Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи

ШАБАНА Ханан Магди Дарвиш

СИНХРОНИЗАЦИЯ ЧАСТИЧНЫХ И НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ АВТОМАТОВ: ПОДХОД НА ОСНОВЕ SAT-РЕШАТЕЛЕЙ

05.13.17 – теоретические основы информатики

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Екатеринбург – 2020

Работа выполнена на кафедре алгебры и фундаментальной информатики Института естественных наук и математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор **Волков Михаил Владимирович**

Официальные оппоненты: **Гутерман Александр Эмилевич**, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», г. Москва, профессор кафедры высшей алгебры механико-математического факультета;

Кабанов Владислав Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского» Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, главный научный сотрудник отдела алгебры и топологии;

Хадиев Камиль Равилевич, кандидат физико-математических наук, ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет», г. Казань, старший преподаватель кафедры программной инженерии.

Защита диссертации состоится «09» июля 2020 г. в 13:30 на заседании диссертационного совета УрФУ 01.01.07 по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина 51, к. 248, Зал заседаний диссертационных советов.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» https://dissovet2.urfu.ru/mod/data/view.php?d=12&rid=1238

Автореферат разослан “ ____” ________ 2020 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета к.ф.-м.н. Косолобов Д. А

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности. Одной из самых простых и в то же время эффективных моделей дискретных систем являются конечные автоматы. *Конечным автоматом* называется тройка $\mathscr{A} = \langle Q, \Sigma, \delta\rangle$, где Q – конечное множество *состояний*, Σ – конечный *входной алфавит*, δ – *функция переходов* автомата, определяющая то, как буквы входного алфавита действуют на состояния.

При моделировании систем конечными автоматами состояния автомата соответствуют возможным состояниям системы, а буквы входного алфавита соответствуют допустимым операциям системы. В силу внешних воздействий или внутренних причин в таких системах могут происходить некорректные переходы. Для того чтобы можно было вернуть контроль над системой после некорректных переходов, целесообразно проектировать систему таким образом, чтобы она обладала некоторой «перезагрузочной» последовательностью операций. Поэтому вопрос о существовании такой перезагрузочной последовательности и вопрос о том, насколько короткой ее можно выбрать, являются существенными.

В теории автоматов идея перезагрузочной последовательности формализуется с помощью понятия *синхронизирующего слова*. Для самого простого случая *полных детерминированных автоматов* (ДКА) это понятие вводится так: для $\mathscr{A} = \langle Q, \Sigma, \delta\rangle$ слово $w \in \Sigma^*$ называется *синхронизирующим*, если $\delta(q, w) = \delta(p, w)$ для всех $q, p \in Q$. Синхронизируемость ДКА хорошо изучена, см. обзоры [16, 18]. В частности, известен алгоритм, который по данному ДКА $\mathscr{A}$ с n состояниями проверяет за время $O(n^2)$, имеет ли $\mathscr{A}$ синхронизирующее слово, и в случае положительного ответа строит такое слово длины $\leq \frac{n^3-n}{6}$ за время $O(n^3)$.

В приложениях, однако, часто возникают более сложные типы конечных автоматов: *частичные детерминированные автоматы* (ЧКА) и *недетерминированные автоматы* (НКА). Для них понятие синхронизируемости «расщепляется». В литературе рассматриваются две основных разновидности синхронизируемости для ЧКА – *бережная синхронизируемость* и *точная синхронизируемость* — и три разновидности синхронизируемости для НКА, для которых пока не установились словесные названия и которые принято именовать D_1-, D_2- и D_3-*синхронизируемостью*, см. монографию [11]. Для каждого из этих пяти вариантов задача проверки данного автомата на синхронизируемость оказывается PSPACE-полной и существуют такие серии автоматов с неограниченно растущим числом состояний, что минимальная длина соответствующей разновидности синхронизирующего слова для автоматов этой серии экспоненциально зависит от числа состояний.

В последние десятилетия стал популярным подход к трудноразрешаемым задачам, основанный на их сведении к задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ. В задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ дан набор *клозов* (дизъюнкций булевых переменных и их отрицаний) и требуется определить, существует ли набор значений переменных, обращающий все эти клозы в истинные высказывания. Специализированные программы для решения задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ, которые принято называть SAT-решателями, способны успешно оперировать с экземплярами задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ, включающими сотни тысяч переменных и миллионы клозов. В то же время, в силу классической теоремы Кука–Левина задача ВЫПОЛНИМОСТЬ NP-полна, т.е. к ней может быть сведена любая задача из класса NP. Более того, во многих случаях удается построить достаточно «экономное» свед́ение, при котором размеры возникающих экземпляров задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ не слишком велики по сравнению с размерами экземпляров исходной задачи. Таким образом, можно решать трудные задачи так: сводим интересующую нас задачу к задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ и запускаем SAT-решатель на получающихся экземплярах задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ. В обзоре [8] и справочной книге [3] можно найти выразительные примеры эффективного применения такого подхода в самых разных областях.

В вопросах синхронизации ДКА подход, основанный на SAT-решателях, был впервые применен в [17] и затем в [9]. Для изучения синхронизации ЧКА и НКА сведение к задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ и SAT-решатели до работ автора и М.В.Волкова не применялись.

Основной **целью работы** было систематическое исследование бережной и точной синхронизируемости ЧКА и D_1-, D_2- и D_3-синхронизируемости НКА с помощью SAT-решателей. Для достижения этой цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Разработать и обосновать экономное свед́ение задач о существовании бережно и точно синхронизирующего слова данной длины для ЧКА и задач о существовании D_1-, D_2- и D_3-синхронизирующего слова данной длины для НКА к задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ.

2. Реализовать разработанное свед́ение в виде комплекса программ.

3. Подтвердить адекватность подхода с помощью экспериментов со случайными автоматами и с автоматами-бенчмарками.

4. Накопить массив экспериментальных данных по синхронизации ЧКА и НКА.

5. Провести теоретический анализ экспериментальных данных.

Методы исследования, использованные в данной работе, включают в себя аппарат теории конечных автоматов, математической логики, теории вероятностей и математической статистики, а также подходы, выработанные для анализа сложности вычислений и алгоритмов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Основные положения, выносимые на защиту:

• Масштабируемые сведéния задач о существовании синхронизирующего слова данной длины к задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ.

• Экспериментальное подтверждение применимости построенных сведéний для нахождения кратчайших синхронизирующих слов для всех разновидностей синхронизации ЧКА и НКА в пределах до 100 состояний даже при использовании простейшего SAT-решателя и скромных вычислительных ресурсов.

• Экспериментальные исследования бережной и точной синхронизируемости ЧКА и D_1-, D_2- и D_3-синхронизируемости НКА.

• Теоретические обоснования ряда экспериментальных наблюдений, в частности, асимптотики для вероятностей точной и бережной синхронизируемости для случайного ЧКА с n состояниями и одним неопределенным переходом при $n \to \infty$.

• Нахождение длин кратчайших бережно синхронизирующих слов (как функций от числа состояний) для двух новых бесконечных серий медленно синхронизируемых ЧКА с двумя входными буквами и одним неопределенным переходом.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории конечных автоматов и смежных с ней областях теоретической информатики, а разработанные программы могут послужить прототипами программных продуктов в тех информационных технологиях, где находят применения различные типы синхронизируемых автоматов.

Достоверность полученных результатов. Теоретические результаты диссертации строго доказаны. Достоверность экспериментальных результатов обеспечена их согласованностью с экспериментальными результатами, полученными с использованием альтернативных методов, предложенных другими авторами.

Личный вклад автора. Лично автором получены формулировки и доказательства всех теорем диссертации, разработаны и имплементированы все приведенные в диссертации алгоритмы, проведены все эксперименты, проделаны статистическая обработка и теоретический анализ экспериментальных данных. Формулирование цели, постановка задач диссертационной работы, а также выбор общих методик исследований выполнены совместно с научным руководителем.

Апробация результатов работы. В ходе работы над диссертацией ее результаты регулярно докладывались на заседаниях Екатеринбургского семинара «Алгебраические системы» (руководитель – Л.Н.Шеврин) и заседаниях семинара «Компьютерные науки» при кафедре алгебры и фундаментальной информатики УрФУ (руководители – Д.С.Ананичев и М.В.Волков). Основные результаты представлялись также на международной конференции «Группы и графы, метрики и многообразия» (G2M2, Екатеринбург, 2017), 50-й, 51-й и 52-й конференциях из серии «Современные проблемы математики» (SOPROMAT, Кадниково, 2018, 2019, и Екатеринбург, 2020), международной научно-практической конференции «Математическое моделирование, программирование и прикладная математика» (MMPAM, Великий Новгород, 2019) и 18-й международной конференции «Математическая оптимизация и исследование операций» (MOTOR, Обуховское, 2019).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырех статьях в изданиях, рекомендованных ВАК и входящих в базы данных Web of Science и Scopus (среди них три – в изданиях, индексируемых Scopus, и одна – в журнале, индексируемом Web of Science), и двух комплексах программ, зарегистрированных в Федеральной службе по интеллектуальной собственности (Роспатент).

Структура и объем диссертации. Диссертация написана на английском языке. Она состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 160 страниц. Библиографический список содержит 91 наименование.

Краткое содержание работы

Во **введении** обсуждается общая концепция синхронизации и описываются некоторые типичные приложения синхронизируемых автоматов. Формулируются основные задачи, решаемые в диссертации, а затем излагается идея подхода к труднорешаемым задачам с помощью SAT-решателей. В конце введения дается обзор содержания диссертации по главам и приводятся сводка ее основных результатов, сведения об их апробации и список публикаций автора по теме диссертации.

Глава 1 содержит предварительные сведения. Сперва напоминаются необходимые термины и обозначения из теории сложности вычислений и пропозициональной логики. Затем подробно обсуждаются используемые в диссертационной работе понятия и факты из теории автоматов, в особенности те, которые связаны с концепцией синхронизируемости. Необходимость достаточно обстоятельного обсуждения вызвана тем, что в отличие от детерминированного случая, в теории синхронизируемых недетерминированных и частичных детерминированных автоматов пока нет «стандартных» обзорных статей, не унифицирована терминология, а результаты рассеяны по многочисленным, зачастую труднодоступным, источникам.

Воспроизведем некоторые ключевые определения. Недетерминированный конечный автомат (НКА) – это тройка $\mathscr{A} = \langle Q, \Sigma, \delta \rangle$, в которой Q – конечное множество *состояний*, Σ – конечный *входной алфавит*, а δ – функция $Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$, где $\mathcal{P}(Q)$ – это булеан множества Q. Функция δ продолжается до функции $\mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$, где Σ^* – множество всех слов над алфавитом Σ, включая пустое слово ε, по следующему правилу: для каждого подмножества $R \subseteq Q$ и каждого слова $w \in \Sigma^*$ полагаем

$$\delta(R, w) := \begin{cases} R, & \text{если } w = \varepsilon, \\ \bigcup_{q \in \delta(R,v)} \delta(q, a), & \text{если } w = va, \text{ где } v \in \Sigma^* \text{ и } a \in \Sigma. \end{cases}$$

Если $\delta(R, w) = \varnothing$, то говорят, что слово w *не определено* на подмножестве R, в противном случае слово w *определено* на R. Вместо $\delta(\{q\}, w)$ пишут просто $\delta(q, w)$.

НКА $\mathscr{A} = \langle Q, \Sigma, \delta \rangle$ называется *частично детерминированным автоматом* (ЧКА), если $|\delta(q, a)| \leqslant 1$ для всех $q \in Q$ и $a \in \Sigma$.

Для данного НКА $\mathscr{A} = \langle Q, \Sigma, \delta \rangle$ слово $w \in \Sigma^*$ называется

- D_1-*синхронизирующим*, если существует состояние $p \in Q$ такое, что $\delta(q, w) = \{p\}$ для всех $q \in Q$;
- D_2-*синхронизирующим*, если $\delta(q, w) = \delta(q', w)$ для всех $q, q' \in Q$;
- D_3-*синхронизирующим*, если $\bigcap_{q \in Q} \delta(q, w) \neq \varnothing$.

Слово $w = a_1 \cdots a_\ell$, где $a_1, \ldots, a_\ell \in \Sigma$, называется *бережно синхронизирующим словом* (БСС) для НКА $\mathscr{A} = \langle Q, \Sigma, \delta \rangle$, если оно удовлетворяет следующим трем условиям:

(C1) буква a_1 определена на каждом состоянии из множества Q;

(C2) буква a_t, где $1 < t \leq \ell$, определена на каждом состоянии из множества $\delta(Q, a_1 \cdots a_{t-1})$;

(C3) $|\delta(Q, w)| = 1$.

Если $w \in \Sigma^*$ удовлетворяет условию (C3), оно называется *точно синхронизирующим словом* (ТСС) для $\mathscr{A}$.

Глава 2 посвящена синхронизации ЧКА. Для ЧКА имеет смысл изучать два варианта синхронизируемости: бережную синхронизируемость и точную синхронизируемость. Дело в том, что ограничения D_1- и D_3-синхронизируемости на ЧКА совпадают с бережной синхронизуемостью. То же верно для ограничения D_2-синхронизируемости при условии, что D_2-синхронизирующее слово определено на каждом состоянии. Если же D_2-синхронизирующее слово определено не на всех состояниях, то оно не определено ни на одном состоянии, т.е. *аннулирует* рассматриваемый ЧКА. Аннулирующее слово для ЧКА $\mathscr{A} = \langle Q, \Sigma, \delta \rangle$ есть в точности классическое синхронизирующее слово для ДКА $\mathscr{A}^0 = \langle Q \cup \{0\}, \Sigma, \delta^0 \rangle$, где для всех $q \in Q \cup \{0\}$ и $a \in \Sigma$

$$\delta^0(q, a) := \begin{cases} \delta(q, a), & \text{если } \delta(q, a) \text{ определено в } \mathscr{A}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом, этот подслучай D_2-синхронизируемости сводится к синхронизации детерминированных автоматов с нулем, которая достаточно хорошо изучена, см. [15].

Мы рассматриваем две задачи распознавания: CSW и ESW, которые формулируются следующим образом.

CSW: наличие бережно синхронизирующего слова данной длины.
Вход: ЧКА $\mathscr{A}$ и натуральное число ℓ в унарной записи.
Ответ: ДА/НЕТ, если у $\mathscr{A}$ имеется/отсутствует БСС длины ℓ.

ESW: наличие точно синхронизирующего слова данной длины.
Вход: ЧКА $\mathscr{A}$ и натуральное число ℓ в унарной записи.
Ответ: ДА/НЕТ, если у $\mathscr{A}$ имеется/отсутствует ТСС длины ℓ.

Условие на запись числа ℓ продиктовано тем обстоятельством, что аналогичные задачи с бинарной записью числового параметра PSPACE-полны (см. [12] для бережной синхронизируемости и [2] для точной синхронизируемости). Поэтому свéдение таких задач к NP-полной задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ вряд ли возможно. (Существование такого свéдения влекло бы маловероятное равенство NP = PSPACE.) Задачи же CSW и ESW, как нетрудно проверить, лежат в классе NP.

В главе 2 строится свéдение задач CSW и ESW к задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ. Для ЧКА $\mathscr{A}$ с n состояниями и m входными буквами экземпляр $(\mathscr{A}, \ell)$ задачи CSW перекодируется в экземпляр (V, C) задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ, где множество V состоит из $(m+n)\ell + n$ переменных, а множество C – из $\ell\left(\frac{m(m-1)}{2} + mn + 1\right) + \frac{n(n+1)}{2}$ клозов. При кодировании $(\mathscr{A}, \ell)$ как экземпляра задачи ESW получается экземпляр (V, C') задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ с тем же множеством переменных и с набором клозов C' мощности не больше чем $\ell m\left(\frac{(m+1)}{2} + n(n+1)\right) + \frac{n(n+3)}{2}$.

Основными результатами главы 2 являются **теорема 2.1** и **теорема 2.2**, которые устанавливают адекватность предложенных кодирований: ответ ДА на входе $(\mathscr{A}, \ell)$ задачи CSW (соответственно ESW) получается тогда и только тогда, когда набор клозов C (соответственно C') от переменных из множества V выполним. Более того, БСС (соответственно ТСС) длины ℓ однозначно восстанавливается по выполняющему набору значений переменных.

В конце главы 2 показано, как уменьшить число клозов в наборах C и C', применяя известный прием лестничного кодирования [7].

Глава 3 представляет экспериментальные результаты по бережной и точной синхронизируемости ЧКА, полученные при применении SAT-решателя MiniSat 2.2.0 (см. [5, 6]) к экземплярам задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ, кодирующим экземпляры задач CSW и ESW методом главы 2.

В §3.1 описана общая методика наших экспериментов. В них существенно используется масштабируемость предложенного кодирования: кодирование экземпляра $(\mathscr{A}, \ell)$ задач CSW и ESW при произвольном $\ell > 1$ получается простыми арифметическими операциями из кодирования «базового» экземпляра $(\mathscr{A}, 1)$. Все алгоритмы были реализованы на C++ и скомпилированы с помощью GCC 4.9.2. Во всех экспериментах использовался персональный компьютер с процессором Intel(R) Core(TM) i5-2520M с 2.5 GHz CPU и 4GB RAM.

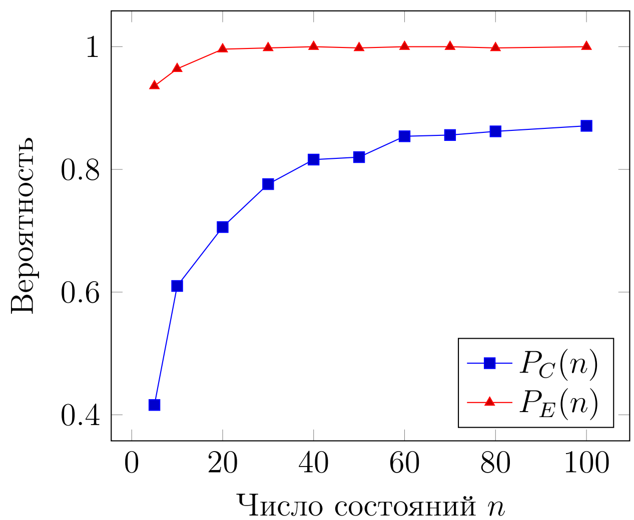

Рис. 1: Вероятности точной $(P_E(n))$ и бережной $(P_C(n))$ синхронизируемости почти полных бинарных ЧКА как функции от числа состояний

В §3.2 представлены четыре серии экспериментов со случайными автоматами. В **серии 1** сравнивалась вероятность того, что случайные ЧКА из одной и той же выборки окажутся бережно или точно синхронизируемыми. Рассматривались *почти полные бинарные* ЧКА, т.е. ЧКА с двумя входными буквами и в точности одним неопределенным переходом. В **серии 2** оценивалась средняя длина кратчайших бережно и точно синхронизирующих слов для бережно и соответственно точно синхронизируемых почти полных бинарных ЧКА. В **серии 3** изучалось влияние размера входного алфавита на длину кратчайшего бережно и точно синхронизирующего слова, а в **серии 4** рассматривалось, как на ту же величину влияет *плотность* ЧКА, т.е. число определенных переходов.

Генерация случайных ЧКА для экспериментов из серий 1–4 описана в §3.3. В экспериментах рассматривались автоматы с $n \leqslant 100$ состояниями, и для каждого n генерировалось 1000 случайных автоматов.

Результаты экспериментов представлены и проанализированы в §3.4. В качестве примера на рис. 1 приведен график, иллюстрирующий результаты экспериментов из серии 1. Видно, что вероятность $P_E(n)$ того, что случайный почти полный бинарный ЧКА с n состояниями точно синхронизируем, быстро стремится к 1 с ростом n. В диссертации дано теоретическое объяснение этого явления, а именно, на основе известных результатов о синхронизации случайных ДКА [1, 13, 14] доказано, что $P_E(n) = 1 - \Theta(\frac{1}{n})$ при $n \to \infty$ (**предложение 3.1**). Рис. 1 демонстрирует также, что вероятность $P_C(n)$ того, что случайный почти полный бинарный ЧКА с n состояниями бережно синхронизируем, также растет с ростом n, но намного медленнее. Мы объясняем и этот феномен, доказывая на основе классических результатов [10] о статистических характеристиках случайных отображений, что $P_C(n) = 1 - \Omega(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Приведем еще типичные результаты экспериментов из серии 4, см. рис. 2. Видно, что средняя длина кратчайшего ТСС с ростом плотности растет, а средняя длина кратчайшего БСС, напротив, уменьшается.

Помимо экспериментов со случайными автоматами, проводились эксперименты с бенчмарками из серии почти полных ЧКА, предложенной в [4]. Длины кратчайших БСС для этих ЧКА, найденные нашим методом, совпали с длинами, предсказанными (без доказательства) в [4].

В ходе экспериментов регистрировались почти полные ЧКА, для которых длина кратчайшего БСС оказывалась близкой к квадрату числа состояний. Обнаружив такие примеры, мы пытались обобщить их до бесконечных серий «медленно синхронизируемых» автоматов. В §3.5 приведены две серии ЧКА с n состояниями $\mathscr{H}'_n$ и $\mathscr{H}''_n$, найденные таким образом. Доказывается, что длина кратчайшего БСС равна $(n-2)^2$ для $\mathscr{H}'_n$ (**предложение 3.3**) и $n^2 - 3n + 3$ для $\mathscr{H}''_n$ (**предложение 3.4**). Серия $\mathscr{H}'_n$ стала «крепким орешком» для нашего алгоритма: наибольшее n, для которого алгоритм смог найти кратчайшее БСС, равно 13, и нахождение этого слова (длины 121) заняло почти 4 часа. Автоматы из серии $\mathscr{H}''_n$ оказались намного более податливыми: например, для $\mathscr{H}''_{20}$ наш алгоритм построил кратчайшее БСС (длины 343) за 13.38 с.

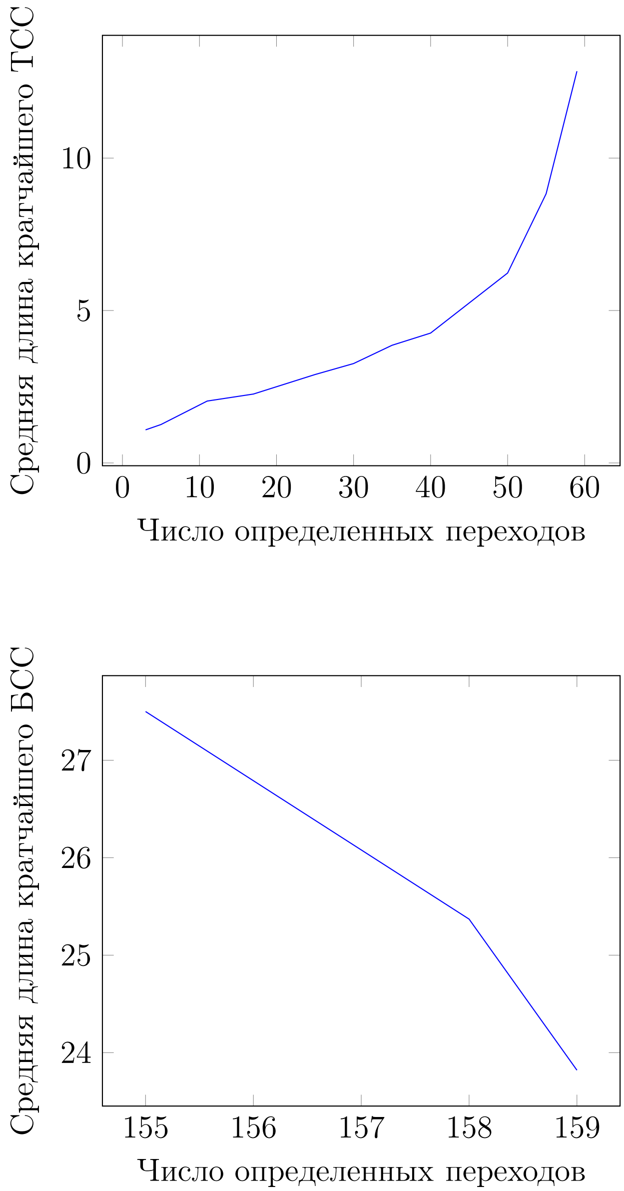

Рис. 2: Влияние числа определенных переходов на среднюю длину кратчайшего ТСС для бинарных ЧКА с 30 состояниями (верхний график) и на среднюю длину кратчайшего БСС для бинарных ЧКА с 80 состояниями (нижний график)

В §3.6 метод, основанный на SAT-решателях, сравнивается с единственным ранее публиковавшимся методом нахождения кратчайшего БСС для ЧКА, а именно, с методом, основанным на построении *частичного автомата подмножеств*, см. [12]. Результаты сравнения, представленные на рис. 3, демонстрируют превосходство нашего подхода уже для автоматов с 12 состояниями. Это превосходство быстро растет с ростом числа состояний, а для ЧКА с более чем 16 состояниями метод, основанный на частичных автоматах подмножеств, оказался неработоспособен в рамках тех вычислительных ресурсов, которыми мы располагали.

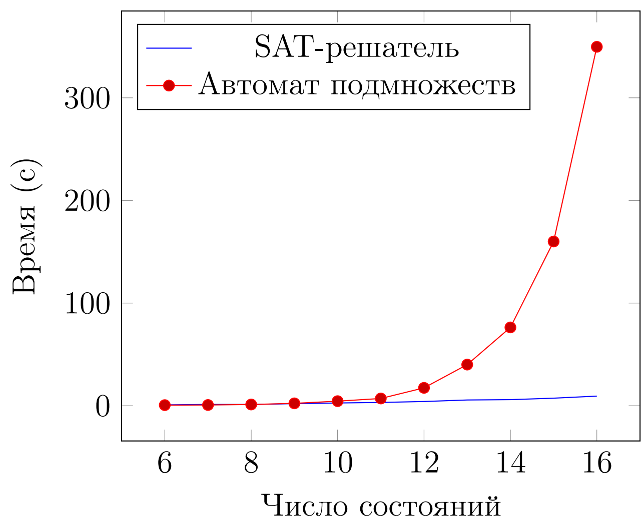

Рис. 3: Сравнение подходов, основанных на SAT-решателях и частичных автоматах подмножеств

Главы 4 и 5 посвящены синхронизации НКА. Рассматриваются три задачи распознавания – D1W, D2W и D3W – о существовании в данном НКА D_i-синхронизирующего слова (D_i-СС) данной длины ($i = 1, 2, 3$):

> DiW: наличие D_i-синхронизирующего слова данной длины.
> Вход: НКА $\mathscr{A}$ и натуральное число ℓ в унарной записи.
> Ответ: ДА/НЕТ, если у $\mathscr{A}$ имеется/отсутствует D_i-СС длины ℓ.

В **главе 4** строится сведéние задач DiW к задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ. При этом рассматриваются только бинарные НКА. В §§4.1–4.3 описываются наборы переменных и клозов, которые моделируют работу данного бинарного НКА $\mathscr{A}$ над входным словом w длины ℓ. Затем в §4.4 для каждого $i = 1, 2, 3$ указываются дополнительные «синхронизационные» клозы, которые выполняются, если и только если слово w оказывается D_i-синхронизирующим. В случаях $i = 1$ и $i = 3$, для того чтобы уменьшить число синхронизационных клозов, приходится также вводить дополнительные «синхронизационные» переменные. В целом, сведéние задач DiW к задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ заметно более громоздко, чем сведéние задач CSW и ESW в главе 2. Например, при сведéнии экземпляра $(\mathscr{A}, \ell)$ задачи D3W, где $\mathscr{A} = \langle Q, \Sigma, \delta \rangle$ – НКА с $|Q| = n$, $|\Sigma| = 2$ и $|\delta| = m$, возникает экземпляр (V, C) задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ, где множество V состоит из $\ell + n^2(\ell + 1) + n$ переменных, а множество C содержит не более чем $n(m + 2n)\ell + 2n^2 + 1$ клозов.

Основными результатами главы 4 являются **теорема 4.2**, **теорема 4.3** и **теорема 4.4**, которые устанавливают адекватность предложенных сведéний для задач D3W, D2W и D1W соответственно. Так, теорема 4.2 утверждает, что ответ ДА на входе $(\mathscr{A}, \ell)$ задачи D3W получается тогда и только тогда, когда набор клозов C от переменных из множества V выполним. Более того, D_3-СС длины ℓ однозначно восстанавливается по выполняющему набору значений переменных.

В **главе 5** собраны экспериментальные результаты по D_i-синхронизируемости случайных НКА, полученные при применении MiniSat 2.2.0 к экземплярам задачи ВЫПОЛНИМОСТЬ, кодирующим экземпляры задач DiW, $i = 2, 3$. Мы рассматривали две модели случайного НКА: равномерную и пуассоновскую. В равномерной модели в случайном НКА $\mathscr{A} = \langle Q, \Sigma, \delta \rangle$ для каждой пары $(q, a) \in Q \times \Sigma$ размер множества $\delta(q, a)$ принимает значение $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, где $n = |Q|$, с вероятностью $\frac{k}{n+1}$, а в пуассоновской с параметром λ – с вероятностью $e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ при $k < n$, а значение n принимается с вероятностью $1 - e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda^k}{k!}$. Эксперименты показали, что в равномерной модели почти все НКА синхронизируются, причем средняя длина кратчайшего D_i-СС не зависит от числа состояний автомата. Пуассоновская модель оказалась более интересной, и мы провели большой объем экспериментов по вычислению величины $E_i(\lambda, n)$ – средней длины кратчайшего D_i-СС для случайного бинарного НКА с n состояниями, порожденного по пуассоновской модели с параметром λ.

В конце главы 5 показано, как можно уменьшать число переменных и клозов, моделирующих работу данного НКА, и приведены результаты, полученные с помощью усовершенствованного кодирования.

В **заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы **основные результаты и выводы**.

• Построены масштабируемые свéдения задач о существовании синхронизирующего слова к задаче ВЫПОЛНИМОСТЬ. С помощью обширных экспериментов продемонстрировано, что построенные свéдения позволяют даже при использовании простейшего SAT-решателя и скромных вычислительных ресурсов находить кратчайшие синхронизирующие слова для всех разновидностей синхронизации частичных детерминированных и недетерминированных автоматов в пределах до 100 состояний.

• Проведены экспериментальные исследования бережной и точной синхронизируемости частичных детерминированных автоматов и D_1-, D_2- и D_3-синхронизируемости недетерминированных автоматов. Даны теоретические обоснования ряда экспериментальных наблюдений. Показано, что для случайного частичного детерминированного автомата с n состояниями, двумя входными буквами и одним неопределенным переходом вероятность точной синхронизируемости при $n \to \infty$ асимптотически равна $1 - \Theta(\frac{1}{n})$, а вероятность бережной синхронизируемости растет намного медленней.

• Для двух новых бесконечных серий медленно синхронизируемых частичных детерминированных автоматов с двумя входными буквами и одним неопределенным переходом найдены длины кратчайших бережно синхронизирующих слов (как функции от числа состояний).

Проведенное исследование позволяет сделать вывод об адекватности подхода к задачам синхронизации частичных детерминированных и недетерминированных автоматов с помощью SAT-решателей.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы. Представляется перспективным применение разработанных в диссертации алгоритмов в сочетании с более производительными SAT-решателями. Возможность такого применения обеспечена тем, что все современные SAT-решатели оперируют входными данными, представленными в одном и том же формате. При экспериментах по синхронизации случайных автоматов возможно использование вычислительных кластеров, поскольку автоматы можно обрабатывать параллельно.

Большой интерес представляют также разработка дизайна новых вычислительных экспериментов и дальнейший теоретический анализ уже накопленного массива экспериментальных результатов.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых изданиях, определенных ВАК и Аттестационным советом УрФУ:

1. Shabana, H., Volkov, M. V. *Using Sat solvers for synchronization issues in nondeterministic automata* // Siberian Electronic Math. Reports. 2018. Vol. 15. P. 1426–1442; 1 п.л./0,75 п.л. (MathSciNet, Scopus, Wos).

2. Shabana, H. *D_2-synchronization in nondeterministic automata* // Ural Math. J. 2018. Vol. 4, №2. P. 99–110; 0,75 п.л. (MathSciNet).

3. Shabana, H. *Exact synchronization in partial deterministic automata* // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. Vol. 1352. Paper №012047. P. 1–8; 0,5 п.л. (Scopus).

4. Shabana, H., Volkov, M. V. *Using Sat solvers for synchronization issues in partial deterministic automata* // В кн. Mathematical Optimization Theory and Operations Research, 18th Int. Conf. MOTOR 2019. Comm. Comp. Information Sci. Springer, 2019. Vol. 1090. P. 103–118; 1 п.л./ 0,75 п.л. (Scopus).

Патенты и программы:

5. Шабана Ханан Магди Дарвиш. NFAsync: Программный комплекс для вычисления порога синхронизации недетерминированных конечных автоматов. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2018663225 от 24 октября 2018. Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Дата приоритета 26 июня 2018. Правообладатель УрФУ.

6. Шабана Ханан Магди Дарвиш. Программа OSW для вычисления оптимального синхронизирующего слова для частичного детерминированного автомата. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2019663027 от 08 октября 2019. Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Дата приоритета 25 сентября 2019. Правообладатель УрФУ.

В текст диссертации не включены программные коды и наборы исходных данных. Они, а также дополнительные экспериментальные результаты размещены в открытом доступе на сайте
`https://github.com/hananshabana/SynchronizationChecker`.

Список литературы

[1] Berlinkov, M.V. *On the probability of being synchronizable* // В кн. Algorithms and Discrete Applied Mathematics. CALDAM 2016. Lect. Notes Comput. Sci. Springer, 2016. Vol. 9602. P. 73–84.

[2] Berlinkov, M.V. *On two algorithmic problems about synchronizing automata* // В кн. Developments in Language Theory. DLT 2014. Lect. Notes Comput. Sci. Springer, 2014. Vol. 8633. P. 61–67.

[3] Biere, A., Heule, M., van Maaren, H., Walsh, T. Handbook on Satisfiability. IOS Press, 2009.

[4] de Bondt, M., Don, H., Zantema, H. *Lower bounds for synchronizing word lengths in partial automata* // Int. J. Found. Comput. Sci. 2019. Vol. 30, №1. P. 29–60.

[5] Eén, N., Sörensson, N. *An extensible SAT-solver* // В кн. Theory and Applications of Satisfiability Testing. SAT 2003. Lect. Notes Comput. Sci. Springer, 2004. Vol. 2919. P. 502–518.

[6] Eén, N., Sörensson, N. The MiniSat Page // Электронный ресурс. Доступно по адресу: `http://minisat.se`.

[7] Gent, I.P., Nightingale, P. *A new encoding of AllDifferent into SAT* // В кн. Modelling and Reformulating Constraint Satisfaction Problems: Towards Systematisation and Automation. 2004. P. 95–110. Доступно по адресу: `http://www-users.cs.york.ac.uk/~frisch/ModRef/04/proceedings.pdf`

[8] Gomes, C. P., Kautz, H., Sabharwal, A., Selman, B.: *Satisfiability solvers* // В кн. Handbook of Knowledge Representation. Elsevier, 2008. P. 89–134.

[9] Güniçen, C., Erdem, E., Yenigün, H.: *Generating shortest synchronizing sequences using Answer Set Programming* // В кн. Answer Set Programming and Other Computing Paradigms. 2013. P. 117–127. Доступно по адресу: `https://arxiv.org/abs/1312.6146`

[10] Harris, B. *Probability distributions related to random mappings* // Ann. Math. Statist. 1960. Vol. 31, №4. P. 1045–1062.

[11] Ito, M.: Algebraic Theory of Automata and Languages. World Scientific, 2004.

[12] Martyugin, P.V. *Complexity of problems concerning carefully synchronizing words for PFA and directing words for NFA* // Theory Comput. Syst. 2014. Vol. 54, №2. P. 293–304.

[13] Nicaud, C. *Fast synchronization of random automata* // В кн. Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques. APPROX/RANDOM 2016. Leibniz Int. Proc. Informatics. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2016. Vol. 60. P. 43:1–43:12.

[14] Nicaud, C. *The Černý Conjecture holds with high probability* // J. Automata, Languages and Combinatorics. 2019. Vol. 24. №2-4. P. 343–365.

[15] Rystsov, I.K. *Reset words for commutative and solvable automata* // Theor. Comput. Sci. 1997. Vol. 172, №1. P. 273–279.

[16] Sandberg, S. *Homing and synchronizing sequences* // В кн. Model-Based Testing of Reactive Systems. Lect. Notes Comput. Sci. Springer, 2005. Vol. 3472. P. 5–33.

[17] Skvortsov, E., Tipikin, E.: *Experimental study of the shortest reset word of random automata* // В кн. Implementation and Application of Automata. CIAA 2011. Lect. Notes Comput. Sci. Springer, 2011. Vol. 6807. P. 290–298.

[18] Volkov, M. V. *Synchronizing automata and the Černý conjecture* // В кн. Language and Automata Theory and Applications. LATA 2008. Lect. Notes Comput. Sci. Springer, 2008. Vol. 5196. P. 11–27.