяет краевым условиям задачи при $k = \pi(2m+1)/(2d),\ m = 0,1,...$, а из уравнения следует условие, которому должен удовлетворять коэффициент A:

$$\rho G A^2 + \rho f'(\Sigma) A + k^2 = 0.$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости стационарного решения $\sigma(t,z) \equiv\ \Sigma$ является неравенство $f'(\Sigma) > 0$. При $f'(\Sigma) > 0$ амплитуда возмущений высокочастотных гармоник затухает по экспоненциальному закону: $\exp\left(-\frac{f'(\Sigma)}{2G}t\right)$, а при $f'(\Sigma) < 0$ стационарное решение (5.1.2) неустойчиво, малые возмущения экспоненциально растут.

Дискретизация модели. Для исследования нелинейной динамики системы (5.1.1) используется дискретизация, основанная на методе прямых. Разобьем поток толщины d на n слоев прямыми $z = z_i$, где $z_i = ih$ с шагом $h = d/n$. Рассмотрим соответствующие аппроксимации напряжения $\sigma_i(t)$ для функций $\sigma(t, z_i)$. Используя формулу численного дифференцирования, для уравнения (5.1.1) на прямой $z = z_i$ можно записать аппроксимацию

$$\rho\left(f^{'}(\sigma_i)\frac{d\sigma_i}{dt} + G\frac{d^2\sigma_i}{dt^2}\right) = \frac{\sigma_{i-1}(t) - 2\sigma_i(t) + \sigma_{i+1}(t)}{h^2}. \tag{5.1.3}$$

Краевые условия приводят к уравнениям

$$\sigma_n(t) = \Sigma, \;\; \sigma_1(t) - \sigma_0(t) = 0. \tag{5.1.4}$$

Учитывая соотношения (5.1.3), (5.1.4), в качестве дискретизации исходной задачи (5.1.1) на прямых $z = z_i$ запишем следующую нелинейную систему $2(n-1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{array}{l} \dot{\sigma}_j = p_j, \;\; j = 1, 2, ..., n-1 \\ \dot{p}_1 = -\alpha\sigma_1 + \alpha\sigma_2 - \varphi(\sigma_1)p_1 \\ \dot{p}_i = \alpha\sigma_{i-1} - 2\alpha\sigma_i + \alpha\sigma_{i+1} - \varphi(\sigma_i)p_i, \;\; i = 2, 3, ..., n-2 \\ \dot{p}_{n-1} = \alpha\sigma_{n-2} - 2\alpha\sigma_{n-1} + \alpha\Sigma - \varphi(\sigma_{n-1})p_{n-1} \end{array} \tag{5.1.5}$$

Здесь $\alpha = 1/(\rho G h^2)$, $\varphi(\sigma) = f^{'}(\sigma)/G$.

Решение $\sigma_i(t) \equiv \Sigma$, $p_i(t) \equiv 0$ соответствует единственному положению равновесия системы (5.1.5). При $f^{'}(\Sigma) > 0$ это равновесие асимптотически устойчиво. При $f^{'}(\Sigma) < 0$ оно неустойчиво и в системе наблюдается другой вид аттрактора – предельный цикл.

Для детального исследования возможных режимов динамики системы (5.1.5) зафиксируем ряд параметров. Пусть

$$\rho = 2000, \; G = 5, \; d = 0.002$$

$$f(\sigma) = 2.8 \cdot 10^{-6}\left(\sigma^3/3 - 1200\sigma^2 + 1.19 \cdot 10^6\sigma\right) - 400.$$

Тогда

$$f^{'}(\sigma) = 2.8 \cdot 10^{-6}(\sigma - 700)(\sigma - 1700).$$

Выбранные значения ρ, G и d соответствуют типичным значениям плотности суспензии, параметра вязкоупругости и ширины щели в измерительном приборе в единицах системы СИ. Функция $f(\sigma)$ моделирует характерный тип зависимости, полученной опытным путем.

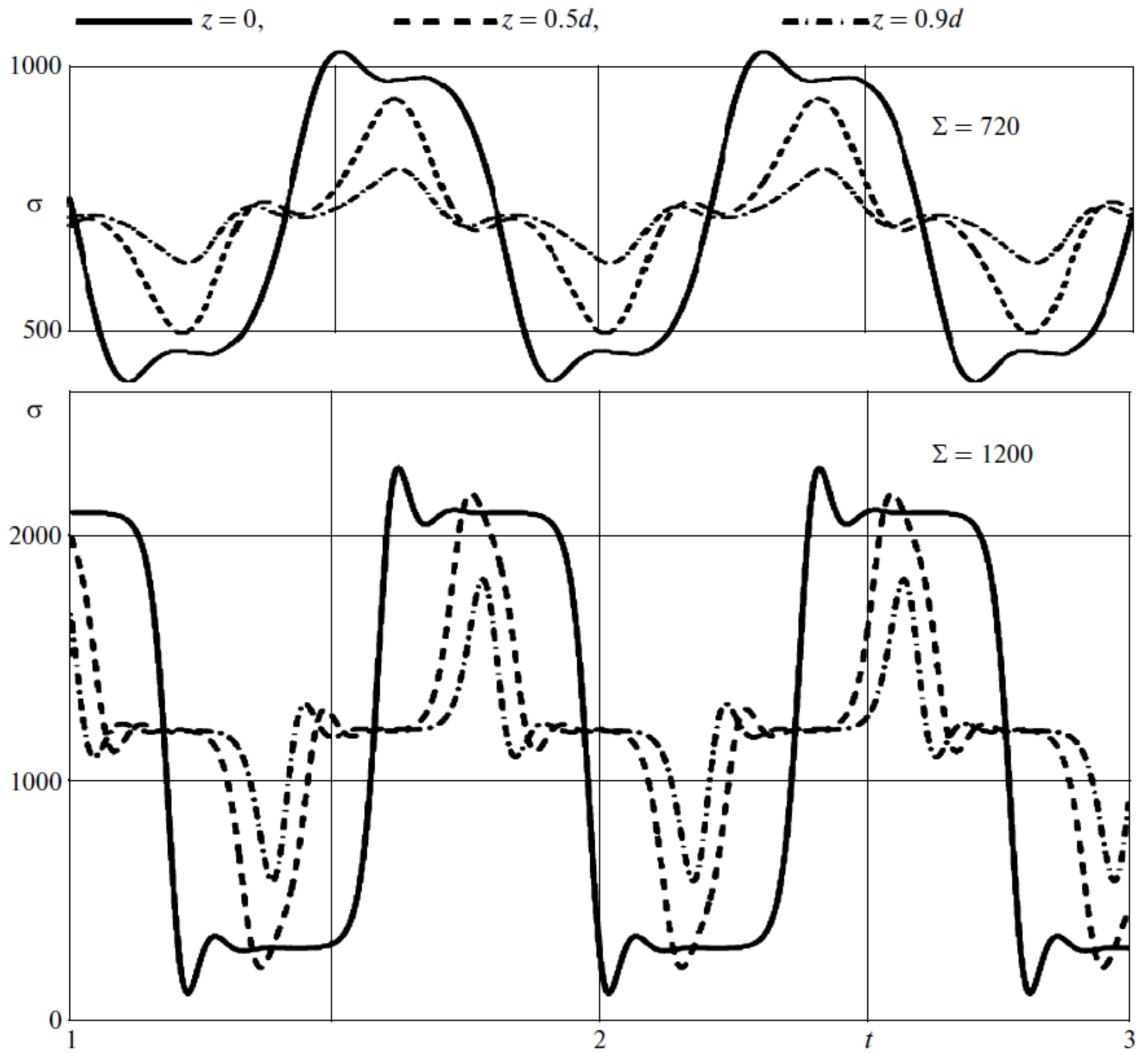


Рис. 5.1.2 – Установившиеся колебания напряжения σ по слоям.

Здесь зоной неустойчивости равновесия является интервал $\Sigma_1 = 700 < \Sigma < \Sigma_2 = 1700$, что близко соответствует данным эксперимента. В этой зоне система (5.1.5) переходит в режим автоколебаний. Установившиеся колебания напряжения σ по слоям представлены на рис. 5.1.2.

Видно, что амплитуда колебаний напряжения в потоке существенно меняется от слоя к слою и, кроме того, зависит от параметра Σ.

На рис. 5.1.3 представлено распределение экстремальных значений $\sigma(t, z)$ в режиме автоколебаний по слоям. Как видим, колебания напряжения с максимальной амплитудой наблюдаются при $z = 0$, в слое, расположенном непосредственно над нижней неподвижной плоскостью. Зависимость экстремальных значений для колебаний напряжения в этом слое от параметра Σ представлена на рис. 5.1.4. Для $\Sigma < \Sigma_1 = 700$ и $\Sigma > \Sigma_2 = 1700$ в системе наблюдается устойчивое равновесие $\sigma = \Sigma$ (сплошная линия). На интервале $\Sigma_1 < \Sigma < \Sigma_2$ это равновесие неустойчиво (штриховая линия). Потеря устой-

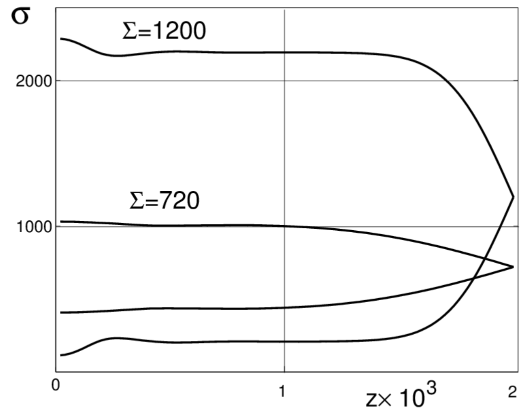


Рис. 5.1.3 – Экстремальные значения $\sigma(t, z)$ в режиме автоколебаний.

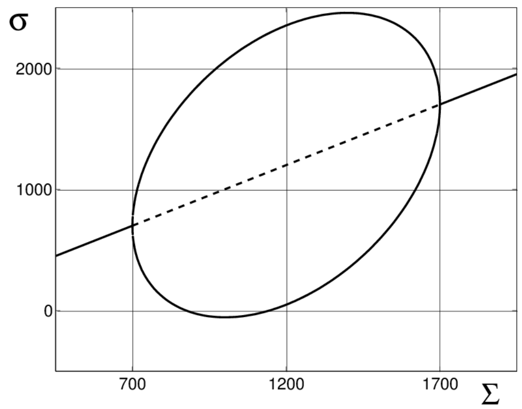


Рис. 5.1.4 – Зависимость экстремальных значений для колебаний напряжения в слое $z = 0$.

чивости равновесия в точках Σ_1 и Σ_2 сопровождается появлением в системе (5.1.5) устойчивого предельного цикла – происходит бифуркация Андронова – Хопфа. Колебания максимальной амплитуды наблюдаются в середине отрезка $[700, 1700]$.

Индуцированные шумом осцилляции в зоне устойчивого равновесия. Стохастические возмущения в исследуемой модели течения жидкости могут иметь различные источники и быть связанными с разными параметрами. Ограничимся возмущениями только одного параметра – сдвигового напряжения Σ.

Будем считать, что при формировании на верхней пластине сдвигового напряжения наряду с его контролируемым постоянным значением Σ вносится случайное возмущение. Отметим, что в реальном эксперименте малые флуктуации приложенного напряжения всегда неизбежны. В результате вместо постоянного детерминированного напряжения Σ к верхней пластине прикладывается стохастическое напряжение $(1 + \varepsilon\xi(t))\Sigma$, где $\xi(t)$ – дельта-коррелированный стандартный белый шум, ε – постоянный параметр интенсивности этого возмущения. Тогда при выбранных выше параметрах соответствующая стохастическая система будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\sigma}_j = p_j, \quad j = 1, 2, ..., n-1 \\
&\dot{p}_1 = -\alpha\sigma_1 + \alpha\sigma_2 - \varphi(\sigma_1)p_1 \\
&\dot{p}_i = \alpha\sigma_{i-1} - 2\alpha\sigma_i + \alpha\sigma_{i+1} - \varphi(\sigma_i)p_i, \quad i = 2, 3, ..., n-2 \\
&\dot{p}_{n-1} = \alpha\sigma_{n-2} - 2\alpha\sigma_{n-1} + \alpha(1 + \varepsilon\xi(t))\Sigma - \varphi(\sigma_{n-1})p_{n-1}
\end{aligned}
\qquad (5.1.6)
$$

Присутствие случайных возмущений меняет характер установившегося режима течения жидкости между пластинами. Под действием случайной компоненты напряжения траектории системы покидают устойчивое детерминированное равновесие и формируют вокруг него стохастический аттрактор, соответствующий уже новому стохастическому режиму. На рис. 5.1.5 представлены стохастические колебания напряжения в середине потока ($z = 0.001$) для разных значений интенсивности шума ε и параметра Σ. Серым цветом изображены траектории для $\varepsilon = 0.01$, черным – для $\varepsilon = 0.001$. Стохастические траектории получены прямым численным моделированием системы (5.1.6). Как видим, разброс случайных состояний этой системы растет по мере увеличения интенсивности шума и приближения Σ к бифуркационному значению $\Sigma_1 = 700$. В рассматриваемой системе даже малые шумы порождают в зоне устойчивого равновесия стохастические колебания достаточно большой амплитуды.

Графики дисперсии, характеризующей величину разброса случайных состояний напряжения в середине потока вокруг равновесия, в зависимости от Σ при разных значениях ε представлены на рис. 5.1.6 крестиками. Характерные изменения дисперсии колебаний вызваны изменением стохастической чувствительности равновесия. Общая картина отмеченных здесь особенностей возбуждаемах шумом колебаний системы (5.1.6) в зависимости от ее параметров может быть детально исследована методом теории функции стохастической чувствительности (см. главу 2).

Стохастическая чувствительность потока.

Состоянием системы (5.1.6) для исследуемой модели течения сложной жидкости является вектор $x = (\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}, p_1, ..., p_{n-1})^\top$, а равновесием – вектор $\bar{x} = (\Sigma, ..., \Sigma, 0, ..., 0)^\top$. Матрица W стохастической чувствительности равновесия $\bar{x}$ размерности $2(n-1) \times 2(n-1)$ может быть найдена из уравнения (2.1.15), где матрицы F и S_0 имеют блочную структуру:

$$
F = \begin{bmatrix} O & I \\ \alpha L & -\beta I \end{bmatrix}, \quad S_0 = \alpha^2\Sigma^2 \begin{bmatrix} O & O \\ O & J \end{bmatrix}; \quad \alpha = \frac{1}{\rho G h^2}, \ \ \beta = \frac{f'(\Sigma)}{G}
$$

Блоками F и S_0 являются $[(n-1)\times(n-1)]$-матрицы:

$$L = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

I – единичная матрица, O – нулевая матрица, J – матрица, все элементы которой равны нулю, кроме равного единице элемента на пересечении $(n-1)$-й строки и $(n-1)$-го столбца. Матрицу стохастической чувствительности тоже запишем в блочном виде. Здесь

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

$[(n-1)\times(n-1)]$-матрицы W_{ij} в силу уравнения (2.1.15) удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{aligned} & W_{12} + W_{12}^{\top} = O \\ & \alpha W_{11} L - \beta W_{12} + W_{22} = O \\ & \alpha(L W_{12} + W_{12}^{\top} L) - 2\beta W_{22} = -\alpha^2 \Sigma^2 J. \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

При этом из-за симметричности W имеем $W_{21} = W_{12}^{\top}$.

Рассмотрим диагональные элементы w_i матрицы W_{11}. Величина w_i характеризует стохастическую чувствительность вязкого напряжения на i-м слое $z_i = ih$.

Прежде всего следует отметить весьма высокую стохастическую чувствительность рассматриваемой системы. Действительно, расчеты показывают, что при $\Sigma = 600$ значение стохастической чувствительности слоев будет порядка 10^9. При переходе к значению $\Sigma = 690$ оно увеличивается до порядка 10^{10}. Именно такие большие значения стохастической чувствительности объясняют появление стохастических колебаний большой амплитуды при весьма малых шумах еще в зоне устойчивого равновесия (см. рис. 5.1.5). Отметим, что различие в стохастической чувствительности разных слоев при фиксированном значении Σ незначительно.

С помощью найденных из системы (5.1.7) значений функции стохастической чувствительности можно оценить дисперсию случайных состояний напряжения σ в режиме индуцированных шумом колебаний потока вокруг устой-

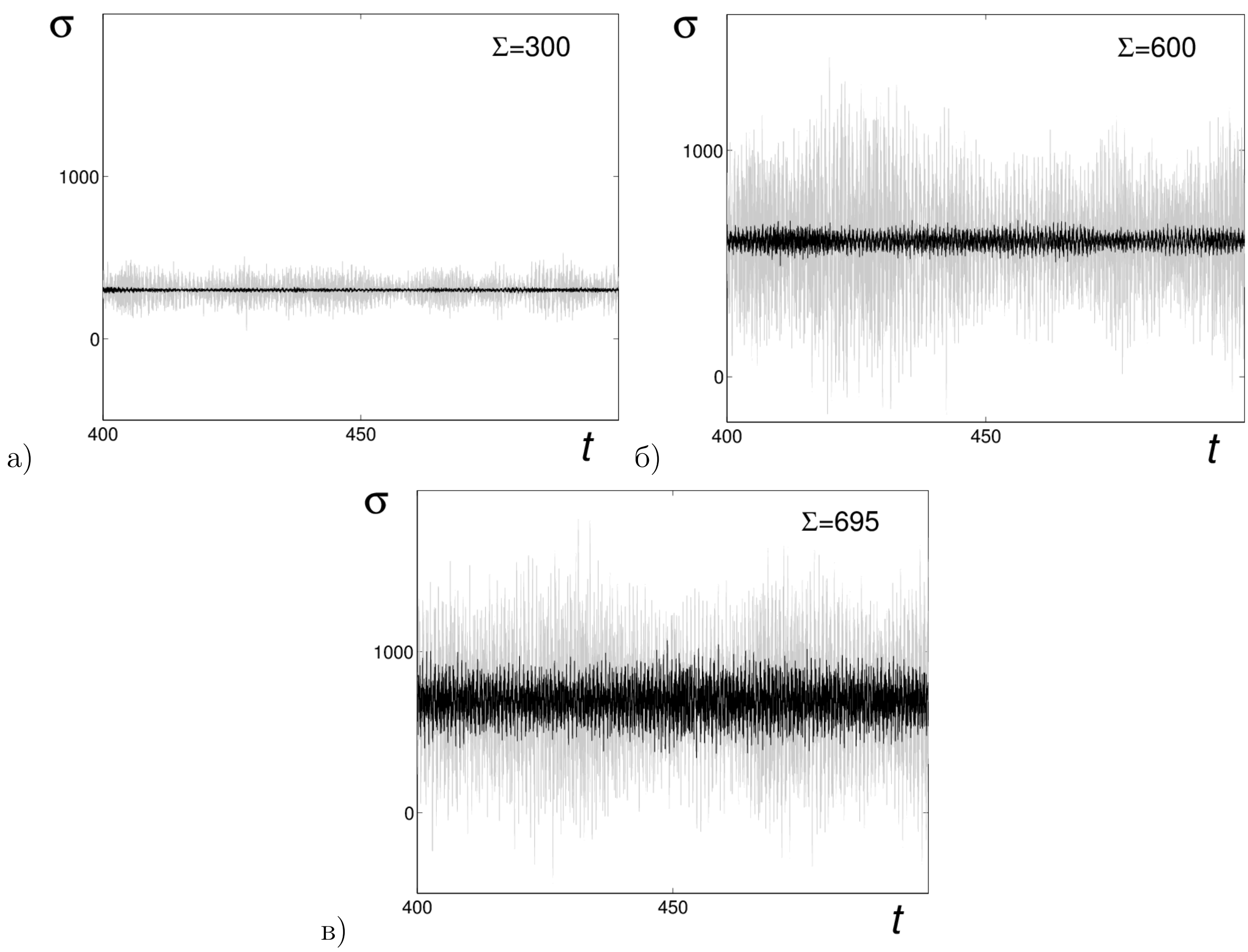


Рис. 5.1.5 – Стохастические колебания напряжения в середине потока ($z = 0.001$) для $\varepsilon = 0.01$ (серый цвет), $\varepsilon = 0.001$ (черный цвет).

чивого детерминированного равновесия. Значение дисперсии D_i на i-м слое связано со значением w_i: $D_i \approx \varepsilon^2 w_i$.

На рис. 5.1.6 представлены зависимости дисперсии случайных состояний напряжения в середине потока ($z = 0.001$) от параметра Σ. Сплошная кривая найдена с помощью ФСЧ, а дисперсия, полученная прямым численным моделированием решений нелинейной стохастической системы (5.1.6), изображена крестиками. Как видим, теоретическая аппроксимация, основанная на функции стохастической чувствительности, демонстрирует хорошее совпадение с результатами компьютерного моделирования. Точность растет с уменьшением шума, а некоторое различие возникает лишь в непосредственной близости к точке бифуркации $\Sigma_1 = 700$.

Отметим в заключение, что, поскольку жидкие среды с N-образной реологической зависимостью широко распространены в природе (к ним, в частности, относятся концентрированные суспензии), а флуктуации приложенных механических напряжений неизбежны, то полученные результаты могут иметь непосредственное применение для объяснения реологических явлений в слож-

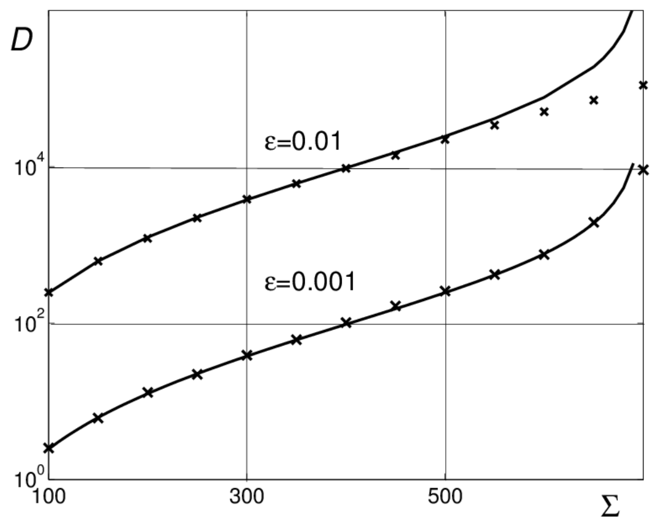


Рис. 5.1.6 – Дисперсия случайных состояний напряжения в середине потока ($z = 0.001$).

ных жидкостях.

В этом разделе было показано, как техника функции стохастической чувствительности используется в анализе индуцированных шумом осцилляций потока сложной жидкости в параметрической зоне, где исходная детерминированная модель предсказывает лишь устойчивый стационарный режим. Эта техника может быть полезна и при анализе влияния случайных возмущений в зоне автоколебаний. В следующем разделе основные элементы такого анализа демонстрируются на упрощенном варианте модели (5.1.5) при $n = 2$.

Двумерная модель течения сложной жидкости

Для системы (5.1.1) – распределенной модели течения потока – будем использовать трехслойную дискретизацию. Пусть h – толщина слоя. Рассмотрим на трех прямых $z = z_i$, где $z_0 = 0, z_1 = \frac{h}{2}, z_2 = h$, соответствующие аппроксимации $\sigma_i(t)$ для функций $\sigma(t, z_i)$. На внутренней прямой $z = z_1$ можно записать аппроксимацию

$$\rho\left(\frac{df(\sigma_1)}{d\sigma}\frac{d\sigma_1}{dt} + G\frac{d^2\sigma_1}{dt^2}\right) = 4\frac{\sigma_0(t) - 2\sigma_1(t) + \sigma_2(t)}{h^2}. \qquad (5.1.8)$$

Краевые условия в свою очередь приводят к уравнениям

$$\sigma_2(t) = \Sigma,\ \sigma_1(t) - \sigma_0(t) = 0. \qquad (5.1.9)$$

Исключая из (5.1.8),(5.1.9) функции $\sigma_0(t)$ и $\sigma_2(t)$, получаем для $\sigma_1(t)$ следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$G\rho\frac{d^2\sigma_1}{dt} + \rho f'(\sigma_1)\frac{d\sigma_1}{dt} = 4\frac{\Sigma - \sigma_1}{h^2}. \qquad (5.1.10)$$

Решение $\sigma_1(t) \equiv \Sigma$ уравнения (5.1.10) является единственным положением равновесия. Наряду с этим равновесием, в рассматриваемой модели может наблюдаться другой вид аттракторов – предельный цикл.

Уравнение (5.1.10) в переменных

$$x = \sigma_1, \quad y = \frac{d\sigma_1}{dt}$$

можно записать в виде системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{4}{G\rho h^2}x - \frac{f'(x)}{G}y + \frac{4}{G\rho h^2}\Sigma. \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Единственным равновесием этой системы является точка $\bar{x} = \Sigma, \bar{y} = 0$. Матрица Якоби системы (5.1.11) для этого равновесия

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{4}{G\rho h^2} & -\dfrac{f'(\Sigma)}{G} \end{bmatrix}$$

имеет собственные числа

$$\lambda_{1,2} = -\frac{f'(\Sigma)}{2G} \pm \sqrt{\left(\frac{f'(\Sigma)}{2G}\right)^2 - \frac{4}{G\rho h^2}}.$$

В рассматриваемой модели устойчивость равновесия не зависит от параметров G, ρ, h, а определяется только знаком $f'(\Sigma)$. Если $f'(\Sigma) > 0$, то равновесие $x = \Sigma, y = 0$ асимптотически устойчиво, если $f'(\Sigma) < 0$, то неустойчиво.

Для детального исследования возможных режимов динамики нелинейной системы (5.1.11) зафиксируем ряд параметров. Пусть $G = \rho = h = 1$, $f(x) = k(x^3/3 - x^2 + x/2)$. Тогда $f'(x) = k(x^2 - 3x + 2)$. Функция $f(x)$ моделирует характерный тип зависимости, полученной опытным путем (см. рис. 5.1.1). Положительный параметр k управляет степенью жесткости этой зависимости. Будем изучать динамические свойства системы в зависимости от двух параметров Σ и k. Для системы с такими параметрами корни $\Sigma_1 = 1, \Sigma_2 = 2$ уравнения $f'(x) = 0$ задают точки бифуркации.

На рис. 5.1.7 представлены экстремальные значения переменной x для аттракторов системы (равновесий и циклов) на интервале $0 < \Sigma < 3$ при $k = 1, 10, 20$. Наличие у системы (5.1.11) в зоне $\Sigma_1 < \Sigma < \Sigma_2$ устойчивых предельных циклов является теоретическим подтверждением сильных осцилляций, наблюдаемых в экспериментах.

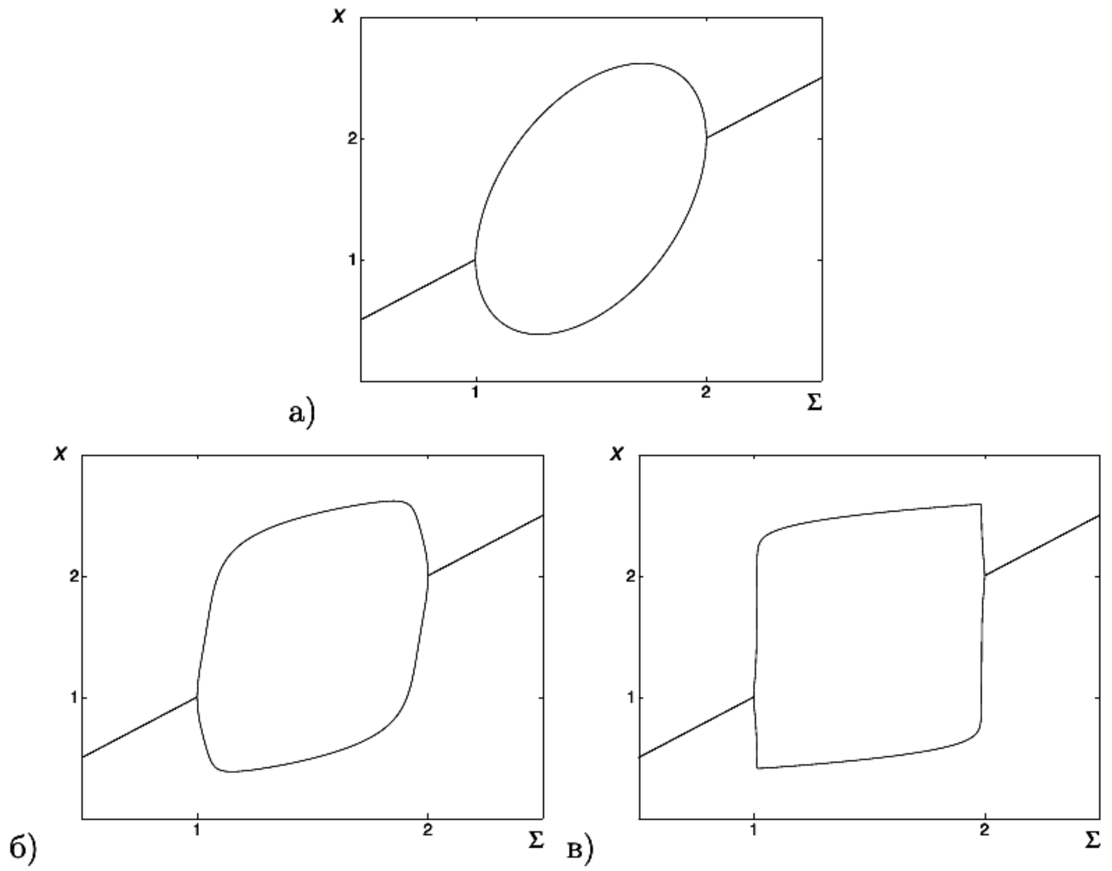


Рис. 5.1.7 – Экстремальные значения x на аттракторах системы при а) $k = 1$, б) $k = 10$, в) $k = 20$.

Анализ стохастически возмущенной двумерной модели течения жидкости

Рассмотрим систему (5.1.11) с дополнительными случайными возмущениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -4x - k(x^2 - 3x + 2)y + 4\Sigma + \varepsilon\xi(t), \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

где $\xi(t)$ – дельта-коррелированный стандартный белый шум, ε – параметр интенсивности шума.

Присутствие случайных возмущений меняет характер установившихся режимов в течении жидкости между пластинами. Под действием случайной компоненты напряжения траектории системы покидают соответствующие детерминированные аттракторы и формируют стохастические аттракторы, соответствующие уже новым стохастическим режимам функционирования. Вокруг отмеченных ранее детерминированных равновесий и циклов наблюдаются стохастические флуктуации.

На рис. 5.1.8, 5.1.9 представлены некоторые иллюстрации стохастических

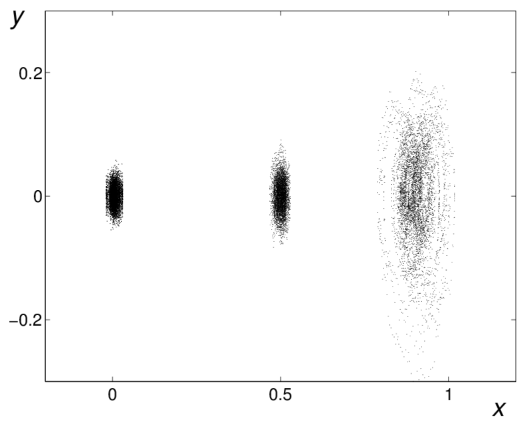


Рис. 5.1.8 – Случайные состояния системы для $k = 10, \varepsilon = 0.1$ при $\Sigma = 0$ (слева), при $\Sigma = 0.5$ (в центре), при $\Sigma = 0.9$ (справа).

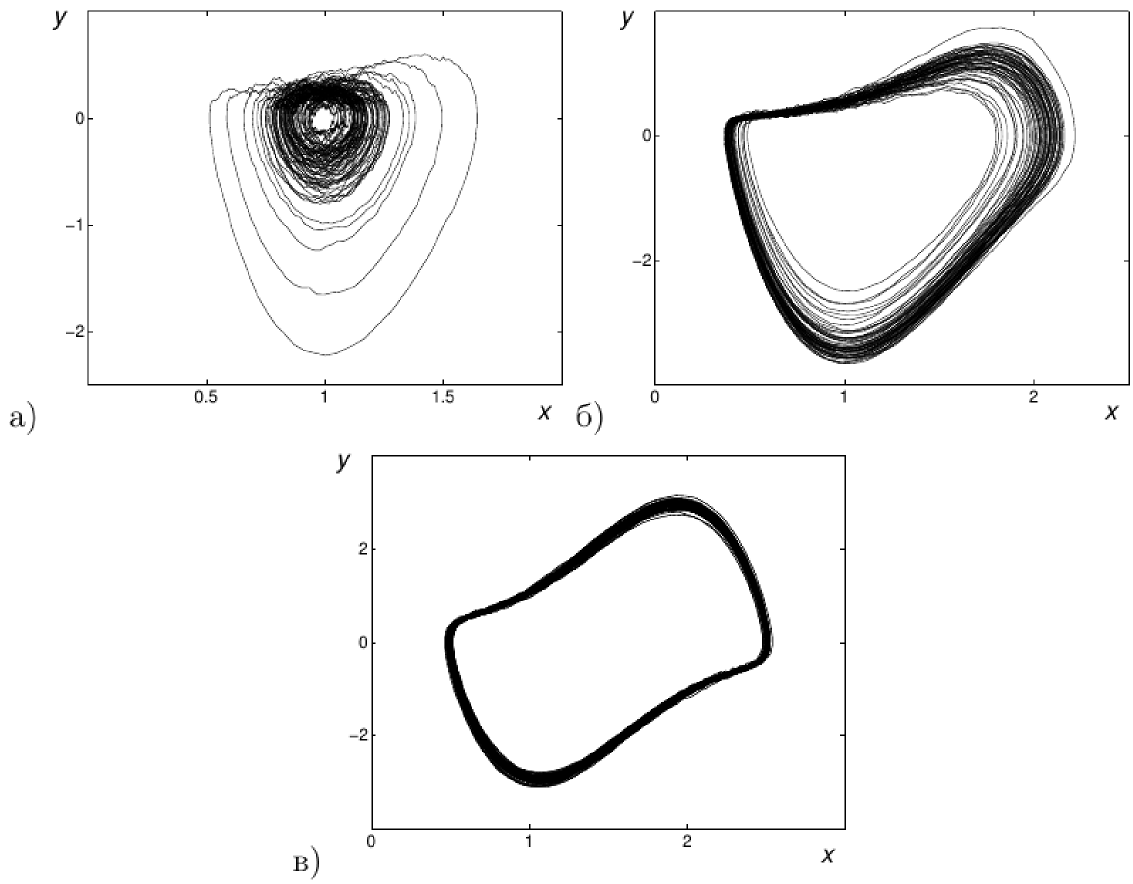


Рис. 5.1.9 – Случайные траектории системы для $k = 10, \varepsilon = 0.1$ при $\Sigma = 1.0$ (а), при $\Sigma = 1.1$ (б), при $\Sigma = 1.5$ (в).

аттракторов системы (5.1.12), полученные прямым численным моделированием.

На рис. 5.1.8 изображены случайные состояния стохастической системы (5.1.12) для $k = 10$, $\varepsilon = 0.1$ в зоне $0 < \Sigma < 1$ при $\Sigma = 0$ (слева), $\Sigma = 0.5$ (в центре) и при $\Sigma = 0.9$ (справа). Как видим, чем ближе Σ к точке бифуркации

$\Sigma_1 = 1$, тем больше разброс.

При прохождении точки бифуркации $\Sigma_1 = 1$ наблюдается резкое увеличение дисперсии (рис. 5.1.9а). В зоне $1 < \Sigma < 2$ случайные траектории формируют пучки уже вокруг соответствующих детерминированных циклов. На рис. 5.1.9б,в изображены пучки случайных траекторий системы для $k = 10$, $\varepsilon = 0.1$ при $\Sigma = 1.1$ и $\Sigma = 1.5$. Как видим, ширина пучка и здесь существенно зависит от параметра Σ. Кроме того, можно отметить значительную неравномерность ширины разброса траекторий при движении вдоль циклов.

Общая картина отмеченных здесь особенностей стохастических аттракторов системы (5.1.12) в зависимости от параметров k и Σ может быть детально исследована с помощью метода функции стохастической чувствительности.

На рис. 5.1.10 представлены графики функции стохастической чувствительности для стохастических циклов системы (5.1.12) для $k = 10$ при $\Sigma = 1.1$ и $\Sigma = 1.5$. Эти функции дают нам детальное описание изменения стохастической чувствительности вдоль цикла. Пики функции μ соответствуют участкам цикла с максимальным разбросом траекторий. Существенный перепад значений стохастической чувствительности μ вдоль цикла и является причиной отмеченной выше неравномерности ширины пучка.

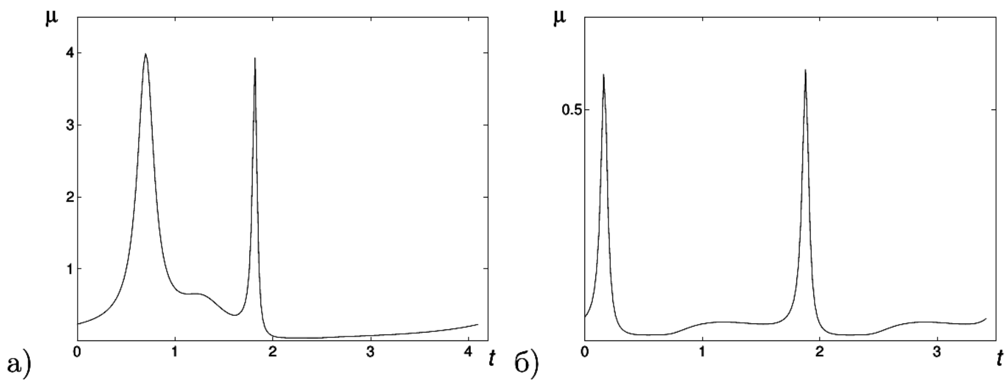


Рис. 5.1.10 – Графики функции стохастической чувствительности циклов для $k = 10$ при а) $\Sigma = 1.1$, б) $\Sigma = 1.5$.

Зависимость ширины пучка от параметра Σ также связана с соответствующими особенностями в поведении функции стохастической чувствительности. Как видно из рис. 5.1.10, значения функции стохастической чувствительности при $\Sigma = 1.1$ на порядок больше значений функции стохастической чувствительности при $\Sigma = 1.5$. Этот факт и объясняет различие ширины соответствующих пучков на рис. 5.1.9б,в.

Зависимость показателя стохастической чувствительности M от параметров Σ и k представлена на рис. 5.1.11. Функция $M(\Sigma)$ в зонах $0 < \Sigma < 1$

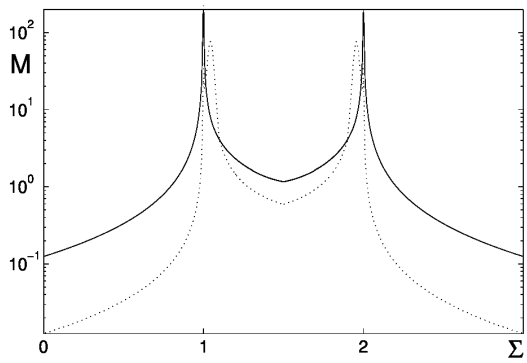


Рис. 5.1.11 – Стохастическая чувствительность аттракторов при $k = 1$ (сплошная линия) и $k = 10$ (пунктир).

и $\Sigma > 2$ описывает стохастическую чувствительность равновесий, а в зоне $1 < \Sigma < 2$ – стохастическую чувствительность циклов.

В зонах $0 < \Sigma < 1$ и $\Sigma > 2$ функция $M(\Sigma, k)$ находится аналитически

$$M(\Sigma, k) = \frac{1}{k(\Sigma^2 - 3\Sigma + 2)}.$$

При монотонном стремлении параметра Σ к точкам бифуркации стохастическая чувствительность равновесий монотонно возрастает и стремится к бесконечности. Данная закономерность и является причиной изменения разброса случайных состояний системы, отмеченных выше на рис. 5.1.8. При изучении стохастических равновесий немаловажную роль играет и параметр k. Увеличение k ведет к уменьшению стохастической чувствительности равновесий (см. рис. 5.1.11).

Рассмотрим теперь зону $1 < \Sigma < 2$. При $k = 1$ график $M(\Sigma)$ представляет собой выпуклую вниз функцию с вертикальными асимптотами в точках бифуркации. Наименьшую чувствительность имеет цикл при $\Sigma = 1.5$. В достаточно широком интервале, лежащем в средней части отрезка $[1, 2]$, стохастическая чувствительность циклов практически не изменяется. При приближении параметра к точкам бифуркации стохастическая чувствительность циклов, как и равновесий, резко возрастает.

При $k = 10$ у графика функции $M(\Sigma)$ появляется важная новая особенность. В зоне, примыкающей к точкам бифуркации, график приобретает резко выраженный дополнительный всплеск. Величина этого всплеска существенно зависит от параметра k. Соответствующие подробности приведены на рис. 5.1.12, где детально изображены фрагменты графиков $M(\Sigma)$ при $k = 10$ и $k = 20$.

При $k = 10$ величина пика имеет значение $M = 7.6 \cdot 10^1$, а при $k = 20$ мы

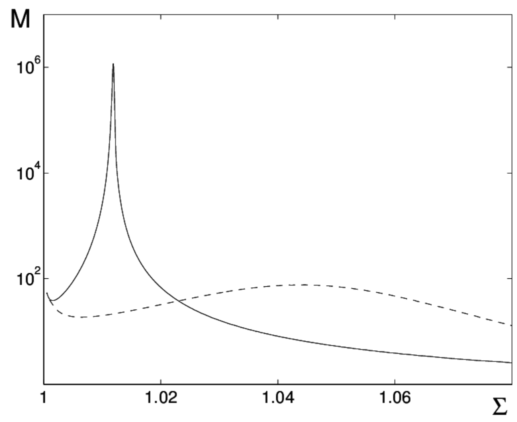


Рис. 5.1.12 – Стохастическая чувствительность циклов вблизи точки бифуркации при $k = 10$ (пунктир) и $k = 20$ (сплошная линия).

имеем $M = 1.3 \cdot 10^6$. Как видим, увеличение параметра k в два раза привело к увеличению стохастической чувствительности на несколько порядков.

Рассмотрим детально при $k = 20$ характер воздействия случайных возмущений на детерминированные циклы системы в зоне, где наблюдается этот пик. Максимальное значение $M^* = 1.3 \cdot 10^6$ достигается при $\Sigma^* = 1.01188$. Этот пик локализован на узком интервале – уже в близлежащих точках значения функции $M(\Sigma)$ существенно меньше. Так, например, слева $M(1.005) = 8.9 \cdot 10^1$, а справа $M(1.02) = 6.8 \cdot 10^1$. Посмотрим, к чему может привести такое резкое изменение стохастической чувствительности.

Для этих трех близких значений $\Sigma = 1.005,\ 1.01188,\ 1.02$ на рис. 5.1.13а приведены детерминированные, а на рис. 5.1.13б – соответствующие стохастические циклы при $\varepsilon = 0.001$. При значениях $\Sigma = 1.005$ и $\Sigma = 1.02$ случайные траектории практически не отличаются от невозмущенных орбит. При $\Sigma^* = 1.01188$ цикл, за исключением короткого горизонтального участка, размывается в широкую полосу. Такое поведение характерно для так называемых циклов-канардов.

Как видим, для изучаемой модели метод функции стохастической чувствительности позволил обнаружить узкую зону сверхвысокой чувствительности автоколебаний, когда даже малые, по сути фоновые помехи возбуждают существенные флуктуации амплитуды. Заметим, что ширина этой зоны сверхчувствительности очень мала. Обнаружить ее эмпирически, анализируя разброс случайных траекторий, получаемых прямым численным моделированием, практически невозможно. Для этого потребовался бы слишком мелкий шаг по параметрам.

Рассмотрим теперь поведение детерминированной системы с $k = 20$ в

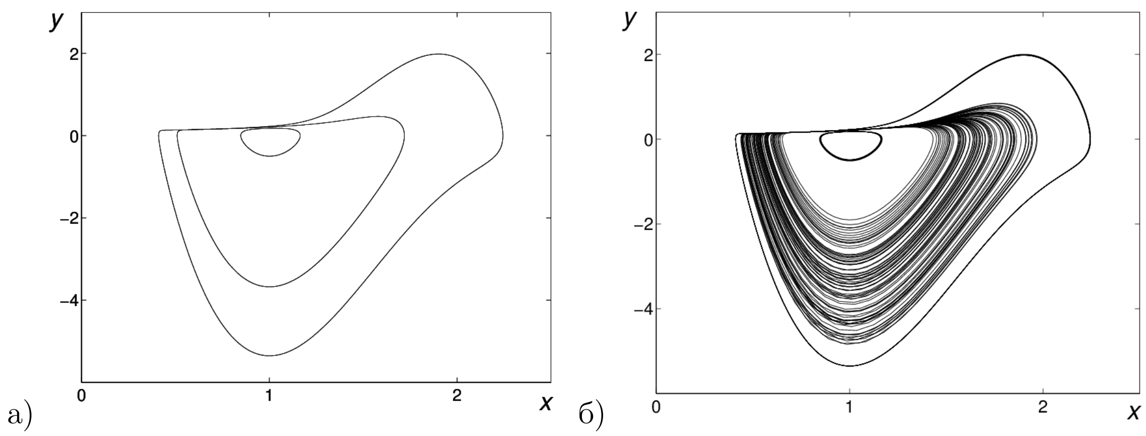


Рис. 5.1.13 – Циклы для $k = 20$ при $\Sigma = 1.005$ – внутренний, $\Sigma = 1.01188$ – средний, $\Sigma = 1.02$ – внешний: а) детерминированные, б) стохастические при $\varepsilon = 0.001$.

зоне $\Sigma < 1$, вблизи точки $\Sigma_1 = 1$ бифуркации Андронова–Хопфа. На рис. 5.1.14 построен фазовый портрет системы (5.1.11) при $\Sigma = 0.9$. Как видим, все фазовые траектории стремятся к единственному аттрактору – устойчивому равновесию. Однако характер стремления зависит от начального отклонения. Действительно, если это отклонение от равновесия мало, то траектории, осциллируя, стремятся к равновесию. Если же отклонение превосходит некоторое критическое значение, то траектории сначала уходят от равновесия, совершают большеамплитудный выброс, и только затем, попав в субкритическую область, стремятся к равновесию. Таким образом, вокруг равновесия можно выделить множество начальных точек, составляющих субкритическую зону. Отметим, что чем ближе Σ к бифуркационному значению, тем меньше размер субкритической зоны.

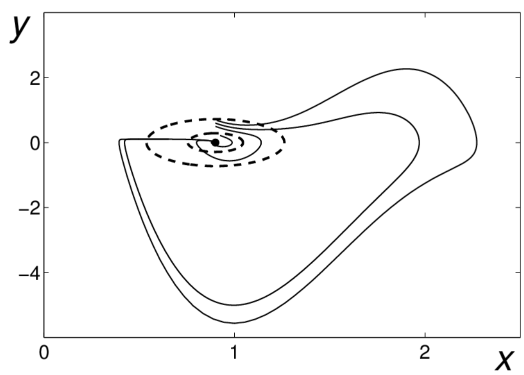


Рис. 5.1.14 – Фазовый портрет детерминированной системы с $\Sigma = 0.9$ и $k = 20$. Пунктиром показаны доверительные эллипсы, соответствующие интенсивностям шума $\varepsilon = 0.2$ (малый), $\varepsilon = 0.5$ (большой).

Такая неравномерность фазового портрета позволяет понять механизм стохастической возбудимости рассматриваемой системы. На рис. 5.1.15 показаны фазовые траектории и временные ряды стохастической системы для двух значений интенсивности шума. При малом шуме $\varepsilon = 0.2$, случайные траектории (черный цвет), покидая устойчивое равновесие, концентрируются в допороговой области. Здесь решения демонстрируют малоамплитудные стохастические осцилляции. При увеличении интенсивности шума траектории переходят из субкритической области в суперкритическую. Как видно на рис. 5.1.15 для $\varepsilon = 0.5$ (серый цвет), система совершает большеамплитудные выбросы. В результате возникает перемежаемость осцилляций больших и малых амплитуд, что и говорит о стохастической возбудимости модели даже в зоне устойчивых равновесий.

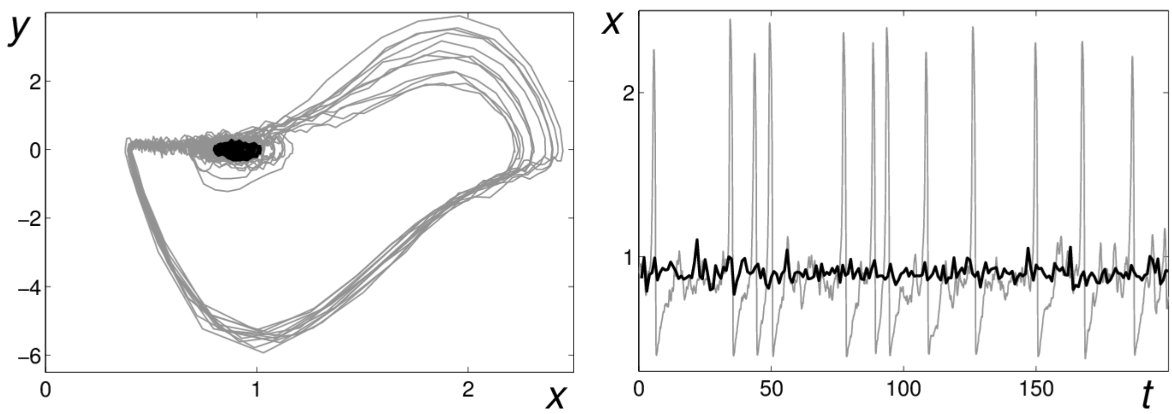


Рис. 5.1.15 – Стохастические траектории и временные ряды системы (5.1.12) для $\varepsilon = 0.2$ (черный цвет) и для $\varepsilon = 0.5$ (серый цвет).

Покажем, как для параметрического анализа стохастической возбудимости может быть использована техника функции стохастической чувствительности и метод доверительных эллипсов. На рис. 5.1.14 пунктиром изображены доверительные эллипсы, отвечающие значениям $\varepsilon = 0.2$ (малый), $\varepsilon = 0.5$ (большой) и доверительной вероятности $P = 0.99$. Как видим, малый эллипс целиком содержится в субкритической зоне, в то время как большой эллипс частично захватывает точки фазовой плоскости, принадлежащие суперкритической зоне, что сигнализирует о большеамплитудных стохастических выбросах. Эти результаты согласуются с данными прямого численного моделирования (см. рис. 5.1.15). Таким образом, анализ расположения доверительных эллипсов и субкритической зоны может быть эффективно использован в исследовании и прогнозировании явления стохастической возбудимости.

Представленные здесь результаты опубликованы в работах [189, 196] автора диссертации.

Описанный здесь сценарий возникновения феномена стохастического возбуждения мультимодальных осцилляций в модели течения сложной жидкости с математической точки зрения подобен такому же явлению в модели Фитцхью-Нагумо нейронной активности (см. раздел 3.3.2) и в популяционной модели Траскотт-Бриндли (см. раздел 5.5.3). Такое подобие феноменов в математических моделях систем разной физической природы говорит об универсальности законов нелинейной динамики. Такая универсальность дает широкий простор для возможных приложений описанных в диссертации методов анализа, опирающихся на технику функции стохастической чувствительности.

5.2. Стохастическая возбудимость и стабилизация проточного химического реактора

Рассмотрим классическую модель проточного химического реактора идеального перемешивания Вольтера-Сальникова [296, 297]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x\exp\left(-\frac{1}{y}\right) + l(a-x) \\ \dot{y} &= x\exp\left(-\frac{1}{y}\right) + m(b-y), \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

где x, y – безразмерные переменные, задающие в реакторе соответственно текущую концентрацию реагирующего вещества и его температуру, a – концентрация реагента на входе реактора, b – входная температура, l, m – положительные параметры реактора. В данной работе зафиксированы характерные [297] значения $l = 0.5, m = 0.25, b = 0.165$, а параметр a считается управляющим. Даже небольшие вариации параметра a могут приводить к существенным изменениям динамики системы.

На рис. 5.2.1 показана бифуркационная диаграмма модели (5.2.1). Здесь можно отметить две точки бифуркации $a_1 = 1.580079$ и $a_2 = 1.582843$. На всем рассматриваемом интервале система имеет равновесие. Это равновесие устойчиво при $a < a_2$. При переходе параметра a через a_2 в зону $a > a_2$ равновесие теряет устойчивость. Наряду с равновесием, в зоне $a > a_1$, система имеет другой аттрактор – устойчивый предельный цикл, который появляется при $a = a_1$ в результате жесткой бифуркации Хопфа. Таким образом, можно выделить три интервала, отвечающих качественно различным режимам динамики детерминированной системы (5.2.1). При $a < a_1$ система моностабильна – единственным аттрактором является устойчивое равновесие. На интервале $a_1 < a < a_2$, система бистабильна – аттракторами являются устойчивые равновесие и цикл. Их бассейны притяжения отделяет сепаратриса – неустойчивый цикл. При $a > a_2$ система моностабильна с единственным аттрактором – предельным циклом. На рис. 5.2.1 y-координаты устойчивых равновесий показаны красной сплошной линией, а неустойчивых равновесий – красным пунктиром. Соответствующие y-координаты экстремальных значений циклов показаны синим цветом – сплошной линией для устойчивого цикла и пунктиром для неустойчивого.

Таким образом, при изменении входной концентрации a в реакторе наблюдается своего рода гистерезис. Рассмотрим сначала, что происходит при увеличении параметра a. В зоне $a < a_1$ реактор выходит на устойчивый режим, рост a в зоне $a < a_2$ приводит к несущественному изменению равновесных характеристик концентрации и температуры в реакторе. Однако, при переходе через точку бифуркации a_2 в зону $a > a_2$ в реакторе происходит скачкообразный срыв с равновесного режима функционирования на автоколебательный. При уменьшении параметра a в зоне $a > a_1$, реактор функционирует в автоколебательном режиме. При переходе через точку бифуркации a_1 в зону $a < a_1$ происходит обратный скачок – с автоколебательного режим на равновесный.

Неизбежно присутствующие даже малые случайные возмущения могут существенно деформировать этот сценарий.

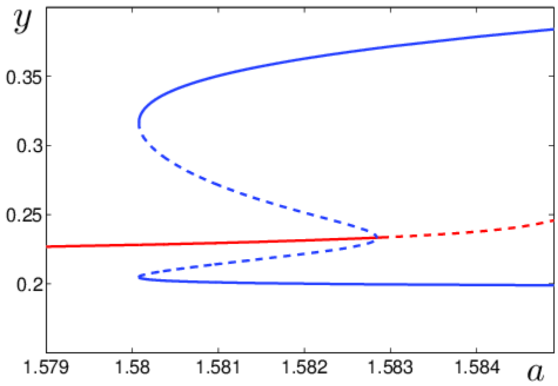


Рис. 5.2.1 – Бифуркационная диаграмма детерминированной модели (5.2.1).

Рассмотрим модель (5.2.1) с дополнительными случайными возмущениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \exp\left(-\frac{1}{y}\right) + l(a - x) + \varepsilon_1 \xi_1 \\ \dot{y} &= x \exp\left(-\frac{1}{y}\right) + m(b - y) + \varepsilon_1 \xi_2. \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Здесь $\xi_{1,2}(t)$ – независимые стандартные гауссовские шумы с параметрами

$\mathrm{E}\xi_i(t) = 0$, $\mathrm{E}\xi_i(t)\xi_i(\tau) = \delta(t-\tau)$, $\varepsilon_{1,2}$ – интенсивности случайных возмущений.

Под действием случайных возмущений стохастические траектории системы (5.2.2) покидают устойчивое равновесие и совершают случайные колебания вокруг него. Разброс отклонений этих траекторий от равновесия зависит от интенсивности шума и стохастической чувствительности системы. Рассмотрим, что происходит в системе при увеличении интенсивности шума.

Стохастическая возбудимость в зоне устойчивого равновесия

Рассмотрим динамику стохастической системы (5.2.2) в зоне моностабильности $a < a_1$, где детерминированная модель имеет единственный аттрактор – устойчивое равновесие. Важным обстоятельством являются особенности фазового портрета детерминированной системы (5.2.1). Здесь равновесие является устойчивым фокусом, однако характер стремления траекторий к точке покоя существенно зависит от начального отклонения. Для малых начальных отклонений траектория по регулярной спирали монотонно стремится к равновесию. Если отклонение превосходит некоторый порог, траектория сначала совершает выброс – уходит достаточно далеко от равновесия, и только потом начинает стремиться к равновесию (см. рис. 5.2.2а).

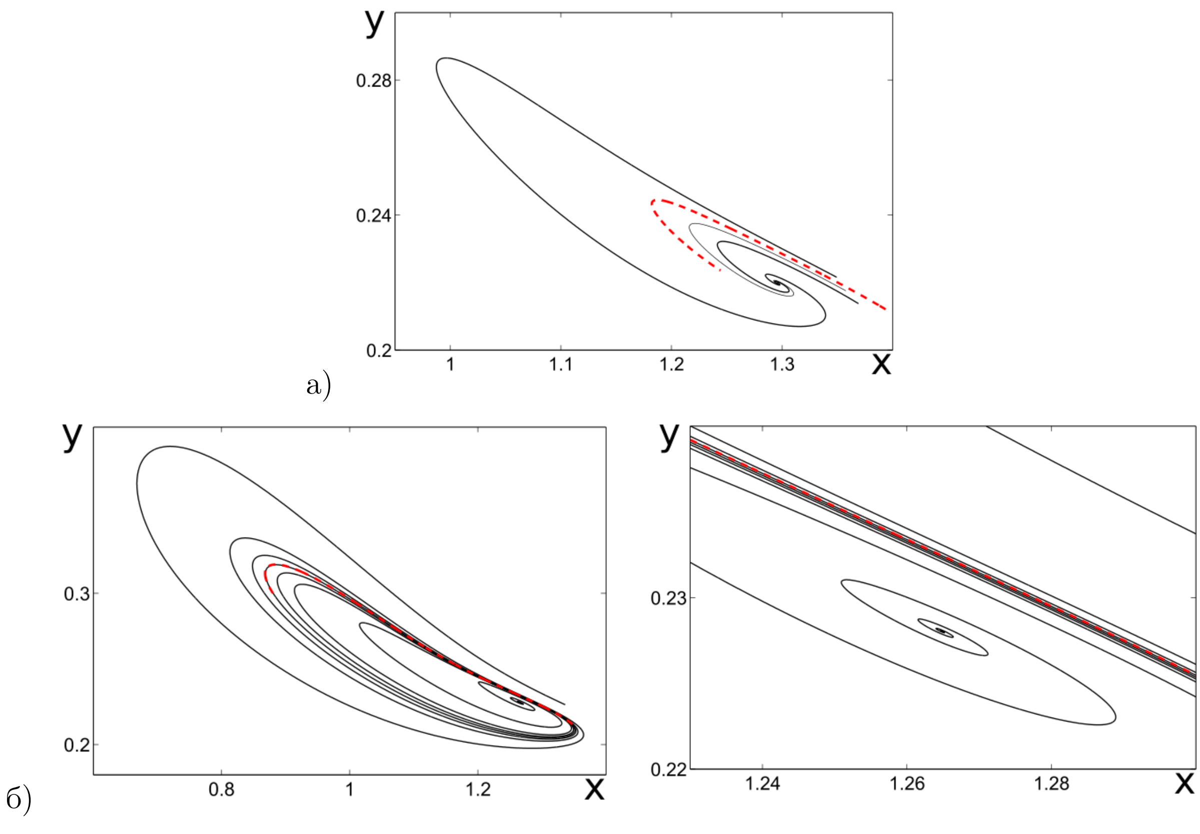


Рис. 5.2.2 – Фазовые портреты детерминированной модели для а) $a = 1.57$, б) $a = 1.58$ (с увеличенным фрагментом).

При подходе параметра a к точке бифуркации a_1, эта переходная фаза состоит не из одного выброса, а из серии витков большой амплитуды (см. рис. 5.2.2б). На фазовой плоскости начальные данные, соответствующие большеамплитудным выбросам и затухающим колебаниям, можно отделить некоторой кривой – псевдосепаратрисой. Эти кривые, найденные численно, изображенные на рис. 5.2.2 красной пунктирной линией, разделяют докритическую и сверхкритическую зоны.

При малых случайных возмущениях стохастические траектории концентрируются вблизи устойчивого равновесия и располагаются целиком в докритической зоне. При этом решения $x(t)$, $y(t)$ системы (5.2.2) демонстрируют малоамплитудные стохастические осцилляции вокруг равновесных значений.

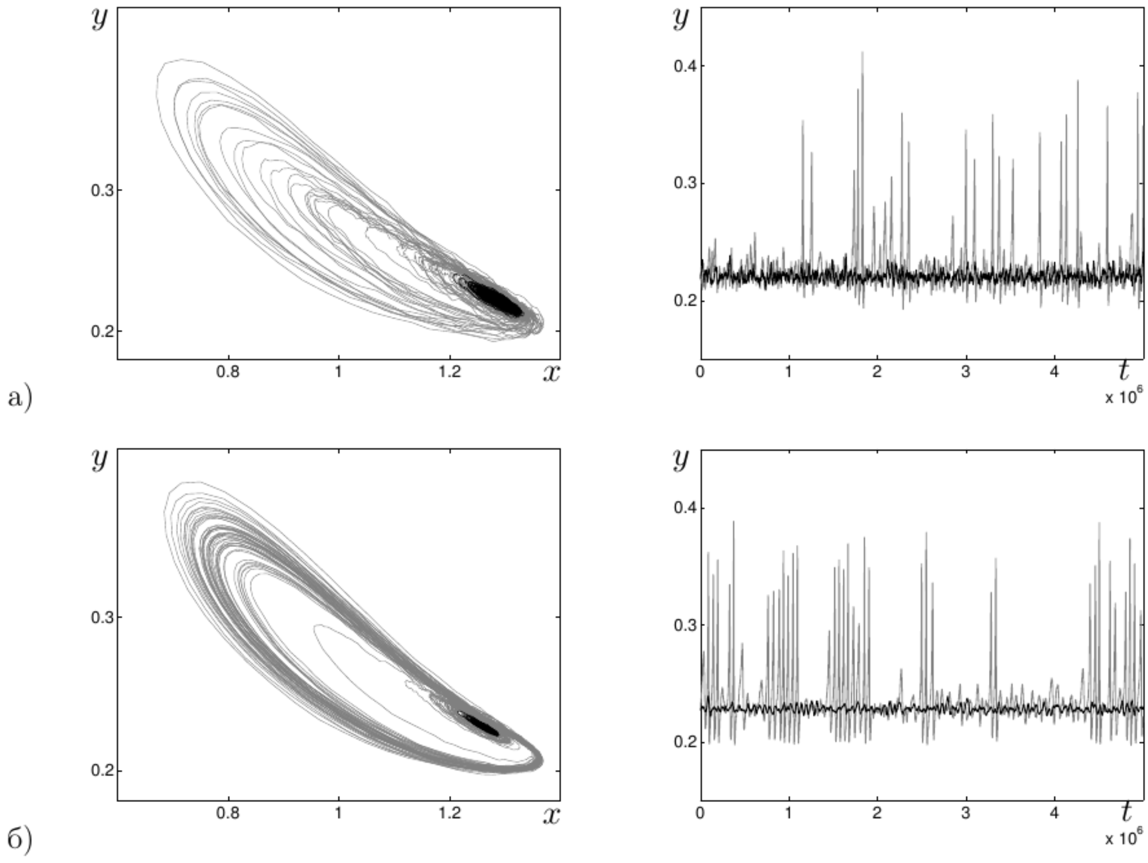


Рис. 5.2.3 – Фазовые портреты и решения $y(t)$ стохастической системы при a) $a = 1.57$ с $\varepsilon = 0.0004$ (черный цвет), $\varepsilon = 0.0008$ (серый цвет), b) $a = 1.58$ с $\varepsilon = 0.0001$ (черный цвет), $\varepsilon = 0.0003$ (серый цвет).

При увеличении интенсивности шума, стохастические траектории попадают в сверхкритическую зону, совершают большеамплитудные выбросы, вновь возвращаясь в окрестность равновесия. В результате, наблюдается перемежаемость стохастических колебаний малой и большой амплитуды.

На рис. 5.2.3 показаны траектории системы и соответствующие временные ряды для двух значений параметра $a = 1.57$ и $a = 1.58$, и шумов различной интенсивности ($\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$). На рис. 5.2.3а для $a = 1.57$ изображены результаты моделирования при $\varepsilon = 0.0004$ (черным цветом) и $\varepsilon = 0.0008$ (серым цветом). Как видим, при $\varepsilon = 0.0004$ решения не пересекают псевдосепаратрису, система функционирует в докритическом режиме. При увеличении шума ($\varepsilon = 0.0008$) траектории, пересекая сепаратрису, совершают большеамплитудные выбросы, и система переходит в сверхкритический режим, где малоамплитудные колебания прерываются всплесками больших амплитуд. При $a = 1.58$ (см. рис. 5.2.3б) такие два режима наблюдаются при $\varepsilon = 0.0001$ и $\varepsilon = 0.0003$. Как видим, чем ближе параметр a к точке бифуркации a_1, тем меньшее значение шума требуется для перевода системы в сверхкритический режим. Этот переход проясняет геометрический механизм стохастической возбудимости системы в зоне устойчивого равновесия. Следует отметить, что в данной модели явление стохастической возбудимости наблюдается при весьма малых, фактически фоновых, шумах.

Для параметрического анализа стохастической возбудимости будем использовать технику функций стохастической чувствительности и метод доверительных эллипсов, описанный в главе 2.

Стохастическая чувствительность W равновесия $(\bar{x}, \bar{y})$ является решением уравнения

$$FW + WF^\top + S = 0,$$

где

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f_{11} = -\exp\left(-\frac{1}{\bar{y}}\right) - l, \quad f_{12} = -\bar{x}\exp\left(-\frac{1}{\bar{y}}\right)\frac{1}{\bar{y}^2},$$

$$f_{21} = \exp\left(-\frac{1}{\bar{y}}\right), \quad f_{22} = \bar{x}\exp\left(-\frac{1}{\bar{y}}\right)\frac{1}{\bar{y}^2} - m.$$

Собственные числа $\lambda_1(a)$, $\lambda_2(a)$ и соответствующие им собственные векторы матрицы стохастической чувствительности $W(a)$ отражают основные пространственные особенности вероятностного распределения случайных состояний стохастической системы (5.2.2) вокруг устойчивого равновесия детерминированной системы (5.2.1). На рис. 5.2.4 изображены графики функций $\lambda_1(a) > \lambda_2(a)$. Большие значения чувствительности и являются причиной высокой стохастической возбудимости модели. Так, для $a = 1.58$, элементы матрицы стохастической чувствительности равны $w_{11} = 1.1 \cdot 10^4$, $w_{12} = w_{21} =$

$-2.26 \cdot 10^3,\ w_2 = 5.21 \cdot 10^2.$

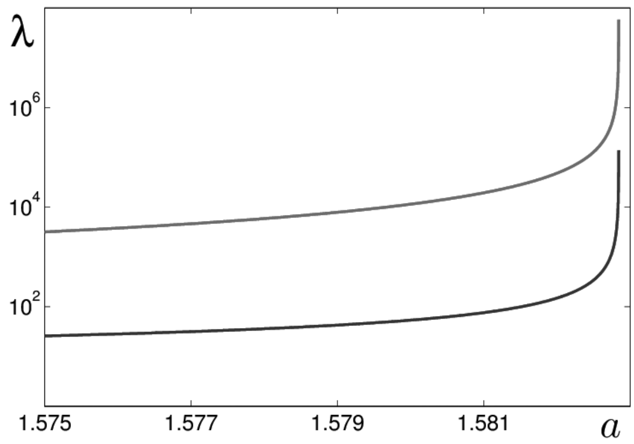


Рис. 5.2.4 – Стохастическая чувствительность равновесий.

Пространственное распределение состояний вокруг равновесия может быть описано с помощью доверительных эллипсов. Собственные векторы матрицы стохастической чувствительности $W(a)$ определяют направления главных осей, а собственные числа – размеры полуосей этих доверительных эллипсов. На рис. 5.2.5 показаны случайные состояния и доверительный эллипс для системы (5.2.2) при $a = 1.57$, $\varepsilon = 0.0001$ и доверительной вероятности $p = 0.99$. Как видим, доверительный эллипс хорошо отражает пространственные особенности разброса случайных состояний.

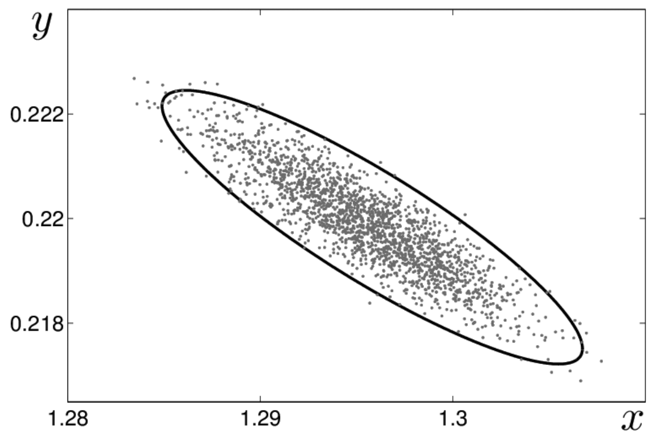


Рис. 5.2.5 – Случайные состояния и доверительный эллипс для $a = 1.57$ и $\varepsilon = 0.0001$.

Взаимное расположение доверительных эллипсов и псевдосепаратрисы может быть использовано в качестве критерия перехода системы из докритического режима в сверхкритический. Действительно, размер эллипса пропорционален интенсивности шума. При малых шумах, эллипс полностью лежит в докритической области. При увеличении шума эллипс пересекает сепаратрису и захватывает точки сверхкритической области. Такое пересечение и может служить индикатором перехода в сверхкритический режим с большеамплитудными осцилляциями.

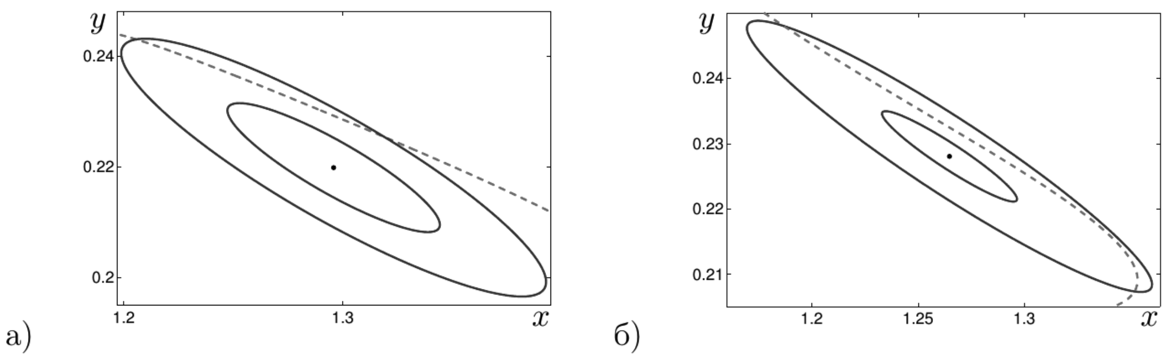


Рис. 5.2.6 – Доверительные эллипсы для а) $a = 1.57$ с $\varepsilon = 0.0004$, $\varepsilon = 0.0008$, б) $a = 1.58$ с $\varepsilon = 0.0001$, $\varepsilon = 0.0003$. Псевдосепаратриса показана пунктиром.

На рис. 5.2.6 показаны доверительные эллипсы и псевдосепаратрисы системы для двух значений параметра $a = 1.57$ и $a = 1.58$, и шумов различной интенсивности. На рис. 5.2.6а для $a = 1.57$ меньший эллипс соответствует $\varepsilon = 0.0004$, больший – $\varepsilon = 0.0008$. Как видим, при $\varepsilon = 0.0004$ эллипс не касается псевдосепаратрисы, система функционирует в докритическом режиме (см. рис. 5.2.3а, черный цвет). При увеличении шума ($\varepsilon = 0.0008$) эллипс пересекает псевдосепаратрису, в результате чего система переходит в сверхкритический режим (см. рис. 5.2.3а, серый цвет). На рис. 5.2.6б для $a = 1.58$ меньший эллипс соответствует $\varepsilon = 0.0001$, больший – $\varepsilon = 0.0003$. Как видим, и в этом случае, по расположению доверительных эллипсов можно предсказать переход системы в сверхкритический режим (см. рис. 5.2.3б).

Стохастическая возбудимость в зоне бистабильности

Рассмотрим динамику стохастической системы (5.2.2) в зоне бистабильности $a_1 < a < a_2$, где детерминированная модель имеет два аттрактора (устойчивое равновесие и устойчивый предельный цикл), разделенные неустойчивым циклом (см. рис. 5.2.7а для $a = 1.582$ и $\varepsilon = 0$). В этой зоне роль сепаратрисы играет неустойчивый предельный цикл, отделяющий бассейн притяжения равновесия от бассейна притяжения устойчивого цикла.

При малых случайных возмущениях стохастические траектории, стартуя с устойчивого равновесия, располагаются целиком в его бассейне притяжения, соответствующем докритической зоне. При этом решения $x(t)$, $y(t)$ системы (5.2.2) осциллируют с малой амплитудой вокруг равновесия.

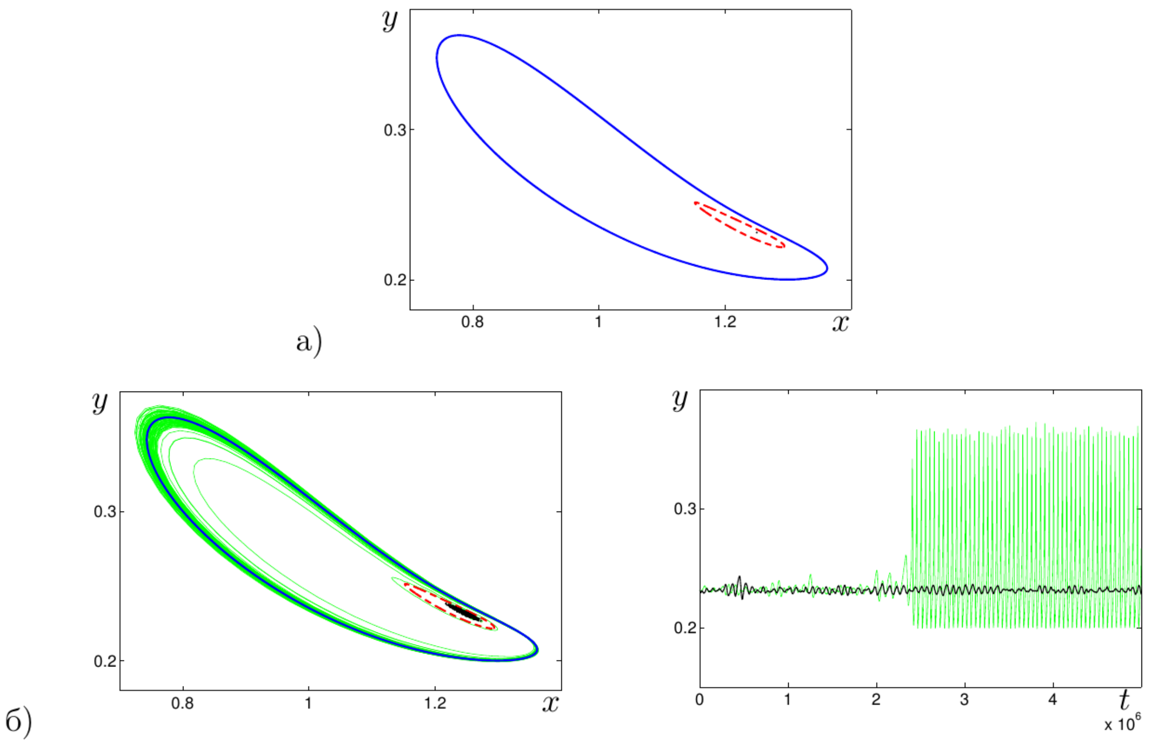


Рис. 5.2.7 – Генерация стохастических колебаний больших амплитуд при $a = 1.582$: а) устойчивый цикл (синяя сплошная линия), неустойчивый цикл (красный пунктир) и равновесие (черная точка) детерминированной системы; б) стохастические траектории и временные ряды стохастической системы при $\varepsilon = 0.00004$ (черный цвет), $\varepsilon = 0.00006$ (зеленый цвет).

При увеличении интенсивности шума, стохастические траектории пересекают сепаратрису (неустойчивый предельный цикл), переходят в бассейн притяжения устойчивого цикла и далее продолжают движение вблизи замкнутой фазовой кривой этого цикла.

На рис. 5.2.7б показаны траектории системы, стартующие из положения равновесия, и соответствующие временные ряды при $a = 1.582$ для шумов интенсивности $\varepsilon = 0.00004$ (черный цвет) и $\varepsilon = 0.00006$ (зеленый цвет). Как видим, при $\varepsilon = 0.00004$ случайные траектории не пересекают сепаратрису – система функционирует в докритическом режиме. При увеличении шума ($\varepsilon = 0.00006$) траектории пересекают сепаратрису, начинают совершать колебания в окрестности устойчивого цикла. Таким образом, система от малоамплитудных колебаний переходит к колебаниям больших амплитуд.

Техника функции стохастической чувствительности и метод доверительных эллипсов дает здесь следующие результаты (см. рис. 5.2.8).

Как видим, при $\varepsilon = 0.00004$ эллипс лежит целиком в бассейне притяжения равновесия, система функционирует в докритическом режиме (см.

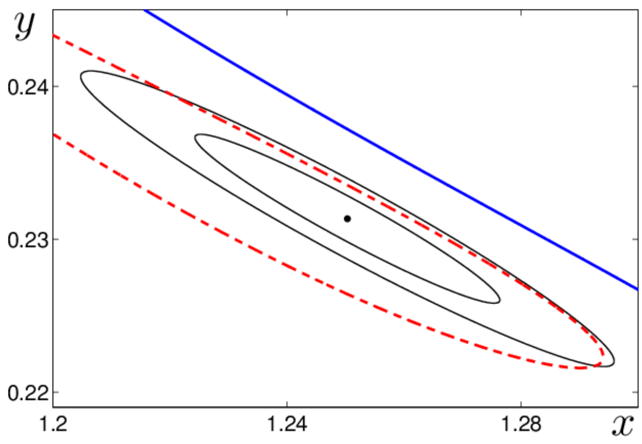


Рис. 5.2.8 – Доверительные эллипсы для $a = 1.582$ и $\varepsilon = 0.00004$ (малый), $\varepsilon = 0.00006$ (большой). Неустойчивый цикл показан красным пунктиром, устойчивый – синей сплошной линией.

рис.5.2.7б, черный цвет). При увеличении шума ($\varepsilon = 0.00006$) эллипс пересекает сепаратрису (неустойчивый цикл), в результате чего система переходит в сверхкритический режим (см. рис.5.2.7б, зеленый цвет). Как видно из сравнения с результатами прямого численного моделирования случайных траекторий, и в этом случае по расположению доверительных эллипсов можно предсказать переход системы в сверхкритический режим.

Однако функционирование проточного химического реактора в режиме большеамплитудных колебания зачастую является нежелательным режимом. В этих обстоятельствах возникает важная инженерная задача стабилизации возможных осцилляций вблизи равновесия.

Стабилизация проточного реактора

Рассмотрим систему (5.2.2) с дополнительными управляющими воздействиями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \exp\left(-\frac{1}{y}\right) + l(a - x) + u_1 + \varepsilon_1 \xi_1(t), \\ \dot{y} &= x \exp\left(-\frac{1}{y}\right) + m(b - y) + u_2 + \varepsilon_2 \xi_2(t). \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

В случае полной информации, когда координаты x, y состояния системы известны точно, для стабилизации желаемого рабочего режима будем использовать регулятор

$$u_1 = k_{11}(x - \bar{x}) + k_{12}(y - \bar{y}), \qquad u_2 = k_{21}(x - \bar{x}) + k_{22}(y - \bar{y}). \tag{5.2.4}$$

В этом случае, используя формулу (4.2.9), имеем

$$K = -F - 0.5W^{-1}.$$

Эта формула задает матрицу $K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ регулятора (5.2.4), который обеспечивает заданную стохастическую чувствительность W равновесия.

Ограничимся здесь множеством диагональных матриц стохастической чувствительности вида $W = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}$ с произвольной назначенной величиной $w > 0$. В этом случае

$$k_{11} = -f_{11} - \frac{1}{2w}, \quad k_{12} = -f_{12}, \quad k_{21} = -f_{21}, \quad k_{22} = -f_{22} - \frac{1}{2w}. \qquad (5.2.5)$$

Регулятор (5.2.4) с параметрами (5.2.5) обеспечивает устойчивость и постоянную стохастическую чувствительность равновесия $(\bar{x}, \bar{y})$ для любого значения параметра a. Результаты такого управления, основанного на синтезе стохастической чувствительности $w = 10$ показаны на рис. 5.2.9. Заметим, что сни-

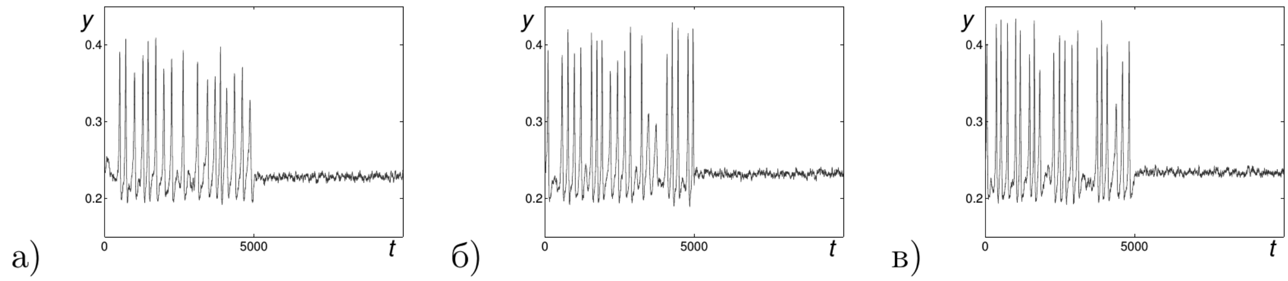


Рис. 5.2.9 – Решения стохастической системы с $\varepsilon = 0.001$: а) $a = 1.58$; б) $a = 1.582$; в) $a = 1.583$. Управление включается при $t = 5000$, регулятор обеспечивает $w = 10$.

жение чувствительности w позволяет уменьшить дисперсию стохастических осцилляций (см. рис. 5.2.10 с $w = 0.1$ и $w = 10$).

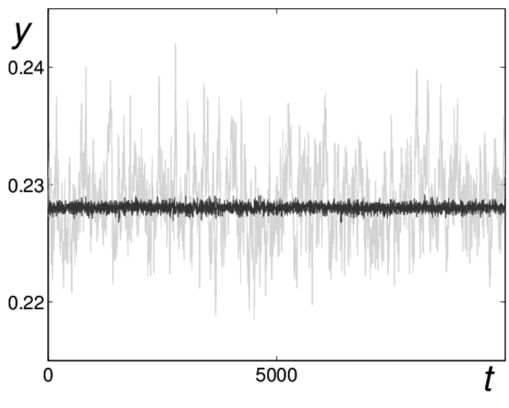


Рис. 5.2.10 – Решения стохастической системы (5.2.3) с $a = 1.58$, $\varepsilon = 0.001$ и регулятором, обеспечивающим $w = 0.1$ (черный цвет) и $w = 10$ (серый цвет).

Рассмотрим теперь случай неполной информации, когда наблюдению доступна только координата x. Будем использовать регулятор вида

$$u_1 = k_1(x - \bar{x}), \qquad u_2 = k_2(x - \bar{x}). \tag{5.2.6}$$

В этом случае

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad F + BKC = \begin{bmatrix} f_{11} + k_1 & f_{12} \\ f_{21} + k_2 & f_{22} \end{bmatrix}.$$

Множество $\mathbf{K}$ параметров регулятора (5.2.6), обеспечивающего экспоненциальную устойчивость равновесия, определяется системой линейных неравенств:

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}(F + BKC) = f_{11} + f_{22} + k_1 < 0, \\ &\det(F + BKC) = f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21} + f_{22}k_1 - f_{12}k_2 > 0. \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Область устойчивости $\mathbf{K}$ для $a = 1.58$ показана на рис. 5.2.11. При любых

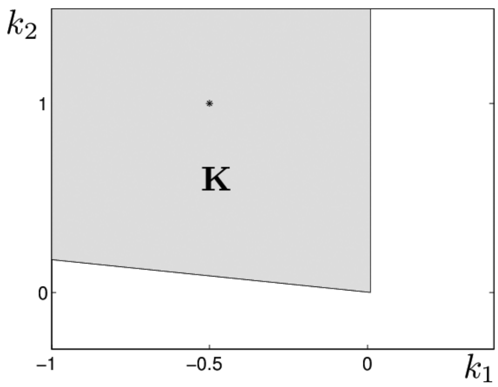


Рис. 5.2.11 – Область устойчивости $\mathbf{K}$ для $a = 1.58$.

$(k_1, k_2) \in \mathbf{K}$ элементы $w_{ij}(k_1, k_2)$ матрицы стохастической чувствительности $W(k_1, k_2)$ находятся из системы

$$(F + BKC)W + W(F + BKC)^\top + S = 0.$$

Таким образом, задача снижения стохастической чувствительности далее может решаться с помощью стандартных процедур спуска.

Например, при $k_1 = -0.5,\ k_2 = 1$ (см. звездочку на рис. 5.2.11) мы имеем

$$w_{11} = 1.317,\ w_{12} = -0.794,\ w_{22} = 5.735.$$

Напомним, что в системе без управления

$$w_{11} = 1.1 \cdot 10^4,\ w_{12} = -2.26 \cdot 10^3,\ w_2 = 5.21 \cdot 10^2.$$

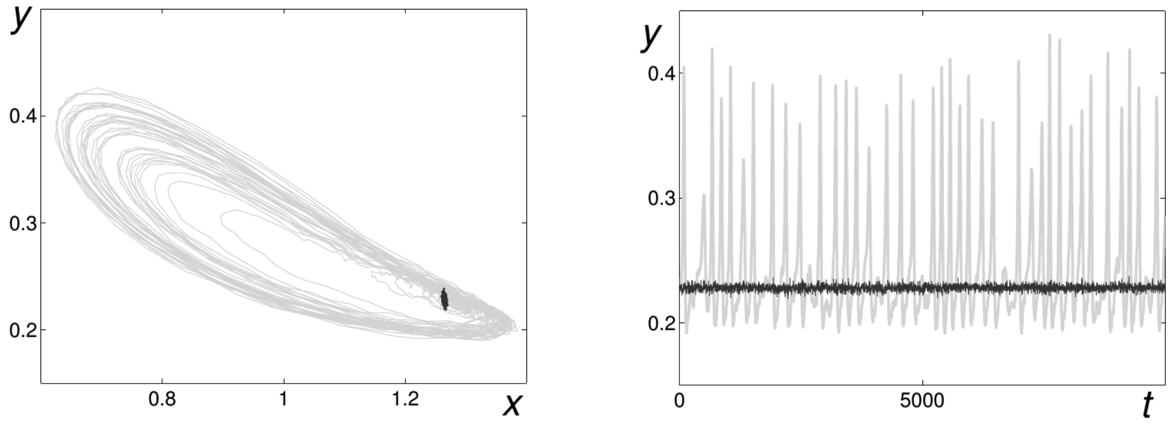


Рис. 5.2.12 – Фазовые траектории и временные ряды стохастической системы при $a = 1.58$, $\varepsilon = 0.001$ без управления (серый цвет) и с управлением (черный цвет), формируемым регулятором (5.2.6) с $k_1 = -0.5,\ k_2 = 1$.

Как видим, регулятор (5.2.6) с $k_1 = -0.5,\ k_2 = 1$ существенно снижает стохастическую чувствительность. Результаты численного моделирования решений системы (5.2.3) с регулятором (5.2.6) показаны на рис. 5.2.12.

Таким образом, и в случае неполной информации, предложенный подход позволяет стабилизировать проточный химический реактор в равновесном режиме и подавить нежелательные большеамплитудные выбросы.

Результаты этого раздела опубликованы в работах [218, 231] автора диссертации.

5.3. Кинетика гликолиза в присутствии случайных возмущений

Рассмотрим стохастический вариант модели Селькова [298, 299], описывающей фосфофруктокиназную фазу гликолитической реакции с колебаниями субстрата и продукта:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + ay + x^2 y \\ \dot{y} &= b - ay - x^2 y + \varepsilon\xi(t). \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Здесь переменные x и y – концентрации соответственно продукта (АДФ) и субстрата (АТФ), a и b – положительные кинетические параметры. В стохастической модели предполагается, что приток субстрата состоит из постоянной составляющей b и стохастической добавки $\varepsilon\xi(t)$, где $\xi(t)$ – стандартный некоррелированный гауссовский белый шум с параметрами $\mathrm{E}\xi(t) = 0,\ \ \mathrm{E}(\xi(t)\xi(\tau)) = \delta(t-\tau)$, а величина ε задает интенсивность этого шума.

Детерминированная система (5.3.1) (с $\varepsilon = 0$) имеет одну точку покоя с координатами $\bar{x} = b$, $\bar{y} = \frac{b}{a+b^2}$. При $0 < a < 0.125$, в системе наблюдаются бифуркации Андронова–Хопфа при

$$b_1(a) = \sqrt{\frac{1 - 2a - \sqrt{1 - 8a}}{2}},\ b_2(a) = \sqrt{\frac{1 - 2a + \sqrt{1 - 8a}}{2}}.$$

В области $b_1(a) < b < b_2(a)$, где равновесие $(\bar{x}, \bar{y})$ неустойчиво, в системе наблюдаются автоколебания. Устойчивые циклы, обнаруженные в математической модели, в свое время объяснили причину колебаний в гликолизе [298,300]. Характер колебаний существенно зависит от параметра a. При малых a они становятся релаксационными. Будет показано, что при малых a модель становится чувствительной к случайным возмущениям как в зоне циклов, так и равновесий. Здесь и далее зафиксируем $a = 0.01$.

На рис. 5.3.1 представлена бифуркационная диаграмма детерминированной системы. Здесь координаты устойчивых равновесий и точек пересечения предельных циклов с прямыми $x = \bar{x}$ или $y = \bar{y}$ изображены сплошными линиями, а координаты неустойчивых равновесий показаны пунктирами.

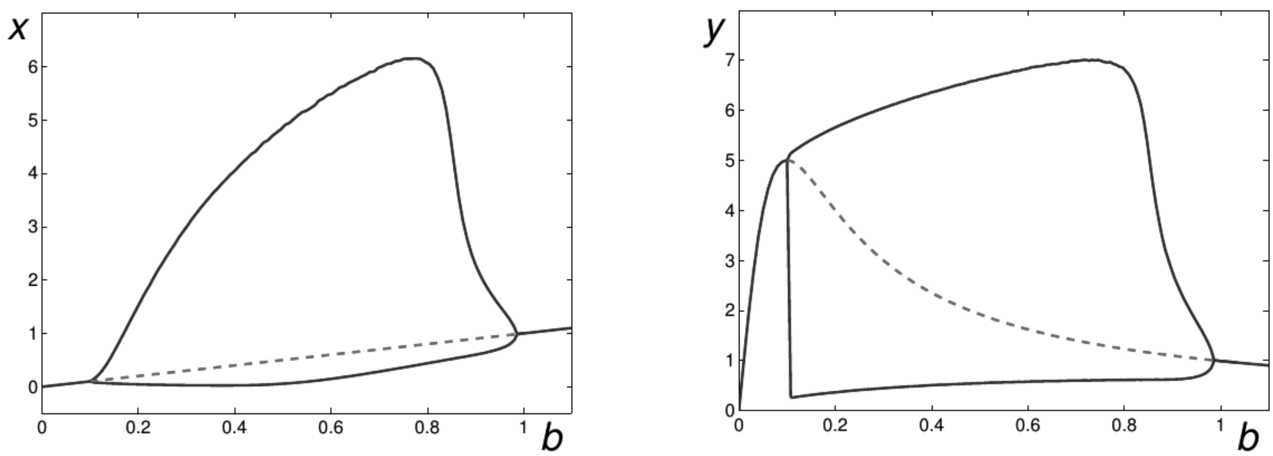


Рис. 5.3.1 – Бифуркационная диаграмма детерминированной модели Селькова для $a = 0.01$.

Точками бифуркации здесь являются $b_1 = 0.10206$, $b_2 = 0.9847$. Отметим, что y-координаты предельных циклов резко возрастают как только параметр проходит точку бифуркации b_1 – здесь наблюдается явление "канардовского взрыва".

В исследовании реакции аттракторов системы на случайные возмущения будем использовать технику функции стохастической чувствительности из главы 2. На рис. 5.3.2 представлена зависимость стохастической чувствительности аттракторов модели Селькова (5.3.1) от параметра b. В зонах устойчивых равновесий здесь показаны графики функций $\mu_{1,2}(b)$ – собственных значений матрицы стохастической чувствительности. В зоне циклов представлен график $\mu(b)$ максимумов стохастической чувствительности. Как видим, стохастическая чувствительность аттракторов неограниченно растет при приближении к точкам бифуркаций. В зоне циклов можно отметить наличие двух пиков. Левый пик при $b^* = 0.1034$ крайне узкий и высокий: $\mu(b^*) = 5 \cdot 10^7$, в то время как в большей части интервала (b_1, b_2) значения μ порядка единицы. То есть цикл-канард при $b^* = 0.1034$ является суперчувствительным к случайным возмущениям.

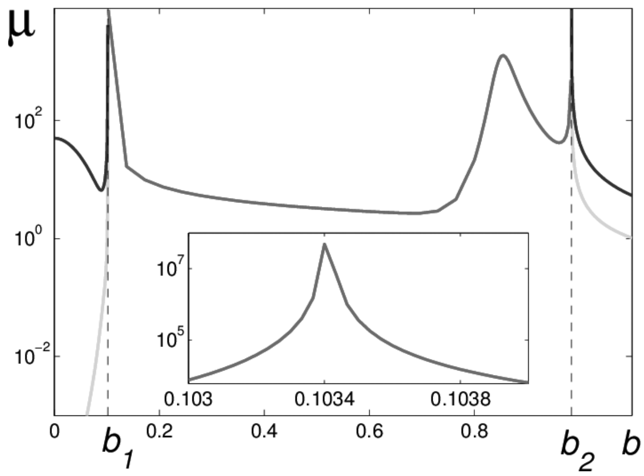


Рис. 5.3.2 – Стохастическая чувствительность аттракторов модели Селькова для $a = 0.01$.

Рассмотрим поведение стохастической системы в зоне равновесий при $b = 0.1$. Результаты исследования представлены на рис. 5.3.3. При малых шумах ($\varepsilon = 0.008$) стохастические траектории концентрируются в допороговой зоне вблизи устойчивого равновесия, а при шуме большей интенсивности ($\varepsilon = 0.015$) попадают в надпороговую зону и демонстрируют большеамплитудные осцилляции (см. фазовые траектории и временные ряды на рис. 5.3.3а,б). Детали такого стохастического возбуждения представлены на рис. 5.3.3в, где изображены y-координаты точек пересечения случайных траекторий с прямой $x = \bar{x}$ в зависимости от интенсивности шума. Здесь отчетливо видно расщепление унимодальных малоамплитудных стохастических осцилляций в бимодальные осцилляции, сочетающие малоамплитудные и большеамплитудные фазы.

Вероятностный механизм такого расщепления можно объяснить с помощью доверительных эллипсов. На рис. 5.3.3г пунктиром представлены эллипсы для $\varepsilon = 0.008$ (малый) и $\varepsilon = 0.015$ (большой). Как видим, малый эллипс охватывает начальные отклонения, отвечающие допороговому режиму, когда

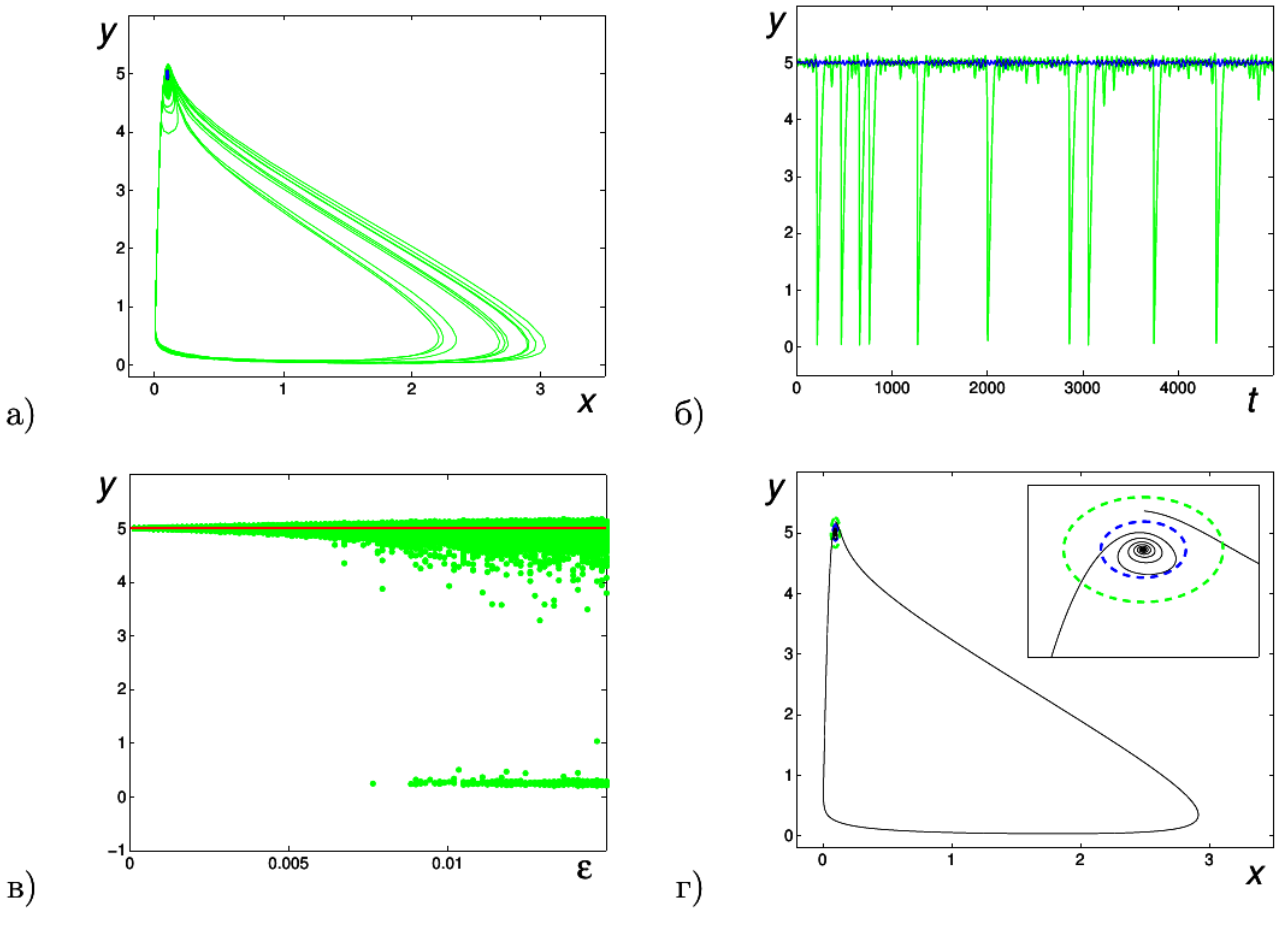


Рис. 5.3.3 – Стохастическая возбудимость.

детерминированная траектория монотонно стремится к устойчивому равновесию. Большой эллипс содержит начальные точки, соответствующие надпороговому режиму, когда траектория демонстрирует большеамплитудный выброс.

Рассмотрим поведение стохастической системы Селькова при значении $b^* = 0.1034$, соответствующем суперчувствительному циклу-канарду. Здесь расщепление пучка случайных траекторий наблюдается уже при чрезвычайно малых, по сути фоновых шумах (рис. 5.3.4). Действительно, при $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$ случайные траектории еще концентрируются вблизи детерминированного цикла (рис. 5.3.4а), а уже при $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ амплитуда осцилляций резко возрастает. Детали такого перехода от унимодальных к бимодальным осцилляциям представлены на рис. 5.3.4б, где изображены y-координаты точек пересечения случайных траекторий с прямой $x = \bar{x}$ в зависимости от интенсивности шума.

Здесь следует отметить, что в ходе расщепления, наряду с амплитудными изменениями, наблюдается принципиальная деформация внутренних свойств стохастических потоков. На рис. 5.3.4в представлен график зависимости старшего показателя Ляпунова Λ в зависимости от интенсивности шума. Как ви-

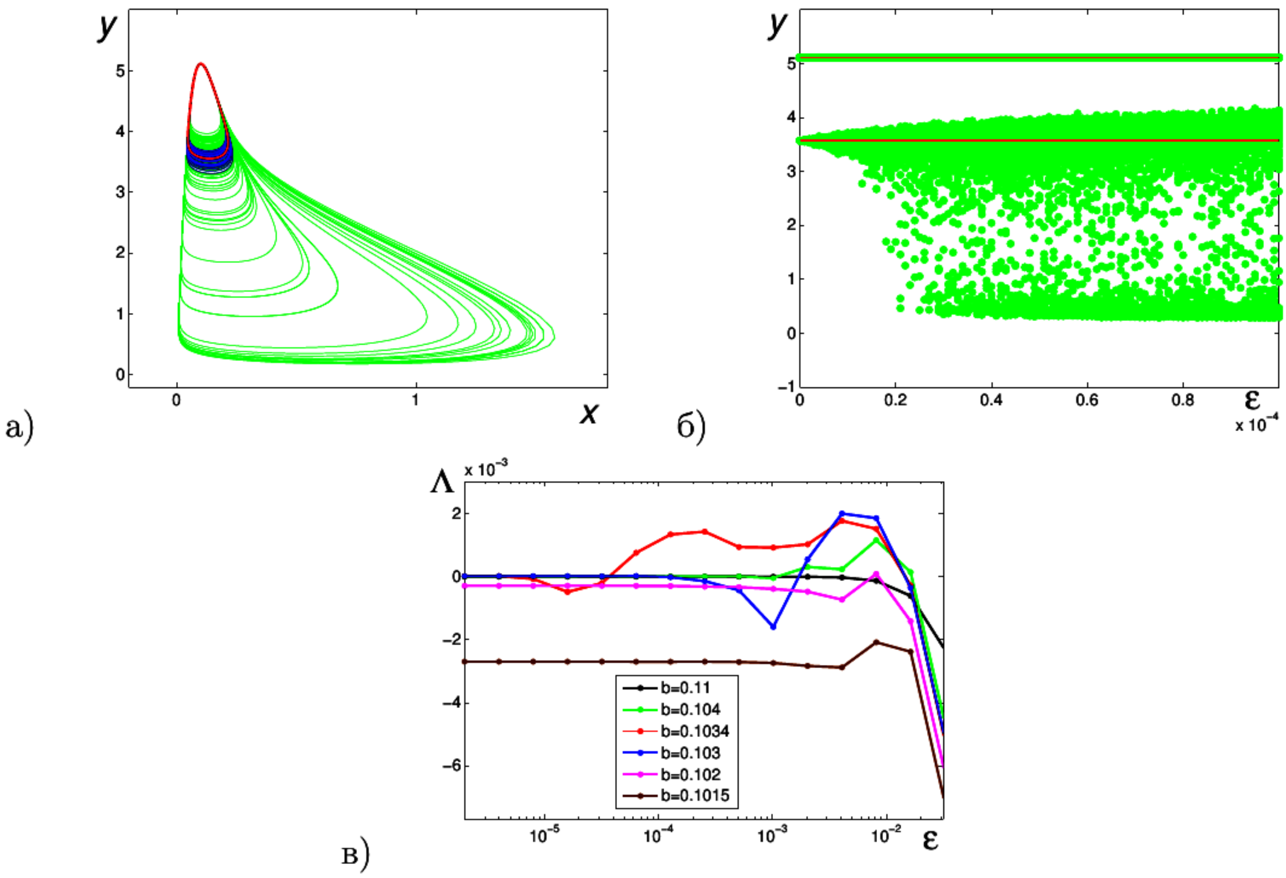


Рис. 5.3.4 – Стохастическое расщепление и переход к хаосу при $b^* = 0.1034$.

дим, при увеличении интенсивности шума функция $\Lambda(\varepsilon)$ сначала убывает и становится отрицательной, а затем возрастает и начинает принимать положительные значения. Смена знака с минуса на плюс сигнализирует о переходе от порядка к хаосу. Отметим, что для $b = 0.1034$ такой переход от порядка к хаосу происходит при интенсивности шума, соответствующей расщеплению стохастических траекторий ($\varepsilon \approx 2 \cdot 10^{-5}$).

Таким образом, для стохастической модели Селькова выявлена параметрическая зона, где даже малые случайные возмущения приводят к качественным деформациям динамики, связанным с генерацией бимодальных стохастических осцилляций и переходом от порядка к хаосу. Показано, что техника стохастической чувствительности и метод доверительных областей могут быть эффективно использованы в параметрическом анализе этих сложных стохастических явлений в гликолитической кинетике.

Результаты этого раздела опубликованы в работах [224, 225] автора диссертации.

Представленный здесь подход и техника математического анализа были развиты в исследованиях [301, 302] более сложных двух- и трехмерных моделей, предложенных А.Голдбетером для описания кинетики энзимных реакций с сильными нелинейными обратными связями.

5.4. Стохастические явления в моделях нейронной динамики

Данный раздел посвящен приложению представленных главах 1,2,3 диссертации общих теоретических методов стохастического анализа к исследованию индуцированных шумом явлений в нейронной динамике. Здесь будут исследованы модели Рулькова, Фицхью-Нагумо, Юлихера, Ходжкина-Хаксли. Эти системы моделируют качественное разнообразие известных режимов нейронной активности.

5.4.1. Модель Рулькова

Среди дискретных моделей нейронной активности наиболее известными являются модели Рулькова [280]. Даже одномерная система Рулькова достаточна репрезентативна и позволяет моделировать такие базовые режимы нейронной активности как покой, спайкинг и бёрстинг.

Одномерная модель

Рассмотрим стохастический вариант одномерной модели Рулькова

$$x_{t+1} = \frac{\alpha}{1+x_t^2} + \gamma + \varepsilon\xi_t. \tag{5.4.1}$$

Здесь x – мембранный потенциал, γ – параметр концентрации ионов, ξ_t – некоррелированный скалярный гауссовский случайный процесс с параметрами $\mathrm{E}(\xi_t) = 0$, $\mathrm{E}(\xi_t^2) = 1$, ε – интенсивность шума. Детерминированный вариант системы (5.4.1) был введен в [280] как простейшая дискретная концептуальная система, моделирующая основные режимы нейронной активности. Следуя этой работе, зафиксируем $\alpha = 4.1$ и варьируем параметр γ.

На рисунке 5.4.1a изображены аттракторы детерминированной модели Рулькова. Как можно видеть, эта модель демонстрирует большое разнообразие динамических режимов. Эти режимы разделяются точками бифуркаций $\gamma_1 = -4.162$, $\gamma_2 = -3.3$, $\gamma_3 = -2.849$, $\gamma_4 = -2.729$. На интервале $-4.5 < \gamma < \gamma_4$ детерминированная систем имеет устойчивое равновесие $\bar{x}_1$ (нижняя кривая на рис. 5.4.1a). Точки γ_1 и γ_4 отмечают седло-узловые бифуркации. Когда параметр γ проходит через γ_1 слева направо, появляются неустойчивое равновесие $\bar{x}_2$ и устойчивое равновесие $\bar{x}_3$. Неустойчивое равновесие $\bar{x}_2$ показано на интервале $\gamma_1 < \gamma < \gamma_4$ пунктиром. При $\gamma = \gamma_4$, равновесия $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ сливаются и исчезают.

При $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$ (см. верхнюю часть рис. 5.4.1а), детерминированная модель Рулькова демонстрирует стандартный каскад бифуркаций удвоения периода с последующей перемежаемостью порядка и хаоса.

Отметим, что точки γ_2 и γ_3 являются нелокальными бифуркациями граничного кризиса: при переходе параметра γ через γ_2 слева направо, верхний хаотический аттрактор касается неустойчивого равновесия $\bar{x}_2$ и исчезает. Таким образом, системы Рулькова моностабильна при $(-4.5, \gamma_1) \cup (\gamma_2, \gamma_3) \cup (\gamma_4, -2.6)$ и бистабильна при $(\gamma_1, \gamma_2) \cup (\gamma_3, \gamma_4)$.

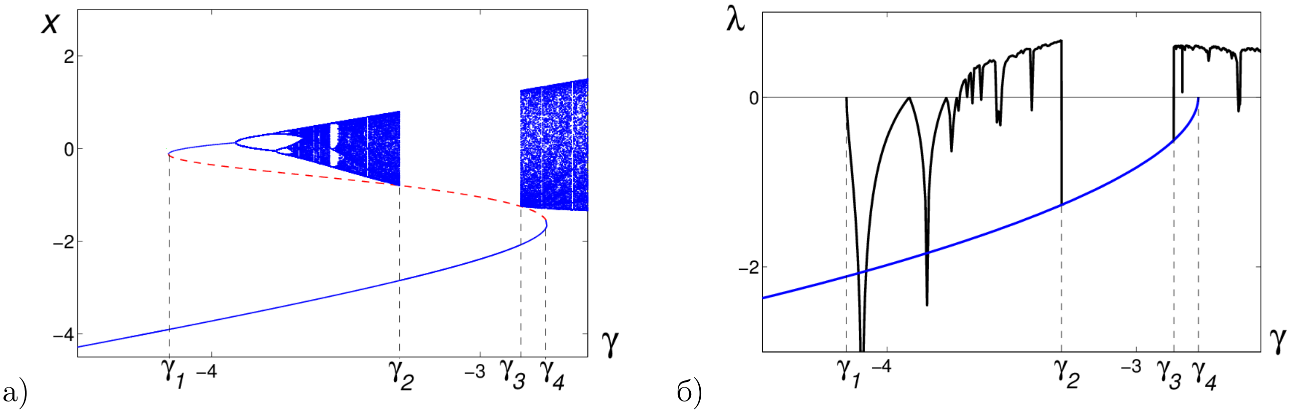


Рис. 5.4.1 – Детерминированная модель Рулькова: а) аттракторы, б) показатели Ляпунова. Здесь $\gamma_1 = -4.162$, $\gamma_2 = -3.3$, $\gamma_3 = -2.849$, $\gamma_4 = -2.751$.

В зонах моностабильности, показатель Ляпунова имеет одну ветвь, а в зонах бистабильности – две (см.рис. 5.4.1б). Как видим, в зонах бистабильности возможно сосуществование порядка и хаоса. На интервале моностабильности (γ_2, γ_3), зона порядка разделяет две хаотические зоны, примыкающие слева и справа в точках кризисных бифуркаций.

Рассмотрим далее, как шум воздействует на регулярные и хаотические аттракторы.

Воздействие шума на регулярные аттракторы

В п.3.2.1 было показано, как техника стохастической чувствительности может быть эффективно использована в анализе обратных стохастических бифуркаций в рассматриваемой модели Рулькова.

Покажем, что эта техника может быть применена и для конструктивного анализа индуцированного шумом бёрстинга. Для примера рассмотрим случай $\gamma = -2.8$, когда детерминированная система Рулькова бистабильна и имеет хаотический режим и устойчивое равновесие $\bar{x}_1$ (см. рис. 5.4.2а). Под воздействие шума случайная траектория может пересекать сепаратрису (неустойчивое равновесие $\bar{x}_2$) и формировать новый стохастический режим бёрстинга с перемежаемостью малоамплитудных осцилляций вблизи $\bar{x}_1$ и большеамплитудных спайков в бассейне притяжения хаотического аттрактора (см. рис. 5.4.2б для $\varepsilon = 0.15$). Детали такой трансформации видны на рисунке 5.4.3а, где случайные состояния решений системы (5.4.1), стартующие с точки $\bar{x}_1$, показаны при различных шумах. Здесь синим пунктиром изображены границы доверительных интервалов, найденные с помощью функции стохастической чувствительности. Как видим, точка пересечения верхней границы доверительного интервала с сепаратрисой позволяет локализовать критическое значение интенсивности шума, при котором начинается генерация стохастического бёрстинга.

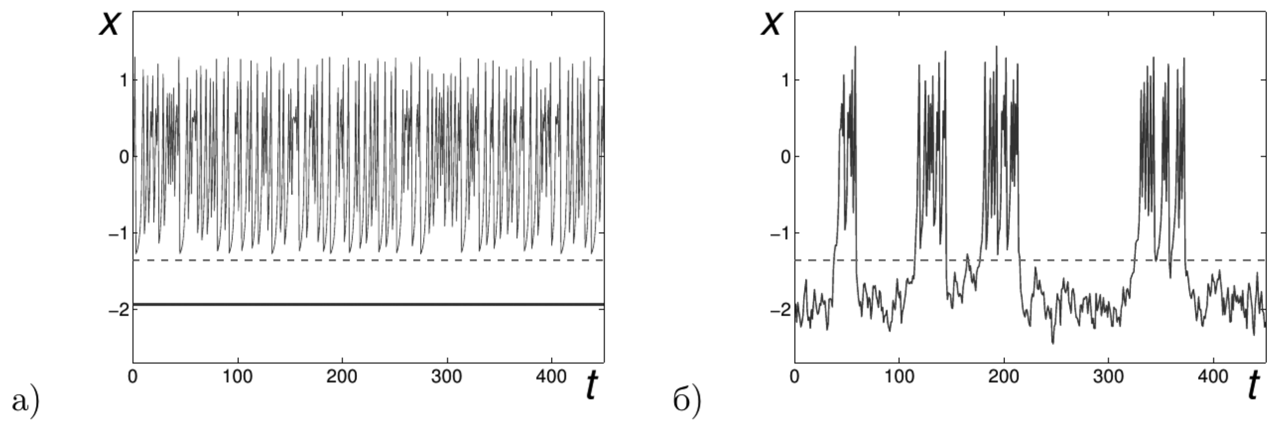


Рис. 5.4.2 – Решения системы Рулькова при $\gamma = -2.8$ и а) $\varepsilon = 0$, б) $\varepsilon = 0.15$.

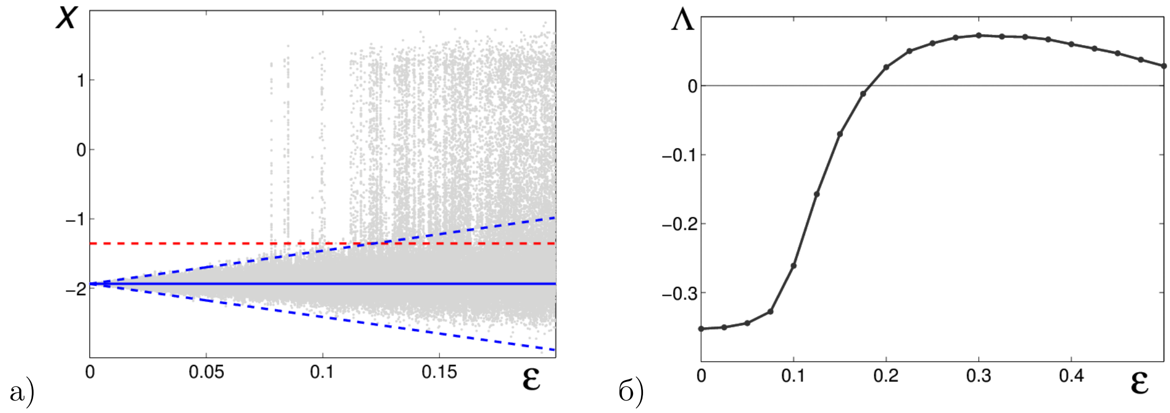


Рис. 5.4.3 – Стохастическая система Рулькова при $\gamma = -2.8$: а) индуцированный шумом бёрстинг, б) индуцированная шумом хаотизация.

На рисунке 5.4.2б показаны соответствующие изменения показателя Ляпунова. Как видим, генерация бёрстинга сопровождается переходом от порядка к хаосу.

Воздействие шума на хаотические аттракторы

Рассмотрим как стохастические возмущения меняют хаотическую динамику системы Рулькова вблизи точек γ_2, γ_3 бифуркаций кризиса. На рисунке 5.4.4а показаны стохастические временные ряды решений, стартующих с детерминированного хаотического аттрактора ($\gamma = -3.5$). При малом шуме ($\varepsilon = 0.01$) случайная траектория (синий цвет) лежит в бассейне притяжения хаотического аттрактора, а при увеличении шума ($\varepsilon = 0.03$) случайная траектория (красный цвет) после некоторого переходного процесса пересекает сепаратрису (неустойчивое равновесие $\bar{x}_2$, пунктир), приближается к устойчивому равновесию $\bar{x}_1$, и дальше совершает малоамплитудные осцилляции вокруг него. Аналогичные индуцированные шумом переходы наблюдаются вблизи точки бифуркации кризиса γ_3 (см. рис. 5.4.4б для $\gamma = -2.8$).

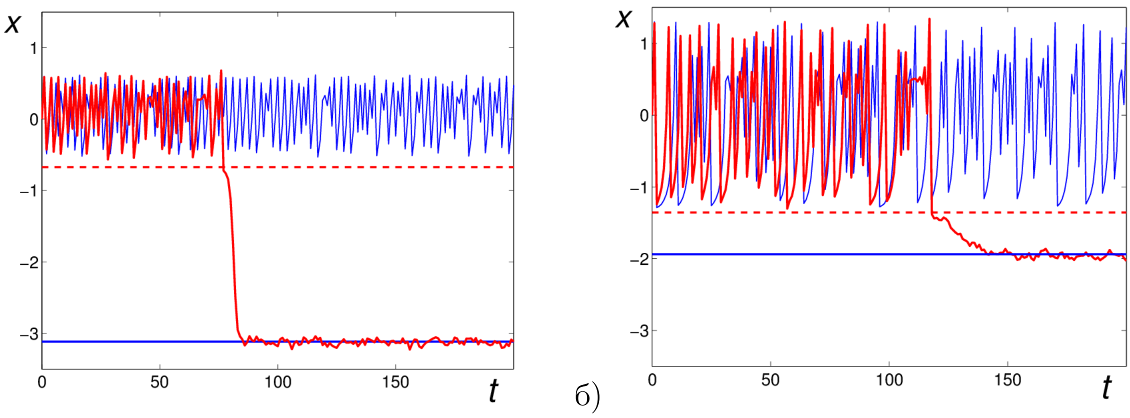


Рис. 5.4.4 – Временные ряды стохастической модели Рулькова при $\varepsilon = 0.01$ (синий), $\varepsilon = 0.03$ (красный) для а) $\gamma = -3.5$, б) $\gamma = -2.8$.

Такой переход траекторий из бассейна притяжения хаотического аттрактора в бассейн притяжения равновесия сопровождается изменением значений показателя Ляпунова. На рисунке 5.4.5 изображены две ветви показателя Ляпунова, вычисленные на решениях, стартующих с хаотического детерминированного аттрактора (красный цвет) и с устойчивого равновесия $\bar{x}_1$ (синий цвет). Верхняя ветвь с положительными значениями соответствует стохастически возмущенным хаотическим колебаниям. Нижняя ветвь с отрицательными значениями соответствует малоамплитудным стохастическим осцилляциям вблизи устойчивого равновесия $\bar{x}_1$. Как видим, при слабом шуме эти две ветви хорошо разделены.

При дальнейшем увеличении шума происходит резкое изменение динамики системы: верхняя ветвь показателя Ляпунова скачком падает вниз и сливается с нижней. Такое изменение сигнализирует об индуцированном шумом переходе системы Рулькова от хаоса к порядку. Общая картина деформации

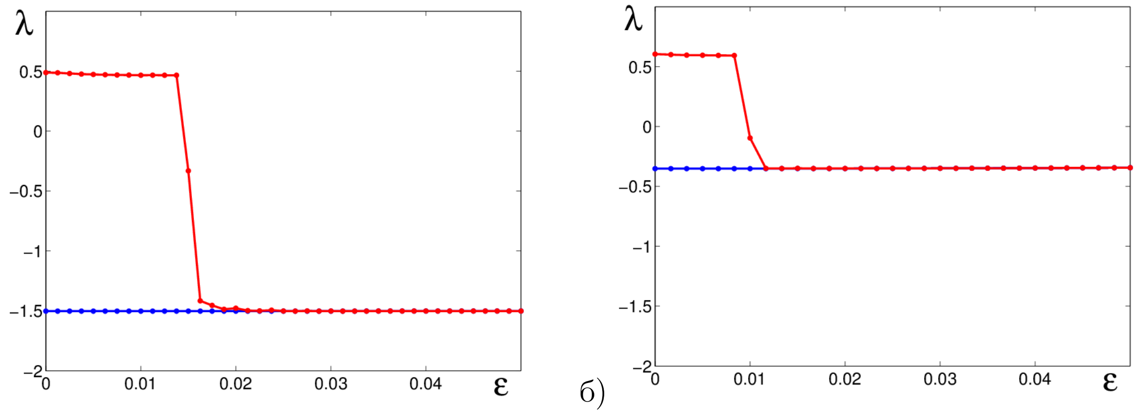


Рис. 5.4.5 – Показатели Ляпунова стохастической модели Рулькова для а) $\gamma = -3.5$, б) $\gamma = -2.8$, вычисленные на решениях, стартующих с хаотического детерминированного аттрактора (красный) и с устойчивого равновесия $\bar{x}_1$ (синий).

аттракторов вблизи точек кризисных бифуркаций γ_2, γ_3 показана на рисунке 5.4.6. Как видим, при увеличении шума зона порядка расширяется.

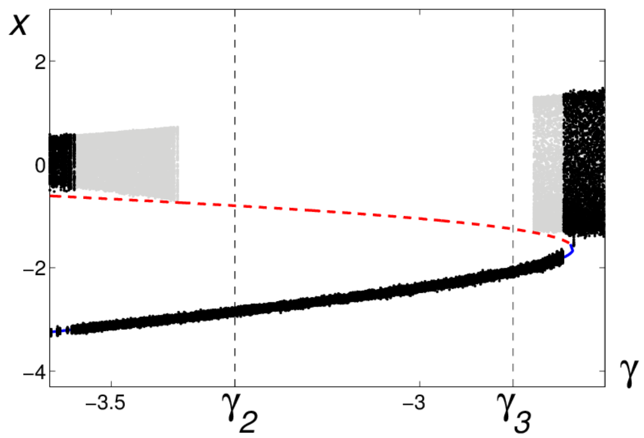


Рис. 5.4.6 – Аттракторы стохастической модели Рулькова для $\varepsilon = 0.01$ (серый), $\varepsilon = 0.03$ (черный).

Для параметрического анализа этого явления воспользуемся техникой функций стохастической чувствительности и методом доверительных интервалов. На рисунке 5.4.7 для двух значений параметра γ серым цветом изображены случайные состояния стохастической модели Рулькова, неустойчивое равновесие $\bar{x}_2$ показано красным пунктиром, устойчивое равновесие – синей линией, нижняя граница доверительного интервала для стохастически возмущенного хаотического аттрактора показана синим пунктиром.

Точка пересечения нижней границы доверительных интервалов с сепаратрисой $\bar{x}_2$ локализует критическое значение интенсивности шума, при котором происходит переход от хаоса к порядку. Отметим, что чем ближе параметр γ к точке бифуркации кризиса, тем при меньшем шуме происходит такой переход.

Используя метод доверительных интервалов, можно построить парамет-

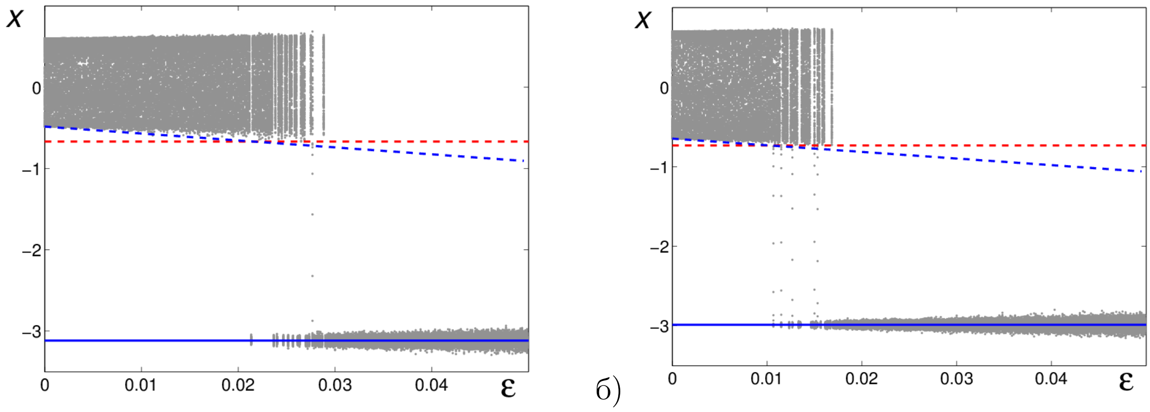


Рис. 5.4.7 – Индуцированный шумом переход от хаоса к порядку в стохастической модели Рулькова для а) $\gamma = -3.5$, б) $\gamma = -3.4$.

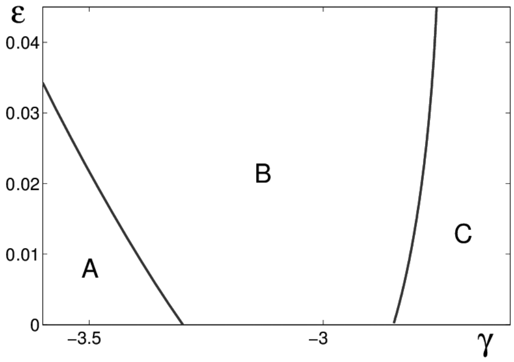


Рис. 5.4.8 – Стохастическая диаграмма режимов модели Рулькова: A и C – хаос, B – порядок.

рический портрет динамических режимов стохастической модели Рулькова в зависимости от интенсивности шума ε, на γ-интервале, охватывающем обе точки кризисной бифуркации γ_2, γ_3. Этот параметрический портрет представлен на рисунке 5.4.8. Как видим, при увеличении интенсивности шума зона порядка B, разделяющая зоны хаоса A и C, расширяется. Этот феномен имеет следующую нейронную интерпретацию: шум может подавить хаотический спайкинг и перевести возбужденный нейрон в регулярный режим покоя.

Двумерная модель

Рассмотрим стохастический вариант двумерной модели Рулькова

$$\begin{cases} x_{t+1} = \dfrac{\alpha}{1+{x_t}^2} + y_t + \varepsilon\xi_{1,t} \\ y_{t+1} = y_t - \sigma x_t - \beta + \varepsilon\xi_{2,t}. \end{cases} \tag{5.4.2}$$

Здесь x – быстрая переменная, y – медленная переменная, α, σ и β – положительные параметры, $\xi_{1,t}$, $\xi_{2,t}$ – некоррелированные гауссовские случайные процессы, $\mathrm{E}(\xi_{1,t}) = \mathrm{E}(\xi_{2,t}) = 0$, $\mathrm{E}({\xi^2}_{1,t}) = \mathrm{E}({\xi^2}_{2,t}) = 1$ и ε – интенсивность шума.

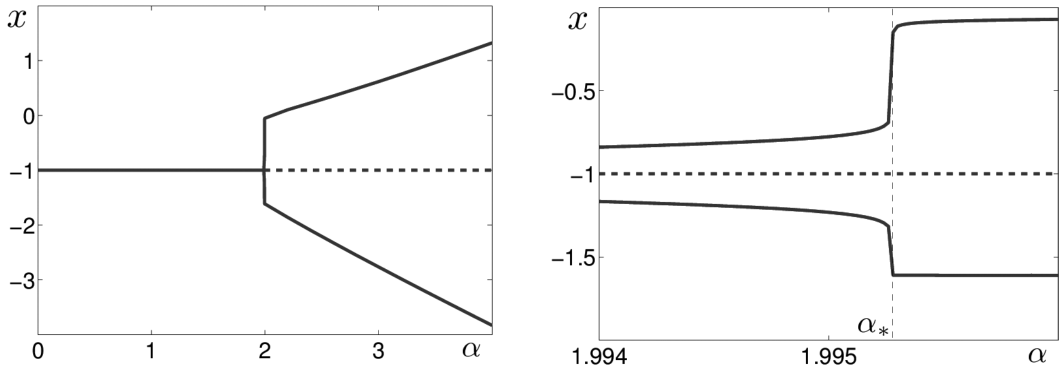


Рис. 5.4.9 – Аттракторы детерминированной двумерной модели Рулькова при $\sigma = \beta = 0.005$ с увеличенным фрагментом справа.

Здесь будем рассматривать стохастические эффекты в параметрической зоне вблизи бифуркации Неймарка-Сакера, при которой происходит переход от устойчивого равновесия к квазпериодическим колебаниям с аттракторами в форме замкнутых инвариантных кривых. Подобный сценарий наблюдается для фиксированных $\sigma = \beta = 0.005$ при вариации параметра α. Детерминированная модель Рулькова имеет равновесие $M(\bar{x}, \bar{y})$, где $\bar{x} = -1$, $\bar{y} = -1 - \frac{\alpha}{2}$, и точку бифуркации Неймарка-Сакера $\alpha_{NS} = 1.99$. При $0 < \alpha < 1.99$ равновесие M устойчиво. Когда возрастающий параметр α проходит α_{NS}, равновесие теряет устойчивость и в системе появляется новый аттрактор в форме устойчивой замкнутой инвариантной кривой (ЗИК). На рисунке 5.4.9 сплошными линиями показаны экстремальные значения x-координаты аттракторов системы, а пунктиром – неустойчивые равновесия.

Анализ стохастической возбудимости

Рассмотрим реакцию системы Рулькова на случайные возмущения в зоне устойчивых равновесий вблизи точки бифуркации Неймарка-Сакера $\alpha_{NS} = 1.99$. На рисунке 5.4.10 показаны решения стохастической системы (5.4.2) при $\alpha = 1.9$, стартующие с устойчивого равновесия M, для двух значений интенсивности шума. При $\varepsilon = 0.0005$ случайные состояния концентрируются в малой окрестности равновесия M и система демонстрирует малоамплитудные колебания вокруг M. При $\varepsilon = 0.0008$ в системе генерируются спайковые выбросы – система демонстрирует колебания смешанных мод, где малоамплитудные колебания перемежаются с большеамплитудными спайками. Как видим, нейрон, находящийся в покое, может перейти в режим возбуждения под воздействием даже чрезвычайно малого шума. Покажем, как этот переход можно аналитически описать с использованием доверительных эллипсов, построенных с помощью функции стохастической чувствительности.

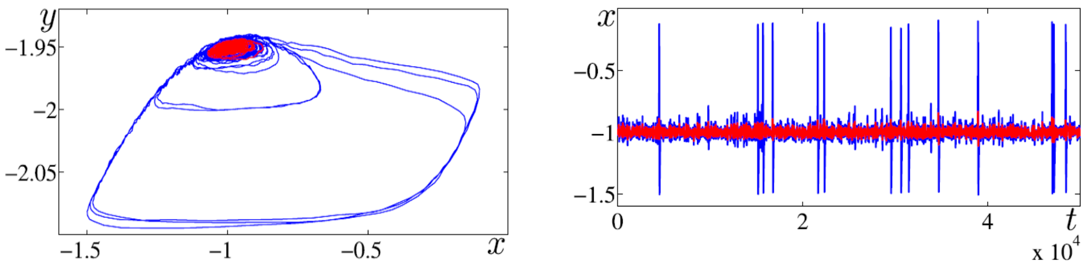


Рис. 5.4.10 – Стохастические траектории системы (5.4.2) при $\alpha = 1.9$ для $\varepsilon = 0.0005$ (красный), $\varepsilon = 0.0008$ (синий).

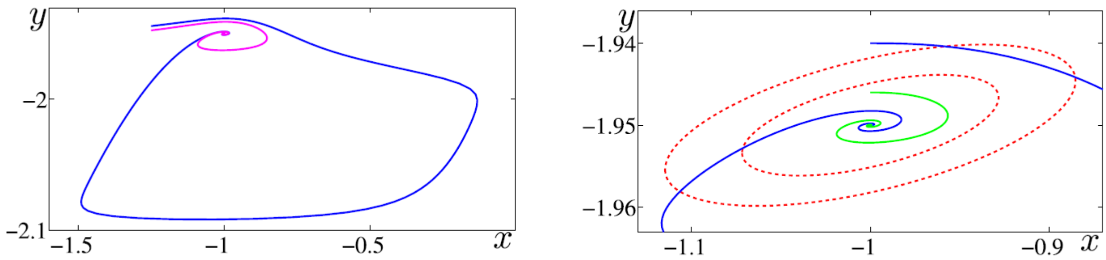


Рис. 5.4.11 – Фазовый портрет детерминированной модели Рулькова при $\alpha = 1.9$ и доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.0005$ (малый) и $\varepsilon = 0.0008$ (большой).

На рисунке 5.4.11 показан фазовый портрет детерминированной модели Рулькова при $\alpha = 1.9$ и увеличенный фрагмент с доверительными эллипсами, соответствующими $\varepsilon = 0.0005$ и $\varepsilon = 0.0008$. Феномен стохастического возбуждения связан с особенностями детерминированного фазового портрета рассматриваемой модели. На фазовой плоскости можно выделить две зоны – допороговую и надпороговую. Решения, стартующие из допороговой зоны, монотонно стремятся к равновесию, а решения, стартующие из надпороговой зоны, сначала удаляются от равновесия, совершают большой выброс и только потом, попав в допороговую зону, стремятся к M (см. рис. 5.4.11а).

На рисунке 5.4.11б видно, что малый эллипс ($\varepsilon = 0.0005$) целиком лежит в допороговой зоне, а большой эллипс ($\varepsilon = 0.0008$) захватывает точки надпороговой зоны, что и сигнализирует о возможном стохастическом возбуждении.

Суперчувствительность замкнутых инвариантных кривых канардовского типа

Из рисунка 5.4.9 видно, что в зоне замкнутых инвариантных кривых есть область резкого роста амплитуды осцилляций. Максимальный рост наблюдается при значении $\alpha_* = 1.995277$. Это область осцилляций так называемо-

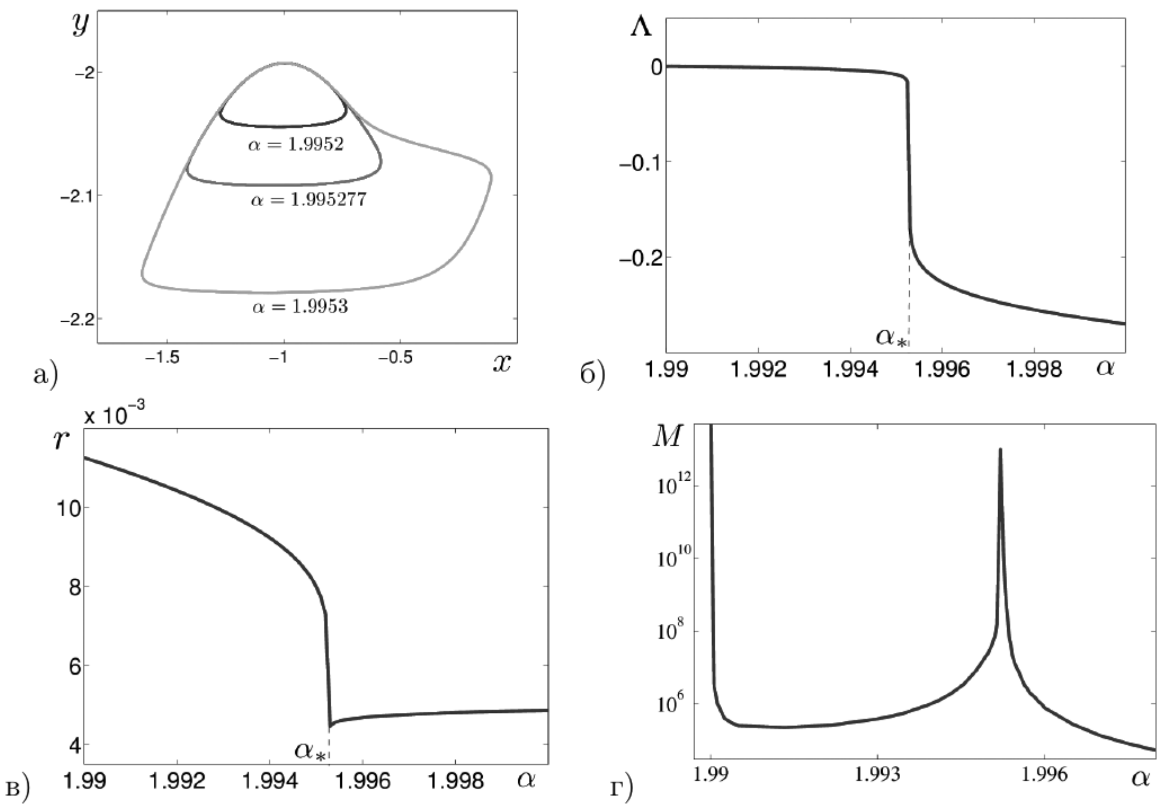


Рис. 5.4.12 – Зона канардовского взрыва в модели Рулькова: а) замкнутые инвариантные кривые, б) Ляпуновский показатель, в) число вращения, г) коэффициент стохастической чувствительности.

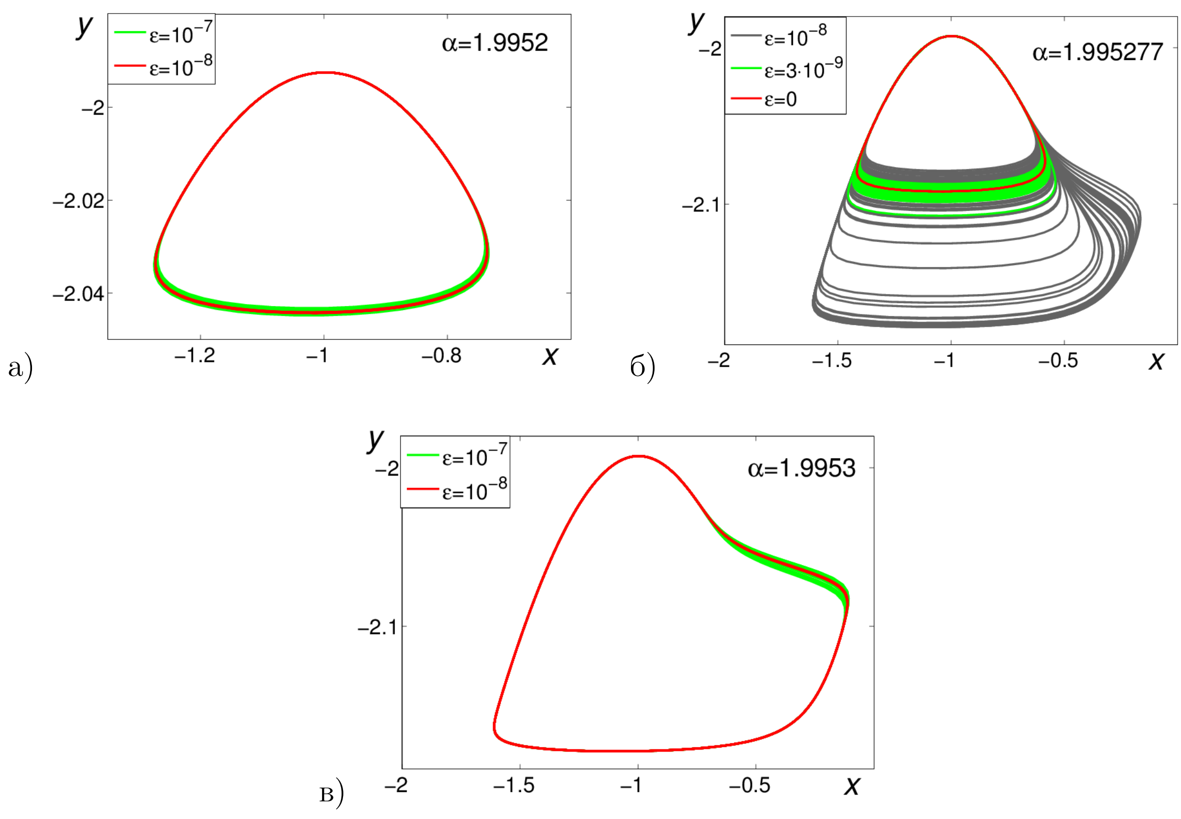


Рис. 5.4.13 – Стохастические траектории модели Рулькова.

го канардовского типа, а точка α_* отмечает эпицентр канардовского взрыва. Скачок амплитуды сопровождается резким изменением и других базовых характеристик. Эти изменения хорошо видны на рисунке 5.4.12. Можно отметить изменение формы и размеров замкнутых инвариантных кривых вблизи α_* (рис. 5.4.12а), резкое уменьшение показателя Ляпунова в зоне канардовского взрыва (рис. 5.4.12б), перелом графика числа вращения (рис. 5.4.12в). Особый интерес в контексте изучения реакции системы на случайные воздействия вызывает график коэффициента стохастической чувствительности (см. рис. 5.4.12г) с узким высоким пиком в точке α_*, где величина стохастической чувствительности достигает значения $1.3 \cdot 10^{13}$. Как видим, замкнутые инвариантные кривые в зоне канардовского взрыва обладают сверхвысокой чувствительностью к случайным возмущениям, в то время как степень их детерминированной устойчивости увеличивается (см. рис. 5.4.12б).

Покажем, к каким стохастическим эффектам в модели Рулькова приводит такая высокая чувствительность к шуму.

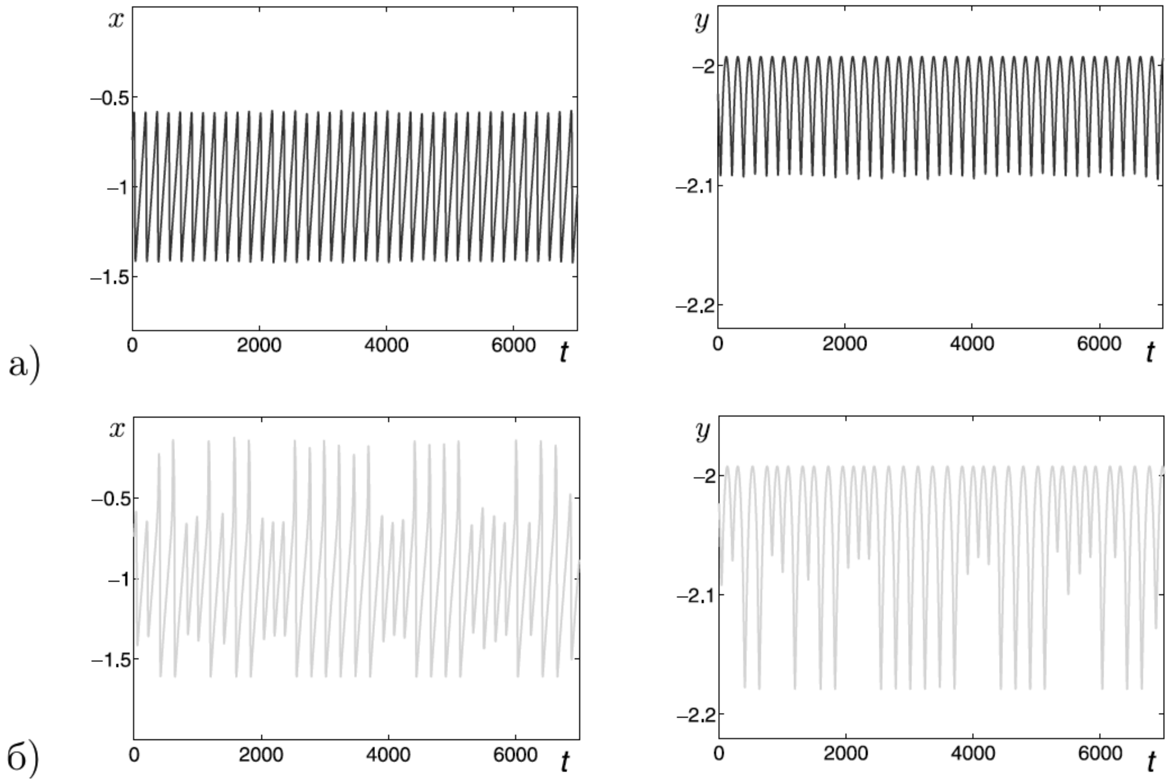


Рис. 5.4.14 – Временные ряды решений стохастической системы Рулькова при $\alpha = 1.995277$: для а) $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-9}$ и б) $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-8}$.

На рисунке 5.4.13 показана реакция системы Рулькова на чрезвычайно малые случайные возмущения для трех значений параметра: $\alpha = 1.9952$, $\alpha_* = 1.995277$ и $\alpha = 1.9953$. Как видим, для близких к α_* значений параметра, стохастическая траектория при $\varepsilon = 10^{-8}$ практически не отличается от детерминированной кривой, а для $\varepsilon = 10^{-7}$ на некоторых участках появляется небольшое отклонение. В точке α_* эпицентра канардовского взрыва при $\varepsilon = 10^{-8}$ разброс случайных траекторий сопоставим с размером самого детерминированного аттрактора. Следует отметить, что этот вызванный шумами разброс имеет весьма специфический характер: в случайных колебаниях отчетливо видны две моды. Первую моду формируют осцилляции вблизи невозмущенного цикла, а вторую – осцилляции существенно большей амплитуды (см. рис. 5.4.14). При малом шуме ($\varepsilon = 1 \cdot 10^{-9}$) стохастические осцилляции близки к детерминированным и соответственно имеют одну моду. При $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-8}$ осцилляции уже бимодальны. Такое расщепление стохастических автоколебаний может трактоваться как стохастическая бифуркация. На

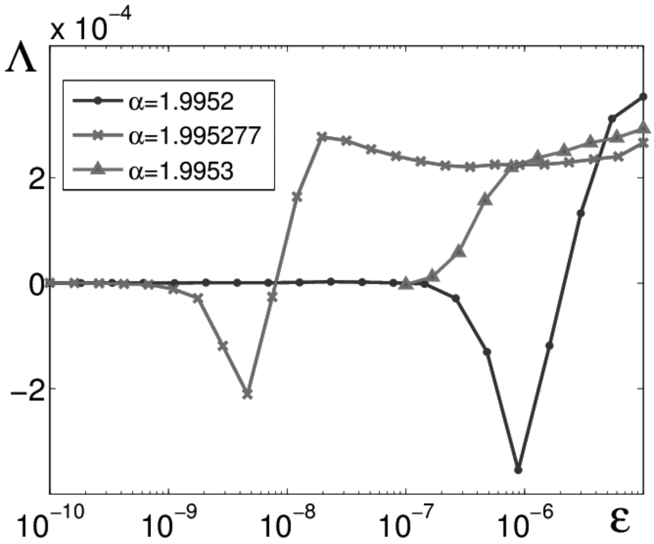


Рис. 5.4.15 – Старшие показатели Ляпунова стохастической системы.

рисунке 5.4.15 показано, как в зоне канардовских осцилляций шум переводит систему от порядка к хаосу. При этом в точке α_* эпицентра канардовского взрыва, вследствие сверхвысокой стохастической чувствительности, переход к хаосу происходит при меньшем шуме.

Представленные в этом разделе приложения теории глав 1 и 3 к исследованию стохастических явлений в одно- и двумерных моделях Рулькова нейронной активности опубликованы автором в [212, 226, 232, 233].

5.4.2. Модель Фитцхью-Нагумо

Рассмотрим стохастически возмущенную модель Фитцхью-Нагумо

$$\begin{aligned} \delta\dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a + \varepsilon\xi(t), \end{aligned}$$

где $\xi(t)$ – стандартный гауссовский белый шум интенсивности ε. Здесь и далее зафиксируем $\delta = 0.1$.

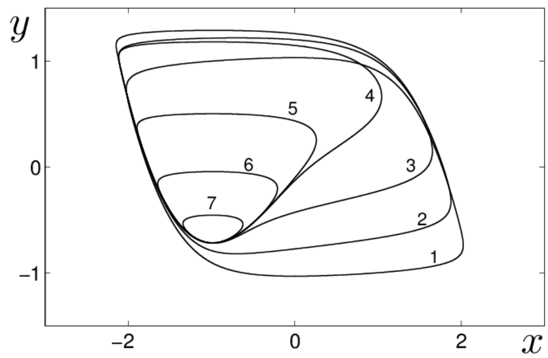


Рис. 5.4.16 – Предельные циклы детерминированной модели при $\delta = 0.1$: (1) $a = 0$; (2) $a = 0.7$; (3) $a = 0.98$; (4) $a = 0.9863$; (5) $a = 0.986313$; (6) $a = 0.9864$; (7) $a = 0.99$.

Детерминированная модель Фитцхью-Нагумо имеет равновесие

$$\bar{x} = -a, \quad \bar{y} = \frac{a^3}{3} - a,$$

устойчивое при $|a| > 1$. При $|a| < 1$ вокруг неустойчивого равновесия существует устойчивый предельный цикл. Значения $a = \pm 1$ соответствуют бифуркациям Андронова–Хопфа.

Явление стохастической возбудимости в зоне устойчивых равновесий этой модели и результаты его исследования методом функции стохастической чувствительности было представлено в п. 3.3.2. В данном разделе изучается влияние шума на предельные циклы этой модели. На рисунке 5.4.16 показаны предельные циклы детерминированной системы. Используя теорию из раздела 2.2.2, для предельных циклов модели можно найти стохастическую чувствительность $\mu(t, a)$ вдоль цикла и коэффициент $M(a)$ стохастической чувствительности цикла в целом. На рисунке 5.4.17 изображен график функции $M(a)$ слева от точки бифуркации Андронова–Хопфа $a = 1$. Этот график имеет узкий и высокий пик при $a_* = 0.986313$ со значением $M(a_*) = 1.2 \cdot 10^{10}$. Отметим, что параметрическая зона, где функция $M(a)$ принимает такие большие значения, является зоной так называемых циклов-канардов исходной детерминированной системы. Именно в зоне циклов-канардов происходит быстрое изменение

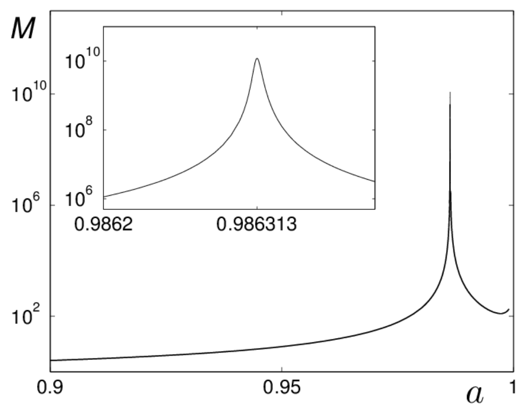


Рис. 5.4.17 – Коэффициент стохастической чувствительности циклов.

размеров предельных циклов (см. рис. 5.4.16). Значению a_*, лежащему в эпицентре этого канардовского взрыва, соответствует цикл, суперчувствительный к шуму.

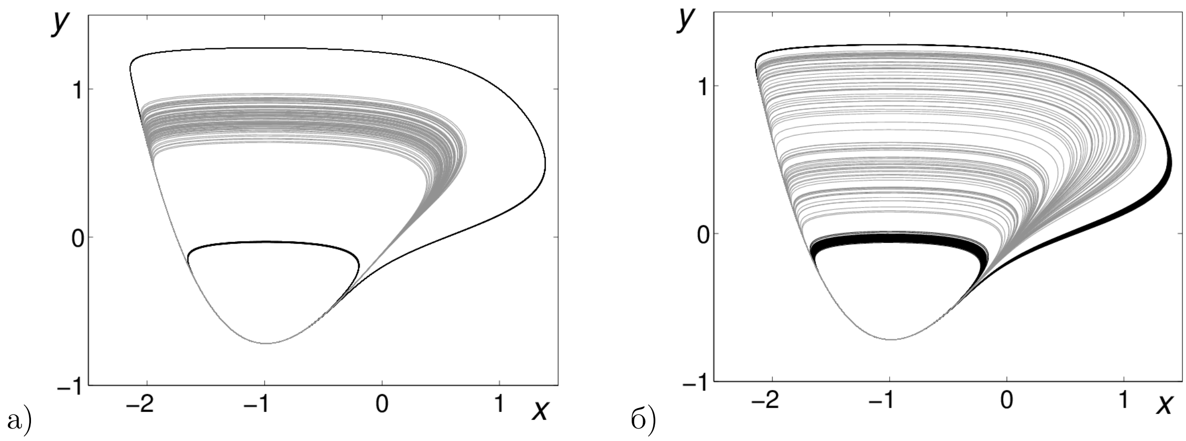


Рис. 5.4.18 – Пучки случайных траекторий при $a = 0.9862$ (внешний черный), $a = a_* = 0.986313$ (серый) и $a = 0.9864$ (внутренний черный) для а) $\varepsilon = 10^{-6}$ и б) $\varepsilon = 10^{-5}$.

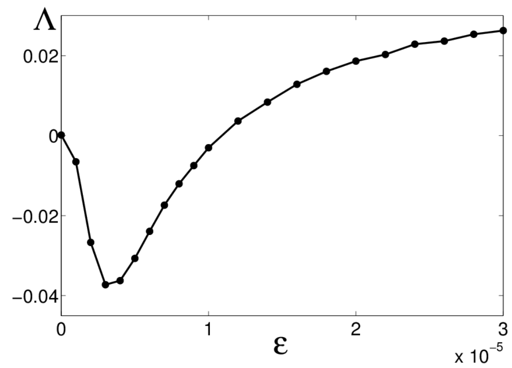


Рис. 5.4.19 – Старший показатель Ляпунова системы при $a = a_* = 0.986313$.

Сравним реакцию на случайные возмущения этого суперчувствительного цикла и близких по параметру a циклов с $a = 0.9862$ и $a = 0.9864$. На рисунке 5.4.18а видно, что при $\varepsilon = 10^{-6}$ стохастические траектории вокруг этих соседних циклов практически не отличаются от невозмущенных орбит, а на суперчувствительном цикле виден существенный разброс. Этот разброс существенно возрастает при $\varepsilon = 10^{-5}$. Такое увеличение разброса случайных траекторий в фазовом пространстве обычно характерно для хаотических аттракторов. На рисунке 5.4.19 показан график старшего показателя Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$ при $a = a_*$. Положительные значения этого показателя сигнализируют о том, что при увеличении интенсивности шума система Фитцхью-Нагумо переходит от порядка к хаосу.

Стохастическая возбудимость под воздействием цветных шумов

Рассмотрим систему Фитцхью-Нагумо

$$\begin{aligned} \delta\dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a + \varepsilon s \\ \dot{s} &= -bs + \sqrt{2b}\xi(t), \end{aligned} \tag{5.4.3}$$

находящуюся под воздействием нормализованного цветного шума $s(t)$, формируемого с помощью белого гауссовского шума $\xi(t)$. Здесь параметр b задает время корреляции $\tau = \dfrac{1}{b}$: $\langle\, s(t)\,\rangle = 0,\ \langle\, s(t)s(t')\,\rangle = \exp\left(-b|t-t'|\right)$.

Диагональные элементы матрицы W стохастической чувствительности устойчивого равновесия $\bar{x} = -a,\ \bar{y} = \dfrac{a^3}{3} - a$ имеют вид

$$\begin{aligned} w_{11} &= \frac{a^2 - 1 + \delta b}{(a^2-1)(\delta b^2 + (a^2-1)b + 1)} \\ w_{22} &= \frac{(a^2-1)^3 + \delta(\delta + (a^2-1)^2)b}{(a^2-1)(\delta b^2 + (a^2-1)b + 1)}. \end{aligned}$$

Как видим, стохастическая чувствительность равновесия существенно зависит от корреляционной характеристики b действующего цветного шума. Используя эти функции, можно аппроксимировать дисперсии $D_x = \langle (x-\bar{x})^2 \rangle$ и $D_y = \langle (y-\bar{y})^2 \rangle$ координат случайных состояний возмущенной системы, распределенных вокруг равновесия: $D_x \approx \bar{D}_x = \varepsilon^2 w_{11},\ D_y \approx \bar{D}_y = \varepsilon^2 w_{22}$. На рисунке 5.4.20 для $\varepsilon = 0.001$ представлены графики функций $\bar{D}_x(b)$ (пунктир) и $\bar{D}_y(b)$ (сплошная). Значения D_x и D_y, полученные прямым численным моделированием случайных траекторий, показаны звездочками. Отметим, что аналитические аппроксимации хорошо согласуются с данными численных экспериментов.

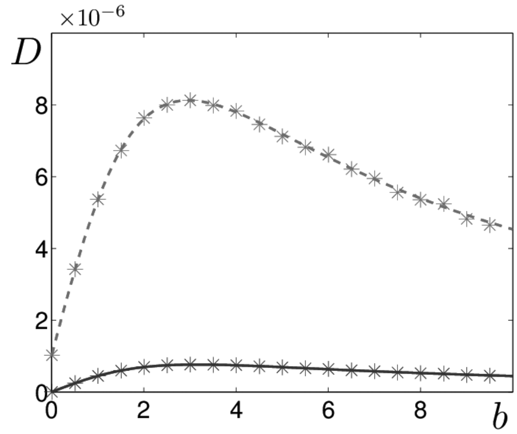


Рис. 5.4.20 – Дисперсии случайных состояний (звездочки) и их теоретические аппроксимации $\bar{D}_x(b)$ (пунктир) и $\bar{D}_y(b)$ (сплошная) для $a = 1.01,\ \delta = 0.1,\ \varepsilon = 0.001$.

Как видим, стохастическая чувствительность, и как следствие, разброс случайных состояний существенно зависит от параметра b.

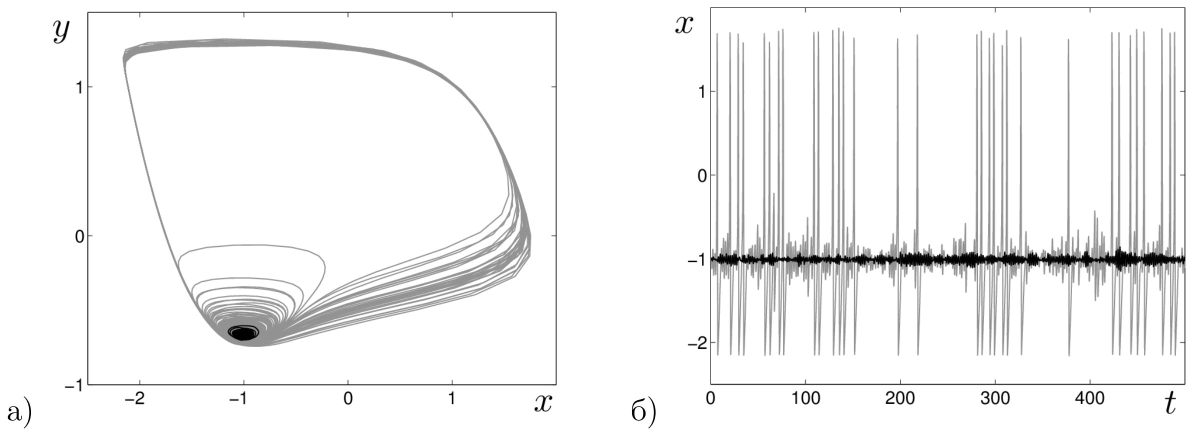


Рис. 5.4.21 – Траектории стохастической системы при $a = 1.01,\ \delta = 0.1$ и $b = 3$ (серый цвет), $b = 100$ (черный цвет).

Действительно, при $b = 0$, независимо от δ и a имеем $w_{11} = 1$. Когда b неограниченно возрастает, то функция $w_{11}(b)$ стремится к нулю. При $\delta \le \left(a^2 - 1\right)^2$ функция $w_{11}(b)$ монотонно убывает на всем интервале. При $\delta > \left(b^2 - 1\right)^2$ функция $w_{11}(a)$ не является монотонной и имеет максимум

$$w_{11}(b_*) = \frac{\delta}{(a^2 - 1)\left(2\sqrt{\delta} + 1 - a^2\right)}$$

в точке

$$b_* = \frac{1 - a^2}{\delta} + \sqrt{\frac{1}{\delta}}.$$

Это значение, соответствующее максимуму стохастической чувствительности, может рассматриваться как резонансное. Для значений $a = 1.01,\ \delta = 0.1$ (см. рис. 5.4.20) имеем $b_* \approx 3$.

Значение w_{22}, подобно w_{11}, стремится к нулю при неограниченном росте b. При $b = 0$, независимо от δ и a, имеем $w_{22} = (a^2-1)^2$. При $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\delta \leq \left(a^2-1\right)^2$ функция $w_{22}(b)$ монотонно убывает на всем интервале. При $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\delta > \left(a^2-1\right)^2$, функция $w_{22}(b)$ имеет максимум.

Рассмотрим реакцию системы на воздействие цветных шумов одинаковой интенсивности $\varepsilon = 0.05$ вблизи ($b = 3$) и вдали ($b = 100$) от резонанса (см. рис. 5.4.21). При $b = 100$ случайные траектории, стартующие из равновесия, концентрируются в его малой окрестности, демонстрируя малоамплитудные колебания. При значении $b = 3$, близком к резонансному, вследствие большей дисперсии, случайные траектории попадают в надпороговую зону и демонстрируют большеамплитудные спайковые осцилляции.

Как видим, изменение спектральных характеристик цветного шума приводит к изменению стохастической чувствительности, и как следствие, может кардинальным образом менять динамику системы, переводя ее из режима малоамплитудных осцилляций в режим стохастического возбуждения.

Представленные в этом разделе приложения теории главы 2 к исследованию стохастических явлений в модели Фицхью-Нагумо с белыми и цветными шумами опубликованы автором в [191, 229].

5.4.3. Модель волоскового пучка

В сложных процессах восприятия механоэлектрические преобразования звуковых сигналов осуществляются с помощью волосковых клеток, организованных в пучки. В экспериментах было обнаружено [303], что волосковые пучки лягушки производят спонтанные осцилляции, играющие важную роль в частотно-избирательном усилении слабых звуковых сигналов. В работе [304] была предложена нелинейная математическая модель волоскового пучка, где спонтанным осцилляциям соответствуют автоколебания. Эта модель изучалась в [305–307].

Стохастический вариант этой модели описывается следующей системой

$$
\begin{aligned}
\lambda \dot{x} &= -K_{\mathrm{GS}}[x - x_a - D\,P_o(x - x_a)] - K_{\mathrm{SP}}x + \varepsilon\sqrt{2k_B\lambda T}\,\xi(t),\\
\lambda_a \dot{x}_a &= K_{\mathrm{GS}}[x - x_a - D\,P_o(x - x_a)] - F_{\max}(1 - SP_o(x - x_a)) + \\
&\quad \varepsilon\sqrt{2k_B\lambda_a T_a}\,\xi_a(t).
\end{aligned}
\tag{5.4.4}
$$

Здесь переменная x задает положение верхушки пучка, переменная x_a описывает положение молекулярных моторов вдоль оси пучка. Параметры λ и λ_a являются эффективными коэффициентами трения волоскового пучка и молекулярных моторов. Вероятность открытия механоэлектрических каналов задается функцией $P_o(x - x_a)$:

$$P_o(z) = \frac{1}{1 + A\, e^{-zK_{\rm GS}D/(N_{\rm GS}k_BT)}}, \quad A = e^{[\Delta G + K_{\rm GS}D^2/(2N_{\rm GS})]/(k_BT)},$$

где $N_{\rm GS}$ – количество каналов, T – абсолютная температура, k_B – постоянная Больцмана.

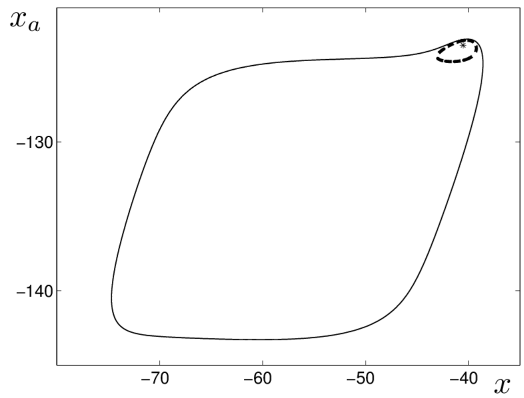


Рис. 5.4.22 – Аттракторы детерминированной модели при $S = 0.622$, $F_{\max} = 50.3$. Бассейны притяжения равновесия (звездочка) и устойчивого предельного цикла (сплошная) разделены неустойчивым циклом (пунктир).

Следуя [304, 306], зафиксируем λ= 2.8 μNs/m, λ_a= 10 μNs/m, $K_{\rm GS}$=0.75 mN/m, $K_{\rm SP}$= 0.6 mN/m, D=60.9 nm, $N_{\rm GS}$=50, T=300 K, T_a=450 K, $\Delta G = 10k_BT$. Для моделирования случайных воздействий здесь используются стандартные некоррелированные гауссовские белые шумы $\xi(t)$ и $\xi_a(t)$ со скалярным параметром интенсивности ε.

Сила обратной связи S и максимальная сила молекулярных моторов $F_{\max}$ обычно используются как контрольные параметры.

Стохастическая динамика в зоне сосуществования равновесия и цикла

Рассмотрим сначала случай, когда $S = 0.622$, $F_{\max} = 50.3$. При этих параметрах детерминированная система имеет характерный бистабильный режим с сосуществованием устойчивого равновесия и устойчивого предельного цикла (см. рис. 5.4.22).

При малых шумах решения стохастической системы, стартующие с равновесия и цикла, остаются в своих бассейнах притяжения (см. рис. 5.4.23а для $\varepsilon = 0.002$). При увеличении шума решение стохастической системы, стартующее с цикла, через некоторое время пересекает сепаратрису и продолжает осцилляции вблизи устойчивого равновесия (см. рис. 5.4.23б для $\varepsilon = 0.004$). Это означает, что спонтанные осцилляции волоскового пучка могут подавляться

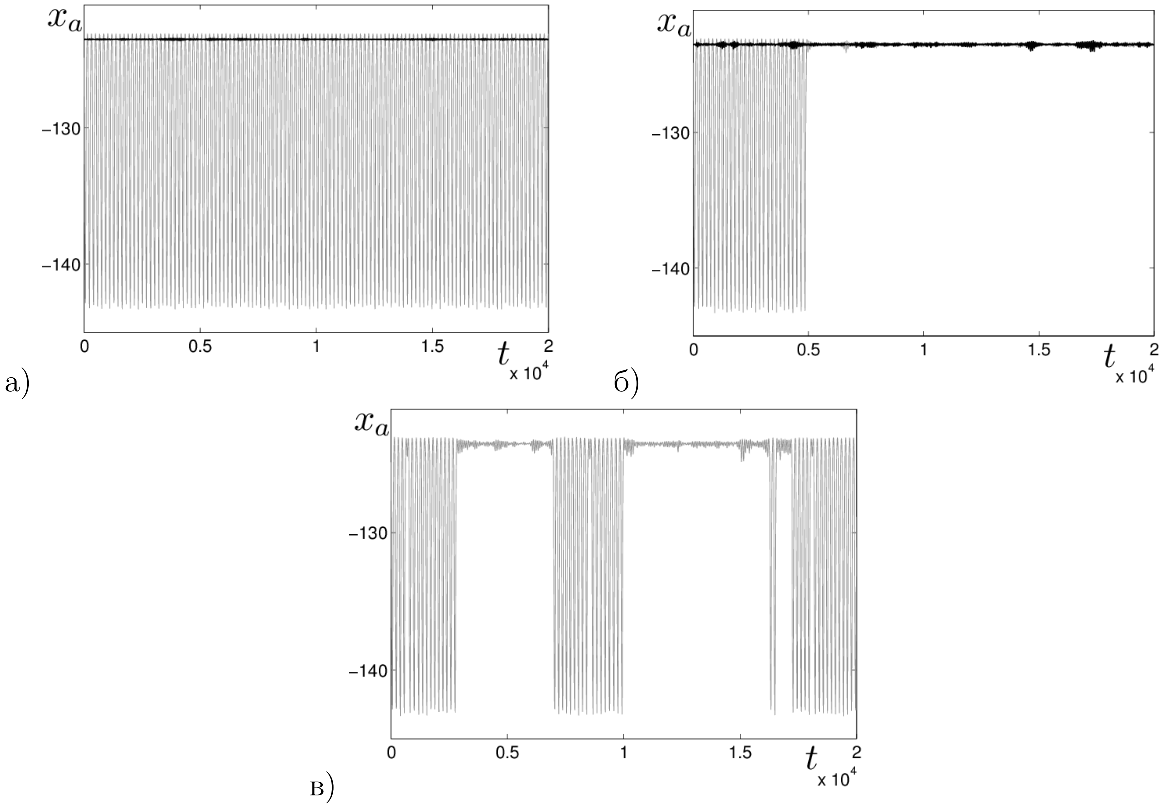


Рис. 5.4.23 – Траектории стохастической модели при $S = 0.622$, $F_{\max} = 50.3$, стартующие с равновесия (черный) и цикла (серый) для а) $\varepsilon = 0.002$, б) $\varepsilon = 0.004$, в) $\varepsilon = 0.008$.

шумом. Дальнейшее увеличение шума приводит к тому, что случайные решения стохастической системы совершают переходы между бассейнами притяжения равновесия и цикла, демонстрируя перемежаемость колебаний малых и больших амплитуд.

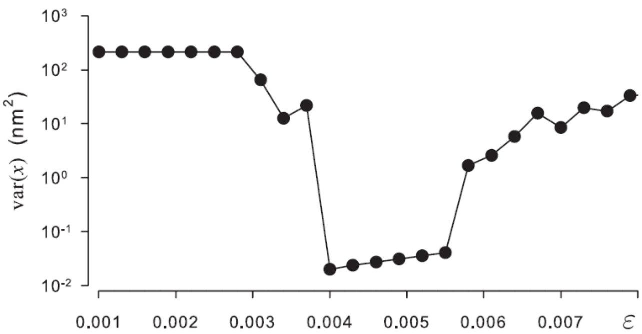


Рис. 5.4.24 – Дисперсия x-координаты решения, стартующего с детерминированного цикла.

Соответствующие этим трем режимам характерные изменения дисперсии x-координаты решения, стартующего с детерминированного цикла, в зависимости от параметра ε представлены на рисунке 5.4.24.

Покажем, как эти три режима могут быть описаны аналитически с помощью метода доверительных областей. На рисунке 5.4.25 для трех значений интенсивности шума показано взаимное расположение доверительных эллипсов и полос вокруг равновесия и цикла и разделяющих их сепаратрисы.

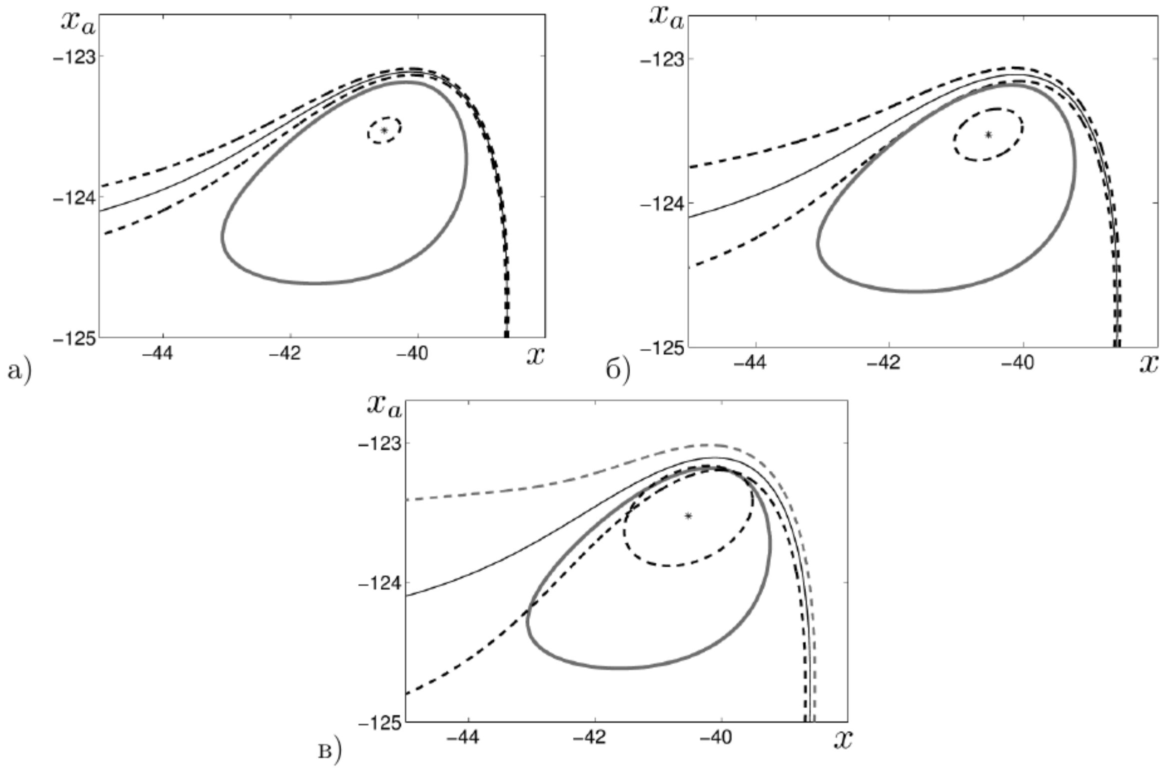


Рис. 5.4.25 – Доверительные полосы вокруг цикла и эллипсы вокруг равновесия (пунктир) для стохастической модели волоскового пучка при $S = 0.622$, $F_{\max} = 50.3$ для а) $\varepsilon = 0.002$, б) $\varepsilon = 0.004$, в) $\varepsilon = 0.008$. Устойчивый цикл показан тонкой линией, неустойчивый – толстой, равновесие – звездочкой. Доверительная вероятность $P = 0.999$.

При $\varepsilon = 0.002$ доверительные области не пересекают сепаратрису. Это соответствует первому режиму, когда случайные траектории, стартующие с аттрактора, не выходят из его бассейна притяжения (см. рис. 5.4.23а). При $\varepsilon = 0.004$ доверительная полоса пересекает сепаратрису, а эллипс – нет. Это соответствует второму режиму, когда случайные траектории, стартующие с цикла переходят в бассейн притяжения равновесия и локализуются вблизи него (см. рис. 5.4.23б). При $\varepsilon = 0.008$ и доверительная полоса, и эллипс пересекают сепаратрису. Это соответствует третьему режиму, когда случайные траектории, переходя из одного бассейна притяжения в другой, формируют колебания смешанных мод (см. рис. 5.4.23в).

Стохастическая динамика в зоне равновесий

Рассмотрим модель волоскового пучка в параметрической зоне, где аттракторами детерминированной системы являются два устойчивых равнове-

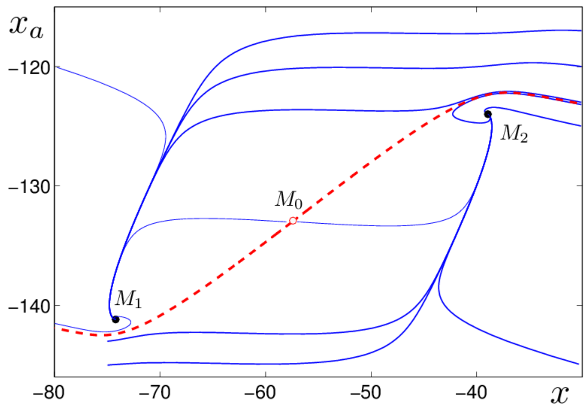


Рис. 5.4.26 – Фазовый портрет детерминированной системы при $S = 0.58$, $F_{\max} = 48$.

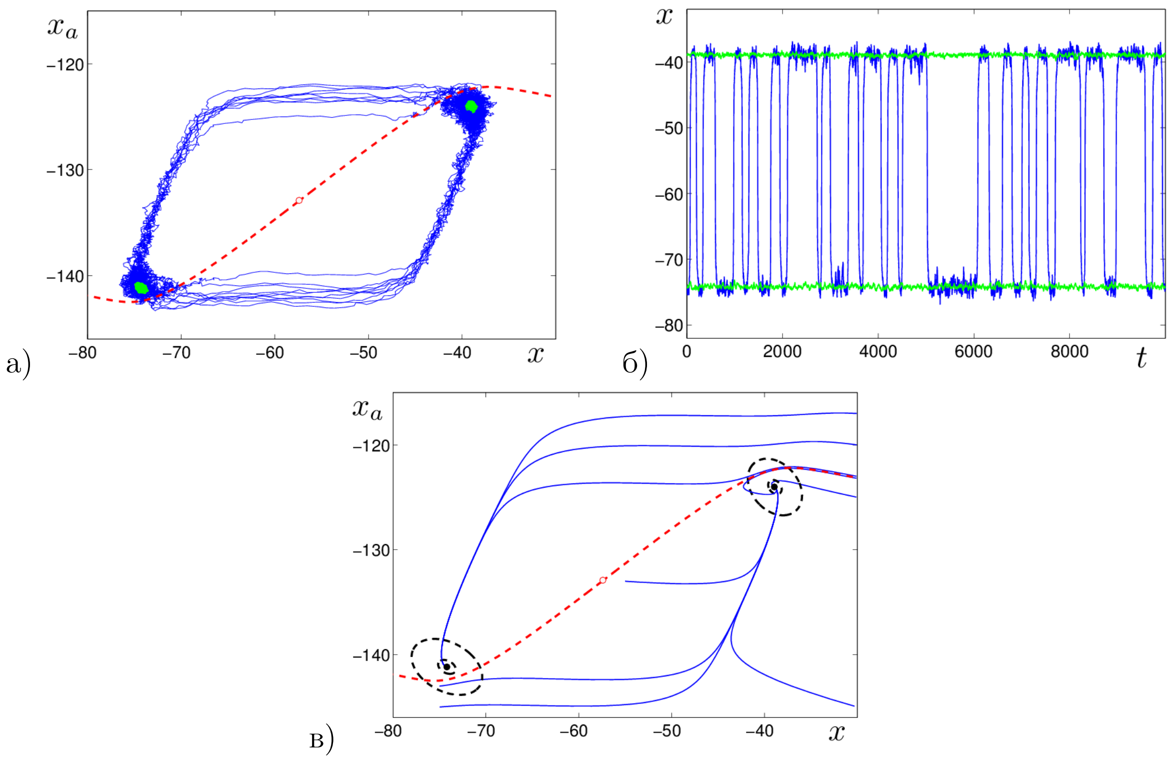


Рис. 5.4.27 – Стохастическая генерация колебаний большой амплитуды при $S = 0.58, F_{\max} = 48$: а) фазовые траектории и б) временные ряды для $\varepsilon = 0.05$ (зеленый), $\varepsilon = 0.2$ (синий); в) доверительные эллипсы с $P = 0.999$ для $\varepsilon = 0.05$ (малый), $\varepsilon = 0.2$ (большой).

сия. Для характерного набора параметров $S = 0.58$, $F_{\max} = 48$, принадлежащих этой зоне, покажем, что несмотря на отсутствие циклов, даже малый шум в такой системе также может генерировать спонтанные осцилляции.

Фазовый портрет детерминированной системы при $S = 0.58$, $F_{\max} = 48$ представлен на рисунке 5.4.26. Здесь показаны два устойчивых равновесия M_1 и M_2, бассейны притяжения которых разделены устойчивым многообразием (пунктир) седлового равновесия M_0.

На рисунке 5.4.27а,б показаны стохастические траектории системы для

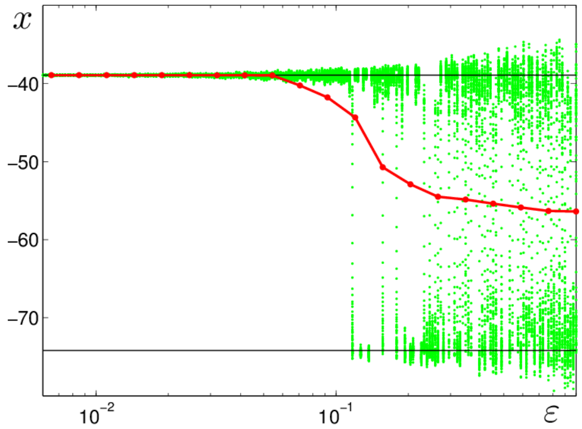


Рис. 5.4.28 – Случайные состояния x-координаты системы при $S = 0.58, F_{max} = 48$. Средние значения показаны толстой линией. Тонкими линиями показаны x-координаты равновесий.

двух значений шума. При $\varepsilon = 0.05$ случайные траектории, стартующие с устойчивых равновесий, лежат в их бассейнах притяжения. При большем шуме ($\varepsilon = 0.2$) случайные траектории пересекают сепаратрису и совершают переход в окрестность альтернативного равновесия. В результате таких переходов в системе формируются большеамплитудные колебания, моделирующие наблюдаемые в экспериментах спонтанные осцилляции волоскового пучка. Доверительные эллипсы, соответствующие этим двум значениям интенсивности шума (рис. 5.4.27в), позволяют спрогнозировать переход от малоамплитудных колебаний вблизи равновесий к более сложным колебаниям с перемежаемостью таких колебаний малой амплитуды с большеамплитудными колебаниями между равновесиями.

Переход к стохастической генерации колебаний большой амплитуды при возрастании интенсивности шума показан на рисунке 5.4.28. Как видим, результаты прямого численного моделирования процесса перехода к колебаниям больших амплитуд хорошо согласуются с теоретическими прогнозами, представленными на рисунке 5.4.27в.

Представленные в этом разделе приложения теории главы 2 и методов анализа из главы 3 к исследованию стохастических явлений модели волоскового пучка опубликованы автором в [204, 234].

5.4.4. Модель Ходжкина-Хаксли

Рассмотрим модель Ходжкина–Хаксли

$$
\begin{aligned}
&C\dot{V} = I_{ext} - \bar{g}_K n^4 (V - V_k) - \bar{g}_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - g_L (V - V_L) + \sqrt{2D}\xi(t),\\
&\dot{m} = \alpha_m(V)(1-m) - \beta_m(V)m,\\
&\dot{n} = \alpha_n(V)(1-n) - \beta_n(V)n,\\
&\dot{h} = \alpha_h(V)(1-h) - \beta_h(V)h,
\end{aligned}
$$

где C – емкость мембраны, V – мембранный потенциал, I_{ext} – ток активации, m, n, h – переменные, отвечающие за открытие ионных каналов,

$$
\alpha_m(V) = \frac{0.1(V+40)}{1-\exp(-(V+40)/10)}, \qquad \beta_m(V) = 4\exp(-(V+65)/18)
$$

$$
\alpha_n(V) = \frac{0.01(V+55)}{1-\exp(-(V+55)/10)}, \qquad \beta_n(V) = 0.125\exp(-(V+65)/80)
$$

$$
\alpha_h(V) = 0.07\exp(-(V+65)/20), \qquad \beta_h(V) = \frac{1}{1+\exp(-(V+35)/10)}.
$$

Следуя [308], мы фиксируем параметры $C = 1$ μF/cm^2, $V_L = -54.4$ mV, g_L=0.3 mS/cm^2, $V_K = -77$ mV, $\bar{g}_K = 36$ mS/cm^2, $V_{Na} = 50$ mV, $\bar{g}_{Na} = 120$ mS/cm^2. Аддитивный гауссовский белый шум $\xi(t)$ интенсивности D моделирует синаптические или внешние случайные флуктуации. Бифуркации детерминированной системы (при $D = 0$) детально изучены в [309]. При $I_{ext} < I_{sn} \approx 6.26481$ единственным аттрактором детерминированной системы является устойчивое равновесие. При $I_{ext} = I_{AH} \approx 9.77053$ это равновесие теряет устойчивость и при $I_{ext} > I_{AH}$ единственным аттрактором становится предельный цикл. На интервале $I_{sn} < I_{ext} < I_{AH}$ система бистабильна – в ней сосуществуют устойчивое равновесие и цикл. Точка $I_{ext} = I_{sn}$ соответствует седло-узловой бифуркации рождения устойчивого цикла. Устойчивое равновесие соответствует режиму покоя нейрона, а предельный цикл – режиму возбуждения со спайковыми осцилляциями. Остановимся подробнее на исследовании влияния шума на динамику системы в бистабильной зоне $I_{sn} < I_{ext} < I_{AH}$.

Обозначим через τ случайную величину, задающую время между двумя последовательными спайками. Под действием шума система в этой бистабильной зоне может совершать случайные переходы между режимами покоя и спайкинга. Обозначим через T_q и T_s продолжительность фаз покоя и спайкинга соответственно. На рисунке 5.4.29а показана зависимость средних значений

$\langle T_q\rangle$ и $\langle T_s\rangle$ от параметра I_{ext} при $D = 0.04$. Как видим, среднее значение времени покоя $\langle T_q\rangle$ убывает, а среднее значение времени возбуждения $\langle T_s\rangle$ возрастает с ростом I_{ext}. Точка пересечения этих линий при $I_{ext} \approx 7.86$ маркирует то значение тока активации, при котором среднее время покоя и возбуждения совпадают. На рисунке 5.4.29б показано, как зависит от I_{ext} коэффициент вариации CV межспайковых интервалов

$$CV = \frac{\sqrt{\langle(\tau - \bar{\tau})^2\rangle}}{\bar{\tau}}, \qquad \bar{\tau} = \langle\tau\rangle.$$

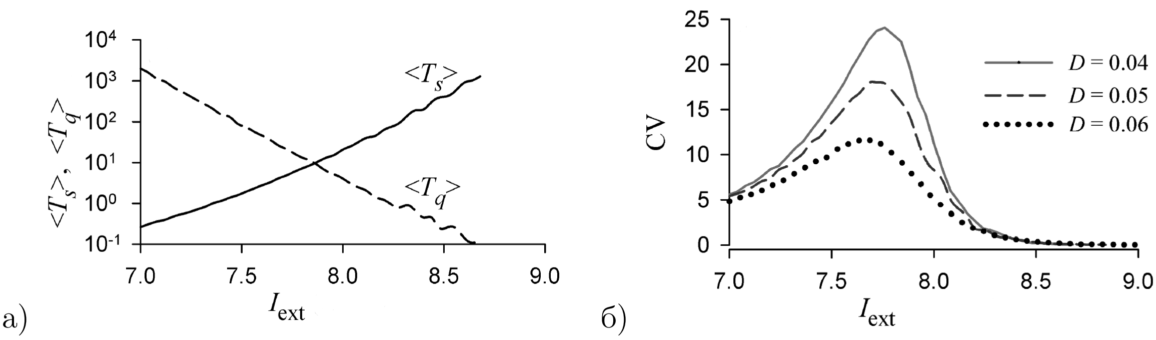


Рис. 5.4.29 – Статистики стохастических спайковых интервалов: а) средняя продолжительность спайкового $\langle T_s\rangle$ и равновесного $\langle T_q\rangle$ режимов при $D = 0.04$, б) коэффициент вариации.

Как видим, этот коэффициент существенно меняется и имеет характерный пик близко к отмеченному выше значению $I_{ext} \approx 7.86$. Таким образом, наиболее высокая вариативность в стохастических колебаниях смешанных мод, сочетающих малоамплитудные осцилляции около равновесия и большеамплитудные спайки, наблюдается как раз когда средние значения фаз покоя и возбуждения совпадают.

Рассмотрим далее как данные явления, обнаруженные прямым численным моделированием решений стохастической системы, могут быть объяснены теоретически с помощью техники функции стохастической чувствительности, метода главных направлений и метрики Махаланобиса.

На рисунке 5.4.30 показано, как стохастическая чувствительность равновесия системы Ходжкина-Хаксли зависит от I_{ext}. Как видим, старшее собственное значение матрицы стохастической чувствительности существенно превосходит остальные. Это означает, что четырехмерный доверительный эллипсоид имеет пространственную доминанту в направлении собственного вектора, отвечающего этому старшему собственному значению. Это позволяет использовать данное направление в качестве главного при отыскании расстояния от равновесия до сепаратной поверхности в метрике Махаланобиса.

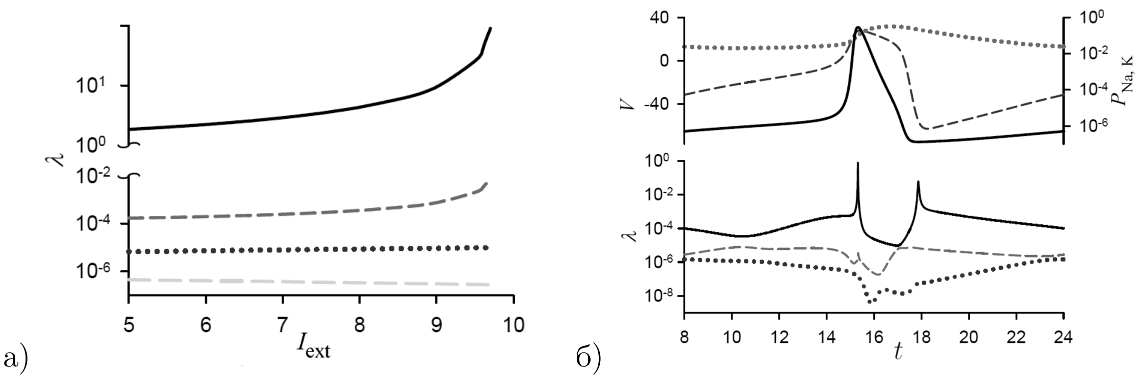


Рис. 5.4.30 – Стохастическая чувствительность аттракторов системы Ходжкина-Хаксли: а) собственные числа матрицы стохастической чувствительности для устойчивого равновесия в зависимости от I_{ext}; б) характеристики для $I_{ext} = 8$: сверху – мембранный потенциал $V(t)$ (сплошная линия) и вероятности открытия натриевых (P_{NA}, пунктир) и калиевых (P_{K}, точки) ионных каналов; внизу показаны собственные числа матрицы стохастической чувствительности вдоль цикла.

Аналогичная ситуация с доминированием одного из собственных значений матрицы чувствительности наблюдается и для предельных циклов (см., например, правую панель рис. 5.4.30 для $I_{ext} = 8$). Доверительная область вокруг четырехмерного предельного цикла формируется семейством трехмерных торов. У этих торов может быть найдено главное направление, соответствующее собственному вектору доминирующего собственного значения. Используя это главное направление, как и в случае равновесия, можно найти расстояние от цикла до сепаратной поверхности в метрике Махаланобиса.

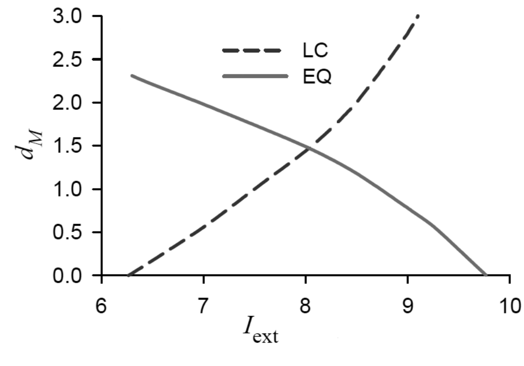


Рис. 5.4.31 – Расстояние Махаланобиса d_M от равновесия (сплошная линия) и от цикла (пунктир) до сепаратрисы.

Расстояние Махаланобиса d_M от равновесия и цикла до сепаратрисы в бистабильной параметрической зоне $I_{sn} < I_{ext} < I_{AH}$ показано на рисунке 5.4.31. Как видим, в левой части этой зоны равновесие располагается от сепартрисы дальше, чем предельный цикл. Это различие и является теоретическим объяснением обнаруженного прямым моделированием факта, что в этой части продолжительность фазы покоя больше фазы спайкинга (см.

рис. 5.4.29a). При увеличении I_{ext} равновесие приближается к сепаратной поверхности, а цикл удаляется от нее. В результате, в правой части интервала бистабильности к сепаратной поверхности становится ближе равновесие. Результатом такого изменения в расположении аттракторов и разделяющей их сепаратрисы и является преобладание фазы спайкинга в стохастической динамике нейрона в правой части интервала $I_{sn} < I_{ext} < I_{AH}$. В средней части этого интервала, где равновесие и цикл одинаково удалены от сепаратрисы в смысле метрики Махаланобиса, продолжительность фаз покоя и возбуждения примерно одинаковы, и как следствие, наблюдается максимальная вариативность случайной величины межспайковых интервалов.
Представленные здесь результаты опубликованы в работе автора [214] и развиты в [310].

Замечание 5.5.1. Исторически сложилось, что модели нейронной динамики играли и продолжают играть важную роль в развитии методов нелинейной динамики. Сложные сценарии преобразования осцилляционных режимов нейронной активности дают импульс развитию современной теории бифуркаций. Здесь можно отметить недавние исследования новых типов таких новых бифуркаций, как бифуркация катастрофы голубого неба [311] и бифуркация Лукьянова-Шильникова [312]. К исследованию нейронных моделей с такими типами бифуркаций в работах [313, 314] был применен представленный в диссертации аппарат математического моделирования, использующий функцию стохастической чувствительности, технику доверительных областей и метрику Махаланобиса.

5.5. Популяционная динамика

Поведение любой популяционной системы определяется сочетанием детерминированных и случайных факторов. Неизбежно присутствующие стохастические возмущения и случайные флуктуации параметров могут изменять динамику системы, приводить к качественным деформациям возможных режимов, вызывать нежелательные экологические сдвиги. Среди таких сдвигов одним из наиболее важных стохастических феноменов является индуцированное шумом вымирание популяции. Для исследования общих закономерностей возможных экологических сдвигов обычно используют достаточно простые концептуальные математические модели, задаваемые динамическими системами с дискретным или непрерывным временем. В данном разделе, на базе таких концептуальных моделей, будет показано, как разработанная математическая теория из глав 1, 2, 3, может быть конструктивно использована в анализе вызванных шумами экологических сдвигов и решении задач предотвращения таких сдвигов с помощью управляющий воздействий.

5.5.1. Модель Рикера

Среди дискретных популяционных моделей одной из наиболее известных является модель Рикера [84,315]. Рассмотрим ее вариант, учитывающий Олли эффект и случайные возмущения

$$x_{t+1} = x_t^2 \exp\left(\mu - x_t + \varepsilon\xi_t\right). \tag{5.5.1}$$

Здесь x_t – численность популяции, $\mu > 0$ – параметр, задающий ее естественный прирост, ξ_t – стандартный некоррелированный гауссовский случайных процесс с параметрами $\mathrm{E}(\xi_t) = 0$, $\mathrm{E}(\xi_t^2) = 1$, параметр ε отвечает за интенсивность шума. Здесь стохастическое возмущение можно интерпретировать как случайную флуктуацию параметра μ (демографический шум).

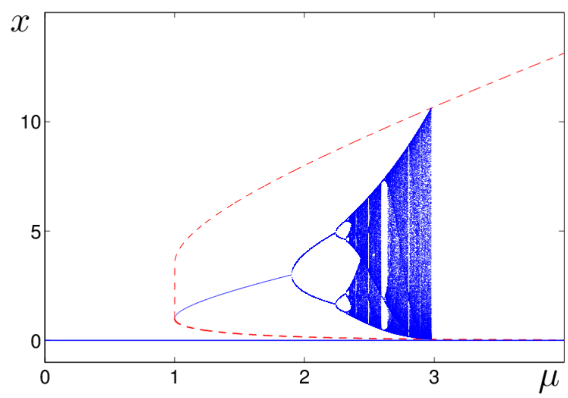


Рис. 5.5.1 – Аттракторы детерминированной системы.

Детерминированная система (5.5.1) (с $\varepsilon = 0$) всегда имеет устойчивое равновесие $\bar{x}_0 = 0$. Бассейн притяжения этого равновесия определяет зону вымирания популяции. В результате седло-узловой бифуркации при $\mu_1 = 1$ в системе появляется еще один равновесный режим, связанный с устойчивой нетривиальной точкой покоя $\bar{x}(\mu)$. При $\mu > \mu_1$ система демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода с регулярными и хаотическими аттракторами в форме дерева Фейгенбаума (см. рис. 5.5.1). Бассейн притяжения нетривиальных аттракторов из этого дерева задает зону выживания. При $\mu = \mu_2 \approx 2.977$, в результате бифуркации кризиса, нетривиальный аттрактор касается неустойчивого равновесия (пунктир) и исчезает. Таким образом, у данной популяционной модели μ-областью выживания является интервал $\mu_1 < \mu < \mu_2$. На этом интервале границы бассейна притяжения нетривиальных аттракторов показаны пунктиром на рис. 5.5.1. Эти границы определяют уже параметрическую (μ, x)-область выживания. Как видим, при малых значениях коэффициента прироста μ $(\mu < 1)$ популяция вымирает при любых значениях начальной численности. При $\mu > 1$ увеличение μ расширяет зону выживания. Однако, дальнейшее увеличение μ не гарантирует устойчивое существование популяции: при $\mu > 2$ популяция вымирает при любых значениях начальных данных. Этот контринтуитивный результат является важным свойством этой концептуальной модели.

Рассмотрим влияние случайных возмущений. Отметим, что даже в зоне выживания $\mu_1 < \mu < \mu_2$ случайная траектория, стартующая с детерминированного аттрактора, может пересечь сепаратрису (пунктир) и попасть в бассейн притяжения равновесия $\bar{x}_0 = 0$. Такой вариант поведения соответствует индуцированному шумом вымиранию. С ростом интенсивности случайных возмущений ε зона выживания сжимается. Это хорошо видно на рис. 5.5.2а, где при разных значениях интенсивности шума ε изображены 200 последовательных итераций стохастической системы (5.5.1), стартующих с детерминированных аттракторов, после переходного процесса из 10^4 шагов. Детали процесса сокращения размеров зоны выживания показаны на рис. 5.5.2б графиками средних значений $m(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x_t,\ N = 10^6$.

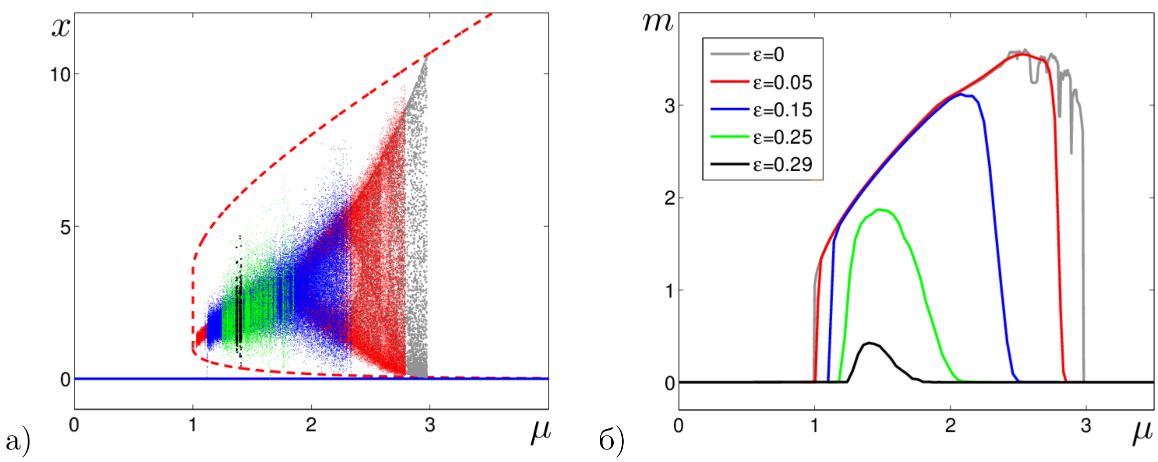


Рис. 5.5.2 – Зоны выживания для стохастической системы: а) случайные состояния, б) средние значения.

Как видно, правая граница зоны выживания, связанная с бифуркацией кризиса, более чувствительна к шуму, чем левая.

Для параметрического анализа индуцированного шумом вымирания необходимо учитывать взаимодействие следующих факторов: интенсивность шума, стохастическую чувствительность аттрактора и геометрию детерминированной зоны выживания. Покажем, как эти три фактора можно учесть с помощью аналитического подхода, основанного на технике функции стохастической чувствительности и методе доверительных интервалов и описанного в предыдущих главах. Продемонстрируем этот аналитический подход для трех случаев: равновесия ($\mu = 1.8$), 2-цикла ($\mu = 2.1$) и хаотического аттрактора ($\mu = 2.7$).

Для равновесия $\bar{x}$ функция стохастической чувствительности имеет вид

$$M = \frac{\sigma^2(\bar{x})}{1 - [f_x'(\bar{x})]^2}, \qquad f(x) = x^2 \mathrm{e}^{\mu - x}, \quad \sigma(x) = x^2 \mathrm{e}^{\mu - x},$$

при этом

$$\hat{x}(\varepsilon) = \bar{x} - \varepsilon\sqrt{2M}\,\mathrm{erf}^{-1}(P), \quad \mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$$

является нижней границей доверительного интервала с центром в точке $\bar{x}$. Здесь P – доверительная вероятность. На рис. 5.5.3а показаны случайные состояния (зеленый цвет) системы (5.5.1) и $\hat{x}(\varepsilon)$ (черная сплошная линия) для $\mu = 1.8$. Устойчивое равновесие $\bar{x}$ детерминированной системы показано синей сплошной линией, а неустойчивое – красным пунктиром. Здесь неустойчивое равновесие играет роль сепаратрисы, которая разделяет зоны выживания и вымирания.

Как видно, нижняя граница $\hat{x}(\varepsilon)$ хорошо описывает разброс случайных состояний. С увеличением шума доверительный интервал расширяется, и его граница $\hat{x}(\varepsilon)$ пересекает сепаратрису. Это пересечение локализует критическое значение интенсивности шума, соответствующее переходу к вымиранию. Стоит отметить, что эти теоретические оценки, основанные на методе функции стохастической чувствительности, хорошо согласуются с результатами численных экспериментов.

Рассмотрим теперь воздействие шумов на устойчивый 2-цикл с состояниями $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ($\bar{x}_1 < \bar{x}_2$) при $\mu = 2.1$. Стохастическая чувствительность M_1, M_2 этих состояний задается формулами

$$M_1 = \frac{\sigma^2(\bar{x}_2) + \left[f_x'(\bar{x}_2)\right]^2 \sigma^2(\bar{x}_1)}{1 - [f_x'(\bar{x}_1)\, f_x'(\bar{x}_2)]^2}, \quad M_2 = \frac{\sigma^2(\bar{x}_1) + \left[f_x'(\bar{x}_1)\right]^2 \sigma^2(\bar{x}_2)}{1 - [f_x'(\bar{x}_1)\, f_x'(\bar{x}_2)]^2}.$$

Нижняя граница $\hat{x}(\varepsilon)$ доверительного интервала для случайных состояний вблизи $\bar{x}_1$ имеет вид follows

$$\hat{x}(\varepsilon) = \bar{x}_1 - \varepsilon\sqrt{2M_1}\,\mathrm{erf}^{-1}(P).$$

На рис. 5.5.3б показаны случайные состояния (зеленый цвет) системы (5.5.1) и $\hat{x}(\varepsilon)$ (черная сплошная линия) для $\mu = 2.1$. И в этом случае пересечение нижней границы доверительного интервала позволяет оценить критическое значение интенсивности шума, соответствующее переходу к вымиранию.

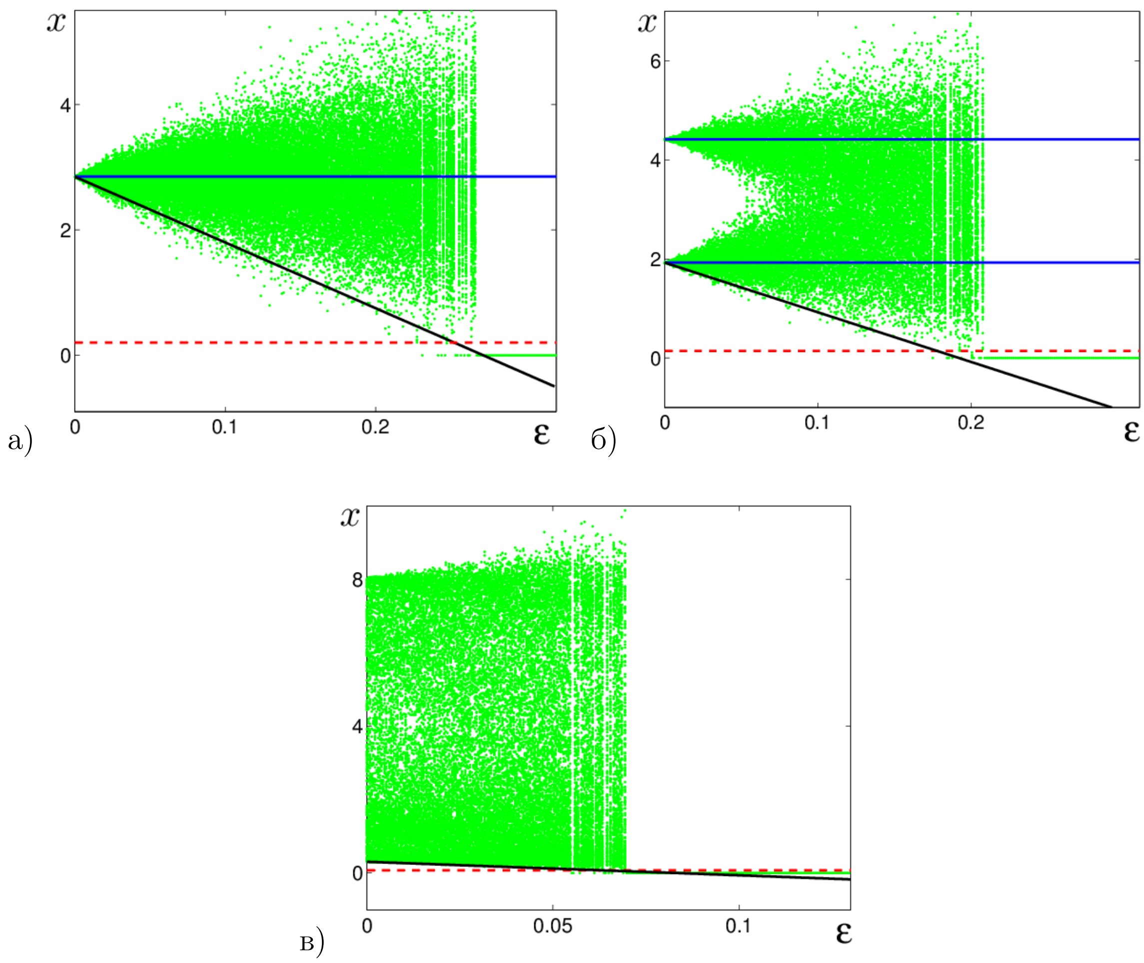


Рис. 5.5.3 – Случайные состояния и нижние границы доверительных интервалов для а) $\mu = 1.8$, б) $\mu = 2.1$, в) $\mu = 2.7$. Неустойчивые равновесия изображены пунктиром.

Рассмотрим теперь $\mu = 2.7$, при котором выживание системы реализуется в форме хаотического аттрактора. Пусть a и b – левая и правая границы хаотического аттрактора. Стохастическая чувствительность этого аттрактора в точке a задается формулой

$$M_a = \sigma^2(b) + \Big(f_x^{'}(b)\sigma(2)\Big)^2 .$$

Отметим, что здесь $b = f(2)$. Используя значение M_a, можно построить доверительный интервал на левой границе a хаотического аттрактора. Нижняя граница этого интервала имеет вид

$$\hat{x}(\varepsilon) = a - \varepsilon\sqrt{2M_a}\,\mathrm{erf}^{-1}(P).$$

На рис. 5.5.3в показана эта нижняя граница и случайные состояния системы (5.5.1).

Сравнив рис. 5.5.3в с рисунками 5.5.3а,б, можно заметить, что вызванное шумом вымирание в хаотическом режиме происходит при значительно меньшем шуме, чем в регулярных режимах.

Для предотвращения представленной здесь нежелательной экологической катастрофы, связанной с индуцированным шумами вымиранием, рассмотрим подходящую процедуру управления из п.4.1.

Перейдем к системе с управлением

$$x_{t+1} = x_t^2 \exp\left(\mu - x_t + \varepsilon\xi_t\right) + u_t, \quad u_t = k(x_t - \bar{x}(\mu)). \tag{5.5.2}$$

Целью управления является стабилизация численности популяционной стохастической системы вблизи равновесия $\bar{x}$. При этом используется регулятор в форме обратной связи по отклонению состояния x_t стохастической системы от равновесия $\bar{x}$. Этот регулятор стабилизирует равновесие $\bar{x}$ в детерминированной системе (5.5.2) с $\varepsilon = 0$ при $|f_x'(\bar{x}) + k| < 1$. Используя теорию синтеза стохастической чувствительности (глава 4), можно показать, что в системе (5.5.2) со случайными возмущениями стохастическая чувствительность равновесия $\bar{x}$ равна

$$w(k) = \frac{\sigma^2(\bar{x})}{1 - \left[f_x'(\bar{x}) + k\right]^2}.$$

Здесь минимально возможное значение стохастической чувствительности

$$\bar{w} = \min_k w(k) = \sigma^2(\bar{x})$$

достигается регулятором с коэффициентом обратной связи $\bar{k} = -f_x'(\bar{x})$. Для модели Рикера

$$\bar{w} = (\bar{x})^2, \qquad \bar{k} = \bar{x} - 2.$$

Эффективность предложенного способа управления с помощью этого оптимального регулятора, минимизирующего стохастическую чувствительность равновесия $\bar{x}$, демонстрирует рисунок 5.5.4. Здесь, на рис. 5.5.4а, на фоне серых точек, представляющих состояния детерминированных аттракторов системы без управления, черным цветом показаны состояния стохастической системы (5.5.2) при $\varepsilon = 0.01$, формируемые оптимальным регулятором. Как видим, данный способ управления обеспечивает структурную стабилизацию системы (5.5.2) на интервале $1 < \mu < 4$.

На рис. 5.5.4б для $\mu = 2.7$, $\varepsilon = 0.1$ продемонстрированы стабилизирующие возможности данного регулятора в зоне хаотических осцилляций. Здесь

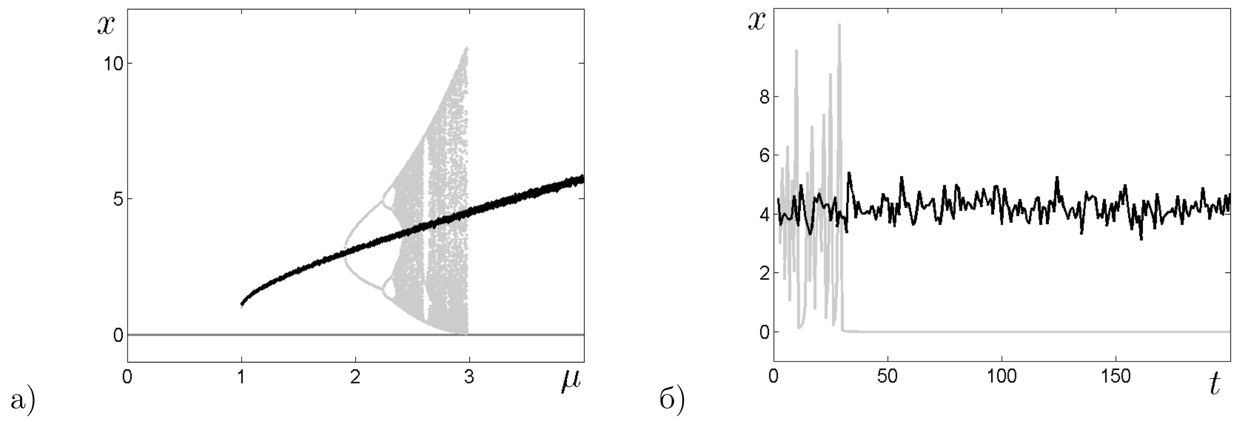


Рис. 5.5.4 – Стабилизация стохастической системы: а) случайные состояния стохастической системы с $\varepsilon = 0.01$ и управлением (черный цвет); б) временные ряды стохастической системы с $\mu = 2.7$, $\varepsilon = 0.1$ без управления (серый) и с управлением (черный).

серым цветом показано, как стохастически возмущенное хаотическое решение системы без управления переходит из зоны выживания в зону вымирания. Черным цветом показан временной ряд системы (5.5.2) с оптимальным управлением.

Как видим, техника синтеза малой стохастической чувствительности позволяет успешно решать задачу предотвращения индуцированного шумом вымирания.

Замечание 5.5.2.

В данном разделе на примере модели Рикера изучались индуцированные шумами переходы с нетривиальных аттракторов дерева Фейгенбаума на сосуществующее тривиальное равновесие. Такие переходы являются математической моделью важного типа экологического сдвига, приводящего к вымиранию. Однако, возможны и другие варианты экологических деформаций. Так, например, можно рассматривать качественное изменение динамики популяционной системы, связанное с индуцированными шумом переходами между отдельными частями аттракторов дерева Фейгенбаума. Такого сорта переходы были исследованы в работе автора диссертации [265] на базе другой концептуальной популяционной модели Хасселя. Теория из раздела 3.2 была применена к анализу механизмов стохастической трансформации 3-циклов и трехкусочных хаотических аттракторов модели Хасселя в однокусочный хаотический аттрактор. Теория управления из раздела 4.1 была использована в решении задачи структурной стабилизации популяционной модели Хасселя в работе автора диссертации [316].

Замечание 5.5.3.

Представленный здесь на примере одномерной модели Рикера общий подход к анализу и предотвращению индуцированного шумом вымирания в дискретных популяционных системах может быть эффективно применен и для систем более высокой размерности. Эти возможности были продемонстрированы в работах автора диссертации [317, 318] для двумерной модели Рикера, учитывающей биологически важный фактор запаздывания. Здесь был охвачен технически более сложный случай, когда аттрактором является квазипериодический режим, задаваемый замкнутой инвариантной кривой. Для анализа влияния стохастических возмущений на такие аттракторы была привлечена теория из раздела 1.3.

Представленные в данном разделе результаты исследования индуцированного шумом вымирания в одномерной модели Рикера с Олли эффектом опубликованы автором диссертации в работе [227].

5.5.2. Модель хищник-жертва с Олли эффектом

Рассмотрим стохастический вариант модели "хищник–жертва"с Олли эффектом и трофической функцией Холлинга II типа

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma x(x - [\beta + \sigma_1\xi_1(t)])(1 - x) - \dfrac{xy}{1 + \alpha x}, \\ \dot{y} = \dfrac{xy}{1 + \alpha x} - [\delta + \sigma_2\xi_2(t)]y, \end{cases} \tag{5.5.3}$$

где x и y – плотности популяций жертв и хищников соответственно, параметр γ характеризует скорость роста жертвы, δ – смертность хищника, α – параметр трофической функции Холлинга. Здесь $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ – некоррелированные белые гауссовские шумы с параметрами $\mathrm{E}\xi_i(t) = 0,\ \mathrm{E}\xi_i(t)\xi_j(\tau) = \delta(t - \tau)\delta_{ij}$, σ_1, σ_2 – интенсивности шумов, моделирующих случайные флуктуации параметров β и δ. Детерминированный вариант системы (5.5.3) исследовался в [319, 320].

Далее предполагается $\sigma_1 = \sigma_2 = \varepsilon$.

Детерминированная система (5.5.3) (с $\varepsilon = 0$) имеет четыре равновесия $M_1(0,0)$, $M_2(\beta,0)$, $M_3(1,0)$, $M_4(\bar{x},\bar{y})$, где

$$\bar{x} = \frac{\delta}{1 - \alpha\delta} > 0,\ \bar{y} = \gamma(1 + \alpha\bar{x})(\bar{x} - \beta)(1 - \bar{x}) > 0$$

для $\beta < \dfrac{\delta}{1 - \alpha\delta} < 1$. При любых параметрах тривиальное равновесие M_1 устойчиво, а равновесия $M_2,\ M_3$ неустойчивы. Следуя [320], мы фиксируем

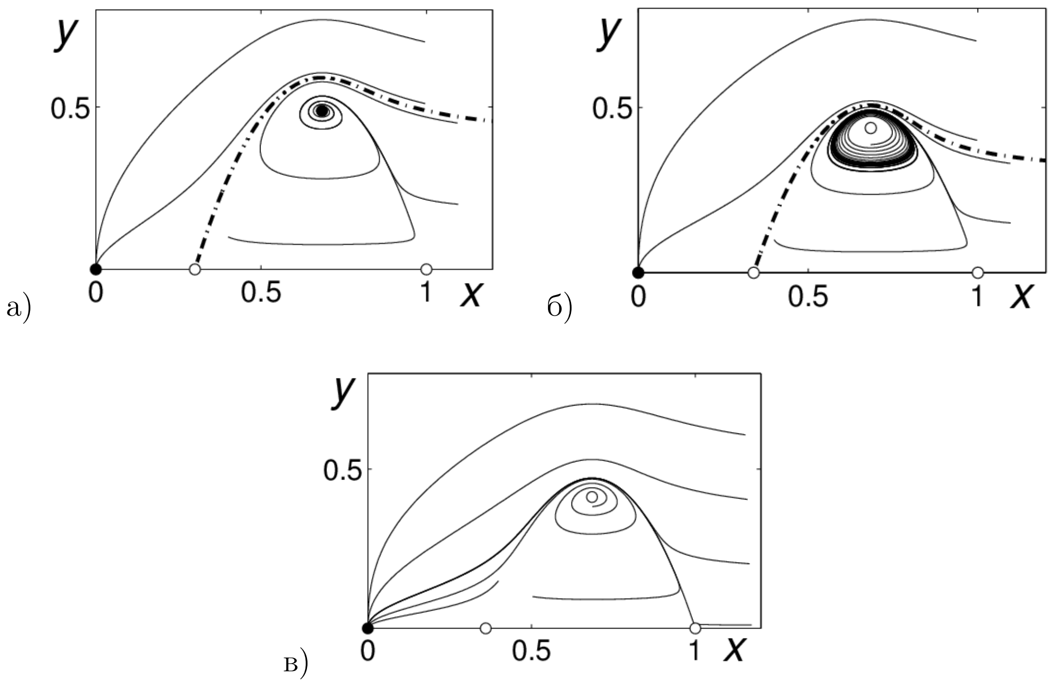


Рис. 5.5.5 – Фазовые портреты детерминированной системы при а) $\beta = 0.3$, б) $\beta = 0.34$, в) $\beta = 0.36$. Сепаратрисы показаны штрих- пунктиром.

$\alpha = 0.5,\ \gamma = 3,\ \delta = 0.51$ и изучаем поведение системы при $\beta \in [0.3,\ 0.38]$. В этом β-интервале, где наблюдаются локальные и глобальные бифуркации, детерминированная система демонстрирует три разных режима динамики (см. рис. 5.5.5).

Нетривиальное равновесие $M_4(\bar{x}, \bar{y})$, соответствующее сосуществованию хищника и жертвы, является устойчивым при $0.3 < \beta < \beta_* = 0.3271$. Когда параметр β проходит точку локальной бифуркации Андронова-Хопфа β_*, равновесие $M_4(\bar{x}, \bar{y})$ теряет устойчивость и система демонстрирует автоколебания. На рис. 5.5.5а для $\beta = 0.3 < \beta_*$ сепаратриса (штрих-пунктир) разделяет бассейны притяжения устойчивых равновесий $M_1(0,0)$ и M_4. При $\beta = 0.34 > \beta_*$ (см. рис. 5.5.5б) сепаратриса разделяет бассейны притяжения устойчивого равновесия $M_1(0,0)$ и устойчивого предельного цикла. Множество начальных точек, лежащих ниже сепаратрисы, формирует зону выживания популяции, а выше – зону вымирания. При возрастании β предельный цикл увеличивается и при $\beta^* = 0.35529$ исчезает в результате глобальной бифуркации влипания в петлю сепаратрисы. При $\beta^* < \beta \leq 0.38$ зона вымирания совпадает со всем первым квадрантом $x > 0, y > 0$ (см. рис. 5.5.5в для $\beta = 0.36$). На рис. 5.5.6 черным цветом показаны аттракторы детерминированной модели, а именно y-координаты устойчивых равновесий M_1, M_4 и экстремальные значения y-координаты устойчивого цикла. Пунктиром показана y-координата неустойчивого равновесия M_4.

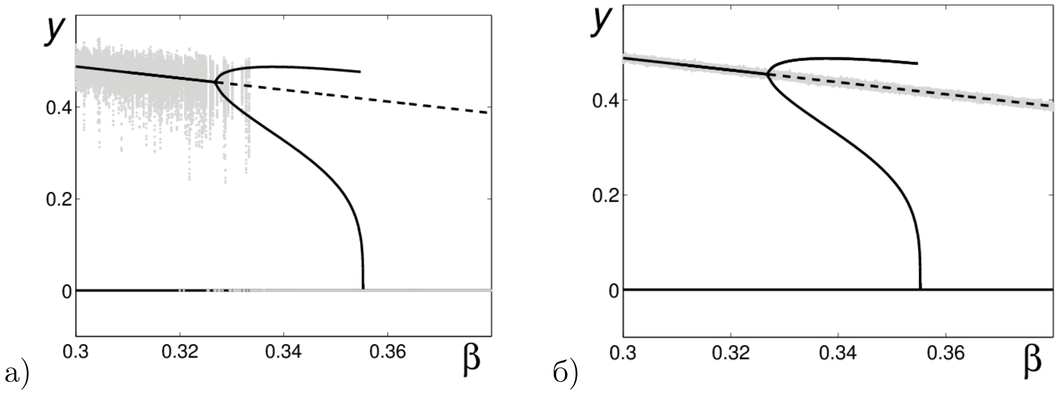


Рис. 5.5.6 – Случайные состояния стохастической системы с $\varepsilon = 0.01$ а) без управления, б) с управлением, обеспечивающим $w = 0.1$.

Таким образом, интервал $0.3 \leq \beta < \beta^*$ определяет параметрическую зону выживания данной популяционной системы. Под действием случайных возмущений эта зона сокращается. На рис. 5.5.6а серым цветом показаны случайные состояния системы (5.5.3) при $\varepsilon = 0.01$. Как видим, при таком шуме, в большей части параметрической зоны, соответствующей автоколебаниям, наблюдается вымирание, при этом правая граница зоны выживания сдвигается влево. Понятно, что при увеличении шума вымирание будет наблюдаться и в зоне устойчивости равновесия M_4, что приводит к дальнейшему сокращению зоны выживания.

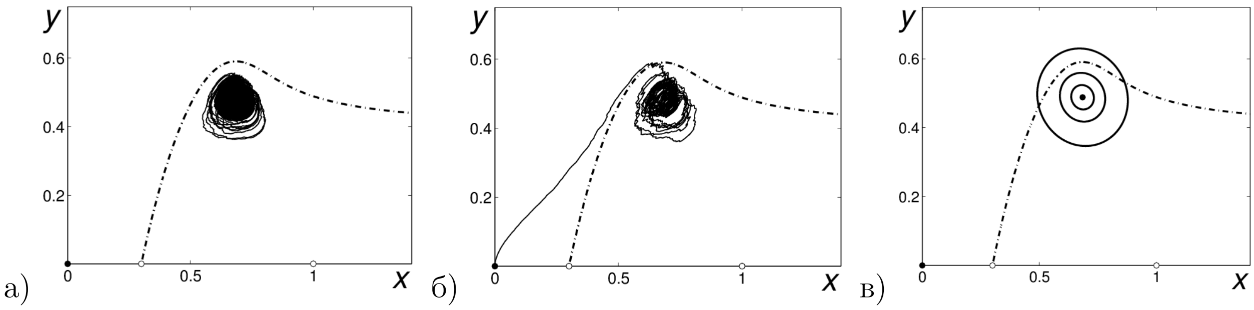


Рис. 5.5.7 – Стохастические траектории для $\beta = 0.3$: а) при $\varepsilon = 0.01$, б) при $\varepsilon = 0.02$; в) доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.005$ (малый), $\varepsilon = 0.01$ (средний), $\varepsilon = 0.02$ (большой).

Рассмотрим механизм индуцированного шумом вымирания в зоне устойчивого равновесия M_4 при $\beta = 0.3$. На рис. 5.5.7а,б показаны стохастические решения системы (5.5.3), стартующие с M_4 при двух значениях интенсивности шума. При $\varepsilon = 0.01$ стохастическая траектория лежит в бассейне притяжения M_4 и популяционная система демонстрирует мало-амплитудные осцилляции вблизи M_4. При $\varepsilon = 0.02$ случайная траектория пересекает сепаратрису, попадает в бассейн притяжения равновесия $M_1(0,0)$ и стремится к нему. Система демонстрирует индуцированное шумом вымирание.

Для параметрического анализа этого явления применим представленную в главе 2 технику функции стохастической чувствительности и метод доверительных эллипсов. Матрица стохастической чувствительности равновесия $M_4(\bar{x}, \bar{y})$ имеет вид

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$w_{11} = \frac{f_{12}s_2 - f_{21}s_1}{2f_{11}f_{21}}, \quad w_{12} = -\frac{s_2}{2f_{21}}, \quad w_{22} = \frac{1}{2f_{12}}\left[\frac{f_{21}s_1 - f_{12}s_2}{f_{11}} + \frac{s_2}{f_{21}}\right],$$

$$f_{11} = \gamma\left[(\bar{x}-\beta)(1-\bar{x}) + \bar{x}(1-\bar{x}) - \bar{x}(\bar{x}-\beta)\right] - \frac{\bar{y}}{(1+\alpha\bar{x})^2},$$

$$f_{12} = -\frac{\bar{x}}{1+\alpha\bar{x}}, \qquad f_{21} = \frac{\bar{y}}{(1+\alpha\bar{x})^2}, \qquad s_1 = \gamma^2\bar{x}^2(1-\bar{x})^2, \qquad s_2 = \bar{y}^2.$$

Для $\beta = 0.3$ имеем $W = \begin{bmatrix} 8.82 & -0.44 \\ -0.44 & 4.73 \end{bmatrix}$.

Используя собственные значения и собственные векторы этой матрицы, мы можем построить доверительные эллипсы вокруг устойчивого равновесия M_4 при различных значениях интенсивности шума (см. рис. 5.5.7в). При достаточно малой интенсивности шума доверительные эллипсы, локализованные вблизи равновесия, целиком принадлежат бассейну притяжения M_4 и соответствующие случайные траектории сосредоточены вблизи M_4. По мере увеличения интенсивности шума эти эллипсы расширяются и после пересечения сепаратрисы захватывают область притяжения M_1. Это означает, что случайные траектории стохастической системы с большой вероятностью могут покинуть зону притяжения M_4 и устремиться к тривиальному равновесию M_1. Интенсивность шума, которая соответствует пересечению доверительного эллипса с сепаратрисой, может использоваться в качестве оценки порогового значения ε^*. В рассматриваемом случае $\varepsilon^* \approx 0.015$.

Чтобы защитить популяционную систему от нежелательных вызванных шумом экологических сдвигов, ведущих к вымиранию, добавим в систему управление таким образом, чтобы локализовать доверительный эллипс внутри бассейна притяжения равновесия M_4. Как показано выше, доверительный эллипс для системы без управления с $\varepsilon = 0.02$ слишком велик. Действительно, этот эллипс пересекает сепаратрису и частично захватывает область притяжения тривиального равновесия. Здесь задача управления может быть сведена к построению регулятора, уменьшающего размер доверительного эллипса.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \gamma x(x-\beta)(1-x) - \dfrac{xy}{1+\alpha x} + u_1 - \sigma_1 \gamma x(1-x)\xi_1, \\ \\ \dot{y} = \dfrac{xy}{1+\alpha x} - \delta y + u_2 - \sigma_2 y \xi_2, \end{cases} \tag{5.5.4}$$

с управлениями u_1 и u_2. Рассмотрим два случая. В первом случае (Управление I) предполагается, что имеется возможность воздействовать на оба уравнения системы (5.5.4) управлениями u_1 и u_2. Во втором случае (Управление II) возможности ограничены: мы можем использовать только управление u_1, действующее только на первое уравнение ($u_2 = 0$.)

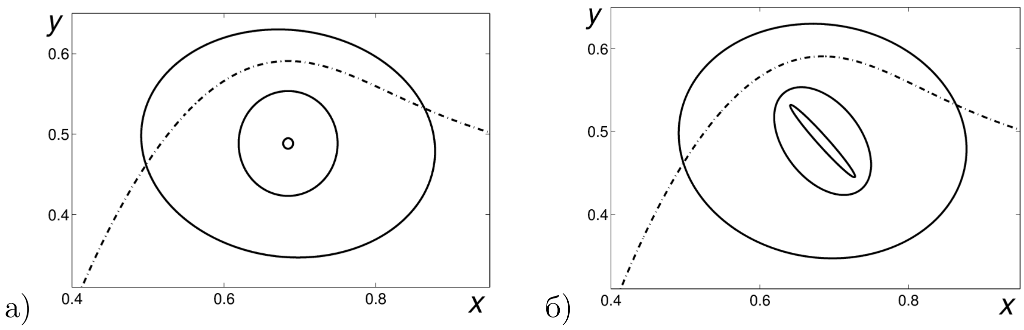


Рис. 5.5.8 – Сепаратриса (штрих-пунктир) и доверительные эллипсы для $\beta = 0.3$, $P = 0.9$ и $\varepsilon = 0.02$. Большой эллипс соответствует системе без управления, а) для Управления I, обеспечивающего $w = 1$ (средний) и $w = 0.01$ (малый); б) для Управления II, обеспечивающего $w = 1$ (средний) и $w = 0.45$ (малый).

Управление I.

В этом случае любая положительно определенная 2×2-матрица W является достижимой (см. главу 4). Ограничимся классом диагональных матриц $W = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}$. Чтобы снизить стохастическую чувствительность равновесия M_4 и тем самым уменьшить размер доверительного эллипса, будем использовать достаточно малые значения w.

Управления, синтезирующие заданную диагональную матрицу стохастической чувствительности, формируются регулятором

$$u_1 = k_{11}(x - \bar{x}) + k_{12}(y - \bar{y}), \; u_2 = k_{21}(x - \bar{x}) + k_{22}(y - \bar{y})$$

с параметрами (см. раздел 4.2.1)

$$k_{11} = -f_{11} - \frac{s_1}{2w}, \qquad k_{12} = -f_{12}, \qquad k_{21} = -f_{21}, \qquad k_{22} = -\frac{s_2}{2w}.$$

На рис. 5.5.8а показаны доверительные эллипсы при $\beta = 0.3$, $P = 0.9$ и $\varepsilon = 0.02$: большой эллипс для системы без управления и средний и малый эллипсы для системы с Управлением I, обеспечивающим соответственно $w = 1$ и $w = 0.01$. Как видно, синтез малой стохастической чувствительности приводит к малому размеру доверительного эллипса и локализации случайных состояний вблизи равновесия M_4.

Управление II.

В этом случае не любая положительно определенная 2×2-матрица W является достижимой. В рассматриваемом случае условие достижимости имеет вид $w_{12} = -\dfrac{s_2}{2f_{21}}$. Это означает, что выбором Управления II мы не можем произвольно менять элемент w_{12}. Действительно, этот элемент должен быть зафиксирован, а оставшиеся диагональные элементы должны удовлетворять условиям положительной определенности матрицы W:

$$w_{11} > 0, \qquad w_{11}w_{22} > w_{12}^2 = \frac{s_2^2}{4f_{21}^2}.$$

При этом параметры регулятора имеют вид

$$k_{11} = -f_{11} + \frac{f_{21}w_{11}w_{12} - 0.5s_1w_{22}}{w_{11}w_{22} - w_{12}^2}, \qquad k_{12} = -f_{12} + \frac{0.5s_1w_{12} - f_{21}w_{11}^2}{w_{11}w_{22} - w_{12}^2}.$$

Положим $w_{11} = w_{22} = w$. Отметим, что в этом случае величина w не может быть выбрана произвольно малой, так как условие положительной определенности требует $w > |w_{12}|$. Для $\beta = 0.3$ значение $w_{12} = -0.44$. Здесь можно назначить недиагональную матрицу W: $W = \begin{bmatrix} w & -0.44 \\ -0.44 & w \end{bmatrix}$.

Для $w = 1$ получаем матрицу

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & -0.44 \\ -0.44 & 1 \end{bmatrix},$$

а для $w = 0.45$ – матрицу

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0.45 & -0.44 \\ -0.44 & 0.45 \end{bmatrix}.$$

На рис. 5.5.8б изображены доверительные эллипсы, соответствующие матрицам W_1 (средний) и W_2 (малый). Как видим эксцентриситет этих эллипсов сильно отличается, однако они полностью лежат в бассейне притяжения равновесия M_4.

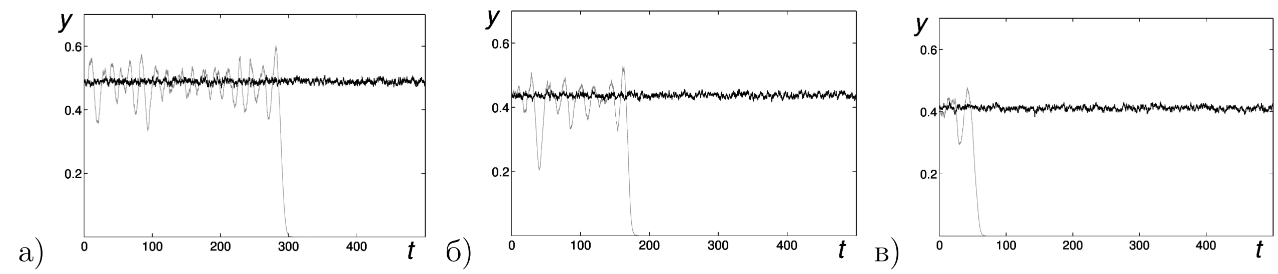


Рис. 5.5.9 – Решения стохастической системы с $\varepsilon = 0.02$ без управления (серый цвет) и с Управлением I (черный цвет), обеспечивающим $w = 0.1$: а) при $\beta = 0.3$, б) при $\beta = 0.34$, в) при $\beta = 0.36$.

Результаты прямого численного моделирования решений стохастической замкнутой системы с Управлением I для трех различных значений β представлены на рис. 5.5.9. Здесь временные ряды этой системы с управлением изображены черным цветом на фоне серых траекторий системы без управления. Как видно, построенный регулятор, обеспечивая малую стохастическую чувствительность $w = 0.1$, стабилизирует популяционную систему вблизи нетривиального детерминированного равновесия M_4. Отметим, что этот регулятор позволяет стабилизировать даже неустойчивое равновесие (см. рис. 5.5.9б для $b = 0.34$ и рис. 5.5.9в для $b = 0.36$).

Кроме того, этот регулятор решает важную задачу структурной стабилизации систему для всего параметрического интервала $0.3 < \beta < 0.38$ (см. рис. 5.5.6б) и обеспечивает на этом интервале малый равномерный разброс случайных состояний около M_4.

Представленные здесь результаты опубликованы в работах [192, 215] автора диссертации.

Индуцированное шумом вымирание в популяционных двумерных моделях может происходить не только из рассмотренных здесь равновесных, но и из колебательных режимов существования популяций хищников и жертв. Такой сценарий был детально проанализирован с помощью метода доверительных полос (раздел 2.2.2) в работе [321] на базе популяционной модели Базыкина-Березовской.

5.5.3. Модель фито- зоопланктон

Экологические сдвиги могут быть связаны не только с индуцированным шумом вымиранием. Случайные возмущения могут генерировать новые режимы динамики, не имеющие аналогов в детерминированных моделях. Покажем, как такие новые режимы могут возникать в популяционной системе, описывающей взаимодействие фито- и зоопланктона.

Рассмотрим модель Траскотт-Бриндли [322] с Олли эффектом и случайными возмущениями

$$
\begin{aligned}
\delta\dot{x} &= rx^2(k-x+\varepsilon\xi(t)) - \frac{a^2x^2}{1+b^2x^2}y \\
\dot{y} &= \frac{a^2x^2}{1+b^2x^2}y - my,
\end{aligned}
\tag{5.5.5}
$$

где x и y – плотности жертвы (фитопланктон) и хищника (зоопланктон), r – коэффициент прироста жертвы, k – емкость экологической ниши, m – коэффициент естественной смертности хищника. Взаимодействие жертвы и хищника определяется функцией Холлинга III тип. Малый параметр δ отражает высокую чувствительность и быструю реакцию популяции жертвы на изменения окружающей среды [323]. Используемый в модели стандартный гауссовский белый шум $\xi(t)$ имеет параметры $\mathrm{E}\xi(t)=0$, $\mathrm{E}\xi(t)\xi(\tau)=\delta(t-\tau)$, а ε – интенсивность шума. Такие случайные возмущения могут быть интерпретированы как случайные флуктуации параметра емкости экологической ниши.

При всех параметрах детерминированная система (5.5.5) имеет равновесия $(0,0)$ и $(k,0)$. Равновесие $(0,0)$ неустойчиво, а $(k,0)$ устойчиво при $a < a_1 = \sqrt{m(b^2+1/k^2)}$. При переходе параметра в зону $a > a_1$ равновесие $(k,0)$ становится неустойчивым и в системе появляется нетривиальное равновесие $A(\bar{x},\bar{y})$ с положительными координатами

$$
\bar{x} = \sqrt{\frac{m}{a^2-b^2m}}, \quad \bar{y} = \frac{r}{m}\bar{x}^2(k-\bar{x}).
$$

Далее мы фиксируем $\delta = 0.1, r = k = m = 1,\ \ b = 7$ и изучаем динамику системы (5.5.5) при вариации параметра a. При этом $a_1 = \sqrt{50} = 7.07107$.

При $a_2 = 7.1639$ в системе происходит бифуркация Андронова–Хопфа, равновесие A теряет устойчивость и появляется устойчивый предельный цикл.

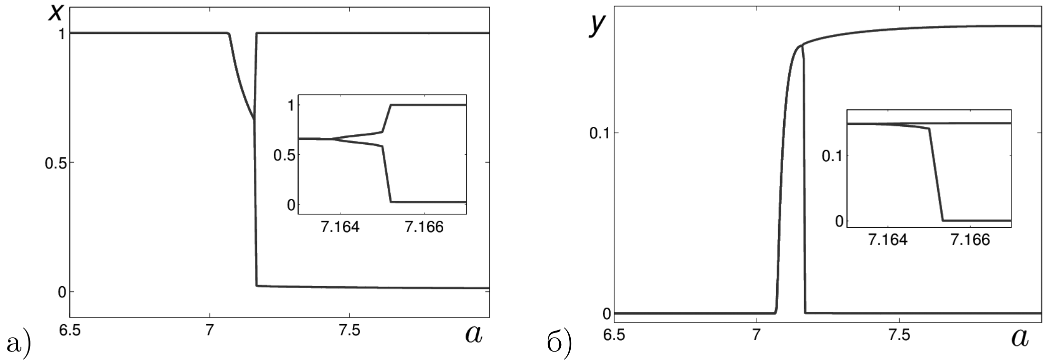
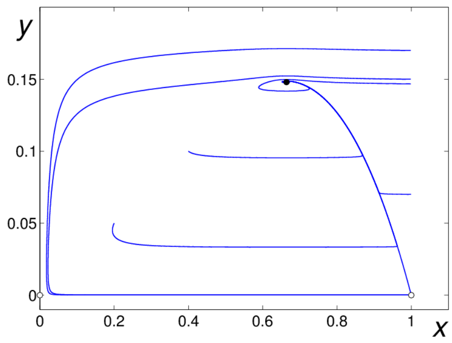


Рис. 5.5.10 – Экстремальные значения аттракторов детерминированной системы: а) x-координаты, б) y-координаты.

Такая трансформация устойчивого равновесия в устойчивый предельный цикл показана на рис. 5.5.10, где изображены экстремальные значения аттракторов системы. На рис. 5.5.11 показано поведение детерминированной системы вблизи точки бифуркации a_2. При $a = 7.16$ все траектории стремятся к нетривиальному равновесию A (см. рис. 5.5.11а), поэтому популяции хищников и жертв сосуществуют в режиме равновесия.

На рис. 5.5.11б показаны предельные циклы, описывающие колебательные режимы сосуществования хищника и жертвы. Как видно, переходная зона от равновесий к циклам большой амплитуды очень узка. Такое резкое увеличение амплитуды цикла известно как канардовский взрыв. На рис. 5.5.11б показано, как небольшие изменения параметра a приводят к появлению колебаний большой амплитуды.

а) 

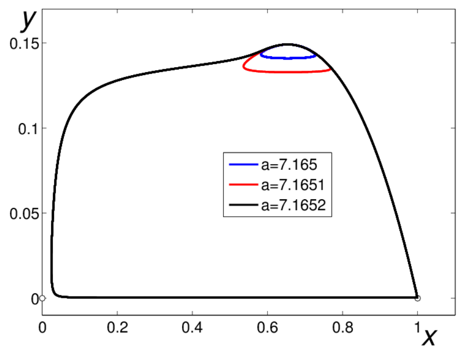
б) 

Рис. 5.5.11 – Детерминированная система: а) фазовый портрет при $a = 7.16$, б) предельные циклы.

Следуя главе 2, опишем чувствительность аттракторов системы к шуму. Матрица стохастической чувствительности равновесия $A(\bar{x}, \bar{y})$ имеет вид $W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, где

$$\lambda_1 = -\frac{\bar{x}^4}{2\delta^2\beta}, \qquad \lambda_2 = \frac{\bar{x}^4\eta}{2\delta^2\beta\gamma},$$

$$\beta = \frac{r}{\delta}(2k\bar{x} - 3\bar{x}^2) - \frac{2a^2\bar{x}\bar{y}}{\delta(1 + b^2\bar{x}^2)^2}, \qquad \gamma = -\frac{a^2\bar{x}^2}{\delta(1 + b^2\bar{x}^2)}, \qquad \eta = \frac{2a^2\bar{x}\bar{y}}{(1 + b^2\bar{x}^2)^2}.$$

Для выбранных параметров системы, графики функций $\lambda_1(a)$, $\lambda_2(a)$ представлены на рис. 5.5.12а. Соответствующие доверительные эллипсы могут быть записаны в каноническом виде:

$$\frac{(x - \bar{x})^2}{\lambda_1} + \frac{(y - \bar{y})^2}{\lambda_2} = -2\varepsilon^2 \ln(1 - P),$$

где P – доверительная вероятность.

Теперь рассмотрим случай, когда аттрактором детерминированной системы является устойчивый предельный цикл, задаваемый T-периодическим решением $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$. Для этого цикла можно найти (см. раздел 2.2) T-периодическую функцию $\mu(t)$ стохастической чувствительности и коэффициент стохастической чувствительности $M = \max \mu(t)$, $t \in [0, T]$. График функции $M(a)$ представлен на рис. 5.5.12б.

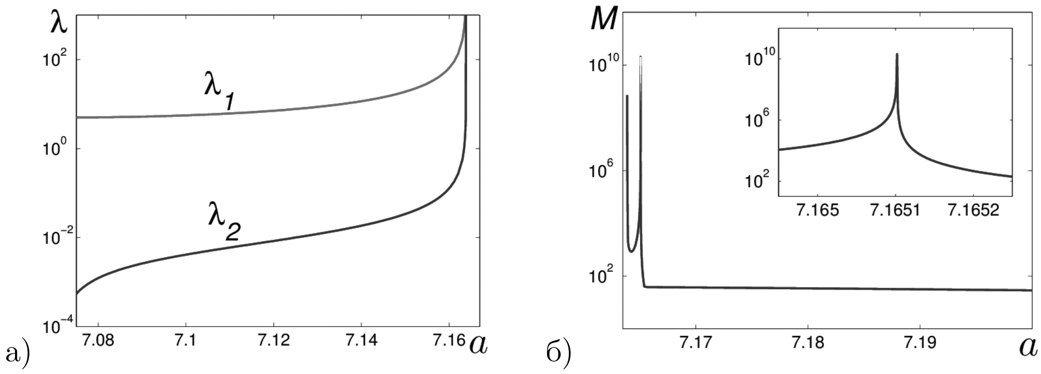


Рис. 5.5.12 – Стохастическая чувствительность аттракторов: а) собственные числа матрицы стохастической чувствительности равновесий, б) коэффициент стохастической чувствительности циклов.

Здесь наиболее интересная деталь – резкий всплеск стохастической чувствительности вблизи значения $a_* = 7.1651$. При этом значении наблюдается очень узкий и высокий пик функции $M(a)$ со значениями, превышающими 10^{10}. Таким образом, в зоне циклов-канардов происходит взрыв стохастической чувствительности. Такая высокая чувствительность может стать источником качественных изменений динамики системы даже при слабых шумах.

Обсудим, какие экологические сдвиги в рассматриваемой популяционной системе могут возникать за счет случайных возмущений.

Стохастическая возбудимость в зоне равновесия

Рассмотрим отклик системы (5.5.5) на случайные возмущения в зоне устойчивых равновесий вблизи точки бифуркации a_2.

На рис. 5.5.13а показаны стартующие с равновесия A случайные траектории системы (5.5.5) для $a = 7.16$ при трех значениях интенсивности шума. При слабом шуме случайные траектории локализованы вблизи устойчивого равновесия A. Если шум превышает некоторый порог, динамика системы существенно меняется. Наряду с колебаниями малой амплитуды вблизи A наблюдаются большеамплитудные осцилляции вдали от равновесия. Таким образом, стохастическая система с $a = 7.16$ является возбудимой.

При анализе стохастической возбудимости необходимо учитывать стохастическую чувствительность равновесия и неоднородность детерминированного фазового портрета. Эта неоднородность хорошо видна на рис. 5.5.11а. При малых отклонениях от равновесия A (допороговая зона) детерминированные траектории быстро приближаются к A. Для больших отклонений траектория попадает в надпороговую зону, демонстрирует большеамплитудную петлю. Только после такой петли траектория начинает приближаться к A. В этих обстоятельствах увеличение интенсивности шума приводит к увеличению отклонений случайных траекторий от равновесия и попаданию их в надпороговую зону. Результатом этого является генерация бимодальных осцилляций.

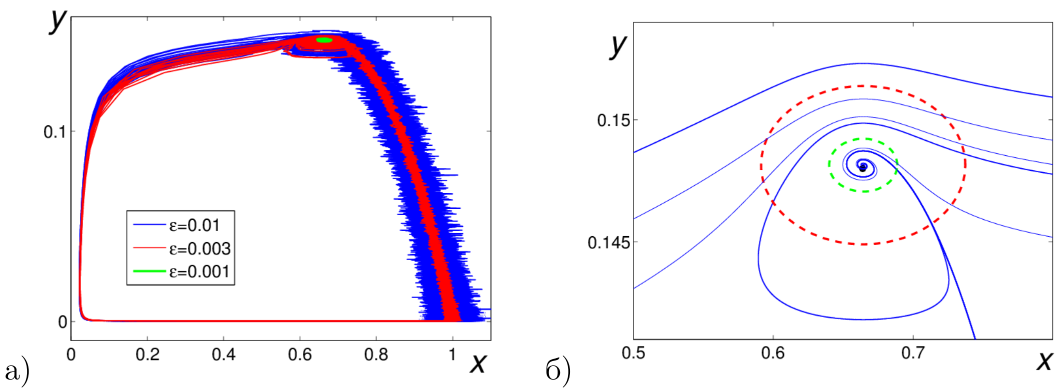


Рис. 5.5.13 – Стохастическая возбудимость при $a = 7.16$: а) фазовые траектории, б) доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.001$ (малый) и $\varepsilon = 0.003$ (большой).

Рассмотрим, как доверительные эллипсы, построенные на основе функции стохастической чувствительности, могут быть использованы для параметрического анализа индуцированных шумами выходов из допороговой зоны. Размер эллипса пропорционален интенсивности шума ε. При малой интенсивности шума $\varepsilon = 0.001$ соответствующий доверительный эллипс целиком принадлежит допороговой зоне (см. малый эллипс на рис. 5.5.13б). По мере увеличения шума эллипс расширяется и начинает захватывать надпороговую зону (см. большой эллипс на рис. 5.5.13б). Это означает, что стохастические траектории с высокой вероятностью уходят от A и демонстрируют обороты большой амплитуды. Как видим, метод доверительных эллипсов хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования, показанными на рис. 5.5.13а.

Стохастическая возбудимость и бифуркации циклов-канардов

Рассмотрим влияние шума на систему в зоне суперчувствительных циклов-канардов. На рис. 5.5.14а показана деформация цикла-канарда с $a = 7.1651$ под действием малых шумов. Отметим, что соответствующий детерминированный цикл моделирует сосуществование жертвы и хищника в форме периодических автоколебаний малой амплитуды. Для чрезвычайно слабого шума ($\varepsilon = 10^{-7}$) случайные траектории (зеленый цвет) располагаются вблизи детерминированного цикла. При $\varepsilon = 10^{-6}$ (синие кривые) стохастическая система начинает генерировать бимодальные колебания: колебания малой амплитуды вблизи детерминированного цикла чередуются с петлями больших амплитуд. Случайные траектории для $\varepsilon = 10^{-4}$ показаны красным цветом.

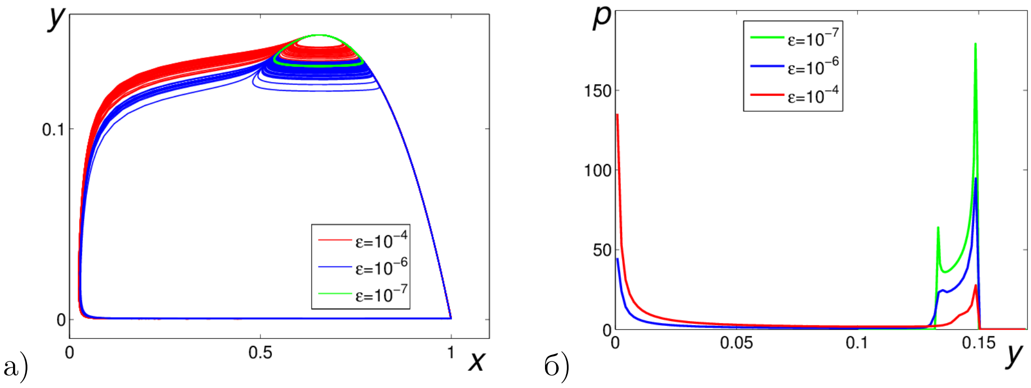


Рис. 5.5.14 – Расщепление канардовского цикла при $a = 7.1651$: а) фазовые траектории, б) плотности распределения.

Обратите внимание, что в зоне циклов-канардов эта вызванная шумом генерация колебаний большой амплитуды наблюдается при существенно меньшем шуме, чем в зоне равновесия.

Детали изменения вероятностного распределения стохастических траекторий можно проследить с помощью функции $p(y)$ плотности распределения y-координаты. На рис. 5.5.14б показаны графики функции $p(y)$ для трех значений ε. Здесь хорошо видно появление дополнительного пика в зоне малых значений y. Это можно трактовать как стохастическую P-бифуркацию качественного изменения формы плотности распределения, отражающую феномен стохастического расщепления пучка случайных траекторий.

Наряду с P-бифуркацией, здесь наблюдается стохастическая D-бифуркация, характеризуемая изменением знака старшего показателя Ляпунова Λ. Изменение знака Λ с отрицательного на положительный является стандартным критерием перехода от порядка к хаосу. На рис. 5.5.15 представлены графики $\Lambda(\varepsilon)$ для трех значений параметра a из зоны канардовского взрыва. Как видим, увеличение шума приводит к хаотизации потока. При этом переход к хаосу на суперчувствительном цикле с $a_* = 7.1651$ происходит при гораздо меньших, практически фоновых шумах.

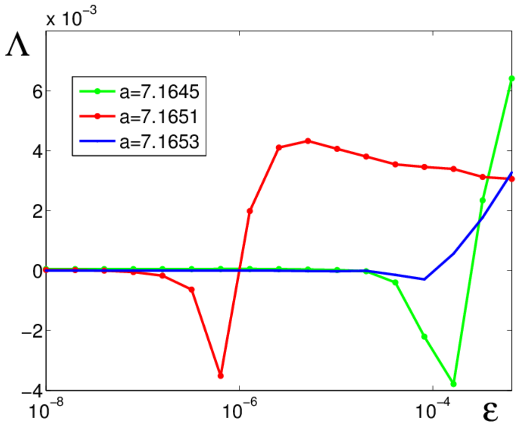


Рис. 5.5.15 – Старший показатель Ляпунова.

Стохастическая генерация фантомных аттракторов

При дальнейшем увеличении шума в системе наблюдается еще один интересный феномен, связанный со сдвигом пучка случайных траекторий в зону фазового пространства, удаленную от детерминированных аттракторов исходной невозмущенной системы. Это явление стохастической генерации фантомного аттрактора было впервые обнаружено для формальной математической модели – системы с кубической нелинейностью – и описано в разделе 3.3.3.

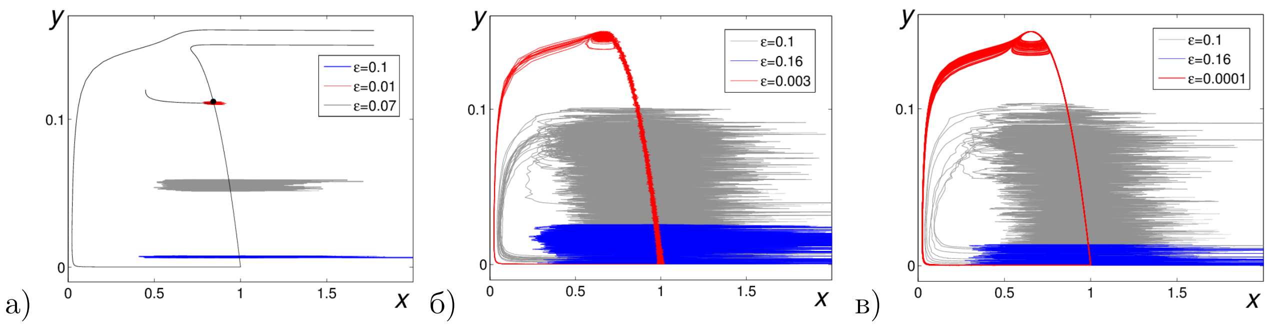


Рис. 5.5.16 – Генерация фантомных аттракторов: а) $a = 7.1$, б) $a = 7.16$, в) $a = 7.1651$.

На рис. 5.5.16 показано, как этот феномен появляется в рассматриваемой популяционной модели. Здесь рассмотрены три значения параметра a. При $a = 7.1$ и $a = 7.16$ аттрактором детерминированной системы является равновесие A, а при $a = 7.1651$ – канардовский цикл. Как видим, во всех этих случаях с увеличением шума распределение случайных траекторий сдвигается вниз, туда, где детерминированная система не имеет никаких аттракторов. При этом дисперсия x-координаты увеличивается, а дисперсия y-координаты уменьшается и среднее значение численности хищника существенно убывает.

Таким образом, показано, что даже в весьма простой популяционной модели шум может порождать разнообразные экологические сдвиги, вероятностная природа которых связана с такими фундаментальными стохастическими феноменами как стохастическая возбудимость, стохастическое расщепление потоков, генерация фантомных аттракторов, переход от порядка к хаосу.

Представленные здесь результаты опубликованы в [235]. Анализ индуцированных шумом переходов в модели Траскотт-Бриндли без Олли эффекта с использованием результатов глав 2 и 3 был проведен в работах [285, 324].

Замечание 5.5.4

В разделах 5.5.2 и 5.5.3 было показано, как математическая теория из главы 2, главы 3 и раздела 4.2 может быть эффективно применена к исследованию возможных экологических сдвигов в двумерных популяционных системах типа «хищник–жертва». В настоящее время актуальным является исследование иерархических популяционных систем, охватывающих несколько трофических уровней. Здесь следующим шагом является переход к анализу стохастических популяционных моделей размерности три и выше. Уже в трехмерных системах с непрерывным временем возможны динамические режимы, связанные не только с регулярными (равновесными, периодическими, квазипериодическими), но и хаотическими аттракторами. Теоретические разработки данной диссертации позволяют проводить конструктивный анализ стохастических эффектов и соответствующих им экологических сдвигов в многомерных популяционных моделях. Конструктивные возможности разработанного подхода, использующего технику функций стохастической чувствительности многомерных аттракторов и метод доверительных областей (эллипсоидов и торов), в решении важных экологических задач были продемонстрированы в работах [266, 325–329].

5.6. Геофизика

В данном разделе демонстрируется, как методы глав 1,2 и 3 могут быть использованы в решении актуальных задач, связанных с исследованием геофизических явлений.

5.6.1. Климатическая модель Зальцмана

Анализ изменений климата является одной из важнейших задач современной геофизики. Наблюдаемую в настоящее время фазу глобального потепления обычно связывают с парниковым эффектом и влиянием углекислого газа. Хорошо известно, что двуокись углерода представляет собой удерживающий тепло газ, поэтому разработка и анализ математических моделей, учитывающих нелинейную динамику и взаимное влияние CO_2 на другие глобальные параметры (температура океана и масса льда) является актуальной задачей современной математической геофизики. В работе Б. Зальцмана [95] была предложена концептуальная трехмерная математическая модель, связывающая динамику CO_2 с изменениями массы льда и температуры в глубине океана, и найден набор параметров, при которых модель хорошо согласуется с палеоклиматическими данными.

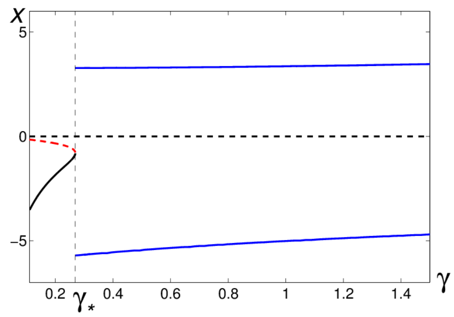


Рис. 5.6.1 – Бифуркационная диаграмма детерминированной системы.

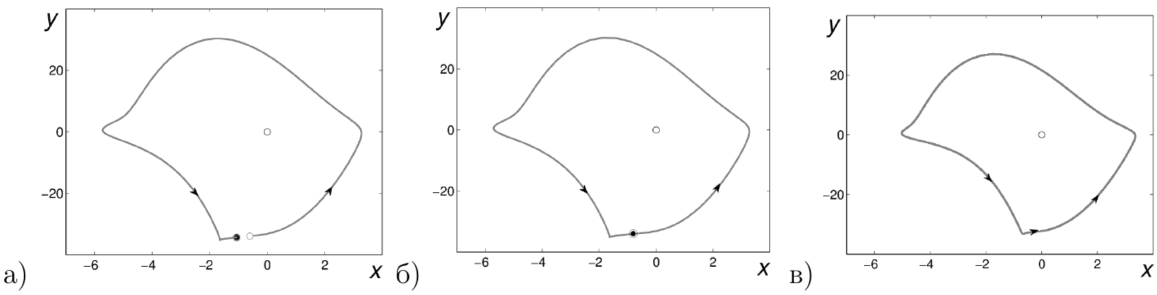


Рис. 5.6.2 – Фазовые траектории для а) $\gamma = 0.26$, б) $\gamma_* = 0.2691$, в) $\gamma = 1$.

Цель этого раздела – показать важную роль случайных возмущений в нелинейной изменчивости климата Земли и продемонстрировать конструктивность разработанного и представленного в главе 2 подхода, позволяющего анализировать эти изменения.

Рассмотрим стохастический вариант безразмерной модели Зальцмана

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\alpha_1 y - \alpha_2 z - \alpha_3 y^2 \\ \dot{y} &= -\beta_0 x + \beta_1 y + \beta_2 z - (x^2 + \kappa y^2) y \\ \dot{z} &= x - (\gamma + \varepsilon \xi(t)) z, \end{aligned} \tag{5.6.1}$$

где переменные x, y и z отвечают за массу льда, концентрацию углекислого газа и температуру в глубине океана соответственно. Следуя [95], зафиксируем $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.1$, $\alpha_3 = 0.012$, $\beta_0 = 10$, $\beta_1 = 3.77$, $\beta_2 = 20$, $\kappa = 0.004$ и будем изучать динамику модели при изменении параметра γ, отвечающего за

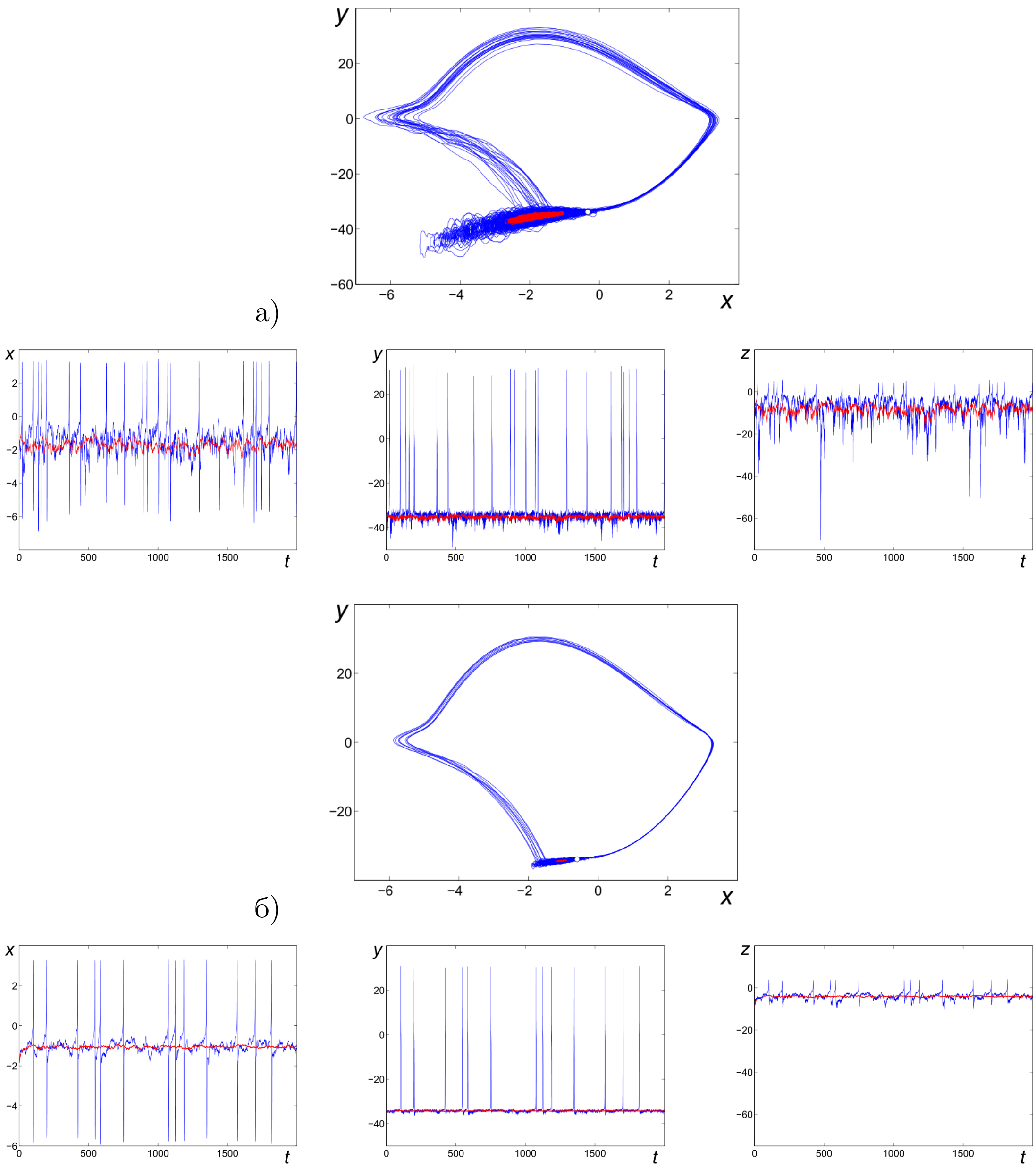


Рис. 5.6.3 – Стохастическое возбуждение колебаний: фазовые траектории и временные ряды для а) $\gamma = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$ (красный), $\varepsilon = 0.3$ (синий) б) $\gamma = 0.26$, $\varepsilon = 0.02$ (красный), $\varepsilon = 0.1$ (синий).

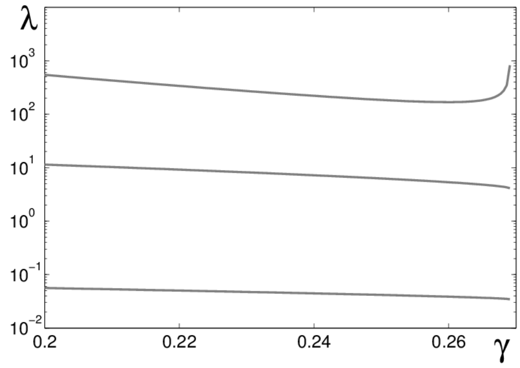


Рис. 5.6.4 – Стохастическая чувствительность равновесия.

величину, обратную к времени релаксации температуры океана. Отметим, что модель отражает глобальные изменения климата, при этом единица времени в (5.6.1) равна 10^4 лет. Случайные флуктуации в γ моделируются стандартным гауссовским белым шумом $\xi(t)$ с параметрами $\mathrm{E}\xi(t) = 0$, $\mathrm{E}\xi(t)\xi(\tau) = \delta(t-\tau)$, ε – интенсивность шума.

Пусть параметр γ изменяется в интервале $0.1 < \gamma < 1.5$. Этот интервал включает оценку $\gamma = 1.45$, данную в работе [95]. Детерминированная система (5.6.1) (с $\varepsilon = 0$) имеет аттракторы и репеллеры, которые изображены на рисунке 5.6.1. Для любого γ система (5.6.1) имеет неустойчивое равновесие $M_0(0, 0, 0)$ (черная пунктирная линия). В интервале $0.1 < \gamma < \gamma_* \approx 0.2691$ наряду с M_0 система имеет устойчивое равновесие M_1 (черная сплошная линия) и неустойчивое равновесие M_2 (красная пунктирная линия). При приближении параметра γ к γ_* слева, равновесия M_1 и M_2 сближаются и сливаются при $\gamma = \gamma_*$. В результате этого слияния в системе появляется гомоклиническая траектория. Когда параметр γ переходит в интервал $\gamma > \gamma_*$, равновесие $M_1 = M_2$ исчезает и появляется устойчивый предельный цикл. Экстремальные значения x-координат этого цикла показаны на рис. 5.6.1 синим цветом. Отметим, что форма этого цикла практически не изменяется в интервале $\gamma_* < \gamma < 1.5$. Здесь γ_* является точкой седло-узловой бифуркации на инвариантной кривой. Последовательные этапы этой бифуркации показаны на рис. 5.6.2, где M_0 отмечено пустым черным кружком, M_1 синим кружком и M_2 пустым красным кружком.

Рассмотрим влияние шума на устойчивое равновесие M_1 в зоне $\gamma < \gamma_*$. На рис. 5.6.3 изображены фазовые траектории и временные ряды решений стохастической системы (5.6.1), стартующих с M_1. Видно, что система является возбудимой – увеличение интенсивности возмущений приводит к генерации стохастических колебаний большой амплитуды. Отметим, что шум интенсивности $\varepsilon = 0.1$ для $\gamma = 0.2$ вызывает лишь малоамплитудные осцилляции вокруг M_1 (допороговый режим), в то время как при $\gamma = 0.26$ уже происходит генерация большеамплитудных колебаний (надпороговый режим).

Покажем, как это явление стохастического возбуждения большеамплитудных колебаний может быть проанализировано с помощью метода доверительных областей из главы 2.

Для построения доверительных областей следует найти собственные числа $\lambda_1, \lambda_2,\ \lambda_3$ и собственные векторы $u_1,\ u_2,\ u_3$ матрицы стохастической чувствительности. На рис. 5.6.4 представлены графики собственных значений $\lambda_1(\gamma) > \lambda_2(\gamma) > \lambda_3(\gamma)$ матрицы стохастической чувствительности равновесий $M_1(\gamma)$. Здесь очевидно преобладание λ_1 и λ_2, более чем на два порядка превосходящих λ_3. Благодаря этому, разброс случайных состояний в направлении u_3 гораздо меньше, чем в направлениях u_1 и u_2. В этих обстоятельствах разумно анализировать индуцированные шумом переходы в сечении Пуанкаре – плоскости Π_{12}, проходящей через M_1 и определяемой векторами u_1 и u_2. В этой плоскости уравнение доверительного эллипса имеет вид

$$\frac{\beta_1^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_2^2}{\lambda_2} = 2\varepsilon^2 \ln \frac{1}{1-P},$$

где $\beta_1,\ \beta_2$ – координаты эллипса в базисе векторов u_1, u_2, а P – доверительная вероятность.

На рис. 5.6.5 показаны доверительные эллипсы для набора параметров из рис. 5.6.3. Увеличение интенсивности шума влечет рост размеров эллипса. Переход эллипсов из допороговой в надпороговую зону позволяет предсказать генерацию большеамплитудных стохастических колебаний в системе 5.6.1.

Индуцированная шумом генерация стохастических колебаний может быть наглядно проиллюстрирована изменением формы плотности распределения (см. рис. 5.6.6). При $\varepsilon = 0.05$ у плотности наблюдается узкий и высокий пик над равновесием M_1. При $\varepsilon = 0.6$ высота пика уменьшается, его ширина увеличивается, и наряду с пиком у плотности появляется гребень над областью концентрации большеамплитудных случайных траекторий.

Наряду с изменением амплитуды, рассмотрим изменение частотных характеристик генерируемых спайковых колебаний. Пусть t_k – моменты пересечения случайной траекторией порогового значения $x = 0$, а $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ – последовательность интервалов между спайками. Количественной характеристикой периодичности большеамплитудных колебанияй является среднее значение $m = \mathrm{E}\tau$. Графики функции $m(\varepsilon)$ для значений параметра $\gamma = 0.2$, $\gamma = 0.26$, лежащих слева от γ_*, и $\gamma = 0.3$, $\gamma = 1$, лежащих справа от γ_*,

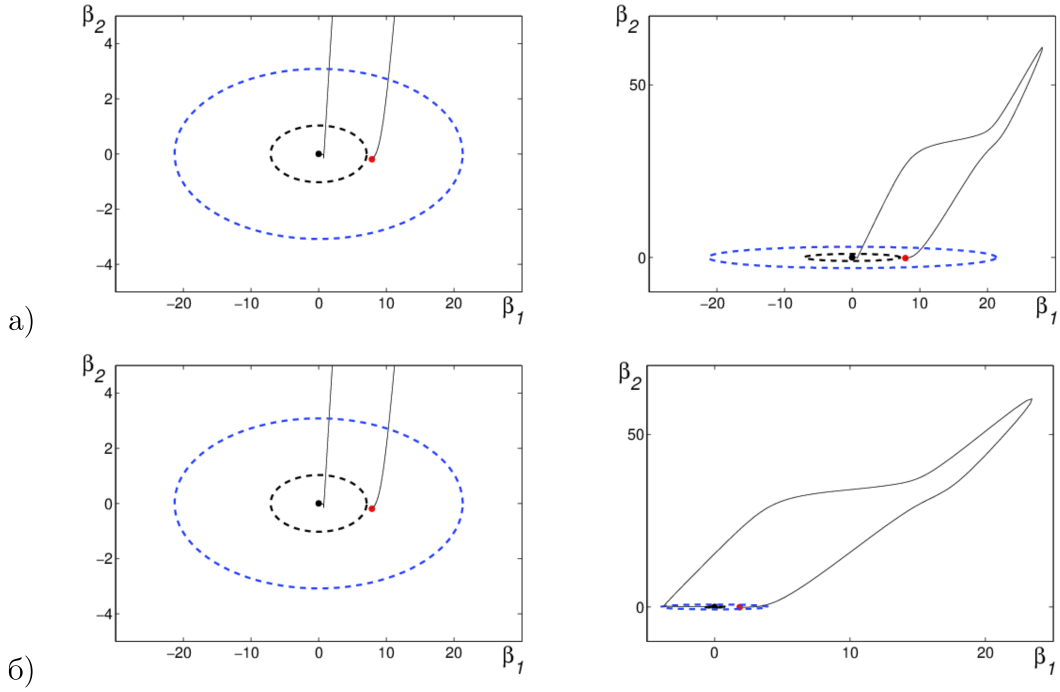


Рис. 5.6.5 – Доверительные эллипсы для а) $\gamma = 0.2$, $\varepsilon = 0.1$ (малый), $\varepsilon = 0.3$(большой); б) $\gamma = 0.26$, $\varepsilon = 0.02$ (малый), $\varepsilon = 0.1$ (большой).

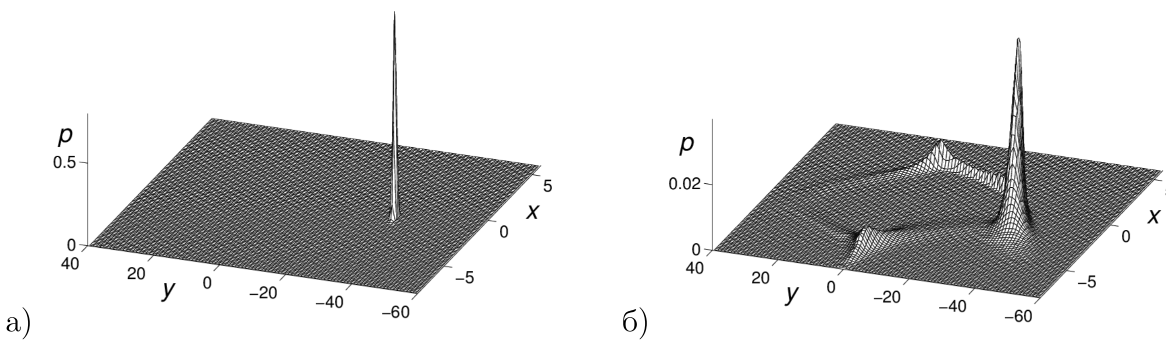


Рис. 5.6.6 – Плотности распределения для $\gamma = 0.26$ и а) $\varepsilon = 0.05$, б) $\varepsilon = 0.6$.

показаны на рис. 5.6.7а.

Сначала рассмотрим функцию $m(\varepsilon)$ в зоне $\gamma > \gamma_*$, где детерминированная модель демонстрирует устойчивые периодические колебания. При $\gamma = 1$ функция $m(\varepsilon)$ практически неизменна. Действительно, для $\varepsilon = 0$ значение m равно периоду соответствующего детерминированного цикла, и эта функция лишь слегка возрастает с увеличением интенсивности шума. При $\gamma = 0.3$ поведение $m(\varepsilon)$ изменяется в основном в левой части интервала $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Здесь, из-за близости к точке бифуркации, значение $m(0)$ (т.е. период детерминированного цикла) намного больше. Однако увеличение шума устраняет эту разницу.

Теперь рассмотрим функцию $m(\varepsilon)$ в зоне $\gamma < \gamma_*$, где детерминированная модель имеет единственным аттрактором устойчивое равновесие. Здесь функция $m(\varepsilon)$ неограниченно растет при $\varepsilon \to 0$. Действительно, спайки крайне редки при малых шумах. Отметим, что при $\gamma < \gamma_*$ функции $m(\varepsilon)$ с увеличением шума быстро убывают и стабилизируются.

В случае достаточно большого шума среднее значение межспайковых интервалов практически не зависит от параметра γ. Таким образом, в рассматриваемой модели случайные возмущения приводят к структурной стабилизации стохастических колебаний на всем интервале. Рассмотрим теперь, как

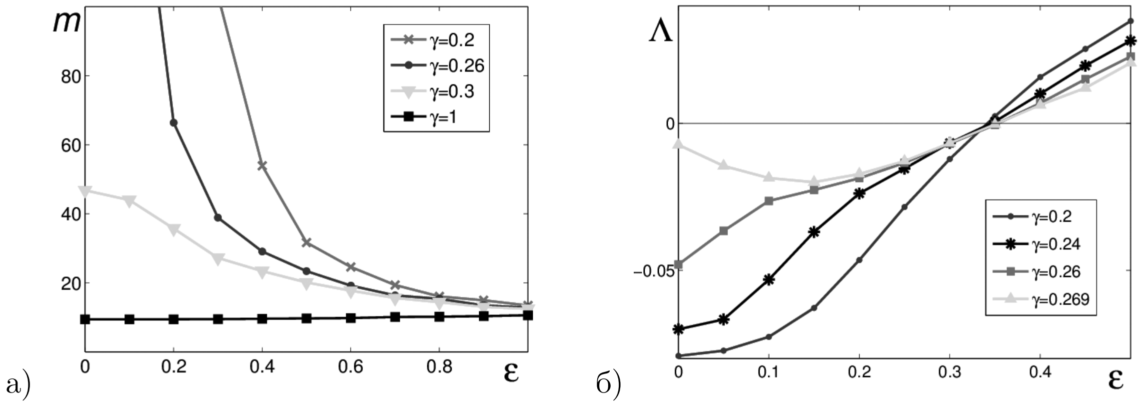


Рис. 5.6.7 – Характеристики стохастической системы: а) средние значения межспайковых интервалов, б) старший показатель Ляпунова.

шум изменяет внутренние динамические характеристики стохастических потоков системы (5.6.1) при переходе к режиму стохастического возбуждения. Здесь в качестве количественной меры будем использовать старший показатель Ляпунова Λ. На рис. 5.6.7б представлены графики $\Lambda(\varepsilon)$ при некоторых $\gamma < \gamma_*$. С увеличением интенсивности шума значения Λ также увеличиваются и становятся положительными для $\varepsilon \approx 0.3$, что сигнализирует о переходе к хаосу. Отметим, что критические значения шума, соответствующие переходу от порядка к хаосу, практически не зависят от параметра γ. Это означает, что хаотизация, вызванная шумом, является общим важным свойством рассматриваемой климатической системы.

Представленные в этом разделе результаты опубликованы в работе [219]. Использованный здесь общий подход к анализу индуцированных шумами явлений в нелинейных системах, использующий бифуркационный анализ аттракторов и их стохастическую чувствительность, был успешно применен к исследованию ряда моделей, описывающих совместную нелинейную динамику морского льда, континентального льда и температуры океана. Для климатических двух- и трехмерных моделей, обнаруженные стохастические феномены и результаты их анализа опубликованы в работах [210, 330–332] автора диссертации.

5.6.2. Модель вулканической активности

В данном разделе рассматривается стохастический вариант модели вулканической активности, предложенной в [96]. Динамическая система, описывающая эту модель, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -g + \frac{1}{m_0}\left(pA - F(u)(1+\varepsilon\xi(t))\right), \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)V}\left(Au + RB - Q\right), \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\left(Au + RB - Q\right) + Q - B. \end{aligned} \tag{5.6.2}$$

Здесь u – скорость движения вулканической пробки, p – давление магмы, V – объем канала (см. рис. 5.6.8), $R = 1-\rho/\rho_r = 1-(\rho_0/\rho_r)\exp\left[\alpha_1(p-p_0)\right]$ найдено из изотермического уравнения, p_0 – статическое равновесное давление, ρ_0 – плотность магмы. Физические параметры системы взяты из [96]: $B = Q = 2$ м^3 с$^{-1}$, $m_0 = 3.6\cdot 10^{10}$ кг, $A = 30000$ м^2, $p_0 = 1.2936\cdot 10^7$ Па, $\alpha_1 = 10^{-7}$ Па$^{-1}$, $\alpha_2 = 10^{-9}$ Па$^{-1}$, $F_0 = 3.528\cdot 10^{10}$ кг м с$^{-2}$, $u_{\mathrm{ref}} = 0.1Q/A = 6.67\cdot 10^{-6}$ м с$^{-1}$, $V_0 = 6.32\cdot 10^5$ м^3, $c = 1.7\cdot 10^{-4}$, $g = 9.8$ м с$^{-2}$, $\rho_0 = \rho_r = 2000$ кг м$^{-3}$. Случайные флуктуации в силе трения F моделируются стандартным гауссовским белым шумом $\xi(t)$ с параметрами $\mathrm{E}\xi(t) = 0$, $\mathrm{E}\xi(t)\xi(\tau) = \delta(t-\tau)$, ε – интенсивность шума. Здесь сила трения задается непрерывной N-образной функцией вида

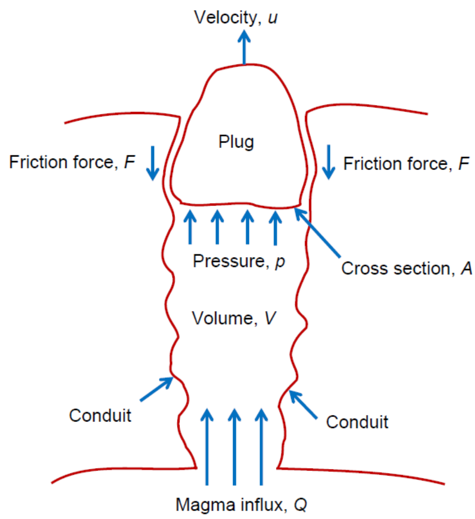


Рис. 5.6.8 – Схема динамики вулканической пробки [96].

$$F(u) = \mathrm{sgn}(u)F_N(|u|), \tag{5.6.3}$$

где

$$F_N(u) = \begin{cases} F_0\dfrac{u}{u_{\mathrm{ref}}}, & 0 \le u < u_{\mathrm{ref}} \\ F_0(u), & u_{\mathrm{ref}} \le u \le u_{cr} \\ F_0(u_{cr}) + k_N(u-u_{cr}), & u > u_{cr}. \end{cases}$$

$$F_0(u) = F_0\left(1 - c\ \mathrm{arsh}|u/u_{\mathrm{ref}}|\right).$$

Эта функция резко возрастает на интервале $0 \le u < u_{\mathrm{ref}}$, затем убывает при $u_{\mathrm{ref}} \le u \le u_{cr}$ и снова возрастает при $u > u_{cr}$ с положительным наклоном, задаваемым параметром k_N. Зафиксируем $u_{cr} = 9u_{ref}$ и будем изучать динамику системы в зависимости от параметра k_N.

На рисунке 5.6.9 изображены u-координаты экстремумов аттракторов и репеллеров детерминированной модели ($\varepsilon = 0$) в зависимости от параметра k_N. Два аттрактора (устойчивое равновесие и предельный цикл) разделены неустойчивым циклом, а при критическом значении $k_N = k_N^* \approx 3.37 \cdot 10^{10}$ кг с$^{-1}$ в системе происходит седлоузловая бифуркация слияния устойчивого и неустойчивого циклов, и единственным аттрактором детерминированной системы остается устойчивое равновесие.

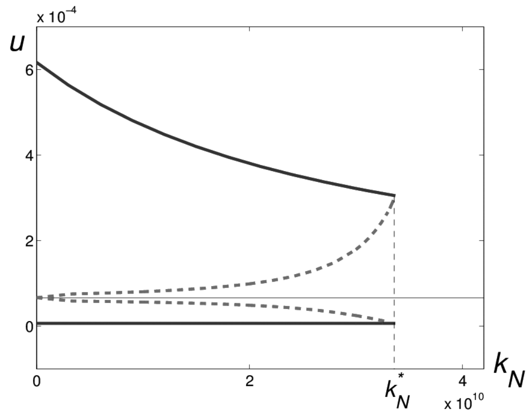


Рис. 5.6.9 – Бифуркационная диаграмма детерминированной модели: u-координаты экстремумов устойчивых циклов (толстая сплошная), неустойчивых циклов (толстый пунктир) и равновесий (тонкая линия). Значение k_N^* отмечает точку седлоузловой бифуркации.

Рассмотрим, как шум влияет на динамику системы в параметрических зонах $k_N < k_N^*$ и $k_N > k_N^*$.

Зона сосуществования равновесия и цикла

Рассмотрим сначала зону $k_N < k_N^*$ сосуществования равновесия и цикла. На рисунке 5.6.10а в плоскости (u, p) изображены аттракторы детерминированной системы при $k_N = 3 \cdot 10^{10}$ кг с$^{-1}$: устойчивый предельный цикл (синий цвет), неустойчивый предельный цикл (красный цвет) и устойчивое равновесие (кружок). Воздействие шума малой интенсивности на равновесие приводит к малоамплитудным стохастическим колебаниям около него (см. рис. 5.6.10б, серый цвет). При большем шуме траектория может пересечь сепаратрису – неустойчивый предельный цикл – выйти из бассейна притяже-

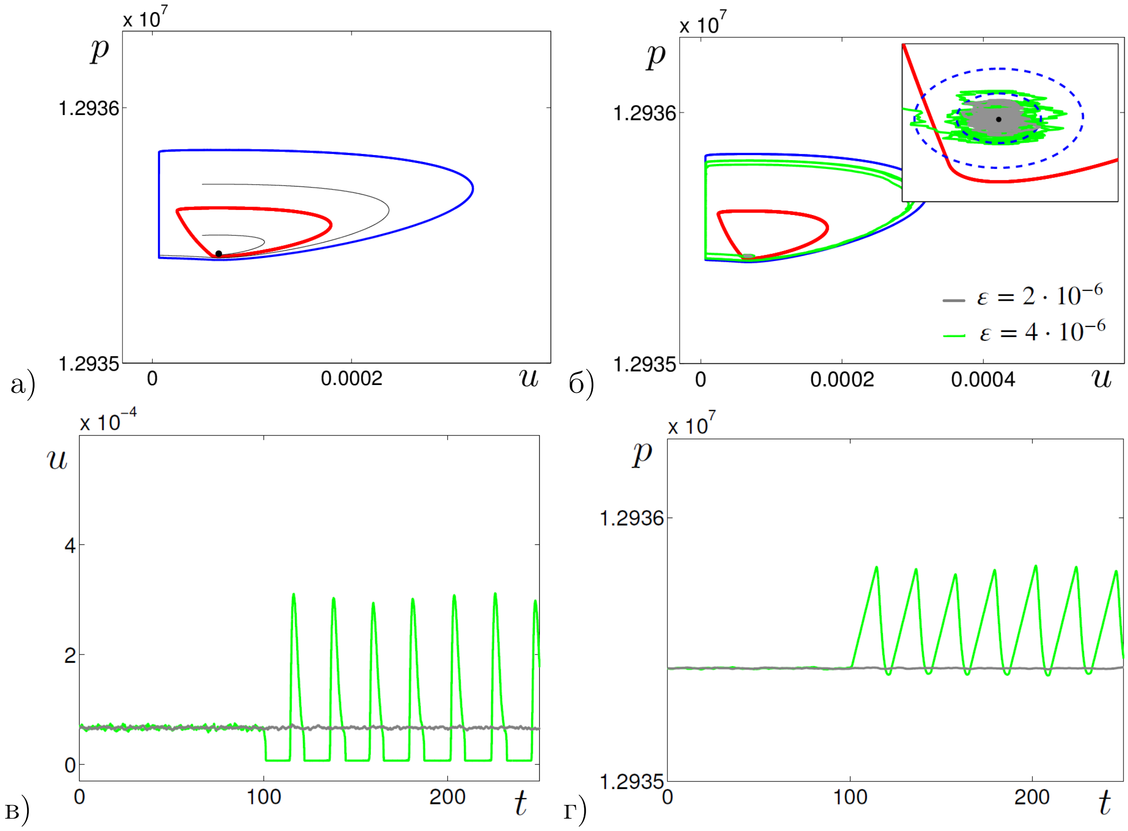


Рис. 5.6.10 – Динамика системы при $k_N = 3 \cdot 10^{10}$ кг с$^{-1}$: а) аттракторы детерминированной системы, б) фазовые траектории стохастической системы при $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-6}$ (серый цвет), $\varepsilon = 4 \cdot 10^{-6}$ (зеленый цвет), и соответствующие доверительные эллипсы; в), г) временные ряды для u и p.

ния равновесия, попасть в бассейн притяжения устойчивого цикла, и тогда в системе формируется режим большеамплитудных стохастических осцилляций (см. рис. 5.6.10б,в,г, зеленый цвет). Для прогноза генерации таких большеамплитудных стохастических осцилляций может быть успешно применен метод доверительных эллипсов (см. вставку на рис. 5.6.10б).

Зона равновесия

Рассмотрим теперь зону $k_N > k_N^*$, где единственным аттрактором детерминированной системы остается устойчивое равновесие. На рисунке 5.6.11а в плоскости (u, p) изображены траектории детерминированной системы при $k_N = 4 \cdot 10^{10}$ кг с$^{-1}$, черным кружком отмечено устойчивое равновесие, а пунктирной линией – фазовая кривая, играющая роль псевдосепаратрисы, разделяющей допороговую и надпороговую зоны начальных состояний.

Явление стохастической возбудимости продемонстрировано на рисунках 5.6.11б,в фазовыми траекториями и временными рядами, а на рис. 5.6.11г показано, как в режиме возбуждения случайная траектория пересекает псевдо-

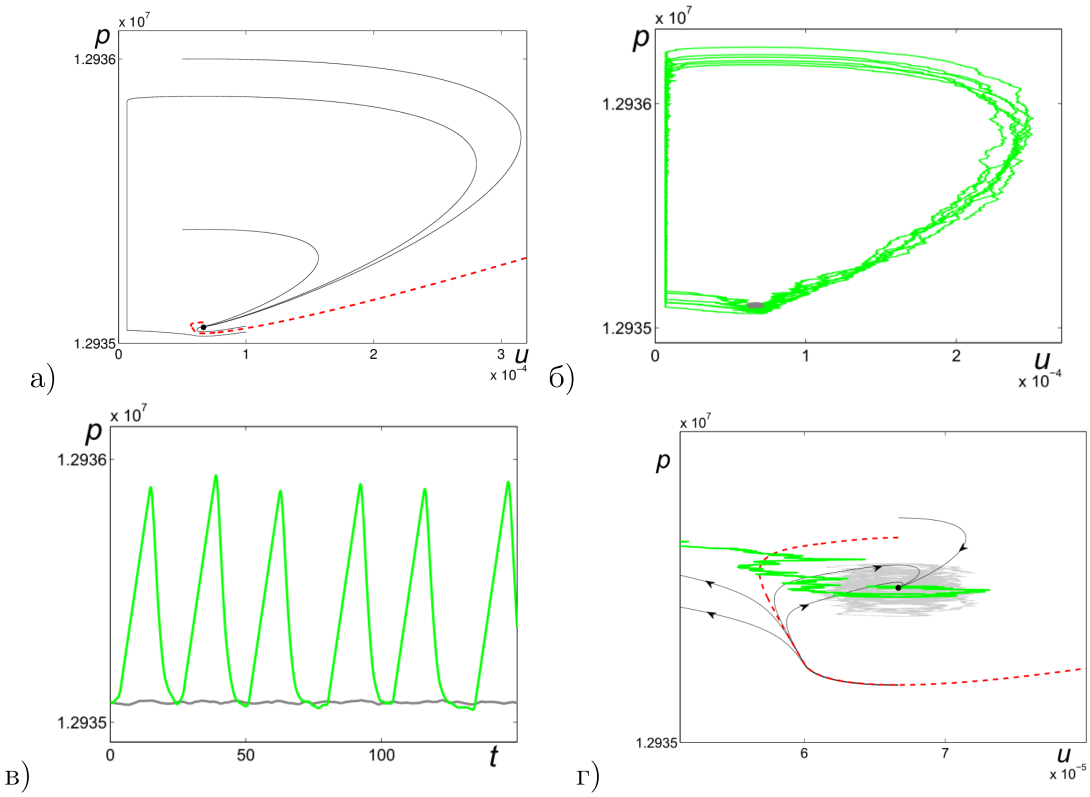


Рис. 5.6.11 – Динамика системы при $k_N = 4 \cdot 10^{10}$ кг с$^{-1}$: а) аттракторы детерминированной системы, б) фазовые траектории стохастической системы при $\varepsilon = 3 \cdot 10^{-6}$ (серый цвет) и $\varepsilon = 10 \cdot 10^{-6}$ (зеленый цвет), в) временные ряды, г) увеличенный фрагмент с псевдосепаратрисой (красный цвет).

сепаратрису.

Таким образом, в силу особенностей фазового портрета рассматриваемой модели, неизбежно присутствующие даже малые случайные возмущения могут вызвать генерацию большеамплитудных стохастических осцилляций. Параметрический анализ этого феномена может быть проведен с помощью метода доверительных областей, как это сделано, например в разделе 5.6.1.

Представленные в этом разделе результаты опубликованы в работе [216]. Индуцированные шумом деформации осцилляционных режимов в моделях вулканической активности исследовались в других работах [284, 333] автора диссертации. В частности, в [284], было показано, что феномен стохастической генерации фантомного аттрактора, описанный в разделе 3.3.3 для формальной математической модели с кубической нелинейностью, и в разделе 5.5.3 для популяционной модели, может наблюдаться и в трехмерной модели вулканической динамики.

Наряду с исследованием стохастических явлений в моделях климатической динамики и вулканической активности, теоретические методы, представленные в данной диссертации, применялись и к анализу вероятностных механизмов гейзерных извержений. В работе [334] для стохастического варианта модели, предложенной в [335], исследованы условия, при которых даже малые случайные возмущения могут переводить гейзер из устойчивого равновесного режима в режим извержения. При параметрическом анализе этого явления использовалась техника функции стохастической чувствительности и метод доверительных областей.

Замечание 5.5.5. В разделах 5.1–5.6 было показано, как общая математическая теория диссертации, представленная в главах 1–4, может конструктивно использоваться в анализе широкого класса индуцированных шумом явлений в современных нелинейных динамических моделях, относящихся к различным областям естествознания. В последнее время возрастает интерес к использованию методов нелинейной динамики в исследовании сложных макроэкономических процессов. Здесь, например, активно изучается математическая природа так называемых бизнес-циклов, когда сложные регулярные или даже хаотические осцилляции ассоциируются с аттракторами нелинейных динамических моделей. Исследованию влияния случайных факторов на динамику основных экономических переменных посвящено незначительное число работ, выполненных в русле статистической обработки результатов прямого численного моделирования.

Математическая теория данной диссертации была применена к исследованию стохастических явлений в ряде моделей макроэкономики с дискретным и непрерывным временем. Результаты исследований были представлены в цикле работ автора диссертации, опубликованных в российских и зарубежных журналах [336–341].

Глава 6. Комплекс программ

Для решения задач диссертации по математическому моделированию, компьютерному анализу и управлению нелинейными стохастическими системами был разработан комплекс программ. Программные блоки этого комплекса реализуют разработанные специализированные проблемно-ориентированные численные методы и алгоритмы, позволяющие эффективно решать широкий круг вычислительных задач по исследованию разнообразных стохастических феноменов в математических моделях естественных наук, относящихся к объектам различной физической природы. Данный комплекс позволяет проводить наглядную визуализацию как окончательных, так и промежуточных результатов проводимых расчетов.

Разработанный комплекс решает следующие задачи.

1. Компьютерное моделирование динамики нелинейных детерминированных систем

Для моделирования фазовых траекторий систем с непрерывным временем использовался метод Рунге-Кутта четвертого порядка и метод Батчера шестого порядка. Для отыскания аттракторов в форме равновесий применялись методы решения систем трансцендентных уравнений и метод установления с заданной степенью точности. Для отыскания периодических решений систем в форме предельных циклов на плоскости, в трех- и четырехмерных пространствах использовался метод установления в подходящем сечении Пуанкаре. Результаты расчетов верифицировалось вариацией шага и степени точности. Для построения квазипериодических решений систем с дискретным временем использовалась δ-аппроксимация (п.1.3.4) замкнутой инвариантной кривой. Для отыскания хаотических аттракторов систем с дискретным временем использовался метод критических линий с последующим итерированием (п.1.4). При проведении бифуркационного анализа были реализованы алгоритмы поиска собственных чисел матриц Якоби с последующим анализом выполнения критериев устойчивости. Разработан алгоритм построения бассейнов притяжения и сепаратрис, их разделяющих.

2. Компьютерное моделирование динамики нелинейных стохастических систем

Для моделирования случайных величин в системах с непрерывным и дискретным временем использовались стандартные датчики псевдослучайных чисел, статистические характеристики которых были протестированы. Для построения приближенных решений стохастических дифференциальных уравнений Ито использовались методы Эйлера-Маруямы и стохастические модификации метода Рунге-Кутта. Для построенных решений проводился анализ статистических характеристик: среднего, дисперсии, плотности распределений. Для вероятностного анализа индуцированных шумом сложных мультимодальных осцилляций проводились расчеты средних, дисперсий и плотностей распределения межспайковых и межберстовых интервалов. Результаты расчетов верифицировалось вариацией шага и размера выборки.

3. Анализ стохастической чувствительности аттракторов и построение доверительных областей

Системы с дискретным временем. Для решения матричного уравнения (1.1.18), задающего матрицу стохастической чувствительности равновесия, реализован итерационный метод с заданной степенью точности. Для анализа стохастической чувствительности дискретных циклов построен алгоритм отыскания k-периодического решения матричного уравнения (1.2.26). Для δ-аппроксимации аттрактора в форме замкнутой инвариантной кривой разработан метод отыскания функции стохастической чувствительности, использующий в сингулярном разложении матрицы стохастической чувствительности скалярную функцию μ (1.3.20). Для анализа стохастической чувствительности одно- и многокусочных хаотических аттракторов построены алгоритмы расчета, использующие теоретические разработки пп.1.4.1, 1.4.2.

Системы с непрерывным временем. Для анализа стохастической чувствительности равновесий, в том числе и в системах с цветными шумами (п.2.1.3), реализован итерационный метод решения матричных уравнений с заданной степенью точности. Для анализа стохастической чувствительности циклов двумерных систем построен алгоритм расчета скалярной функции стохастической чувствительности (2.2.11). Для решения краевой задачи, определяющей стохастическую чувствительность циклов трехмерных систем, реализованы два метода: итерационный метод установления с использованием проектирования на гиперплоскость, ортогональную циклу, и численно-аналитический метод, сводящийся к решению системы из трех дифференциальных уравнений для периодических скалярных функций сингулярного разложения (2.2.15). Для расчета функции стохастической чувствительности циклов четырехмерных систем разработан итерационный матричный метод установления. Результаты расчетов верифицировалось вариацией шага и степени точности.

Построение доверительных областей. С помощью найденных собственных чисел и ортонормированных собственных векторов матрицы стохастической чувствительности равновесия реализована процедура построения доверительных эллипсов на плоскости и доверительных эллипсоидов (1.1.20) в трех- и четырехмерных пространствах. Построен алгоритм расчета границ доверительной полосы вокруг цикла двумерной непрерывной системы и замкнутой инвариантной кривой дискретной системы (1.3.21). Реализована процедура построения доверительного тора вокруг трехмерных циклов непрерывных систем, составленного из доверительных эллипсов в гиперплоскостях, ортогональных циклу. Разработана численная процедура для отыскания границ доверительных областей вокруг хаотических аттракторов двумерных систем с дискретным временем (1.4.23). Для снижения размерности решаемых пространственных задач был разработан и реализован метод главных направлений (п.5.4.4).

4. Компьютерное моделирование стохастических переходов

Для моделирования индуцированных шумом переходов между аттракторами и их отдельными частями были реализованы численные процедуры для анализа взаимного расположения доверительных областей и сепаратных поверхностей. При анализе явления стохастической возбудимости были построены алгоритмы приближенного вычисления границ допороговой и надпороговых зон на фазовой плоскости, алгоритм поиска псевдосепаратрисы между этими зонами и процедура анализа взаимного расположения доверительных областей и псевдосепаратрис.

5. Компьютерное моделирование систем с управлением и построение регуляторов

Системы с дискретным временем. Для задачи формирования требуемых стохастических режимов дискретных систем вблизи стабилизируемых равновесий были построены алгоритмы отыскания параметров синтезирующих регуляторов (4.1.11), (4.1.21). Были разработаны численные процедуры построения множеств достижимости (п.4.1.2). Был построен алгоритм расчета параметров статических регуляторов (4.1.55), (4.1.55), обеспечивающих анализ достижимости и синтез заданной стохастической чувствительности равновесия в системе с неполной информацией, когда доступные наблюдения содержат случайные возмущения. В двумерном случае была реализована процедура построения оптимального регулятора с критерием минимальности стохастической чувствительности. Для задачи синтеза заданной стохастической чувствительности дискретных циклов была реализована численная процедура построения регулятора в виде обратной связи по отклонению от цикла, обеспечивающего минимальные расходы на управление (п.4.1.4).

Системы с непрерывным временем. Для задачи синтеза заданной стохастической чувствительности равновесных режимов двумерных систем были построены регуляторы обратной связи и реализованы процедуры поиска оптимального регулятора (4.2.14), (4.2.16) с критерием минимальности затрат на управление. Был построен алгоритм расчета параметров статического регулятора, обеспечивающего заданную стохастическую чувствительность равновесия в системе с неполной информацией, когда доступные наблюдения содержат случайные возмущения (п.4.2.3). Была реализована процедура построения оптимального регулятора с критерием минимальности стохастической чувствительности (4.2.48). Также был построен алгоритм расчета матрицы динамического регулятора, составленного из обратной связи (4.2.62) и фильтра (4.2.63), позволяющего синтезировать заданную стохастическую чувствительность равновесия в случае неполной информации, когда доступные наблюдения содержат случайные возмущения. Для задачи синтеза заданной стохастической чувствительности циклов была реализована численная процедура построения регулятора в виде обратной связи по отклонению от цикла. Для двумерных систем разработан и реализован алгоритм регуляризации в случае, когда задача управления является некорректной (п.4.2.5). Для трехмерных систем (п.4.2.6) построен алгоритм управления, опирающийся на аппарат сингулярного разложения матрицы стохастической чувствительности и матрицы коэффициентов регулятора. Для всех рассмотренных случаев были реализованы процедуры компьютерного моделирования стохастической динамики систем с построенными регуляторами.

6. Комплекс программ по компьютерному моделированию, анализу и управлению в моделях естестознания

Созданный комплекс программ, реализующих разработанные в рамках диссертационного исследования оригинальные методы моделирования, анализа и управления стохастическими нелинейными динамическими системами, позволил решить ряд актуальных исследовательских задач в современных разделах естествознания (соответствует пунктам 3,4 паспорта специальности 05.13.18).

Комплекс программ по стохастическим эффектам **в модели течения сложной жидкости** (п.5.1 диссертации) решает следующие задачи: :

- Вычисление функции напряжения в слоях концентрированной суспензии между двумя плоскостями. Программа реализует дискретизацию (5.1.3) распределенной модели (5.1.1) по методу прямых и позволяет визуализировать частотные и амплитудные характеристики автоколебательных режимов;
- Вычисление функции напряжения в слоях жидкости в условиях случайных флуктуаций постоянного сдвигового напряжения на верхней плоскости (5.1.6);
- Вычисление стохастической чувствительности слоев жидкости. Программа реализует метод блочной декомпозиции системы алгебраических уравнений для матриц стохастической чувствительности (5.1.7);
- Параметрическое описание дисперсии напряжения в слоях методом прямого моделирование и методом стохастической чувствительности;
- Вычисление стохастической чувствительности равновесных и автоколебательных режимов для трехслойной дискретизации, локализация зоны сверхвысокой чувствительности в зоне канардовского взрыва;
- Анализ механизмов стохастической возбудимости с помощью техники доверительных эллипсов.

Комплекс программ по стохастическим эффектам **в модели проточного химического реактора** (п.5.2 диссертации) решает следующие задачи

- Построение бифуркационной диаграммы и аттракторов детерминированной модели (5.2.1) в зонах моно- и бистабильности;
- Параметрический анализ стохастической чувствительности аттракторов, построение доверительных областей. Анализ явления стохастической возбудимости равновесия с помощью техники доверительных эллипсов;

- Стабилизация равновесного режима с помощью регулятора обратной связи в случае полной информации;
- Параметрическое описание коэффициентов регулятора обратной связи и стабилизация равновесного режима в случае неполной информации.

Комплекс программ по стохастическим эффектам **в кинетике гликолиза** (п.5.3 диссертации) решает следующие задачи

- Бифуркационный анализ и построение аттракторов детерминированной модели (5.3.1);
- Параметрический анализ стохастической чувствительности равновесных режимов, исследование вероятностных механизмов стохастического расщепления методом доверительных областей;
- Параметрический анализ показателей Ляпунова и перехода к хаосу.

Комплекс программ по стохастическим эффектам **в нейронной динамике** (п.5.4 диссертации) решает ряд исследовательских задач в моделях с дискретным и непрерывным временем.
Для одномерной дискретной модели Рулькова:

- Параметрический анализ бифуркаций, показателей Ляпунова и аттракторов детерминированной модели (5.4.1);
- Параметрический анализ стохастической чувствительности равновесий и хаотических аттракторов, исследование стохастических переходов между ними с помощью метода доверительных областей;
- Параметрический анализ показателей Ляпунова и перехода к хаосу. Построение границ зон порядка и хаоса в плоскости параметра системы и интенсивности шума.

Для двумерной дискретной модели Рулькова:

- Параметрический анализ аттракторов модели (5.4.2) вблизи бифуркации Неймарка-Сакера, описание амплитудных и частотных характеристик квазипериодических решений, формирующих замкнутые инвариантные кривые;
- Параметрический анализ стохастической чувствительности равновесных и квазипериодических осцилляторных режимов нейронной активности, исследование стохастической возбудимости с помощью метода доверительных областей;

- Локализация зоны ЗИКов-канардов, имеющих сверхвысокую стохастическую чувствительность. Анализ явления стохастического расщепления и перехода от порядка к хаосу.

Для модели Фитцхью-Нагумо нейронной активности (5.4.3):

- Параметрический анализ стохастических переходов от покоя в режим спайкинга;
- Сравнительный анализ стохастической чувствительности модели к воздействию белых и цветных шумов. Параметрическое описание резонансных явлений, связанных с изменение времени корреляции цветного шума.

Для модели Юлихера волоскового пучка (5.4.4), осуществляющего механоэлектрические преобразования звуковых сигналов:

- Анализ стохастической генерации мультимодальных берстовых осцилляций в зонах моно- и бистабильности;
- Параметрическое исследование индуцированных шумом переходов методом доверительных эллипсов и полос.

Для электрофизиологической четырехмерной модели Ходжкина-Хаксли (п.5.4.4):

- Статистическое исследование вариативности осцилляторной активности в зонах моно- и бистабильности;
- Параметрический анализ стохастической чувствительности четырехмерных аттракторов;
- Геометрический анализ осцилляторной активности с использованием метрики Махаланобиса и метода главных направлений.

Комплекс программ по стохастическим эффектам **в популяционной динамике** (п.5.5 диссертации) решает ряд исследовательских задач в моделях с дискретным и непрерывным временем.
Для дискретной модели Рикера с Олли эффектом и демографическим шумом (5.5.1):

- Параметрический анализ индуцированного шумом вымирания и сокращения зоны выживания популяции с использованием аппарата стохастической чувствительности регулярных и хаотических аттракторов;

- Построение оптимального регулятора, обеспечивающего структурную стабилизацию популяции.

Для непрерывной модели «хищник–жертва» с Олли эффектом и трофической функцией Холлинга II типа (5.5.3):

- Параметрический анализ локальных и глобальных бифуркаций, определяющих режимы динамики популяции;
- Геометрический анализ вызванного шумом вымирания методом доверительных областей;
- Построение регулятора, стабилизирующего популяцию с помощью техники управления доверительными областями.

Для модели Траскотт-Бриндли (5.5.5), описывающей динамику сосуществующих популяций фито- и зоопланктона со случайными флуктуациями емкости экологической ниши:

- Параметрический анализ стохастических P- и D-бифуркаций, отражающих изменение осцилляторного поведения системы в условиях случайных возмущений;
- Вероятностный анализ стохастической генерации фантомных аттракторов, объясняющих резкое снижение численности зоопланктона при увеличении интенсивности флуктуаций.

Комплекс программ по стохастическим эффектам **в климатической и вулканической динамике** (п.5.6 диссертации) решает ряд исследовательских задач.

Для трехмерной модели Зальцмана (5.6.1), описывающей климатические изменения, вызванные нелинейными связями массы льда, температуры в глубине океана и концентрации углекислого газа:

- Параметрический анализ детерминированного поведения в зоне седлоузловой бифуркации на инвариантной кривой;
- Вероятностный анализ стохастической генерации большеамплитудных климатических осцилляций с помощью метода доверительных эллипсоидов и техники главных направлений;
- Анализ вызванной шумом структурной стабилизации осцилляторной динамики.

Для трехмерной модели Айверсона (5.6.2), описывающей динамику вулканической пробки в условиях нелинейного трения и случайных возмущений:

- Параметрическое описание зон моно- и бистабильности, представляющих равновесные и осцилляторные режимы;
- Вероятностный анализ стохастической генерации осцилляций вулканической пробки с помощью метода доверительных областей и техники стохастической чувствительности.

Исходные программы, реализующие базовые вычислительные алгоритмы методов математического моделирования, анализа и управления, разработанные в диссертации, написаны на языке Pascal. Для визуализации результатов расчетов использовались средства Matlab.

По этому комплексу получено одиннадцать свидетельств о государственной регистрации [237–247].

Заключение

Итоги выполненного исследования

В диссертационной работе реализован общий подход и разработаны методы математического моделирования, анализа и управления сложными стохастическими режимами нелинейных динамических систем в зонах порядка и хаоса. Это позволило в рамках единой теории решить актуальные исследовательские задачи, относящиеся к различным разделам естествознания. В заключении перечислим основные результаты диссертационной работы.

1. Разработаны методы асимптотической аппроксимации вероятностных распределений вблизи ряда аттракторов дискретных динамических систем с шумами, зависящими от состояния. Получены спектральные критерии существования устойчивых стационарных вторых моментов стохастических линейных расширений нелинейных дискретных систем с параметрическими шумами в случае равновесий и циклов.

2. Для случая двумерных дискретных систем, когда аттрактором является замкнутая инвариантная кривая, разработана техника функции стохастической чувствительности и построены конструктивные алгоритмы ее расчета.

3. Для случая одномерных дискретных систем с хаотическим одно- и многокусочным аттрактором развита теория стохастической чувствительности и построены конструктивные алгоритмы анализа разброса случайных состояний вблизи границ таких аттракторов.

4. Для случая двумерных дискретных систем построена теория стохастической чувствительности хаотических аттрактора и построен конструктивный алгоритм анализа разброса случайных состояний вблизи его границ.

5. Развита теория стохастической чувствительности равновесий непрерывных систем с цветными шумами. С помощью метода блочной декомпозиции получены общие конструктивные методы расчета стохастической чувствительности, исследована ее зависимость от времен корреляции цветных шумов.

6. Для циклов неавтономных непрерывных систем с периодическими возмущениями развита теория стохастической чувствительности и получено параметрическое описание дисперсии случайных состояний вокруг невозмущенного

цикла.

7. Построена техника математического моделирования распределений случайных состояний вокруг аттракторов систем с дискретным и непрерывным временем в форме доверительных областей. Получены конструктивные алгоритмы построения таких областей вокруг регулярных и хаотических аттракторов с привлечением техники функций стохастической чувствительности, метрики Махаланобиса и метода главных направлений.

8. На основе разработанной теории создана общая методика и создан комплекс алгоритмов и программ для исследования широкого круга индуцированных шумом явлений в стохастических системах с дискретным и непрерывным временем. Здесь детально изучены стохастические переходы между сосуществующими аттракторами и их частями, обратные стохастические бифуркации, явление стохастической генерации новых режимов вблизи локальных и глобальных бифуркаций, явление стохастической возбудимости и генерации мультимодальных колебаний в моностабильных системах, бифуркация стохастического расщепления предельных циклов, индуцированная шумом генерация и подавление хаоса, а также новое явление стохастической генерации фантомного аттрактора.

9. Решены новые задачи управления равновесными и осцилляционными режимами динамических систем, в том числе и при неполной информации. Здесь в основу легла идея синтеза наперед заданной стохастической чувствительности аттрактора, конструктивные методы расчета которой разработаны в первых двух главах диссертации. В задаче синтеза стохастической чувствительности проведено исследование вопросов управляемости и достижимости в зависимости от геометрии управляющих воздействий. Для задачи управления стохастическим циклом выявлены случаи некорректности и предложены конструктивные методы регуляризации. Разработана новая техника управления доверительными областями, успешно примененная к решению задачи структурной стабилизации и подавления хаоса.

10. Разработанные методы математического моделирования, анализа и управления применены к конструктивному исследованию ряда актуальных задач современного естествознания, связанных с анализом индуцированных шумом осцилляций в течении сложной жидкости, исследованием стохастической возбудимости и стабилизацией работы проточного химического реактора, анализом стохастической генерации осцилляций в гликолизе, исследованием вероятностных механизмов стохастической возбудимости в непрерывных и дискретных нейронных моделях, анализом вызванных шумами экологических

сдвигов и способов их предотвращения в дискретных и непрерывных моделях популяционной динамики, исследованием вероятностных механизмов нелинейных стохастических явлений в геофизике.

11. Специализированные численные методы и алгоритмы по решению задач диссертации реализованы в виде комплекса программ. Его эффективность продемонстрирована в решении задач анализа стохастических явлений в сложных системах разной физической природы.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы

Полученные в диссертационной работе результаты открывают возможности изучения и конструктивного анализа сложных динамических процессов и явлений в нелинейных стохастических моделях из различных областей естествознания. Теоретические результаты диссертации создали основу для дальнейшего развития техники функций стохастической чувствительности и распространения ее на более сложные математические модели, такие как распределенные динамические системы, где особенно актуальным является исследование воздействия случайных возмущений на пространственно неоднородные аттракторы – паттерны. Открытыми остаются и вопросы анализа стохастической чувствительности аттракторов в системах с другими типами шумов, например негауссовскими. Системы с аномальной диффузией обнаружены в различных областях естествознания, поэтому важной является разработка адекватных математических методов их анализа. Дополнительный спектр задач открывается и в направлении развития методов управления сложными регулярными и хаотическими режимами нелинейных динамических систем.

Список литературы

1. Бернштейн, С.Н. Принципы теории стохастических дифференциальных уравнений / С.Н. Бернштейн // Тр.физ.-мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1934. — V. 5. — P. 95–124.

2. Гихман, И.И. Об одной схеме образования случайных процессов / И.И. Гихман // Докл. АН СССР. — 1947. — V. 58, N. 6. — P. 961–964.

3. Ito, K. On stochastic differential equations / K. Ito // Memoirs Amer. Math. Soc. — 1951. — V. 4. — P. 1–51.

4. Стратонович, Р.Л. Новая форма записи стохастических интегралов и уравнений / Р.Л. Стратонович // Вестник МГУ. — 1964. — V. 1, N. 1. — P. 3–12.

5. Gardiner, C. W. Handbook of Stochastic Methods / C. W. Gardiner. — New York : Springer, 1996.

6. Ватанабэ, С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. — М. : Наука, 1986.

7. Metzler, R. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // Physics Reports. — 2000. — V. 339. — P. 1–77.

8. Dubkov, A. A. Lévy flight superdiffusion: an introduction / A. A. Dubkov, B. Spagnolo, V. V. Uchaikin // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2008. — V. 18, N. 9. — P. 2649–2672.

9. Красовский, Н. Н. Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами / Н. Н. Красовский, Э. А. Лидский // Автоматика и телемеханика. — 1961. — V. 22, N. 9. — P. 1145–1150.

10. Красовский, Н. Н. О стабилизации систем, в которых помеха зависит от величины управляющего воздействия / Н. Н. Красовский // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. — 1965. — N. 2. — P. 102–107.

11. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. — М.: Наука, 1968.

12. Хасьминский, Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1969. — 370 P.

13. Кушнер, Г. Дж. Стохастическая устойчивость и управление / Г. Дж. Кушнер. — М.: Мир, 1969. — 200 P.

14. Пакшин, П.В. Дискретные системы со случайными параметрами и структурой / П.В. Пакшин. — Москва : Наука, 1994.

15. Куржанский, А. Б. Об аналитическом конструировании регулятора в системе с помехой зависящей от управления / А. Б. Куржанский // Дифференциальные уравнения. — 1965. — V. 1, N. 2. — P. 204–213.

16. Аоки, М. Оптимизация стохастических систем / М. Аоки. — М: Мир, 1971. — 424 P.

17. Wonham, W. M. Random Differential Equations in Control Theory / W. M. Wonham. — New York : Academic Press, 1970.

18. Willems, J.L. Mean square stability criteria for linear white noise stochastic systems / J.L. Willems // Probl. Control Inf. Theory. — 1973. — V. 2. — P. 199–217.

19. Острем, К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления / К. Ю. Острем. — М.: Мир, 1973. — 324 P.

20. Черноусько, Ф.Л. Оптимальное управление при случайных возмущениях / Ф.Л. Черноусько, В.Б. Колмановский. — М. :Наука, 1978. — 351 P.

21. Ананьев, Б. И. Оптимизация оценивания статистически неопределенной системы / Б. И. Ананьев // Автоматика и телемеханика. — 2018. — N. 1. — P. 18–32.

22. Понтрягин, Л. С. О статистическом рассмотрении динамических систем / Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов, А. А. Витт // ЖЭТФ. — 1933. — Т. 3, N. 3. — С. 165–180.

23. Стратонович, Р. Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике / Р. Л. Стратонович. — М. : Сов. радио, 1961. — 600 с.

24. Рытов, С. М. Введение в статистическую радиофизику / С. М. Рытов. — М. : Наука, 1966. — 404 с.

25. Болотин, В. В. Случайные колебания упругих систем / В. В. Болотин. — М. : Наука, 1979. — 335 с.

26. Диментберг, М.Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний / М.Ф. Диментберг. — М.: Наука, 1980.

27. Ibrahim, R.A. Parametric Random Vibration / R.A. Ibrahim. — New York : John Wiley and Sons, 1985.

28. Неймарк, Ю. И. Стохастические и хаотические колебания / Ю. И. Неймарк, П. С. Ланда. — М. : Мир, 1987. — 424 с.

29. Soong, T. T. Random vibration of mechanical and structural systems / T. T. Soong, M. Grigoriu. — New Jersey : Prentice Hall, 1992. — 352 P.

30. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова et al. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 535 P.

31. Duan, J. An Introduction to Stochastic Dynamics / J. Duan. — Cambridge University Press, 2015. — 312 P.

32. Pikovsky, A. Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. — Cambridge : Cambridge University Press, 2001. — 411 P.

33. Horsthemke, W. Noise-Induced Transitions / W. Horsthemke, R. Lefever. — Berlin : Springer, 1984. — 338 P.

34. Makarov, V. A. Spiking Behavior in a Noise-Driven System Combining Oscillatory and Excitatory Properties / V. A. Makarov, V. I. Nekorkin, M. G. Velarde // Phys. Rev. Lett. — 2001. — V. 86. — P. 3431–3434.

35. Moskalenko, O. I. Effect of noise on generalized synchronization of chaos: theory and experiment / O. I. Moskalenko, A. E. Hramov, A. A. Koronovskii // European Physical Journal B. — 2011. — V. 82. — P. 69–82.

36. Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks / S. Boccaletti, A. N. Pisarchik, C. I. del Genio, A. Amann. — Cambridge : Cambridge University Press, 2018.

37. Schwartz, I. B. Asymmetric noise-induced large fluctuations in coupled systems / I. B. Schwartz, K. Szwaykowska, T. W. Carr // Phys. Rev. E. — 2017. — V. 96. — P. 042151.

38. Forgoston, E. A Primer on Noise-Induced Transitions in Applied Dynamical Systems / E. Forgoston, R. O. Moore // SIAM Rev. — 2019. — V. 60, N. 4. — P. 969–1009.

39. Lévy noise induced transitions and enhanced stability in a birhythmic van der Pol system / R. Yamapi, R. Mbakob Yonkeu, G. Filatrella, J. Kurths // Eur. Phys. J. B. — 2019. — V. 92. — P. 152.

40. Predicting noise-induced critical transitions in bistable systems / J. Ma, Y. Xu, Y. Li et al. // Chaos. — 2019. — V. 29, N. 8. — P. 081102.

41. Arnold, L. Random Dynamical Systems / L. Arnold. — Berlin : Springer-Verlag, 1998. — 600 P.

42. Analysing dynamical behavior of cellular networks via stochastic bifurcations / A. Zakharova, J. Kurths, T. Vadivasova, A. Koseska // PLoS ONE. — 2011. — V. 6, N. 5. — P. e19696.

43. Stochastic bifurcation for a tumor–immune system with symmetric Lévy noise / Y. Xu, J. Feng, J.J. Li, H. Zhang // Physica A. — 2013. — V. 392, N. 20. — P. 4739–4748.

44. Bagnoli, F. Stochastic bifurcations in the nonlinear parallel Ising model / F. Bagnoli, R. Rechtman // Phys. Rev. E. — 2016. — V. 94. — P. 052111.

45. Herbert, C. Predictability of escape for a stochastic saddle-node bifurcation: When rare events are typical / C. Herbert, F. Bouchet // Phys. Rev. E. — 2017. — V. 96. — P. 030201.

46. Mendler, M. Analysis of stochastic bifurcations with phase portraits / M. Mendler, J. Falk, B. Drossel // PLoS ONE. — 2018. — V. 13. — P. e0196126.

47. Pikovsky, A. S. Coherence resonance in a noise-driven excitable system / A. S. Pikovsky, J. Kurths // Phys. Rev. Lett. — 1997. — V. 78, N. 5. — P. 775–778.

48. Lindner, B. Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance / B. Lindner, L. Schimansky-Geier // Phys. Rev. E. — 1999. — V. 60, N. 6. — P. 7270–7276.

49. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка / В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер // Успехи физических наук. — 1999. — V. 169. — P. 7–38.

50. Stochastic Resonance: From Suprathreshold Stochastic Resonance to Stochastic Signal Quantization / M. D. McDonnell, N. G. Stocks, C. E. M. Pearce, D. Abbott. — Cambridge University Press, 2008. — 446 P.

51. Anishchenko, V. S. Diagnostics of stochastic resonance using Poincaré recurrence time distribution / V. S. Anishchenko, Y. I. Boev // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2013. — V. 18, N. 4. — P. 953 – 958.

52. Gammaitoni, L. The long run of the stochastic resonance idea / L. Gammaitoni // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2016. — V. 49, N. 45. — P. 451005.

53. Nicolis, C. Stochastic resonance across bifurcation cascades / C. Nicolis, G. Nicolis // Phys. Rev. E. — 2017. — V. 95. — P. 032219.

54. Dubkov, A. Influence of harmonic perturbation on speed of billiard particle as combination of deterministic acceleration and white noise / A. Dubkov, A. A. Krasnova, O. Chichigina // Fluctuation and Noise Letters. — 2019. — V. 18. — P. 1940012.

55. Ren, R. Noise and periodic signal induced stochastic resonance in a Langevin equation with random mass and frequency / R. Ren, K. Deng // Physica A. — 2019. — V. 523. — P. 145 – 155.

56. Gao, J. B. When can noise induce chaos? / J. B. Gao, S. K. Hwang, J. M. Liu // Phys. Rev. Lett. — 1999. — V. 82, N. 6. — P. 1132–1135.

57. Yoshimoto, M. Noise-induced order in the chaos of the Belousov–Zhabotinsky reaction / M. Yoshimoto, H. Shirahama, S. Kurosawa // The Journal of Chemical Physics. — 2008. — V. 129, N. 1. — P. 014508.

58. Lai, Y.-C. Transient Chaos. Complex Dynamics on Finite Time Scales / Y.-C. Lai, T. Tel. — New York : Springer-Verlag, 2011. — 502 P.

59. Virte, M. Noise induced stabilization of chaotic free-running laser diode / M. Virte // Chaos. — 2016. — V. 26, N. 5. — P. 053108.

60. Faber, J. Noise-induced chaos and signal detection by the nonisochronous Hopf oscillator / J. Faber, D. Bozovic // Chaos. — 2019. — V. 29, N. 4. — P. 043132.

61. Effects of noise in excitable systems / B. Lindner, J. Garcia-Ojalvo, A. Neiman, L. Schimansky-Geier // Physics Reports. — 2004. — V. 392. — P. 321–424.

62. Rüdiger, S. Excitability in a stochastic differential equation model for calcium puffs / S. Rüdiger // Phys. Rev. E. — 2014. — V. 89. — P. 062717.

63. Chen, Z. Non-differentiability of quasi-potential and non-smooth dynamics of optimal paths in the stochastic Morris-Lecar model: Type I and II excitability / Z. Chen, J. Zhu // Nonlinear dynamics. — 2019. — V. 96. — P. 2293–2305.

64. Lima Dias Pinto, I. Oscillations and collective excitability in a model of stochastic neurons under excitatory and inhibitory coupling / I. Lima Dias Pinto, M. Copelli // Phys. Rev. E. — 2019. — V. 100. — P. 062416.

65. Noise induced state transitions, intermittency, and universality in the noisy Kuramoto-Sivashinksy equation / M. Pradas, D. Tseluiko, S. Kalliadasis et al. // Phys. Rev. Lett. — 2011. — V. 106. — P. 060602.

66. Ruseckas, J. Intermittency in relation with 1/f noise and stochastic differential equations / J. Ruseckas, B. Kaulakys // Chaos. — 2013. — V. 23, N. 2. — P. 023102.

67. Apolinário, G. B. Onset of intermittency in stochastic Burgers hydrodynamics / G. B. Apolinário, L. Moriconi, R. M. Pereira // Phys. Rev. E. — 2019. — V. 99. — P. 033104.

68. Muratov, C. B. Noise-induced mixed-mode oscillations in a relaxation oscillator near the onset of a limit cycle / C. B. Muratov, E. Vanden-Eijnden // Chaos. — 2008. — V. 18, N. 1. — P. 015111.

69. Plesa, T. Noise-induced mixing and multimodality in reaction networks / T. Plesa, R. Erban, H.G. Othmer // European Journal of Applied Mathematics. — 2019. — V. 30, N. 5. — P. 887–911.

70. Anishchenko, V. S. Effect of noise-induced crisis of attractor on characteristics of Poincaré recurrence / V. S. Anishchenko, M. E. Khairulin // Technical Physics Letters. — 2011. — V. 37, N. 6. — P. 561–564.

71. Cisternas, J. Intermittent explosions of dissipative solitons and noise-induced crisis / J. Cisternas, O. Descalzi // Phys. Rev. E. — 2013. — V. 88. — P. 022903.

72. Bakas, N. A. Structural stability theory of two-dimensional fluid flow under stochastic forcing / N. A. Bakas, P. J. Ioannou // Journal of Fluid Mechanics. — 2011. — V. 682. — P. 332–361.

73. Cadot, O. Stochastic fluid structure interaction of three-dimensional plates facing a uniform flow / O. Cadot // Journal of Fluid Mechanics. — 2016. — V. 794. — P. R1.

74. Cipriano, F. A large deviations principle for stochastic flows of viscous fluids / F. Cipriano, T. Costa // Journal of Differential Equations. — 2018. — V. 264, N. 8. — P. 5070 – 5108.

75. Gonze, D. Stochastic modelling of nucleocytoplasmic oscillations of the transcription factor Msn2 in yeast / D. Gonze, M. Jacquet, A. Goldbeter // J. R. Soc. Interface. — 2008. — V. 5. — P. S95–S109.

76. Challenger, J. D. Synchronization of stochastic oscillators in biochemical systems / J. D. Challenger, A. J. McKane // Phys. Rev. E. — 2013. — V. 88. — P. 012107.

77. Modeling-based investigation of the effect of noise in cellular systems / D. Gonze, C. Gerard, B. Wacquier et al. // Front. Mol. Biosci. — 2018. — V. 5. — P. 1–12.

78. Nowakowski, B. Stochastic transitions between attractors in a tristable thermochemical system: competition between stable states / B. Nowakowski,

A. L. Kawczyński // Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis. — 2018. — V. 123, N. 1. — P. 189–199.

79. Catastrophic shifts in ecosystems / M. Scheffer, S. Carpenter, J.A. Foley et al. // Nature. — 2001. — V. 413. — P. 591–596.

80. Lande, R. Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation / R. Lande, S. Engen, B.E. Saether. — Oxford University Press, 2003.

81. Allen, L. J. S. An Introduction to the Stochastic Processes with Applications to Biology / L. J. S. Allen. — New Jersey : Pearson Education, 2003. — 385 P.

82. Dubkov, A.A. Verhulst model with Lévy white noise excitation / A.A. Dubkov, B. Spagnolo // European Physical Journal B. — 2008. — V. 65, N. 3. — P. 361–367.

83. Dubkov, A. A. Steady-state probability characteristics of Verhulst and Hongler models with multiplicative white Poisson noise / A. A. Dubkov, A. A. Kharcheva // European Physical Journal B. — 2019. — V. 92, N. 10. — P. 222.

84. Roth, G. Pushed beyond the brink: Allee effects, environmental stochasticity, and extinction / G. Roth, S. J. Schreiber // Journal of Biological Dynamics. — 2014. — V. 8. — P. 187–205.

85. Allee effects and resilience in stochastic populations / B. Dennis, L. Assas, S. Elaydi et al. // Theoretical Ecology. — 2016. — V. 9, N. 3. — P. 323–335.

86. Sadhu, S. Stochastic mixed-mode oscillations in a three-species predator-prey model / S. Sadhu, C. Kuehn // Chaos. — 2018. — V. 28, N. 3. — P. 033606.

87. Longtin, A. Autonomous stochastic resonance in bursting neurons / A. Longtin // Phys. Rev. E. — 1997. — V. 55, N. 1. — P. 868–876.

88. Osipov, V. V. Multivalued stochastic resonance in a model of an excitable neuron / V. V. Osipov, E. V. Ponizovskaya // Phys. Lett. A. — 2000. — V. 271, N. 3. — P. 191–197.

89. Baltanas, J. Noise-induced resonances in the Hindmarsh-Rose neuronal model / J. Baltanas, J. Casado // Phys. Rev. E. — 2002. — V. 65. — P. 041915.

90. Laing, C. Stochastic Methods in Neuroscience / C. Laing, G. J. Lord. — Oxford University Press, 2009. — 396 P.

91. Berglund, N. Mixed-mode oscillations and interspike interval statistics in the stochastic FitzHugh–Nagumo model / N. Berglund, D. Landon // Nonlinearity. — 2012. — V. 25, N. 8. — P. 2303.

92. Newby, J. M. Spontaneous excitability in the Morris-Lecar model with ion channel noise / J. M. Newby // SIAM J. Appl. Dyn. Syst. — 2014. — V. 13, N. 4. — P. 1756–1791.

93. Nicolis, C. Long-term climatic transitions and stochastic resonance / C. Nicolis // J. Stat. Phys. — 1993. — V. 70. — P. 3–14.

94. Saltzman, B. Structural stochastic stability of a simple auto-oscillatory climatic feedback system / B. Saltzman, A. Sutera, A. Evenson // J. Atm. Sci. — 1981. — V. 38. — P. 494–503.

95. Saltzman, B. Carbon dioxide and the $\delta^1 8$O record of late-Quaternary climatic change: a global model / B. Saltzman // Climate Dynamics. — 1987. — V. 1. — P. 77–85.

96. Dynamics of seismogenic volcanic extrusion at Mount St Helens in 2004?05 / R. M. Iverson, D. Dzurisin, C. A. Gardner et al. // Nature. — 2006. — V. 444. — P. 439–443.

97. Ditlevsen, P.D. On the stochastic nature of the rapid climate shifts during the last ice age / P.D. Ditlevsen, O.D. Ditlevsen // J. Climate. — 2009. — V. 22. — P. 446–457.

98. Kloeden, P. E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations / P. E. Kloeden, E. Platen. — Berlin : Springer-Verlag, 1999. — 636 P.

99. Milstein, G. N. Stochastic Numerics for Mathematical Physics / G. N. Milstein, M. V. Tretyakov. — Berlin : Springer-Verlag, 2004. — 596 P.

100. Landa, P. S. Changes in the dynamical behavior of nonlinear systems induced by noise / P. S. Landa, McClintock P. V. E. // Phys. Rep. — 2000. — V. 323. — P. 1–80.

101. Berglund, N. Noise-Induced Phenomena in Slow-Fast Dynamical Systems: A Sample-Paths Approach / N. Berglund, B. Gentz. — London : Springer-Verlag, 2005. — 290 P.

102. Chen, G. Slow foliation of a slow–fast stochastic evolutionary system / G. Chen, J. Duan, J. Zhang // Journal of Functional Analysis. — 2014. — V. 267, N. 8. — P. 2663 – 2697.

103. Slow manifold for a nonlocal stochastic evolutionary system with fast and slow components / L. Bai, X. Cheng, J. Duan, M. Yang // Journal of Differential Equations. — 2017. — V. 263, N. 8. — P. 4870 – 4893.

104. Вентцель, А. Д. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений / А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин. — М. : Наука, 1979. — 424 с.

105. Graham, R. Nonequilibrium potential for coexisting attractors / R. Graham, T. Tél // Phys. Rev. A. — 1986. — V. 33. — P. 1322–1337.

106. Graham, R. Nonequilibrium potentials for dynamical systems with fractal attractors or repellers / R. Graham, A. Hamm, T. Tél // Phys. Rev. Lett. — 1991. — V. 66. — P. 3089–3092.

107. Dembo, M. Large Deviations Techniques and Applications / M. Dembo, O. Zeitouni. — Boston : Jones and Bartlett Publishers, 1995. — 396 P.

108. Day, M. V. Exit cycling for the Van der Pol oscillator and quasipotential calculations / M. V. Day // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 1996. — V. 8, N. 4. — P. 573–601.

109. Day, M. V. Mathematical Approaches to the Problem of Noise–Induced Exit / M. V. Day // Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications: A Volume in Honor of W.H. Fleming. — Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1999. — P. 269–287.

110. A direct approach to the exit problem / T. Naeh, M. M. Klosek, B. J. Matkowsky, Z. Schuss // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1990. — V. 50, N. 2. — P. 595–627.

111. Мильштейн, Г. Н. Первое приближение квазипотенциала в задачах об устойчивости систем со случайными невырожденными возмущениями / Г. Н. Мильштейн, Л. Б. Ряшко // Прикл. математика и механика. — 1995. — Т. 59, N. 1. — С. 53–63.

112. Bashkirtseva, I.A. Sensitivity analysis of the stochastically and periodically forced Brusselator / I.A. Bashkirtseva, L.B. Ryashko // Physica A. — 2000. — V. 278, N. 1-2. — P. 126–139.

113. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity of 3D-cycles / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Mathematics and Computers in Simulation. — 2004. — V. 66. — P. 55–67.

114. Bashkirtseva, I. Sensitivity and chaos control for the forced nonlinear oscillations / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Chaos, Solitons and Fractals. — 2005. — V. 26. — P. 1437–1451.

115. Bashkirtseva, I. Sensitivity analysis of stochastically forced quasiperiodic self-oscillations / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Electron. J. Differential Equations. — 2016. — V. 2016, N. 240. — P. 1–12.

116. Ряшко, Л. Б. Стохастические аттракторы нелинейных динамических систем / Л. Б. Ряшко, И. А. Башкирцева. — Екатеринбург. Изд-во Уральского университета, 2010. — 251 с.

117. Hänggi, P. Colored noise in dynamical systems / P. Hänggi, P. Jung // Advances in Chemical Physics. — 1995. — V. 89. — P. 239–326.

118. Анищенко, В.С. Динамический хаос и цветной шум / В.С. Анищенко, А.Б. Нейман // Письма в ЖТФ. — 1990. — V. 16. — P. 21–25.

119. Short, R. Correlation functions of a dye laser: comparison between theory and experiment / R. Short, L. Mandel, R. Roy // Phys. Rev. Lett. — 1982. — V. 49. — P. 647–650.

120. Noise-induced order / S. Marano, B. Edwards, G. Ferrari, D. Faeh // Bulletin of the Seismological Society of America. — 2017. — V. 107. — P. 276–291.

121. Sarkar, P. The linear response of a glycolytic oscillator, driven by a multiplicative colored noise / P. Sarkar // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2016. — V. 2016. — P. 123202.

122. Spanio, T. Impact of environmental colored noise in single-species population dynamics / T. Spanio, J. Hidalgo, M. A. Muñoz // Phys. Rev. E. — 2017. — V. 96. — P. 042301.

123. A microbial growth kinetics model driven by hybrid stochastic colored noises in the water environment / H. H. Dong, L. He, H. W. Lu, J. Li // Stochastic Environmental Research and Risk Assessment. — 2017. — V. 31. — P. 2047.

124. Guo, Q. The properties of the anti-tumor model with coupling non-Gaussian noise and Gaussian colored noise / Q. Guo, Z. K. Sun, W. Xu // Physica A. — 2016. — V. 449. — P. 43–52.

125. Colored noise driven systems with inertia / L. H'walisz, P. Jung, P. Hänggi et al. // Z. Physik B. — 1989. — V. 77. — P. 471.

126. Thermal activation by power–limited coloured noise / P. Jung, A. Neiman, M. Afghan et al. // New Journal of Physics. — 2005. — V. 7. — P. 17.

127. Can colored noise improve stochastic resonance? / P. Hänggi, P. Jung, C. Zerbe, F. Moss // Journal of Statistical Physics. — 1993. — V. 70, N. 1. — P. 25–47.

128. Stochastic bifurcations in a bistable Duffing–Van der Pol oscillator with colored noise / Y. Xu, R. Gu, H. Zhang et al. // Phys. Rev. E. — 2011. — V. 83. — P. 056215.

129. Lei, Y. M. Onset of colored-noise-induced chaos in the generalized Duffing system / Y. M. Lei, M. J. Hua, L. Du // Nonlinear Dynamics. — 2017. — V. 89. — P. 1371–1383.

130. Митропольский, Ю. А. Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами / Ю. А. Митропольский, А. М. Самойленко, Д. И. Мартынюк. — Киев: Наукова думка, 1984. — 216 с.

131. Blanchard, P. Differential Equations / P. Blanchard, R. L. Devaney, G. R. Hall. — Brooks/Cole : Cengage Learning, 2002.

132. Якубович, В. А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. — М. : Наука, 1972. — 720 P.

133. Jung, P. Periodically driven stochastic systems / P. Jung // Physics Reports. — 1993. — V. 234, N. 4. — P. 175 – 295.

134. Agudov, N. V. Noise-enhanced stability of periodically driven metastable states / N. V. Agudov, B. Spagnolo // Phys. Rev. E. — 2001. — V. 64. — P. 035102.

135. Lingala, N. Random perturbations of a periodically driven nonlinear oscillator: escape from a resonance zone / N. Lingala, N. S. Namachchivaya, I. Pavlyukevich // Nonlinearity. — 2017. — V. 30, N. 4. — P. 1376–1404.

136. Stochastic resonance / L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni // Rev. Mod. Phys. — 1998. — V. 70, N. 1. — P. 223–287.

137. Jung, P. Suppression of higher harmonics at noise induced resonances / P. Jung, P. Talkner // Phys. Rev. E. — 1995. — V. 51. — P. 2640–2643.

138. Large fluctuations in a periodically driven dynamical system / M. I. Dykman, V. N. Smelyanskiy, D. G. Luchinsky et al. // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 1998. — V. 08, N. 04. — P. 747–754.

139. Ginzburg, S. L. Noise-induced hypersensitivity to small time-dependent signals / S. L. Ginzburg, M. A. Pustovoit // Phys. Rev. Lett. — 1998. — V. 80. — P. 4840–4842.

140. Gitterman, M. Oscillator subject to periodic and random forces / M. Gitterman // J. Modern Phys. — 2013. — V. 4. — P. 94.

141. Chen, Z. Noise induced transitions and topological study of a periodically driven system / Z. Chen, X. Liu // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2017. — V. 48. — P. 454 – 461.

142. Effects of combined harmonic and random excitations on a Brusselator model / Y. Xu, J. Ma, H. Wang et al. // Eur. Phys. J. B. — 2017. — V. 90, N. 10. — P. 194.

143. Oberreiter, L. Subharmonic oscillations in stochastic systems under periodic driving / L. Oberreiter, U. Seifert, A. C. Barato // Phys. Rev. E. — 2019. — V. 100. — P. 012135.

144. Uda, K. Ergodicity and spike rate for stochastic FitzHugh-Nagumo neural model with periodic forcing / K. Uda // Chaos, Solitons & Fractals. — 2019. — V. 123. — P. 383 – 399.

145. Ibarz, B. Map-based models in neuronal dynamics / B. Ibarz, J.M. Casado, M.A.F. Sanjuán // Physics Reports. — 2011. — V. 501, N. 1. — P. 1 – 74.

146. Lasota, A. Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics / A. Lasota, M. C. Mackey. — Berlin : Springer, 1994.

147. Inoue, J. Numerical analysis of spectra of the Frobenius-Perron operator of a noisy one-dimensional mapping: toward a theory of stochastic bifurcations / J. Inoue, S. Doi, S. Kumagai // Physical Review E. — 2001. — V. 64. — P. 056219.

148. Башкирцева, И.А. Стохастическая чувствительность равновесий и циклов одномерных дискретных отображений / И.А. Башкирцева, Л.Б. Ряшко, И.Н. Цветков // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2009. — V. 17, N. 6. — P. 74–85.

149. Bashkirtseva, I. Sensitivity Analysis of Stochastic Equilibria and Cycles for the Discrete Dynamic Systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Mathematical Analysis. — 2010. — V. 17. — P. 501–515.

150. Kuznetsov, Y.A. Elements of Applied Bifurcation Theory / Y.A. Kuznetsov. — New York : Springer-Verlag, 1998.

151. Sacker, R. On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations / R. Sacker // Report IMM–New York University. — 1964. — V. 333.

152. Шустер, Г. Детерминированный хаос / Г. Шустер. — М. : Мир, 1988. — 240 P.

153. Devaney, R. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems / R. Devaney. — New Jork : Addison-Wesley, 1989. — 336 P.

154. Кузнецов, С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. — М.: Физматлит, 2006. — 356 P.

155. Mayer-Kress, G. The influence of noise on the logistic model / G. Mayer-Kress, H. Haken // Journal of Statistical Physics. — 1981. — V. 26, N. 1. — P. 149–171.

156. Crutchfield, J.P. Fluctuations and simple chaotic dynamics / J.P. Crutchfield, J.D. Farmer, B.A. Huberman // Physics Reports. — 1982. — V. 92, N. 2. — P. 45 – 82.

157. Intrinsic noise and two-dimensional maps: Quasicycles, quasiperiodicity, and chaos / C. Parra-Rojas, J. D. Challenger, D. Fanelli, A. J. McKane // Phys. Rev. E. — 2014. — V. 90. — P. 032135.

158. Зубов, В.И. Колебания в нелинейных и управляемых системах / В.И. Зубов. — Л.: Судпромгиз, 1962.

159. Акуленко, Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления / Л. Д. Акуленко. — М.: Наука, 1987. — 365 Р.

160. Леонов, Г. А. Введение в теорию управления / Г. А. Леонов. — СПб.: Изд-во СПБГу, 2004. — 218 Р.

161. Блехман, И.И. Управление мехатронными вибрационными установками / И.И. Блехман, А.Л. Фрадков. — СПб: Наука, 2001.

162. Фрадков, А.Л. Кибернетическая физика / А.Л. Фрадков. — СПб: Наука, 2003. — 208 Р.

163. Ott, E. Controlling chaos / E. Ott, C. Grebodi, J. A. Yorke // Phys. Rev. Lett. — 1990. — V. 64. — P. 1196–1199.

164. Shinbrot, T. Progress in the control of chaos / T. Shinbrot // Adv. Phys. — 1995. — V. 44. — P. 73–111.

165. Pyragas, K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback / K. Pyragas // Phys. Lett. A. — 1992. — V. 170. — P. 421 – 428.

166. Chen, G. Chaos Control: Theory and Applications / G. Chen, X. Yu. — New York : Springer-Verlag, 2003.

167. Андриевский, Б.Р. Управление хаосом: Методы и приложения. I. / Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. — 2003. — N. 5. — P. 3–45.

168. Андриевский, Б.Р. Управление хаосом: Методы и приложения. II. / Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков // Автоматика и телемеханика. — 2004. — N. 4. — P. 3–40.

169. Fradkov, A. L. Introduction to Control of Oscillations and Chaos / A. L. Fradkov, A. Yu. Pogromsky. — World Scientific, 1998. — 408 P.

170. Ковалева, А.С. Оптимальное управление колебаниями виброударных систем / А.С. Ковалева. — М.: Наука, 1990.

171. Мильштейн, Г. Н. Устойчивость и стабилизация орбит автономных систем при случайных возмущениях / Г. Н. Мильштейн, Л. Б. Ряшко // Прикл. математика и механика. — 1992. — V. 56, N. 6. — P. 951–958.

172. Control of noise-induced oscillations of a pendulum with a randomly vibrating suspension / P. S. Landa, A. A. Zaikin, M. G. Rosenblum, J. Kurths // Phys. Rev. E. — 1997. — V. 56. — P. 1465.

173. Balanov, A.G. Control of noise-induced oscillations by delayed feedback / A.G. Balanov, N.B. Janson, E. Schöll // Physica D. — 2004. — V. 199, N. 1. — P. 1 – 12.

174. Sun, J.Q. Stochastic Dynamics and Control / J.Q. Sun. — Amsterdam : Elsevier, 2006.

175. Pisarchik, A. N. Control of multistability / A. N. Pisarchik, U. Feudel // Physics Reports. — 2014. — V. 540, N. 4. — P. 167–218.

176. Guo, K. Stochastic sensitivity analysis of periodic attractors in non-autonomous nonlinear dynamical systems based on stroboscopic map / K. Guo, J. Jiang // Physics Letters A. — 2014. — V. 378, N. 34. — P. 2518 – 2523.

177. Guo, K. Semi-analytical expression of stochastic closed curve attractors in nonlinear dynamical systems under weak noise / K. Guo, J. Jiang, Y. Xu // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2016. — V. 38. — P. 91 – 101.

178. Guo, K. Approximation of stochastic quasi-periodic responses of limit cycles in non-equilibrium systems under periodic excitations and weak fluctuations / K. Guo, J. Jiang, Y. Xu // Entropy. — 2017. — V. 19. — P. 280.

179. Sun, Y. Stochastic sensitivity analysis of nonautonomous nonlinear systems subjected to Poisson white noise / Y. Sun, L. Hong, J. Jiang // Chaos, Solitons & Fractals. — 2017. — V. 104. — P. 508 – 515.

180. Danylenko, V. Stationary and periodic regimes in relaxing media with fluctuations / V. Danylenko, S. Skurativskyi // Eur. Phys. J. B. — 2014. — V. 87. — P. 218.

181. Skurativskyi, S.I. Dynamics of traveling waves in fluctuating nonlocal media / S.I. Skurativskyi, I.A. Skurativska // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2017. — V. 49. — P. 9 – 16.

182. Xu, C. Stochastic sensitivity analysis for a competitive turbidostat model with inhibitory nutrients / C. Xu, S. Yuan, T. Zhang // Int. J. Bifurcation and Chaos. — 2016. — V. 26. — P. 1650173.

183. Xu, C. Confidence domain in the stochastic competition chemostat model with feedback control / C. Xu, S. Yuan, T. Zhang // Appl. Math. J. Chinese Univ. — 2018. — V. 33. — P. 379–389.

184. Xu, C. Sensitivity analysis and feedback control of noise-induced extinction for competition chemostat model with mutualism / C. Xu, S. Yuan, T. Zhang // Physica A. — 2018. — V. 505. — P. 891 – 902.

185. Wu, D. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced transitions in a predator-prey model with environmental toxins / D. Wu, H. Wang, S. Yuan // Mathematical Biosciences and Engineering. — 2019. — V. 16. — P. 2141–2153.

186. Xu, C. Probabilistic mechanisms of the noise-induced oscillatory transitions in a Leslie type predator-prey model / C. Xu // Chaos, Solitons & Fractals. — 2020. — V. 137. — P. 109871.

187. Noise-induced transitions in a nonsmooth producer-grazer model with stoichiometric constraints / S. Yuan, D. Wu, G. Lan, H. Wang // Bull. Math. Biol. — 2020. — V. 82. — P. 55.

188. Bashkirtseva, I. Constructive analysis of noise-induced transitions for coexisting periodic attractors of Lorenz model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physical Review E. — 2009. — V. 79. — P. 041106.

189. Регулярные и стохастические колебания в модели реологического осциллятора / И.А. Башкирцева, А.Ю. Зубарев, Л.Ю. Искакова, Л.Б. Ряшко // Нелинейная динамика. — 2009. — V. 5, N. 4. — P. 603–620.

190. Башкирцева, И. А. Об управлении стохастической чувствительностью дискретных систем / И. А. Башкирцева, Л.Б. Ряшко // Автоматика и телемеханика. — 2010. — V. 9. — P. 103–119.

191. Ryashko, L. Analysis of excitability for the FitzHugh–Nagumo model via a stochastic sensitivity function technique / L. Ryashko, I. Bashkirtseva // Phys. Rev. E. — 2011. — V. 83, N. 6. — P. 061109.

192. Bashkirtseva, I. Sensitivity analysis of stochastic attractors and noise-induced transitions for population model with Allee effect / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Chaos. — 2011. — V. 21, N. 4. — P. 047514.

193. Bashkirtseva, I. Analysis of noise-induced transitions from regular to chaotic oscillations in the Chen system / I. Bashkirtseva, G. Chen, L. Ryashko // Chaos. — 2012. — V. 22. — P. 033104.

194. Bashkirtseva, I. Stabilization of stochastic cycles and chaos suppression for nonlinear discrete-time systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Nonlinear dynamics. — 2012. — V. 67. — P. 2505–2517.

195. Bashkirtseva, I. Stochastic equilibria control and chaos suppression for 3D systems via stochastic sensitivity synthesis / I. Bashkirtseva, G. Chen, L. Ryashko // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2012. — V. 17. — P. 3381–3389.

196. Об индуцированных шумами колебаниях в течении концентрированных суспензий / И.А. Башкирцева, А.Ю. Зубарев, Л.Ю. Искакова, Л.Б. Ряшко // Прикл. математика и механика. — 2012. — V. 76, N. 4. — P. 646–657.

197. Башкирцева, И.А. Анализ стохастически возмущенных равновесий и индуцированных шумом переходов в нелинейных дискретных системах / И.А. Башкирцева // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — V. 5, N. 4. — P. 559–571.

198. Bashkirtseva, I. Analysis of limit cycles response on parametrical noise in one-dimensional discrete-time systems / I. Bashkirtseva // Fluctuation and Noise Letters. — 2013. — V. 12, N. 3. — P. 1350009 (12 p.).

199. Bashkirtseva, I. Noise-induced chaos and backward stochastic bifurcations in the Lorenz model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, P. Stikhin // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2013. — V. 23, N. 5. — P. 1350092.

200. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced intermittency and transition to chaos in one-dimensional discrete-time systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physica A. — 2013. — V. 392, N. 2. — P. 295 – 306.

201. Bashkirtseva, I. Attainability analysis in the problem of stochastic equilibria synthesis for nonlinear discrete systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci. — 2013. — V. 23, N. 1. — P. 5–16.

202. Башкирцева, И. А. Об управлении стохастической чувствительностью колебательных систем / И. А. Башкирцева, Д. Р. Нурмухаметова, Ряшко Л. Б. // Автоматика и телемеханика. — 2013. — V. 6. — P. 42–56.

203. Bashkirtseva, I. Stabilizing stochastically-forced oscillation generators with hard excitement: a confidence-domain control approach / I. Bashkirtseva, G. Chen, L. Ryashko // European Physical Journal B. — 2013. — V. 86, N. 10. — P. 437.

204. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of the noise-induced excitability in a model of a hair bundle / I. Bashkirtseva, A. B. Neiman, L. Ryashko // Phys. Rev. E. — 2013. — V. 87. — P. 052711.

205. Bashkirtseva, I. Analysis of the noise-induced regimes in Ricker population model with Allee effect via confidence domains technique / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // BioMed Research International. — 2014. — V. 2014. — P. 346239.

206. Bashkirtseva, I. Mean-square analysis of stochastic cycles in nonlinear discrete-time systems with parametric noise / I. Bashkirtseva // Journal of Difference Equations and Applications. — 2014. — V. 20, N. 8. — P. 1178–1189.

207. Bashkirtseva, I. Stabilization of stochastic cycles and control of noise-induced chaos / I. Bashkirtseva // European Physical Journal B. — 2014. — V. 87, N. 4. — P. 79.

208. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity of the closed invariant curves for discrete-time systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physica A. — 2014. — V. 410. — P. 236—-243.

209. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of the attractors for the randomly forced Ricker model with delay / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physics Letters A. — 2014. — V. 378, N. 48. — P. 3600—3606.

210. Alexandrov, D. V. Stochastically driven transitions between climate attractors / D. V. Alexandrov, I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. — 2014. — V. 66, N. 1. — P. 23454.

211. Bashkirtseva, I. Approximating chaotic attractors by period-three cycles in discrete stochastic systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2015. — V. 25, N. 10. — P. 1550138 (7pp.).

212. Bashkirtseva, I. Stochastic phenomena in one-dimensional Rulkov model of neuronal dynamics / I. Bashkirtseva // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2015. — V. 2015. — P. 495417.

213. Bashkirtseva, I. Attainability analysis in the stochastic sensitivity control / I. Bashkirtseva // International Journal of Control. — 2015. — V. 88, N. 2. — P. 276–284.

214. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced suppression of firing and giant variability of spiking in a Hodgkin-Huxley neuron model / I. Bashkirtseva, A. B. Neiman, L. Ryashko // Phys. Rev. E. — 2015. — V. 91, N. 5. — P. 052920.

215. Ryashko, L. Stochastic sensitivity analysis and control for ecological model with the Allee effect / Ryashko, L., Bashkirtseva, I. // Math. Model. Nat. Phenom. — 2015. — V. 10, N. 2. — P. 130–140.

216. Alexandrov, D. V. How a small noise generates large-amplitude oscillations of volcanic plug and provides high seismicity / D. V. Alexandrov, I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko // Eur. Phys. J. B. — 2015. — V. 88, N. 4. — P. 106.

217. Bashkirtseva, I. How additive noise generates a phantom attractor in a model with cubic nonlinearity / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physics Letters A. — 2016. — V. 380, N. 41. — P. 3359 – 3365.

218. Bashkirtseva, I. A. Analysis of the stochastic excitement in a model of flow reactor / I. A. Bashkirtseva, P. M. Fominykh // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2016. — V. 9, N. 3. — P. 269–278.

219. Alexandrov, D. V. Stochastic variability and noise-induced generation of chaos in a climate feedback system including the carbon dioxide dynamics / D. V. Alexandrov, I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko // EPL. — 2016. — V. 115. — P. 40009.

220. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis: theory and numerical algorithms / I. Bashkirtseva // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. — 2017. — V. 192. — P. 012024.

221. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity of regular and multi-band chaotic attractors in discrete systems with parametric noise / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physics Letters A. — 2017. — V. 381, N. 37. — P. 3203–3210.

222. Bashkirtseva, I. Method of stochastic sensitivity synthesis in a stabilisation problem for nonlinear discrete systems with incomplete information / I. Bashkirtseva // International Journal of Control. — 2017. — V. 90, N. 8. — P. 1652–1663.

223. Bashkirtseva, I. Controlling the equilibria of nonlinear stochastic systems based on noisy data / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, G. Chen // Journal of the Franklin Institute. — 2017. — V. 354, N. 3. — P. 1658–1672.

224. Башкирцева, И. А. Анализ стохастической возбудимости в простой кинетической модели гликолиза / И. А. Башкирцева // Нелинейная динамика. — 2017. — V. 13. — P. 13–23.

225. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity and variability of glycolytic oscillations in the randomly forced Sel'kov model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Eur. Phys. J. B. — 2017. — V. 90. — P. 17.

226. Bashkirtseva, I. Analysis of noise-induced chaos-order transitions in Rulkov model near crisis bifurcations / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2017. — V. 27, N. 3. — P. 1730014 (9pp.).

227. Bashkirtseva, I. How environmental noise can contract and destroy a persistence zone in population models with Allee effect / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Theoretical Population Biology. — 2017. — V. 115. — P. 61–68.

228. Башкирцева, И. А. О влиянии цветного шума на равновесные режимы нелинейных динамических систем / И. А. Башкирцева // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — V. 28. — P. 133–142.

229. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity of systems driven by colored noise / I. Bashkirtseva // Physica A. — 2018. — V. 505. — P. 729–736.

230. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity of cycles in periodic dynamical systems / I. Bashkirtseva // Eur. Phys. J. B. — 2018. — V. 91. — P. 283.

231. Bashkirtseva, I. Controlling the stochastic sensitivity in thermochemical systems under incomplete information / I. Bashkirtseva // Kybernetika. — 2018. — V. 54. — P. 96–109.

232. Bashkirtseva, I. Noise-induced bursting and chaos in the two-dimensional Rulkov model / I. Bashkirtseva, V. Nasyrova, L. Ryashko // Chaos, Solitons and Fractals. — 2018. — V. 110. — P. 76–81.

233. Bashkirtseva, I. Analysis of noise effects in a map-based neuron model with Canard-type quasiperiodic oscillations / I. Bashkirtseva, V. Nasyrova, L. Ryashko // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2018. — V. 63. — P. 261–270.

234. Bashkirtseva, I. Generation of mixed-mode stochastic oscillations in a hair bundle model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Phys. Rev. E. — 2018. — V. 98, N. 4. — P. 042414.

235. Bashkirtseva, I. Noise-induced shifts in the population model with a weak Allee effect / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physica A. — 2018. — V. 491. — P. 28–36.

236. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of chaotic attractors in 2D non-invertible maps / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Chaos, Solitons and Fractals. — 2019. — V. 126. — P. 78–84.

237. Башкирцева, И. А. Программа для ЭВМ «Стохастическая чувствительность»(St Sens.pas) / И. А. Башкирцева // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013611497. — 22.01.2013.

238. Рязанова, Т. В. Программа для ЭВМ «Моделирование и анализ модели Гудвина со случайным возмущением » / Т. В. Рязанова, И. А. Башкирцева, Е. Д. Екатеринчук // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015615523. — 20.05.2015.

239. Башкирцева, И. А. Программа для ЭВМ «Стохастическая возбудимость модели Фитцхью–Нагумо» / И. А. Башкирцева, Е. С. Слепухина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015616550. — 15.06.2015.

240. Башкирцева, И. А. Программа для ЭВМ «Моделирование детерминированных и стохастических траекторий и аттракторов динамических систем »(Attractor-modeling) / И. А. Башкирцева, Г. Н. Кошелев // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015663379. — 16.12.2015.

241. Башкирцева, И. А. Программа для ЭВМ «Стохастический анализ равновесных режимов сосуществования двух и трех популяций »(Analysis EqReg PopSys) / И. А. Башкирцева, Т. В. Рязанова, Л. Б. Ряшко // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018616176. — 24.05.2018.

242. Башкирцева, И. А. Программа для ЭВМ «Индуцированное шумом вымирание в популяционной модели с тремя трофическими уровнями »(Noise Ind Persis PopSys) / И. А. Башкирцева, Т. В. Рязанова, Л. Б. Ряшко // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018616132. — 23.05.2018.

243. Башкирцева, И. А. Программа для ЭВМ «Анализ мультимодальных динамических режимов в двумерной модели Хиндмарш-Роуз со случайными возмущениями »(Analysis Multimod Stoch 2DHR) / И. А. Башкирцева, Е. С. Слепухина // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2018616082. — 22.05.2018.

244. Башкирцева, И. А. Программа для ЭВМ «Анализ стохастической динамики двумерной модели Голдбетера »(Analysis Stoch 2DGold) / И. А. Башкирцева, С. С. Зайцева // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2019661992. — 12.09.2019.

245. Башкирцева, И. А. Программа для ЭВМ «Стохастический анализ осцилляционных режимов трех взаимодействующих популяций»(Stoch Anal OscReg 3InP) / И. А. Башкирцева, Т. В. Перевалова, Ряшко Л. Б. // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020614964. — 29.04.2020.

246. Башкирцева, И. А. Программа для ЭВМ «Синтез стохастической чувствительности дискретных систем »(Synthesis Stoch Sens) / И. А. Башкирцева // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020615062. — 14.05.2020.

247. Башкирцева, И. А. Программа для ЭВМ «Управление стохастическими системами при неполной информации »(Stoch Control Incomplete) / И. А. Башкирцева // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2020616063. — 14.05.2020.

248. Константинов, В. М. Об устойчивости линейной разностной системы со случайными параметрами / В. М. Константинов, М. Б. Невельсон // Матем. заметки. — 1970. — V. 8, N. 6. — P. 753–760.

249. Kubrusly, C. Mean square stability conditions for discrete stochastic bilinear systems / C. Kubrusly // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1985. — V. 30. — P. 1082–1087.

250. Dragan, V. Mean square exponential stability for some stochastic linear discrete time systems / V. Dragan, T. Morozan // Eur. J. Control. — 2006. — V. 12(4). — P. 373–395.

251. Красносельский, М.А. Позитивные линейные системы / М.А. Красносельский, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев. — М.: Наука, 1985.

252. Крамер, Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. — М.: Мир, 1976.

253. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В.С. Королюк, Н.И. Портенко, А.В. Скороход, А.Ф. Турбин. — М.: Наука, 1985.

254. P. C. Mahalanobis. On the generalized distance in statistics / P. C. Mahalanobis // Proceedings of the National Institute of Science of India. — 1936. — V. 2. — P. 49–55.

255. Elaydi, S. N. An Introduction to Difference Equations / S. N. Elaydi. — Springer, 1999.

256. Morozan, T. Stability of stochastic discrete systems / T. Morozan // J. Math. Anal. Appl. — 1968. — V. 23. — P. 1–9.

257. Ryashko, L.B. Mean square stability analysis of some linear stochastic systems / L.B. Ryashko, H. Schurz // Dynamic Systems and Application. — 1996. — V. 6. — P. 165–190.

258. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — Москва : Наука, 1967. — 576 с.

259. Bashkirtseva, I. Attractors of randomly forced logistic model with delay: stochastic sensitivity and noise-induced transitions / I. Bashkirtseva, E. Ekaterinchuk, L. Ryashko // Journal of Difference Equations and Applications. — 2016. — V. 22. — P. 376–390.

260. Bashkirtseva, I. Analysis of noise-induced transitions in a generalized logistic model with delay near Neimark–Sacker bifurcation / I. Bashkirtseva, E. Ekaterinchuk, L. Ryashko // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2017. — V. 50. — P. 275102 (16pp).

261. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis and noise-induced chaos in 2D logistic-type model / I. Bashkirtseva, E. Ekaterinchuk, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2016. — V. 26, N. 04. — P. 1650053.

262. Chaotic Dynamics in Two-Dimensional Noninvertible Maps / C. Mira, L. Gardini, A. Barugola, J. C. Cathala. — Singapore : World Scientific, 1996.

263. Elhadj, Z. A minimal 2-D quadratic map with quasi-periodic route to chaos / Z. Elhadj, J. C. Sprott // Int. J. Bifurc. Chaos. — 2008. — V. 18. — P. 1567–1577.

264. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced order-chaos transitions in discrete-time systems with tangent and crisis bifurcations / I. Bashkirtseva, Ryashko // Physica A. — 2017. — V. 467. — P. 573–584.

265. Bashkirtseva, I. Crises, noise, and tipping in the Hassell population model / I. Bashkirtseva // Chaos. — 2018. — V. 28. — P. 033603.

266. Bashkirtseva, I. Combined impacts of the Allee effect, delay and stochasticity: Persistence analysis / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, B. Spagnolo // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2020. — V. 84. — P. 105148.

267. Гихман, И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — Киев: Наукова думка, 1968. — 354 с.

268. Оксендаль, Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М.: Мир, 2003. — 408 P.

269. Risken, H. The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications / H. Risken. — Berlin : Springer-Verlag, 1984. — 454 P.

270. Mao, X. Exponential Stability of Stochastic Differential Equations / X. Mao. — Marcel Dekker, 1994. — 307 P.

271. Левит, М. В. Алгебраический критерий стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа «белый шум» / М. В. Левит, В. А. Якубович // Прикладная математика и механика. — 1972. — V. 36, N. 1. — P. 142–148.

272. Ryashko, L. Exponential Mean Square Stability Analysis of Invariant Manifolds for Nonlinear SDE's / L. Ryashko, I. Bashkirtseva // Stochastic Differential Equations, Ed. N. Halidias, Series: Mathematics Research Developments. — Nova Science Publishers, 2011. — P. 67–95.

273. Hänggi, P. Colored Noise in Dynamical Systems / P. Hänggi, P. Jung // Advances in Chemical Physics. — John Wiley & Sons, Ltd, 2007. — P. 239–326.

274. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, Хайкин С. Э. — М.: Наука, 1981. — 568 P.

275. Ряшко, Л.Б. Об устойчивости стохастически возмущенных орбитальных движений / Л.Б. Ряшко // Прикладная математика и механика. — 1996. — V. 60, N. 4. — P. 582–594.

276. Confidence tori in the analysis of stochastic 3D-cycles / L. Ryashko, I. Bashkirtseva, A. Gubkin, P. Stikhin // Mathematics and Computers in Simulation. — 2009. — V. 80. — P. 256–269.

277. Bashkirtseva, I.A. Sensitivity analysis of stochastically forced Lorenz model cycles under period doubling bifurcations / I.A. Bashkirtseva, L.B. Ryashko // Dynamic Systems and Applications. — 2002. — V. 11, N. 2. — P. 293–310.

278. Bashkirtseva, I. Analysis of stochastic cycles in the Chen system / I. Bashkirtseva, G. Chen, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2010. — V. 20, N. 05. — P. 1439–1450.

279. Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow / E. N. Lorenz // J. Atmos. Sci. — 1963. — V. 12. — P. 130–141.

280. Rulkov, N. F. Regularization of synchronized chaotic bursts / N. F. Rulkov // Phys. Rev. Lett. — 2001. — V. 86. — P. 183–186.

281. Chen, G. Yet another chaotic attractor / G. Chen, T. Ueta // Int. J. Bifurcation and Chaos. — 1999. — V. 9. — P. 1465–1466.

282. FitzHugh, R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R. FitzHugh // Biophys. J. — 1961. — V. 1, N. 6. — P. 445–466.

283. Harlim, J. The cusp–Hopf bifurcation / J. Harlim, W.F. Langford // Int. J. Bifurc. Chaos. — 2007. — V. 17. — P. 2547–2570.

284. Alexandrov, D. V. Analysis of stochastic model for nonlinear volcanic dynamics / D. V. Alexandrov, I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko // Nonlin. Processes Geophys. — 2015. — V. 22. — P. 197–204.

285. Bashkirtseva, I. Stochastic bifurcations and noise-induced chaos in a dynamic prey–predator plankton system / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2014. — V. 24, N. 09. — P. 1450109.

286. Уонэм, У.М. Линейные многомерные системы управления / У.М. Уонэм. — М. : Наука, 1980. — 376 P.

287. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М. : Мир, 1989. — 656 P.

288. Ryashko, L.B. On control of stochastic sensitivity / L.B. Ryashko, I.A. Bashkirtseva // Autom. Remote Contr. — 2008. — V. 69. — P. 1171–11809.

289. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity and stabilization of operation mode for randomly forced semiconductor image converter / I. Bashkirtseva // Cybernetics and Physics. — 2016. — V. 5, N. 4. — P. 111–115.

290. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity synthesis in nonlinear systems with incomplete information / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, G. Chen // Journal of the Franklin Institute. — 2020. — V. 357, N. 9. — P. 5187 – 5198.

291. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М.: Наука, 1967. — 472 P.

292. Башкирцева, И.А. Анализ стохастических аттракторов при бифуркации точка покоя - цикл / И.А. Башкирцева, Т.В. Перевалова // Автоматика и телемеханика. — 2007. — V. 10. — P. 53–69.

293. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач | / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М. : Наука, 1979. — 288 P.

294. К реофизике высококонцентрированных суспензий / И.А. Башкирцева, А.Ю. Зубарев, Л.Ю. Искакова, Ряшко Л.Б. // Коллоидный журнал. — 2009. — V. 71, N. 4. — P. 444–453.

295. К теории осциллирующих течений в сложных жидкостях / И.А. Башкирцева, А.Ю. Зубарев, Л.Ю. Искакова, Л.Б. Ряшко // Коллоидный журнал. — 2010. — V. 72, N. 2. — P. 147–151.

296. Вольтер, Б. В. Устойчивость режимов работы химических реакторов / Б. В. Вольтер, И. Е. Сальников. — М. : Химия, 1981. — 198 с.

297. Быков, В. И. Нелинейные модели химической кинетики / В. И. Быков, С. Б. Цыбенова. — Красанд, 2011. — 400 с.

298. Sel'kov, E.E. Self-oscillations in glycolysis. 1. A simple kinetic model / E.E. Sel'kov // European J. Biochem. — 1968. — V. 4. — P. 79–86.

299. Strogatz, S. Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering / S. Strogatz. — Boulder : Westview Press, 1994. — 531 P.

300. Higgins, J. A chemical mechanism for oscillation of glycolytic intermediates in yeast cells / J. Higgins // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. — 1964. — V. 51, N. 6. — P. 989–994.

301. Bashkirtseva, I. Analysis of nonlinear stochastic oscillations in the biochemical Goldbeter model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, S. Zaitseva // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2019. — V. 73. — P. 165–176.

302. Bashkirtseva, I. Noise-induced variability of nonlinear dynamics in 3D model of enzyme kinetics / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, S. Zaitseva // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2020. — V. 90. — P. 105351.

303. Spontaneous oscillation by hair bundles of the bullfrog's sacculus / P. Martin, D. Bozovic, Y. Choe, A. J. Hudspeth // Journal of Neuroscience. — 2003. — V. 23, N. 11. — P. 4533–4548.

304. Nadrowski, B. Active hair-bundle motility harnesses noise to operate near an optimum of mechanosensitivity / B. Nadrowski, P. Martin, F. Jülicher // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. — 2004. — V. 101, N. 33. — P. 12195–12200.

305. Dierkes, K. Enhancement of sensitivity gain and frequency tuning by coupling of active hair bundles / K. Dierkes, B. Lindner, F. Jülicher // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2008. — V. 105, N. 48. — P. 18669–18674.

306. Two-state approach to stochastic hair bundle dynamics / D. Clausznitzer, B. Lindner, F. Jülicher, P. Martin // Physical Review E. — 2008. — V. 77. — P. 041901.

307. Barral, J. Friction from transduction channels' gating affects spontaneous hair-bundle oscillations / J. Barral, F. Jülicher, P. Martin // Biophys J. — 2018. — V. 114. — P. 425–436.

308. Hodgkin, A. L. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve / A. L. Hodgkin, A. F. Huxley // The Journal of Physiology. — 1952. — V. 117, N. 4. — P. 500–544.

309. Guckenheimer, J. Chaos in the Hodgkin–Huxley model / J. Guckenheimer, R. A. Oliva // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2002. — V. 1, N. 1. — P. 105–114.

310. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity and method of principal directions in excitability analysis of the Hodgkin-Huxley model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2019. — V. 29. — P. 1950186.

311. Shilnikov, A. Transition between tonic spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe / A. Shilnikov, G. Cymbalyuk // Phys. Rev. Lett. — 2005. — V. 94. — P. 048101.

312. Shilnikov, A. Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh–Rose model: A case study. A Tutorial / A. Shilnikov, M. Kolomiets // Int. J. Bifurcation Chaos. — 2008. — V. 18, N. 8. — P. 2141–2168.

313. Bashkirtseva, I. Noise-induced spiking-bursting transition in the neuron model with the blue sky catastrophe / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, E. Slepukhina // Phys. Rev. E. — 2019. — V. 99. — P. 062408.

314. Slepukhina, E. Stochastic spiking-bursting transitions in a neural birhythmic 3D model with the Lukyanov-Shilnikov bifurcation / E. Slepukhina, I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Chaos, Solitons & Fractals. — 2020. — V. 138. — P. 109958.

315. Ricker, W. E. Stock and recruitment / W. E. Ricker // J. Fish. Res. Board. Can. — 1954. — V. 11. — P. 559–623.

316. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity synthesis in discrete-time systems with parametric noise / I. Bashkirtseva // IFAC–PapersOnLine. — 2018. — V. 51, N. 32. — P. 610–614.

317. Bashkirtseva, I. Preventing noise-induced extinction in discrete population models / I. Bashkirtseva // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2017. — V. 2017. — P. 9610609.

318. Bashkirtseva, I. Stochastic Sensitivity Analysis of Noise-Induced Extinction in the Ricker Model with Delay and Allee Effect / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Bulletin of Mathematical Biology. — 2018. — V. 80, N. 6. — P. 1596–1614.

319. Bazykin, A. D. Nonlinear Dynamics of Interacting Populations / A. D. Bazykin. — World Scientific, 1998. — 216 P.

320. Petrovskii, S. Regimes of biological invasion in a predator?prey system with the Allee effect / S. Petrovskii, A. Morozov, B.-L. Li // Bulletin of Mathematical Biology. — 2005. — V. 67, N. 3. — P. 637 – 661.

321. Bashkirtseva, I. Noise-induced extinction in Bazykin-Berezovskaya population model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Eur. Phys. J. B. — 2016. — V. 89, N. 7. — P. 165.

322. Truscott, J. E. Ocean plankton populations as excitable media / J. E. Truscott, J. Brindley // Bulletin of Mathematical Biology. — 1994. — V. 56, N. 5. — P. 981–998.

323. Sieber, M. Constructive effects of environmental noise in an excitable prey?predator plankton system with infected prey / M. Sieber, H. Malchow, L. Schimansky-Geier // Ecological Complexity. — 2007. — V. 4, N. 4. — P. 223 – 233.

324. Ryashko, L. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced excitement in a prey-predator plankton system / L. Ryashko, I. Bashkirtseva // Frontiers in Life Science. — 2011. — V. 5. — P. 141–148.

325. Bashkirtseva, I. Method of confidence domains in the analysis of noise-induced extinction for tritrophic population system / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, T. Ryazanova // The European Physical Journal B. — 2017. — V. 90, N. 9. — P. 161.

326. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity technique in a persistence analysis of randomly forced population systems with multiple trophic levels / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, T. Ryazanova // Mathematical Biosciences. — 2017. — V. 293. — P. 38 – 45.

327. Bashkirtseva, I. Analysis of noise-induced bifurcations in the stochastic tritrophic population system / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, T. Ryazanova // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2017. — V. 27, N. 13. — P. 1750208.

328. Bashkirtseva, I. Stochastic variability and transitions to chaos in a hierarchical three-species population model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, T. Ryazanova // Chaos, Solitons and Fractals. — 2019. — V. 119. — P. 276–283.

329. Constructive role of noise and diffusion in an excitable slow-fast population system / I. Bashkirtseva, A. Pankratov, E. Slepukhina, I. Tsvetkov // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2020. — V. 378, N. 2171. — P. 20190253.

330. Alexandrov, D. V. Regular and chaotic regimes in Saltzman model of glacial climate dynamics under the influence of additive and parametric noise / D. V. Alexandrov, I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko // European Physical Journal B. — 2014. — V. 87, N. 10. — P. 227.

331. Alexandrov, D. V. Noise-induced generation of saw-tooth type transitions between climate attractors and stochastic excitability of paleoclimate / D. V. Alexandrov, I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko // Eur. Phys. J. B. — 2015. — V. 88. — P. 304.

332. Alexandrov, D. V. Excitability, mixed-mode oscillations and transition to chaos in a stochastic ice ages model / D. V. Alexandrov, I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko // Physica D. — 2017. — V. 343. — P. 28 – 37.

333. Alexandrov, D. V. Noise-induced variability of volcanic extrusions / D. V. Alexandrov, I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko // EPL. — 2016. — V. 116. — P. 40006.

334. Alexandrov, D. V. Analysis of noise-induced eruptions in a geyser model / D. V. Alexandrov, I. A. Bashkirtseva, L. B. Ryashko // European Physical Journal B. — 2016. — V. 89, N. 3. — P. 62.

335. Dynamics of a geyser eruption / J. Dowden, P. Kapadia, G. Brown, H. Rymer // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. — 1991. — V. 96, N. B11. — P. 18059–18071.

336. Математическое моделирование стохастических равновесий и бизнес-циклов модели Гудвина / И. А. Башкирцева, Е. Д. Екатеринчук, Т. В. Рязанова, Сысолятина А. А. // Компьютерные исследования и моделирование. — 2013. — V. 5, N. 1. — P. 107–118.

337. Bashkirtseva, I. Confidence domains in the analysis of noise-induced transition to chaos for Goodwin model of business cycles / I. Bashkirtseva, T. Ryazanova, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2014. — V. 24, N. 08. — P. 1440020.

338. Bashkirtseva, I. Analysis of dynamic regimes in stochastically forced Kaldor model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, T. Ryazanova // Chaos, Solitons & Fractals. — 2015. — V. 79. — P. 96–104.

339. Bashkirtseva, I. Analysis of stochastic effects in Kaldor-type business cycle discrete model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, A. Sysolyatina // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2016. — V. 36. — P. 446–456.

340. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of the variability of dynamics and transition to chaos in the business cycles model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, T. Ryazanova // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. — 2018. — V. 54. — P. 174–184.

341. On the stochastic sensitivity and noise-induced transitions of a Kaldor-type business cycle model / I. Bashkirtseva, D. Radi, L. Ryashko, T. Ryazanova // Computational Economics. — 2018. — V. 51, N. 3. — P. 699–718.