

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи



Колиниченко Александр Павлович

Математическое моделирование и анализ процессов самоорганизации: тьюринговские структуры, стохастическая чувствительность, индуцированные шумами переходы

Специальность 1.2.2 –
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2025

Работа выполнена на кафедре теоретической и математической физики ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Ряшко Лев Борисович

Официальные оппоненты: **Бухановский Александр Валерьевич**,
доктор технических наук,
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет ИТМО» (г. Санкт-Петербург),
профессор факультета технологий искусственного интеллекта

Кацнельсон Леонид Борисович,
доктор физико-математических наук,
ФГБУН Институт иммунологии и физиологии Уральского отделения Российской академии наук (г. Екатеринбург),
ведущий научный сотрудник лаборатории математической физиологии

Филимонов Михаил Юрьевич,
доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,
ФГБУН Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (г. Екатеринбург),
ведущий научный сотрудник отдела прикладных задач

Защита состоится 17 сентября 2025 года в 13:00 на заседании диссертационного совета УрФУ 1.2.05.22 по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина 51, зал диссертационных советов, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», <https://dissovet2.urfu.ru/mod/data/view.php?d=12&rid=7226>.

Автореферат разослан «___» июня 2025 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук



Косолобов Дмитрий Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Исследование систем со сложной нелинейной динамикой занимает важное место в современной науке [1–3]. Подобные системы часто встречаются как в теоретических, так и в прикладных исследованиях. Особый интерес к таким системам проявляют исследователи в области биологии [4, 5], химии [6], экологии [7–9], медицины [10] и других разделов естествознания [11]. В таких системах часто наблюдают феномены, связанные с процессами самоорганизации и спонтанным возникновением качественно новых состояний.

Одним из таких процессов является формирование пространственных структур в моделях нелинейной динамики с диффузией. Феномен неустойчивости однородных состояний и появления неоднородных устойчивых структур был впервые продемонстрирован Тьюрингом [12, 13]. В своей работе [12] он моделирует формирование зон неоднородности в замкнутом кольце живых клеток с идентичным метаболизмом, способных обмениваться веществами с соседями. Тьюринговские структуры часто встречаются в биологических системах [14–18], где перемещение популяций в пространстве принципиально схоже с диффузионными переходами, подчиняющимися принципу концентраций, например, популяции растений, грибов, планктона или насекомых.

Независимо от исследований А. Тьюринга, советский физик Зельдович Я. Б. обнаружил концентрационные волны, возникающие в процессе горения газов. Этот феномен диффузионно-тепловой неустойчивости возникает в условиях существенно различающихся коэффициентов теплопереноса и массопереноса. Явления, связанные с формированием устойчивых пространственно-неоднородных состояний в системах реакции-диффузии, также были исследованы Пригожиным И. Р., Белоусовым Б. П., Жаботинским А. М., Заикиным А. Н., Ваногом В. К. Теорию диффузионной неустойчивости Тьюринга в изучении биологических и экологических феноменов применили Г. Майнхардт, Дж. Мюррей и Л. Сегель.

Изучение систем с диффузией в реальном мире часто бывает затруднительно. В одних случаях масштабы области, связанной с системой, могут быть очень велики или же наоборот крайне малы. В других случаях процессы, связанные с формированием тьюринговских структур, происходят медленно. Экспериментальные исследования могут быть чрезвычайно затратными с точки зрения ресурсов и времени, в то же время далеко не каждую систему можно воссоздать в лабораторных условиях. В этих обстоятельствах основным инструментом анализа является аппарат математического моделирования и численных методов [19, 20].

В исследованиях нелинейных динамических систем отдельное внимание уделяется воздействию случайных возмущений. Принято считать, что случайный шум вносит в систему беспорядок и дестабилизирует установившиеся режимы [21]. Однако шумы могут играть конструктивную и организующую роль [22, 23]. Явления, невозможные в детерминированных моделях без шума, в реальности происходят именно благодаря ему [24–26]. Феномены, связанные с формированием тьюринговских структур, не исключение. Так, влияние шумов способствует их возникновению, несмотря на то, что в детерминированных моделях их появление исключено [27]. Конструктивную роль случайных возмущений подтверждает и явление стохастического резонанса – структуры становятся более выраженными при некоторой интенсивности возмущений [28]. Наконец, шумы влияют на сам процесс формирования тьюринговских структур и переходов от одной структуры к другой [29]. Так, например, резкий процесс перехода

в детерминированной системе может существенно смягчиться в соответствующей стохастической модели [30].

Целью данной диссертационной работы ставится математическое моделирование и анализ стохастических феноменов в пространственных моделях с диффузией, исследование вызываемых шумами деформаций тьюринговских структур и переходов между ними.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Разработать методы математического моделирования и стохастического анализа пространственных структур в процессах с диффузией;
2. Исследовать мультистабильность и разнообразие тьюринговских структур в моделях нелинейной динамики: модели брюсселятора, модели термохимической кинетики Ушала–Рэя и модели динамики популяций Левина–Сегеля;
3. Исследовать феномен стохастических переходов, провести анализ стохастической чувствительности тьюринговских структур с помощью статистических и аналитических методов;
4. Разработать, протестировать и применить комплексы программ для исследования стохастических феноменов в пространственных моделях с диффузией.

Методология и методы диссертационного исследования. В основе диссертационного исследования лежат методы численного моделирования нелинейных динамических систем, задаваемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Для анализа стохастических феноменов использован метод функций стохастической чувствительности, разработанный для систем стохастических уравнений с частными производными.

Положения, выносимые на защиту:

1. Разработаны и опробированы математические методы анализа стохастических феноменов в нелинейных динамических моделях с диффузией.
2. Развита аналитический аппарат исследования вероятностных феноменов в пространственно-распределенных моделях, основанный на методе функций стохастической чувствительности.
3. Проведено комплексное исследование стохастической динамики нелинейных моделей с диффузией, в том числе стохастического брюсселятора, модели Левина–Сегеля динамики популяций и модели Ушала–Рэя термохимической кинетики. В ходе исследований применены разработанные численные, статистические и аналитические методы.
4. Разработаны проблемно-ориентированные программные комплексы для выполнения численных экспериментов в стохастических нелинейных моделях с диффузией.

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

1. Проведенный анализ моделей нелинейной динамики с диффузией позволил детально исследовать диффузионную неустойчивость, генерацию тьюринговских структур и их разнообразие. Для стохастических моделей исследованы индуцированные шумом явления – переходы между сосуществующими структурами, подавление автоколебаний и генерация структур в зоне диффузионной устойчивости.
2. Разработан аналитический метод стохастической чувствительности тьюринговских структур. С помощью этого метода впервые проведен параметрический анализ стохастических переходов между сосуществующими пространственными структурами.

3. Предложенные методы и алгоритмы реализованы в программных комплексах, позволяющих проводить аналитические и численные исследования стохастических явлений в нелинейных моделях с диффузией.

Теоретическая и практическая значимость. Научная ценность заключается в разработке конструктивных алгоритмов статистического анализа вызываемой шумами генерации тьюринговских структур и переходов между ними. Практическую ценность представляет применение предложенных методов в исследовании феномена диффузионной неустойчивости в стохастических моделях популяционной динамики и термохимической кинетики. Отдельную практическую ценность представляют созданные в рамках исследований программные комплексы.

Достоверность полученных результатов. Достоверность результатов исследования обусловлена строгостью используемых математических теорий и строгим соблюдением условий применения численных методов. Теоретические результаты подтверждаются прямым моделированием и данными численных экспериментов. Предложенные методы и комплексы программ были протестированы на нескольких разных математических моделях из различных предметных областей.

Личный вклад автора. Основные результаты работы, а именно исследование стохастических явлений в моделях нелинейной динамики с диффузией, программная реализация численных методов моделирования и алгоритмов анализа, тестирование программных комплексов, а также визуализация результатов проводились автором лично. Формулирование целей и выбор методики исследования, постановка задач диссертационной работы и защищаемых положений выполнены совместно с научным руководителем. В совместных статьях [2, 4, 7–10, 12, 13] автору диссертации принадлежит проведение численных экспериментов, анализ и обработка результатов вычислений, а также подготовка материалов к публикации, а Ряшко Л. Б., Башкирцевой И. А. и Писарчику А. Н. принадлежат выбор моделей и идеи возможных подходов и методов исследований.

Апробация результатов. Основные результаты работы были представлены в виде устных и стендовых докладов на 19 международных и всероссийских конференциях, в том числе: 49-ая, 50-ая, 51-ая, 52-ая, 53-ая, 54-ая, 55-ая и 56-ая Международная (Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург 2018–2025), 6-ая, 7-ая, 8-ая, 9-ая и 10-ая Международная молодежная научная конференция Физика. Технологии. Инновации (Екатеринбург 2018–2023), 5-ая международная конференция-школа для молодых ученых «Динамика, бифуркации и странные аттракторы» (Нижний Новгород 2018), 25-ая, 28-ая и 30-ая Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна 2018; Пушино 2021, 2023), 11-ая Всероссийская междисциплинарная молодежная научная конференция «Информационная школа молодого ученого» (Екатеринбург 2023), Международная конференция «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (Екатеринбург 2024).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 15 научных работах, в том числе 14 опубликованы в рецензируемых научных изданиях, входящих в международные базы цитирования Scopus и Web of Science. Зарегистрированы 3 комплекса программ для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и 3 приложений. Полный объем диссертации составляет 112 страниц, включая 60 рисунков и 4 таблицы. Список литературы содержит 118 наименований.

Благодарности. Автор благодарит научного руководителя, профессора кафедры теоретической и математической физики УрФУ, д.ф.-м.н. Ряшко Л. Б., а также профессора кафедры теоретической и математической физики УрФУ, д.ф.-м.н. Башкирцеву И. А. за неоценимую помощь в постановке задач и разработке методологии

математических исследований. Диссертационные исследования проведены при поддержке грантов Российского научного фонда: «Математическое моделирование и анализ индуцированных шумом явлений в биологических системах» (проект №16-11-10098), «Стохастическая нелинейная динамика живых систем: модели, явления и методы анализа» (проект №21-11-00062), «Математическое моделирование и анализ нелинейной стохастической динамики колебательных термохимических процессов» (проект №23-21-00042) и «Математическое моделирование и стохастический анализ регулярной и хаотической динамики живых систем» (проект №24-11-00097), а также при поддержке Уральского математического центра УрФУ (соглашение №075-02-2024-1428).

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность выбранной темы исследований, сформулированы цели диссертационной работы, описана научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, сформулированы положения и результаты, выносимые на защиту, сведения о достоверности и апробации результатов исследования. Представлен обзор литературы, посвященной исследованиям самоорганизации в физических, химических и биологических моделях реакции-диффузии.

Первая глава посвящена теоретическим основам и методам моделирования и исследования феномена диффузионной неустойчивости в пространственно-распределенных моделях реакции-диффузии. В **разделе 1.1** приведены формулировки необходимых условий формирования тьюринговских структур, определяющих параметрическую зону диффузионной неустойчивости и алгоритм нахождения соответствующих зон. В **разделе 1.2** рассмотрены методы анализа и схемы интегрирования, использованные в прямом моделировании систем, изученных в рамках диссертационной работы.

Основной результат главы – метод функций стохастической чувствительности (ФСЧ) для пространственных аттракторов в системах с диффузией – приведен в **разделе 1.3**. Этот метод является развитием метода ФСЧ, разработанного ранее Ряшко Л. Б. и Башкирцевой И. А. [31] для точечных моделей нелинейной динамики. С его помощью в стохастических моделях выполняется оценка среднеквадратического отклонения случайного состояния от детерминированного аттрактора, как показателя степени чувствительности структуры к случайным возмущениям.

Рассмотрим двухкомпонентную стохастическую систему реакции-диффузии в общем виде (1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, v) + D_u(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \sigma(x) \xi(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= g(u, v) + D_v(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon \varphi(x) \eta(t, x),\end{aligned}\tag{1}$$

с граничными условиями (2)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, L) = 0,\tag{2}$$

где $x \in [0, L]$, случайные процессы $\xi(t, x)$ и $\eta(t, x)$ – некоррелированные белые гауссовские шумы с параметрами $E\xi(t, x) = E\eta(t, x) = 0$, $E\xi(t, x)\xi(t', x') = \delta(t' - t)\delta(x' - x)$, $E\eta(t, x)\eta(t', x') = \delta(t' - t)\delta(x' - x)$. Предполагается, что у системы (1), (2) без шума (при $\varepsilon = 0$) существует устойчивое стационарное решение $(\bar{u}(x), \bar{v}(x))$.

Решение краевой задачи (1), (2) подразумевает численное интегрирование на дискретной сетке. Пусть x_0, x_1, \dots, x_{n+1} – разбиение отрезка $[0, L]$, где $x_i = ih$,

$h = L/(n+1)$ и, соответственно $\bar{u}_i = \bar{u}(x_i)$, $\bar{v}_i = \bar{v}(x_i)$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_{1i} &= \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}_i, \bar{v}_i), f_{2i} = \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}_i, \bar{v}_i), g_{1i} = \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{u}_i, \bar{v}_i), g_{2i} = \frac{\partial g}{\partial v}(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \\ \alpha_i &= \frac{D_u(x_i)}{h^2}, \quad \beta_i = \frac{D_v(x_i)}{h^2}, \\ \sigma_i &= \sigma(x_i), \varphi_i = \varphi(x_i). \end{aligned}$$

Матрица W стохастической чувствительности решения $(\bar{u}(x), \bar{v}(x))$ удовлетворяет уравнению (3):

$$AW + WA^\top + G = 0, \quad (3)$$

где матрица A – блочная матрица, заданная следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \\ A_{11} &= \begin{bmatrix} f_{10} - \alpha_0 & \alpha_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & f_{11} - 2\alpha_1 & \alpha_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f_{1,n} - 2\alpha_n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n+1} & f_{1,n+1} - \alpha_{n+1} \end{bmatrix}, \\ A_{22} &= \begin{bmatrix} g_{20} - \beta_0 & \beta_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & g_{21} - 2\beta_1 & \beta_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & g_{2,n} - 2\beta_n & \beta_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n+1} & g_{2,n+1} - \beta_{n+1} \end{bmatrix}, \\ A_{12} &= \text{diag}[f_{20}, \dots, f_{2,n+1}], \quad A_{21} = \text{diag}[g_{10}, \dots, g_{1,n+1}]. \end{aligned}$$

Матрица G – диагональная матрица следующего вида:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 & O \\ O & G_2 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{n+1}^2 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} \varphi_0^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_1^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi_{n+1}^2 \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (3) – блочная симметричная матрица W :

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}.$$

Ее элементы позволяют аппроксимировать среднее квадратическое отклонение случайных решений $(u^\varepsilon(t, x), v^\varepsilon(t, x))$ системы (1), (2) в точках x_i следующим образом:

$$\begin{aligned} E(u^\varepsilon(t, x_i) - \bar{u}(x_i))^2 &\approx \varepsilon^2 [W_{11}]_{ii}, \\ E((u^\varepsilon(t, x_i) - \bar{u}(x_i))(v^\varepsilon(t, x_j) - \bar{v}(x_j))) &\approx \varepsilon^2 [W_{12}]_{ij}, \\ E(v^\varepsilon(t, x_i) - \bar{v}(x_i))^2 &\approx \varepsilon^2 [W_{22}]_{ii}, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (4)$$

Во **второй главе** рассмотрена стохастическая модель брюсселятора с диффузией, заданная системой дифференциальных уравнений в частных производных (5), (6):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a - (b+1)u + u^2v + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \xi(t, x) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= bu - u^2v + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon \eta(t, x). \end{aligned} \quad (5)$$

В качестве граничных условий взяты условия непроницаемости границ отрезка $0 \leq x \leq 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial v}{\partial x}(t, 1) = 0. \quad (6)$$

Переменные $u(t, x)$ и $v(t, x)$ задают концентрацию реагентов автокаталитической реакции, в которой u является активатором, а v – ингибитором, положительные параметры a и b регулируют динамику реакции, D_u и D_v – коэффициенты диффузии. Слагаемые $\xi(t, x)$ и $\eta(t, x)$ – некоррелированные гауссовские случайные шумы, удовлетворяющие следующим условиям $E\xi(t, x) = E\eta(t, x) = 0$, $E\xi(t, x)\xi(t', x') = \delta(t' - t)\delta(x' - x)$, $E\eta(t, x)\eta(t', x') = \delta(t' - t)\delta(x' - x)$. Параметр ε – коэффициент интенсивности шума.

Брюсселятор является хорошо известной и в достаточной степени исследованной моделью химической реакции. В рамках диссертационного исследования эта модель была выбрана для тестирования и отладки программных комплексов, а также для верификации методов исследования стохастической чувствительности аттракторов подобных систем.

В детерминированной модели (5), (6) при $\varepsilon = 0$ в зоне диффузионной неустойчивости Тьюринга из случайного распределения начальных значений формируется устойчивая тьюринговская структура-аттрактор (рис. 1).

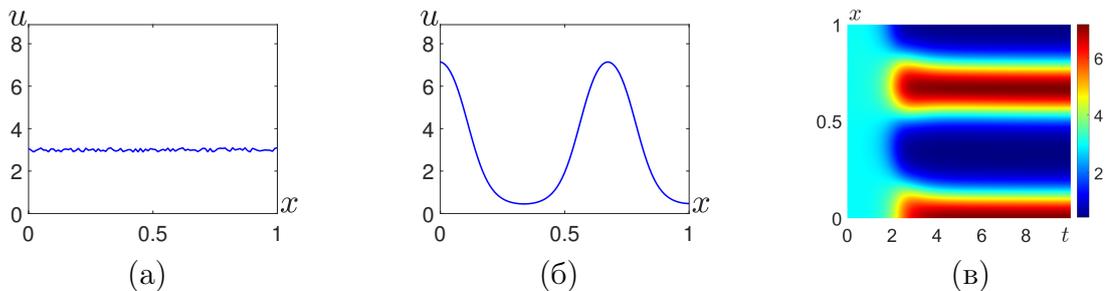


Рис. 1 – Генерация тьюринговских структур в системе (5), (6) с параметрами $a = 3$, $b = 9$, $D_u = 0.016$, $D_v = 0.1$: а) случайное начальное состояние, б) тьюринговская структура, в) пространственно-временная динамика $u(t, x)$

Тьюринговские структуры имеют форму пространственной волны и отличаются друг от друга частотностью (количеством длин волны в пространственном интервале) и направлением в точке $x = 0$ (возрастание – \uparrow или убывание – \downarrow).

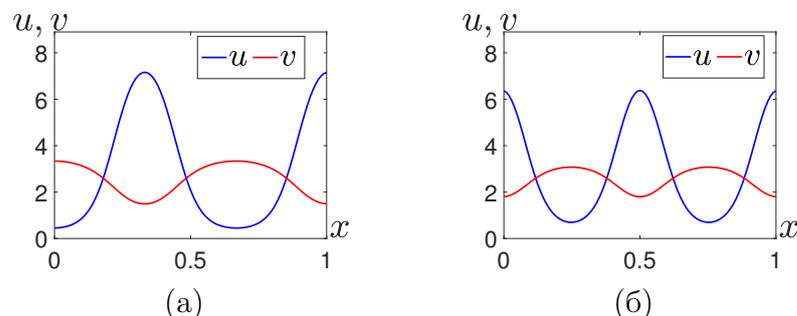


Рис. 2 – Примеры сосуществующих структур в брюсселяторе (5), (6) с параметрами $a = 3$, $b = 9$, $D_u = 0.016$, $D_v = 0.1$: а) структура $1.5 \uparrow$, б) структура $2 \downarrow$

В разделе 2.1 исследована мультистабильность брюсселятора в зоне диффузионной неустойчивости, в частности сосуществующие структуры при вариации коэффициентов D_u и D_v . Примеры сосуществующих структур приведены на рис. 2.

В разделе 2.2 исследована конструктивная роль шума в стохастической динамике системы (5), (6). Основное внимание уделяется феномену стохастического перехода между сосуществующими структурами-аттракторами (рис. 3а). Большое отклонение случайного состояния от первоначальной структуры говорит о его высокой восприимчивости к стохастическим воздействиям и большой вероятности разрушения и перехода системы к другой тьюринговской структуре. На рис. 3б показано, что среднее квадратическое отклонение случайного состояния от структуры $2\downarrow$ заметно больше, чем от структуры $1.5\downarrow$, что позволяет объяснить переход со структуры $2\downarrow$ к структуре $1.5\downarrow$ (рис. 3а).

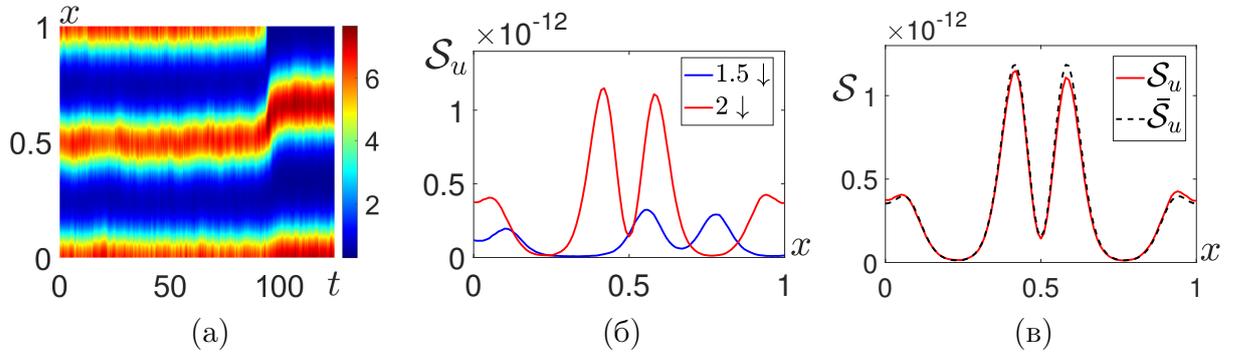


Рис. 3 — Стохастическая динамика в брюсселяторе с диффузией (5), (6) при параметрах $a = 3$, $b = 9$, $D_u = 0.016$, $D_v = 0.1$: а) стохастический переход от структуры $2\downarrow$ к структуре $1.5\downarrow$ при интенсивности шума $\varepsilon = 0.5$, б) сравнение среднее квадратических отклонений от структур $2\downarrow$ и $1.5\downarrow$, в) среднее квадратическое отклонение случайного состояния от структуры $2\downarrow$ (сплошная кривая) и ФСЧ аппроксимация (пунктир)

Главный результат раздела – применение разработанного метода функций стохастической чувствительности к описанию распределения случайных состояний вблизи сосуществующих тьюринговских структур (рис. 3в) и сравнению их стохастической чувствительности. Шум способствует разрушению чувствительной структуры и переходу на более устойчивую структуру, что подтверждает конструктивную роль случайных шумов в самоорганизации систем с диффузией.

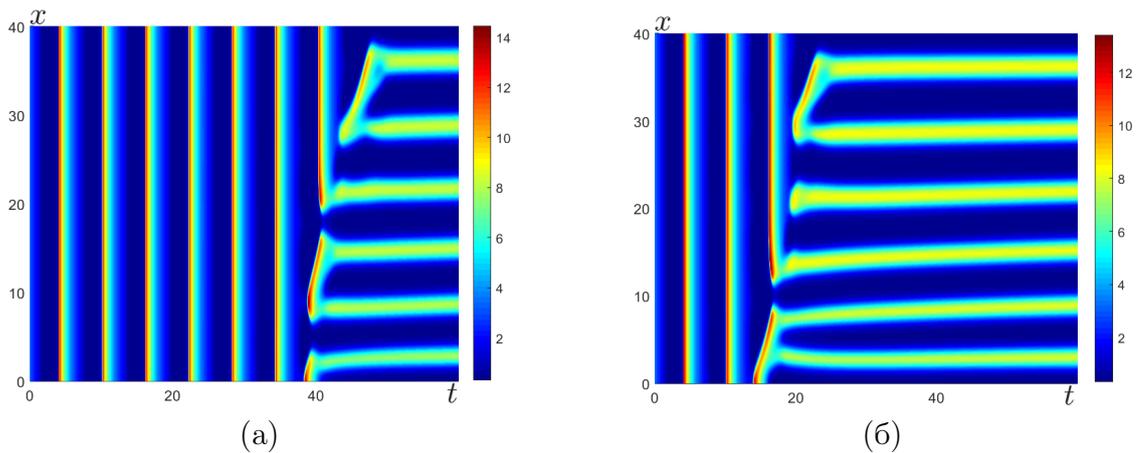


Рис. 4 — Стохастическое подавление гомогенных автоколебаний брюсселятора (5), (6) при $a = 3$, $b = 10.5$, $D_u = 1.5$, $D_v = 10$: а) $\varepsilon = 10^{-6}$, б) $\varepsilon = 10^{-4}$

В разделе 2.3 исследовано подавление гомогенных автоколебаний в брюсселяторе (5). Показано, что сильное различие коэффициентов диффузии активатора и ингибитора останавливает осцилляции системы и приводит к

формированию устойчивой стационарной структуры. Добавление в систему случайных шумов ускоряет процесс подавления (рис. 4).

Раздел 2.4 завершает обзор стохастических феноменов модели брюсселятора. В нем исследовано явление стохастической генерации пространственно-неоднородных структур в условиях диффузионной устойчивости. Несмотря на случайную природу шума, в системе формируются концентрационные волны, подобные тьюринговским структурам. Проведенный анализ подтверждает мультистабильность системы, приведены примеры зашумленных концентрационных волн различающейся пространственной частотности.

Третья глава посвящена исследованию стохастической модели динамики популяции Левина–Сегеля с диффузией:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= au + eu^2 - buv + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \xi(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= cuv - dv^2 + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon \eta(t, x),\end{aligned}\tag{7}$$

где $u(t, x)$ описывает динамику плотности популяции планктона, $v(t, x)$ – плотности популяции вида, питающегося планктоном. Размножение планктона влечет за собой размножение его потребителя. В то же время, чрезмерное размножение потребителя приведет к сокращению массы планктона с последующим ростом смертности вида-потребителя. Таким образом, планктон является активатором системы, а его потребитель – ингибитором. В проведенных исследованиях параметры a, c, d, e, D_v фиксированы, варьируются параметр b и коэффициент диффузии D_u . Стохастические слагаемые $\xi(t, x)$ и $\eta(t, x)$ – некоррелированные гауссовские шумы с параметрами $E\xi(t, x) = E\eta(t, x) = 0$, $E\xi(t, x)\xi(t', x') = \delta(t' - t)\delta(x' - x)$, $E\eta(t, x)\eta(t', x') = \delta(t' - t)\delta(x' - x)$. Неотрицательный параметр ε – коэффициент интенсивности шума. В качестве граничных условий берутся условия непроницаемости границ (6).

В **разделе 3.1** проведен анализ детерминированной системы (7), (6) при $\varepsilon = 0$ и исследована мультистабильность в зоне диффузионной неустойчивости, определенной неравенством (8).

$$\frac{D_u}{D_v} < \left(\sqrt{\frac{b}{d}} - \sqrt{\frac{b}{d} - \frac{e}{c}} \right)^2.\tag{8}$$

На рис. 5а и 5б показаны примеры тьюринговских структур $3 \uparrow$ и $3.5 \uparrow$, полученных при моделировании системы без шума.

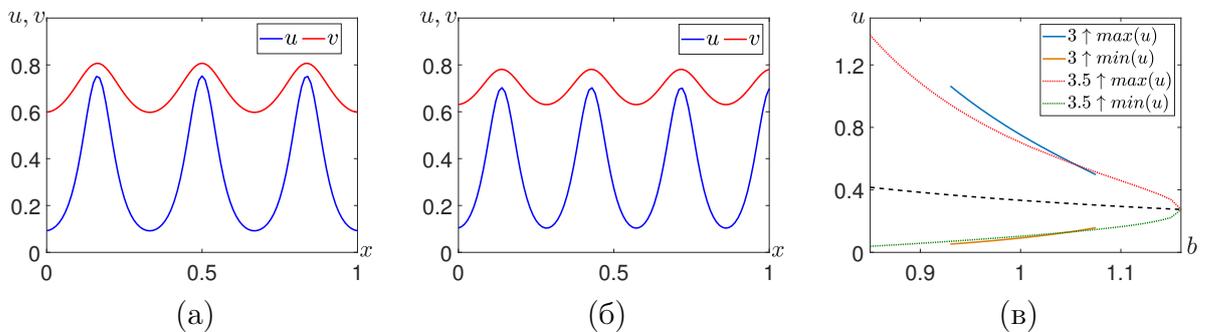


Рис. 5 — Тьюринговские структуры в популяционной модели Левина–Сегеля (7), (6) при $a = d = e = 0.5$, $c = 1$, $D_u = 1.5 \times 10^{-4}$ и $D_v = 0.005$: а) структура $3 \uparrow$ при $b = 1$, б) структура $3.5 \uparrow$ при $b = 1$, в) экстремумы сосуществующих структур при вариации параметра b

Показано, что каждой структуре соответствует некоторый параметрический диапазон устойчивости (рис. 5в). Вне своего диапазона структуру можно наблюдать во время численного эксперимента только как переходное состояние. На пересечении этих диапазонов проявляется мультистабильность: в зависимости от начального состояния будет сформирована одна из сосуществующих устойчивых тьюринговских структур.

Раздел 3.2 посвящен стохастическому анализу модели (7), (6), который включает в себя исследование вероятностных распределений случайных состояний вокруг структур-аттракторов. С помощью метода функций стохастической чувствительности проводится оценка среднев квадратического отклонения от структур-аттракторов. Данная оценка подтверждается статистическими данными прямого численного моделирования (рис. 6).

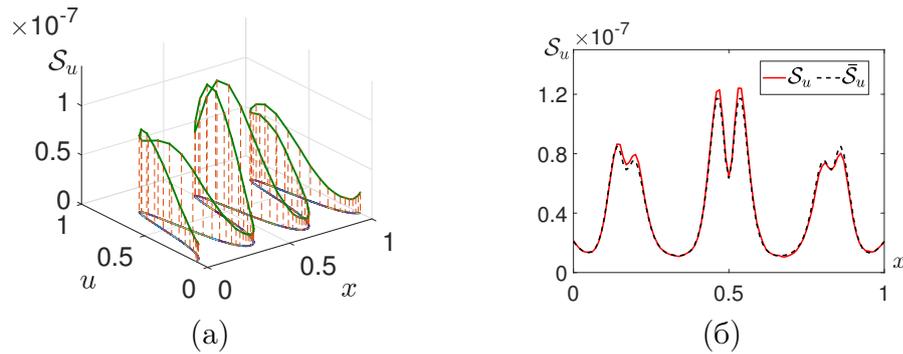


Рис. 6 — Разброс случайных состояний в модели Левина–Сегеля (7), (6) при $a = d = e = 0.5$, $b = 1$, $c = 1$, $D_u = 1.5 \times 10^{-4}$, $D_v = 0.005$, $\varepsilon = 10^{-4}$: а) среднев квадратическое отклонение \mathcal{S}_u от структуры $3\uparrow$, б) аппроксимация среднев квадратического отклонения \mathcal{S}_u (сплошная кривая) функцией стохастической чувствительности $\bar{\mathcal{S}}_u$ (пунктир)

Детально рассмотрено влияние вариации системных параметров на стохастическую чувствительность (рис. 7а). Здесь для сравнения используется максимум функции стохастической чувствительности. Параметрический анализ позволил выявить интервал, в котором чувствительность структуры $3\uparrow$ значительно превосходит чувствительность структуры $3.5\uparrow$ (рис. 7б).

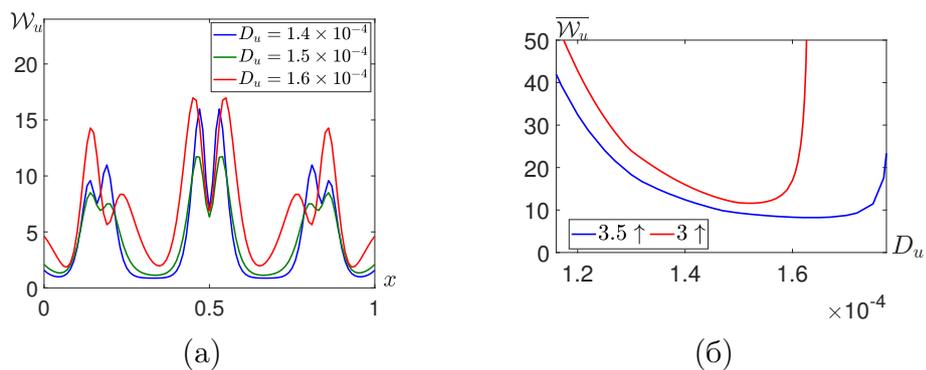


Рис. 7 — Стохастическая чувствительность тьюринговских структур в модели Левина–Сегеля (7), (6) при $a = d = e = 0.5$, $b = 1$, $c = 1$, $D_v = 0.005$: а) профиль функции стохастической чувствительности \mathcal{W}_u структуры $3\uparrow$ при разных значениях коэффициента диффузии D_u , б) максимумы функций стохастической чувствительности ($\bar{\mathcal{W}}_u$) структур $3.5\uparrow$ и $3\uparrow$ при вариации коэффициента D_u

На этом интервале ожидается высокая вероятность стохастического разрушения структуры $3\uparrow$ и перехода к другой структуре. Так, например, на рис. 8а начальное

состояние – структура $3\uparrow$ под воздействием шума переходит к зашумленной структуре $3.5\uparrow$. В то же время структура $3.5\uparrow$ на рис. 8б сохраняется без критических изменений.

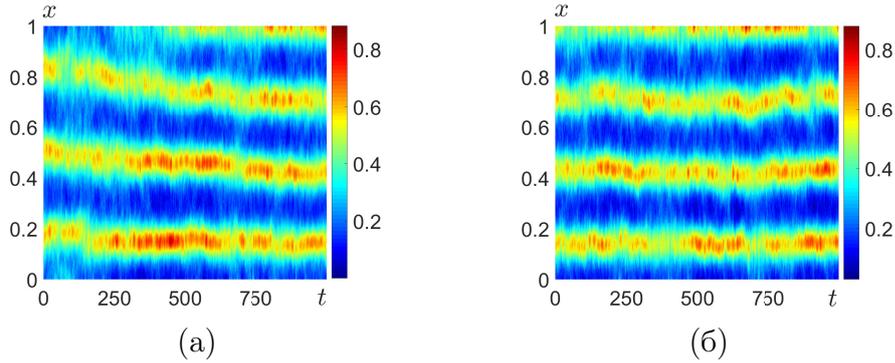


Рис. 8 — Стохастическая динамика популяционной модели Левина–Сегеля (7), (6) при $a = d = e = 0.5$, $b = 1$, $c = 1$, $D_v = 0.005$, $D_u = 1.61 \times 10^{-4}$, $\varepsilon = 0.03$: преобразования структур $3\uparrow$ (а) и $3.5\uparrow$ (б)

В разделе 3.3 проведено исследование связи между ФСЧ тьюринговской структуры, ее бассейном притяжения и доверительным интервалом. В точечных моделях нелинейной динамики данная связь лежит в основе расчета критической интенсивности шума, порождающей стохастические переходы между аттракторами. Похожий анализ, проведенный для модели с диффузией, указывает на существование параметрических зон, в которых переход происходит с высокой вероятностью без возможности возврата к более чувствительной структуре-аттрактору.

В четвертой главе рассмотрен стохастический вариант модели термохимической кинетики Ушала–Рэя (9), (6), задающей динамику реактора с непрерывным перемешиванием в условиях случайных возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -u + D(1-u)e^v + D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon \xi(t, x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -v + DB(1-u)e^v - \beta v + D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon \eta(t, x). \end{aligned} \quad (9)$$

Переменная $u(t, x)$ описывают концентрацию реагента (ингибитор), переменная $v(t, x)$ – температуру реактора (активатор). Параметры β , B и число Дамкёллера D описывают химические характеристики процесса, протекающего в реакторе. Процессы $\xi(t, x)$ и $\eta(t, x)$ – некоррелированные гауссовские шумы с параметрами $E\xi(t, x) = E\eta(t, x) = 0$, $E\xi(t, x)\xi(t', x') = \delta(t' - t)\delta(x' - x)$, $E\eta(t, x)\eta(t', x') = \delta(t' - t)\delta(x' - x)$, параметр ε – коэффициент интенсивности шума.

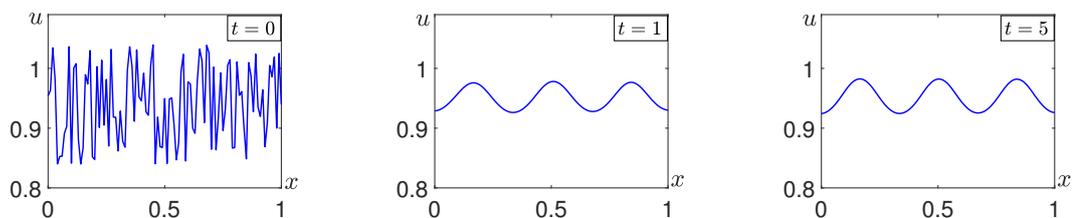


Рис. 9 — Формирование тьюринговской структуры в системе (9), (6) из случайного начального состояния при $B = 15$, $\beta = 3$, $D = 0.5$, $D_u = 0.08$ и $D_v = 0.01$

Раздел 4.1 посвящен исследованиям детерминированной модели термохимической кинетики. Для модели (9), (6) изучен сценарий формирования

тьюринговской структуры из случайного состояния (рис. 9) и обнаружено явление мультистабильности. Были получены структуры с 2.5, 3 и 3.5 пиками (рис. 10). Также исследовано влияние вариации коэффициентов диффузии на форму структур.

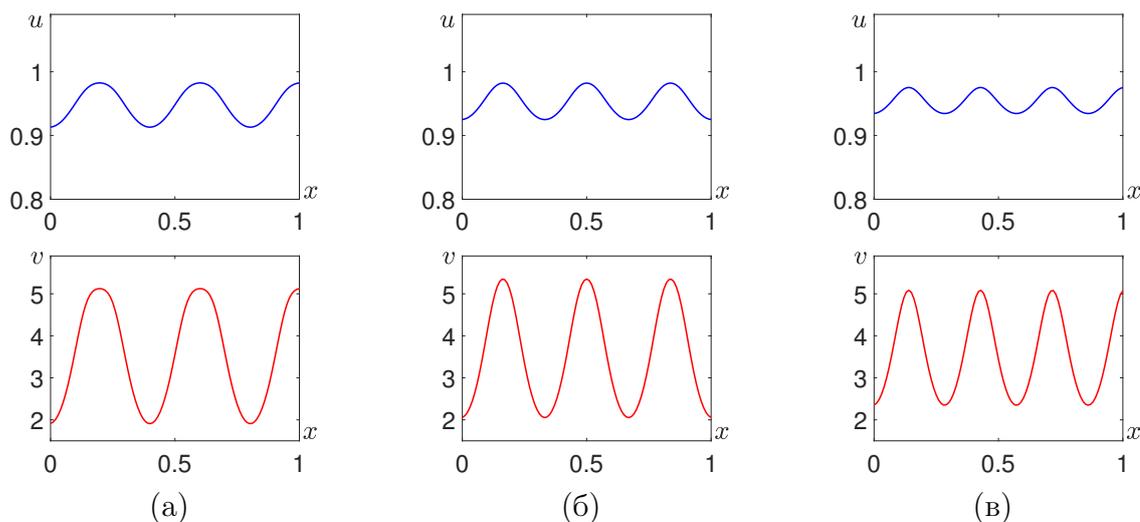


Рис. 10 — Мультистабильность системы (9), (6) при $B = 15$, $\beta = 3$, $D = 0.5$, $D_u = 0.08$ и $D_v = 0.01$: а) структура 2.5 ↑, б) структура 3 ↑, в) структура 3.5 ↑

Обнаружено, что уменьшение D_u и D_v при постоянном отношении $\frac{D_u}{D_v}$ приводит к формированию структур с большей пространственной частотой. Примеры структур с 5.5, 6 и 6.5 пиками при $D_u = 0.016$ и $D_v = 0.002$ показаны на рис. 11.

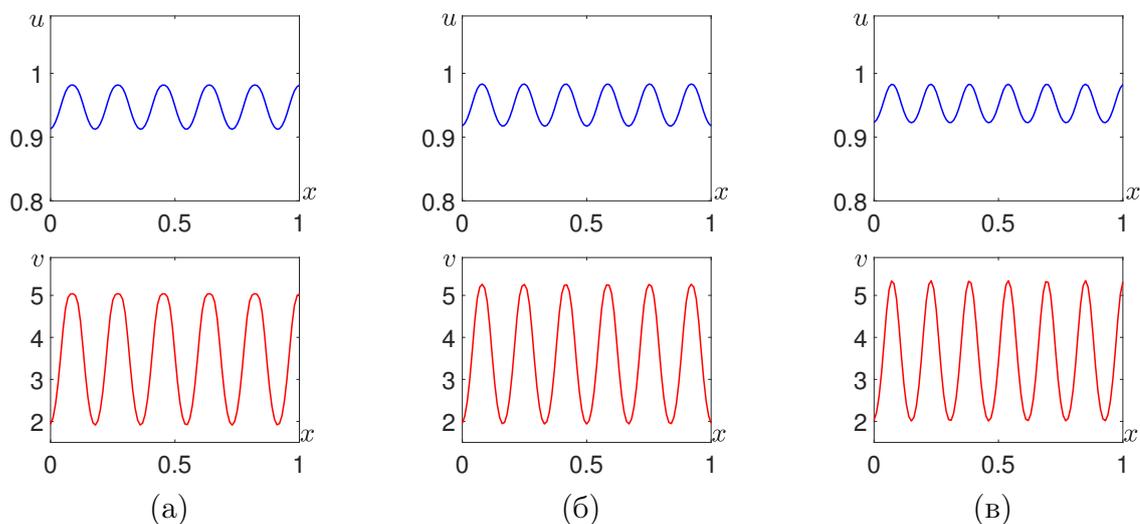


Рис. 11 — Мультистабильность системы (9), (6) при $B = 15$, $\beta = 3$, $D = 0.5$, $D_u = 0.016$ и $D_v = 0.002$: а) структура 5.5 ↑, б) структура 6 ↑, в) структура 6.5 ↑

В разделе 4.2 исследованы сценарии стохастических переходов в модели динамики реактора со случайными возмущениями (рис. 12а). Поскольку тьюринговские структуры имеют форму пространственной волны, применение техники гармонических коэффициентов (рис. 12б) дополняет графическую визуализацию процесса перехода. Этот подход также позволяет программному коду фиксировать факт перехода и его тип.

Исследование стохастической чувствительности сосуществующих структур методом ФСЧ позволяет объяснить индуцированное шумом разрушение структуры 3.5↑

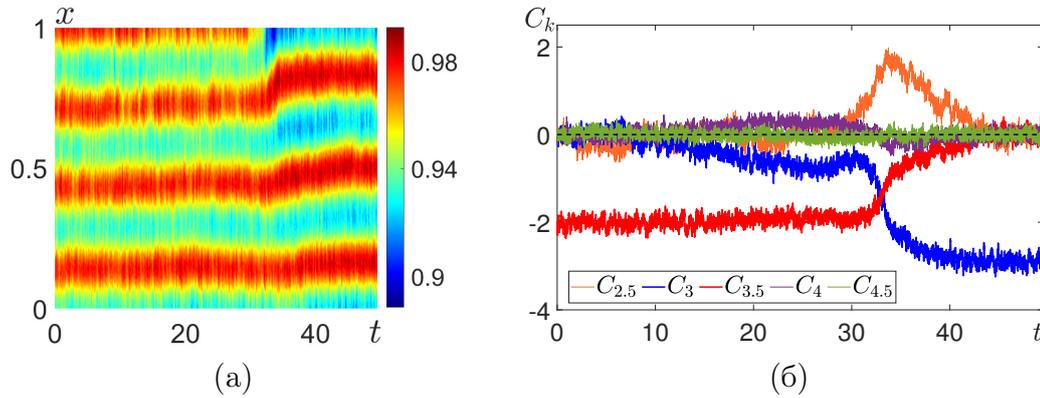


Рис. 12 — Временная динамика перехода от структуры $3.5\uparrow$ к структуре $3\uparrow$ в системе (9), (6) при $B = 15$, $\beta = 3$, $D = 0.5$, $D_u = 0.08$, $D_v = 0.01$ и $\varepsilon = 0.06$: а) диаграмма пространственно-временной динамики $u(t, x)$, б) динамика некоторых гармонических коэффициентов C_k

более высокой чувствительностью по сравнению с другими структурами-аттракторами. Оценка отклонения стохастической системы от тьюринговской структуры хорошо согласуется с данными статистических экспериментов. Представлены результаты численного эксперимента, подтверждающего более высокую степень устойчивости структур $2.5\uparrow$ и $3\uparrow$ по сравнению со структурой $3.5\uparrow$.

Пятая глава посвящается программным комплексам, разработанным в рамках диссертационного исследования и предназначенным для решения задач по моделированию и анализу систем реакции-диффузии. Особое внимание уделено программной реализации метода функций стохастической чувствительности тьюринговских структур, используемого в параметрическом анализе и сравнении степени устойчивости структур-аттракторов к случайным возмущениям. Обсуждение алгоритмов и программных решений сопровождается примерами фрагментов кода на языке программирования python 3 в дистрибутиве Anaconda. Работоспособность комплексов проверена на операционных системах Windows 7, 10 и 11. Визуализация результатов выполнена в прикладном пакете Matlab.

Результаты исследования, представленные в диссертационной работе, были получены с помощью комплексов программ, описанных в этой главе. Получены свидетельства о государственной регистрации трех программ для ЭВМ. Соответствующие свидетельства о регистрации оформлены в виде приложений к диссертационной работе.

В **заключении** подведены итоги диссертационной работы и предложены возможные направления дальнейшего исследования.

Заключение

В диссертационной работе исследованы стохастические феномены в моделях нелинейной динамики с диффузией. Основными объектами исследования в этих моделях являются диффузионная неустойчивость, тьюринговские структуры и индуцированные шумами переходы между ними. Новизна работы заключается в разработке метода функций стохастической чувствительности для систем реакции-диффузии, где такие структуры являются аттракторами, применении нового метода в моделях нелинейной динамики с диффузией. Возможности применения метода в исследовании факторов, влияющих на динамику стохастических переходов, рассмотрены для ряда математических моделей.

Основные результаты диссертационной работы можно описать следующим образом.

1. Исследованы математические модели реакции-диффузии из разных областей, в том числе модели химической реакции, популяционной динамики и термохимической кинетики. Показано, что несмотря на сильно различающийся характер соответствующих феноменов, принципы моделирования и анализа тьюринговских структур в этих системах схожи. Данный результат указывает на универсальность применяемых методик исследования и допускает возможность их применения в других областях науки.
2. Проведено исследование трех детерминированных диффузионных моделей: брюсселятора, модели Левина-Сегеля популяционной динамики и модели Ушала-Рэя термохимической кинетики. Выявлены параметрические зоны неустойчивости Тьюринга, приведены примеры формирования тьюринговских структур из случайного начального состояния. Результаты моделирования показали, что в подобных системах часто наблюдается мультистабильность, выраженная в сосуществовании нескольких структур-аттракторов.
3. Показано, что системные параметры влияют на форму тьюринговской структуры, а именно на амплитуду концентрационных волн. В то же время при одновременном пропорциональном изменении коэффициентов диффузии меняется пространственная частотность структур и их количество.
4. Изучено влияние случайных шумов на вышеперечисленные модели нелинейной динамики с диффузией. Под влиянием шума возможно стохастическое разрушение тьюринговской структуры и формирование одной из сосуществующих с ней структур-аттракторов. Статистическое исследование влияния шума на форму структуры показало, что вероятностное распределение случайных состояний вокруг структуры-аттрактора различается – в одних случаях отклонение сильнее. Это указывает на разную степень стохастической чувствительности тьюринговских структур.
5. Для аппроксимации среднеквадратического отклонения случайных состояний от тьюринговских структур предложен аналитический метод функций стохастической чувствительности. Данный метод дает хорошую оценку отклонений и не требует большого объема статистических данных.
6. С помощью метода ФСЧ проведен параметрический анализ чувствительности тьюринговских структур. Найдены зоны, в которых чувствительность сосуществующих структур сильно различается, а следовательно, вероятность перехода между ними высока. Результат подтверждается данными численных экспериментов.
7. На примере модели брюсселятора с диффузией исследованы сценарии подавления автоколебаний. Показано, что добавление диффузии может разрушить однородные автоколебания и привести к формированию устойчивых концентрационных волн, схожих с тьюринговскими структурами. Интенсивная диффузия ускоряет переход модели от колебательного режима к стационарным концентрационным волнам. Добавление случайных шумов также ускоряет данный переход.
8. В ходе работы были разработаны, отлажены и протестированы комплексы программ для моделирования систем реакции-диффузии и анализа чувствительности тьюринговских структур.

Рекомендации и дальнейшие перспективы разработки темы. Разработка и применение количественных характеристик состояний подобных систем остается актуальной задачей. Предложенный в ходе диссертационной работы метод функций стохастической чувствительности позволяет эффективно исследовать чувствительность

тьюринговских структур в двухкомпонентных моделях реакции-диффузии на одномерной области. Этот метод можно распространить на более сложные системы с большим количеством компонентов. Куда более серьезным вызовом является исследование моделей с двумерным и трехмерным пространством, где, помимо вычислительных сложностей, возникают трудности визуализации данных.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных ВАК РФ и Аттестационным советом УрФУ

1. Kolinichenko, A. Analysis of spatiotemporal self-organization in stochastic population model / A. Kolinichenko, L. Ryashko // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2015, no. 1. P. 020041. (0.3125 п.л./0.1875 п.л.) (Scopus, Web of Science).
2. Kolinichenko, A. Modality analysis of patterns in reaction-diffusion systems with random perturbations / A. Kolinichenko, L. Ryashko // Izv. IMI UdGU. 2019. Vol. 53. P. 73—82. (0.625 п.л./0.3125 п.л.) (Scopus, Web of Science).
3. Kolinichenko, A. P. Analysis of stochastic transitions in the distributed model with diffusion / A. P. Kolinichenko, L. B. Ryashko // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2174, no. 1. P. 020121. (0.375 п.л./0.1875 п.л.) (Scopus, Web of Science).
4. Kolinichenko, A. Analysis of stochastic sensitivity of Turing patterns in distributed reaction-diffusion systems / A. Kolinichenko, L. Ryashko // Izv. IMI UdGU. 2020. Vol. 55. P. 155—163. (0.5625 п.л./0.3125 п.л.) (Scopus, Web of Science).
5. Kolinichenko, A. P. Analysis of Turing patterns in distributed reaction-diffusion models with self-oscillations / A. P. Kolinichenko, L. B. Ryashko // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2313, no. 1. P. 080017. (0.3125 п.л./0.1875 п.л.) (Scopus, Web of Science).
6. Kolinichenko, A. Analysis of spatial patterns in the distributed stochastic Brusselator / A. Kolinichenko, L. Ryashko // Mathematical Analysis With Applications. CONCORD-90 2018. Vol. 318 / ed. by S. Pinelas, A. Kim, V. Vlasov. Springer, Cham, 2020. P. 195—204. (0.3125 п.л./0.1875 п.л.) (Scopus).
7. Kolinichenko, A. Multistability and stochastic phenomena in the distributed Brusselator model / A. Kolinichenko, L. Ryashko // J. Comp. Nonlin. Dyn. 2020. Vol. 15, no. 1. P. 011007. (0.437 п.л./0.25 п.л.) (Scopus, Web of Science).
8. Kolinichenko, A. Stochastic phenomena in pattern formation for distributed nonlinear systems / A. Kolinichenko, A. Pisarchik, L. Ryashko // Phil. Trans. Royal Soc. A. 2020. Vol. 378, no. 2171. P. 0252. (0.6875 п.л./0.375 п.л.) (Scopus, Web of Science).
9. Kolinichenko, A. Stochastic sensitivity analysis of stationary patterns in spatially extended systems / A. Kolinichenko, L. Ryashko // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. Vol. 44, no. 16. P. 12194—12202. (0.5625 п.л./0.3125 п.л.) (Scopus, Web of Science).
10. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity of Turing patterns: methods and applications to the analysis of noise-induced transitions / I. Bashkirtseva, A. Kolinichenko, L. Ryashko // Chaos, Solitons & Fractals. 2021. Vol. 153. P. 111491. (0.4375 п.л./0.1875 п.л.) (Scopus, Web of Science).
11. Kolinichenko, A. P. Stochastic sensitivity analysis of patterns in population dynamics models / A. P. Kolinichenko, L. B. Ryashko // AIP Conference Proceedings. 2022. Vol. 2466, no. 1. P. 070008. (0.3125 п.л./0.1875 п.л.) (Scopus).

12. Kolinichenko, A. Self-organization in randomly forced diffusion systems: A stochastic sensitivity technique / A. Kolinichenko, I. Bashkirtseva, L. Ryashko // *Mathematics*. 2023. Vol. 11, issue 2. P. 451. (0.8125 п.л./0.375 п.л.) (Scopus, Web of Science).
13. Kolinichenko, A. Noise-induced pattern evolution in thermochemical kinetics / Kolinichenko, A., Bashkirtseva, I., Ryashko, L. // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2024. Vol. 233. P. 3387—3395. (0.562 п.л./0.3125 п.л.) (Scopus, Web of Science) **Q2**.
14. Kolinichenko, A. The effect of diffusion on multistability and stochastic sensitivity in spatially extended systems / Kolinichenko, A. // *Cybernetics and Physics*. 2024. Vol. 13, no. 2. P. 123—129. (0.437 п.л.) (Scopus) **Q3**.

Зарегистрированные программы для ЭВМ

15. Колиниченко А.П. и Ряшко Л.Б. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2022614148 «Анализ динамики распределенных моделей». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 07 марта 2022 г.
16. Колиниченко А.П. и Ряшко Л.Б. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2023663314 «Метод функций стохастической чувствительности паттернов в математических моделях реакции-диффузии». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 21 июня 2023 г.
17. Колиниченко А.П. и Ряшко Л.Б. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2024660528 «Моделирование диффузионной неустойчивости в термохимическом реакторе». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 07 мая 2024 г.

В прочих изданиях

18. Колиниченко, А. П. Тьюринговские паттерны в динамике популяций: мультистабильность, чувствительность, стохастические переходы / А. П. Колиниченко // XI Информационная школа молодого ученого. Издательство Уральского университета, 2023. С. 145—155. (0.687 п.л.)

Список литературы

1. Nicolis, G. Self-Organization in Nonequilibrium Systems / G. Nicolis, I. Prigogine. New York : Wiley, 1977.
2. Mikhailov, A. S. Foundations of Synergetics II: Chaos and Noise / A. S. Mikhailov, A. Y. Loskutov. Springer, 1996.
3. Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks / S. Boccaletti [et al.]. Cambridge Univ. Press, 2018.
4. Hiraiwa, T. Dynamic self-organization of idealized migrating cells by contact communication / T. Hiraiwa // *Phys. Rev. Lett.* 2020. Vol. 125, issue 26. P. 268104.
5. Avila-Vales, E. Bifurcation and spatiotemporal patterns in a Bazykin predator-prey model with self and cross diffusion and Beddington-DeAngelis response / E. Avila-Vales, G. García-Almeida, E. Rivero-Esquivel // *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*. 2017. Vol. 22, no. 3. P. 717—740.
6. Modeling of glycolytic wave propagation in an open spatial reactor with inhomogeneous substrate influx / A. I. Lavrova [et al.] // *BioSystems*. 2009. Vol. 97. P. 127—133.
7. Malchow, H. Spatiotemporal Patterns in Ecology and Epidemiology / H. Malchow, S. V. Petrovskii, E. Venturino. Chapman and Hall/CRC, 2019. P. 469.

8. Maynard Smith, J. *Models in ecology* / J. Maynard Smith. Cambridge : Cambridge University Press, 1974.
9. *Transient phenomena in ecology* / A. Hastings [et al.] // *Science*. 2018. Vol. 361, no. 6406. eaat6412.
10. *Localised structures in a virus-host model* / F. Al Saadi [et al.] // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2021. Vol. 499, no. 1. P. 125014.
11. *Torcicollo, I. Turing instability and spatial pattern formation in a model of urban crime* / I. Torcicollo, M. Vitiello // *Mathematics*. 2024. Vol. 12. P. 1097.
12. *Turing, A. M. The chemical basis of morphogenesis* / A. M. Turing // *Phil. Trans. Royal Soc. of London. Ser. B, Biol. Sci.* 1952. Vol. 237. P. 37–72.
13. *Villar-Sepúlveda, E. General conditions for Turing and wave instabilities in reaction-diffusion systems* / E. Villar-Sepúlveda, A. R. Champneys // *Journal of Mathematical Biology*. 2023. Vol. 86, issue 3, no. 39.
14. *Maron, J. L. Spatial pattern formation in an insect host-parasitoid system* / J. L. Maron, S. Harrison // *Science*. 1997. Vol. 278, issue 5343. P. 1619–1621.
15. *Rietkerk, M. Regular pattern formation in real ecosystems* / M. Rietkerk, J. van de Koppel // *Trends in Ecology & Evolution*. 2008. Vol. 23, issue 3. P. 169–175.
16. *Mimura, M. On a diffusive prey–predator model which exhibits patchiness* / M. Mimura, J. D. Murray // *Journal of Theoretical Biology*. 1978. Vol. 75, issue 3. P. 249–262.
17. *Environmental metal pollution considered as noise: Effects on the spatial distribution of benthic foraminifera in two coastal marine areas of Sicily (Southern Italy)* / D. Valenti [et al.] // *Ecological Modelling*. 2008. Vol. 213. P. 449–462.
18. *Strier, D. Turing patterns inside cells* / D. Strier, S. Ponce Dawson // *PloS ONE*. 2007. Vol. 2. e1053.
19. *Sorokin, V. G. Nonlinear reaction–diffusion equations with delay: Partial survey, exact solutions, test problems, and numerical integration* / V. G. Sorokin, A. V. Vyazmin // *Mathematics*. 2022. Vol. 10, no. 11.
20. *Nayied, N. A. Fibonacci wavelet method for the numerical solution of nonlinear reaction-diffusion equations of Fisher-type* / N. A. Nayied, F. A. Shah, M. A. Khanday // *Mathematics*. 2023. Vol. 2023, no. 1705607.
21. *Firstova, N. Analysis of critical phenomena in a dynamic system under the influence of random perturbations* / N. Firstova // *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 272. P. 1–8.
22. *Kowalska-Styczeń, A. Noise induced unanimity and disorder in opinion formation* / A. Kowalska-Styczeń, K. Malarz // *PloS ONE*. 2020. Vol. 15. P. 0235313.
23. *Song, E. Impact of noise on the instability of spiral waves in stochastic 2D mathematical models of human atrial fibrillation* / E. Song // *Journal of Biological Physics*. 2023. Vol. 49. P. 1–13.
24. *Turing patterns in a fiber laser with a nested microresonator: Robust and controllable microcomb generation* / H. Bao [et al.] // *Physical Review Research*. 2020. Vol. 2, issue 2. P. 023395.
25. *Bratsun, D. Protein pattern formation induced by the joint effect of noise and delay in a multi-cellular system* / D. Bratsun // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*. 2022. Vol. 17, no. 16.

26. Jenkins, D. How do stochastic processes and genetic threshold effects explain incomplete penetrance and inform causal disease mechanisms? / D. Jenkins // *Philosophical Transactions of the Royal Society B*. 2024. Vol. 379, no. 1900. P. 20230045.
27. Das, D. Dichotomous-noise-induced pattern formation in a reaction-diffusion system / D. Das, D. S. Ray // *Phys. Rev. E*. 2013. Vol. 87, issue 6. P. 062924.
28. Alonso, S. Noise-reversed stability of Turing patterns versus Hopf oscillations near codimension-two conditions / S. Alonso, F. Sagués // *Phys. Rev. E*. 2009. Vol. 80, issue 3. P. 035203.
29. Di Patti, F. Robust stochastic Turing patterns in the development of a one-dimensional cyanobacterial organism / F. Di Patti [et al.] // *PLOS Biology*. 2018. May. Vol. 16, no. 5. P. 1–25.
30. Stochastic reaction and diffusion on growing domains: Understanding the breakdown of robust pattern formation / T. E. Woolley [et al.] // *Phys. Rev. E*. 2011. Vol. 84, issue 4. P. 046216.
31. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis: Theory and numerical algorithms / I. Bashkirtseva // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017. Vol. 192, no. 1. P. 012024.