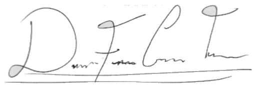
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Уральский федеральный
университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи



Касас Торрес Давид Фернандо

ИССЛЕДОВАНИЯ ВПОЛНЕ ДОСТИЖИМЫХ АВТОМАТОВ

Специальность 1.2.3 –
Теоретическая информатика, кибернетика

Автореферат
Диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2025

Работа выполнена на кафедре алгебры и фундаментальной информатики ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Волков Михаил Владимирович

Официальные оппоненты: **Гутерман Александр Эмилевич**,
доктор физико-математических наук,
доцент,
Университет имени Бар-Илана
(г. Рамат Ган, Израиль),
профессор департамента математики
Кабанов Владислав Владимирович,
доктор физико-математических наук,
профессор,
ФГБУН Институт математики и механики
им. Н.Н.Красовского Уральского отделения
Российской академии наук (г. Екатеринбург),
главный научный сотрудник отдела алгебры
и топологии
Хадиев Камиль Равилевич,
кандидат физико-математических наук,
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»,
доцент кафедры теоретической кибернетики

Защита диссертации состоится 21 мая 2025 года в 13:00 на заседании диссертационного совета УрФУ 1.2.05.22 по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина 51, зал диссертационных советов, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», `https://dissovet2.urfu.ru/mod/data/view.php?d=12&rid=7070`

Автореферат разослан «   » апреля 2025 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-
математических наук Косолобов Дмитрий Александрович

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработки темы исследования. Детерминированные конечные автоматы (ДКА) — это простые, но очень полезные теоретические устройства. Их простота не мешает им быть весьма интересной областью исследований как с точки зрения дискретной математики, так и с точки зрения компьютерных наук. Одно из наиболее распространенных применений ДКА состоит в их использовании в качестве средств распознавания языков. Благодаря классической теореме Клини давно известно, что ДКА способны распознавать класс регулярных языков. Тем не менее, интерес к ДКА этим отнюдь не ограничивается. ДКА могут представлять поведение замкнутой, но способной к изменениям системы при наличии некоторых входных данных. ДКА изучаются как (теоретические) машины, которые постоянно меняют внутреннее состояние (и, возможно, выходные данные) в зависимости от различных входных данных, которые они получают. Они могут моделировать различные реальные системы: от торговых автоматов до простых систем искусственного интеллекта.

Начнем с определений ключевых понятий, рассматриваемых в этой работе. ДКА, или отныне автомат, определяется как тройка $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma, \delta \rangle$, где Q и Σ являются конечными множествами, называемыми *множеством состояний* и *алфавитом* соответственно, а δ — это функция из $Q \times \Sigma$ в Q. Множество Q представляет возможные внутренние состояния, в которых может находиться автомат. Буквы алфавита Σ представляют все допустимые входные данные, получаемые автоматом. Функция δ отображает все возможные ситуации, пары состояний и входных данных, в которых может находиться автомат, на соответствующий выходной сигнал, представленный в виде состояния. Мы используем *правые* обозначения, т.е. для пары $(q, a) \in Q \times \Sigma$ мы представляем $\delta(q, a)$ как $q \cdot a$. Это позволяет нам опускать ссылку на функцию δ, когда мы ссылаемся на автоматы, т.е. мы пишем $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$. Кроме того, мы можем объединить несколько входных данных в *слово*, конечную последовательность букв, и определить ее действие на любом состоянии. Если $w = a_1 a_2 \cdots a_n$, мы обозначаем через $q \cdot w$ состояние после действия a_1, за которым следует действие a_2, и так далее, пока не достигнем a_n. Как обычно, Σ^* обозначает набор всех слов, которые могут быть образованы с использованием букв алфавита Σ. Мы можем применить любое слово w к непустому подмножеству состояний $P \subseteq Q$. Подмножество состояний, полученных в результате этой операции, обозначается $P \cdot w$.

Одно из наиболее полезных представлений автоматов — это их представление в виде помеченного ориентированного графа. Вершинами этого графа являются состояниям, а ориентированные ребра помечены буквами алфавита, представляющими их действия над состояниями. Точнее, если $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$ — автомат, то в графическом представлении $\mathcal{A}$ есть ребро, соединяющее состояния $p, q \in Q$, помеченное буквой a, т.е. $p \xrightarrow{a} q$ тогда и только тогда, когда $p \cdot a = q$. На рис. 1 показано графическое представление автомата с шестью состояниями и двумя буквами.

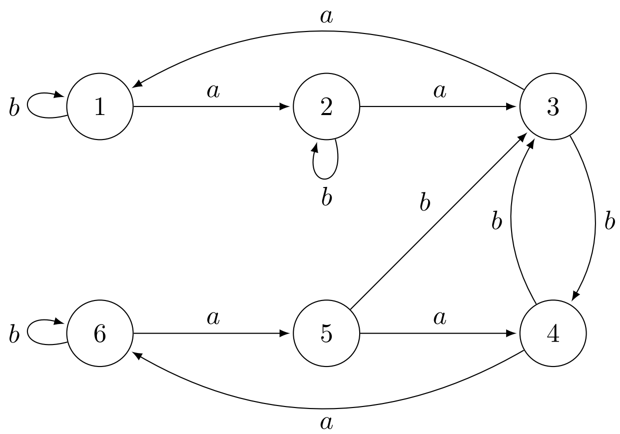


Рис. 1: Помеченный ориентированный граф автомата.

Синхронизация. Каждая физическая система подвержена ошибкам или вре́менным отключениям, из-за которых пользователь может потерять информацию о текущем состоянии системы. Из-за этого было бы удобно иметь последовательность входных данных, которая, независимо от текущего состояния системы, после завершения работы позволяла бы пользователю с полной уверенностью знать, в каком состоянии находится система. Это — одна из основных мотиваций понятия *синхронизации* автоматов. Синхронизируемый автомат допускает последовательность входных данных, чтение которых, независимо от того, в каком состоянии находится машина, всегда заканчивается в одном априори известном состоянии. Естественность этой концепции очевидна из-за того, что исследователи неоднократно открывали ее независимо друг от друга на протяжении всей истории теории автоматов; в то же время ее повсеместное распространение показывает, насколько полезной она может быть.

Дадим формальное определение. Автомат $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$ является *синхронизируемым*, если есть слово $w \in \Sigma^*$, называемое *словом перезагрузки* или *синхронизирующим словом*, такое, что $|Q \cdot w| = 1$. Предыдущее определение, предложенное в начале 1960-х гг. в [12] и [4], является наиболее распространенной формой определения синхронизируемости в литературе. Другими словами, слово перезагрузки переводит любое состояние в некоторое единственное состояние. Независимо от того, в каком состоянии начинается вычисление, оно всегда заканчивается в одном и том же месте.

Длина слов перезагрузки. Всегда полезно знать, какой длины могут быть синхронизирующие слова. При этом интересуются отысканием коротких слов, более конкретно, какой длины может быть самое короткое синхронизирующее слово для данного синхронизируемого автомата. Напомним, что длина слова — это количество букв, не обязательно различных, составляющих слово, например, слово $abbbaab$ имеет длину 7. Для синхронизируемого автомата $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathrm{rt}(\mathcal{A})$ длину его самых коротких слов перезагрузки, *порог синхронизации* $\mathcal{A}$. Одновременно с изложением концепции синхронизации, см. [4] и ее перевод на английский [5], Ян Черни предложил следующую серию автоматов $(\mathcal{C}_n)_{n\geq 2}$ где $\mathcal{C}_n = (\{1, 2, \ldots, n\}, \{a, b\})$, и $i \cdot a = i + 1$ для $1 \leq i \leq n - 1$ и $n \cdot a = 1$; b, $1 \cdot b = 2$ и $i \cdot b = i$ для $2 \leq i \leq n$, см. рис. 2. Он показал, что каждый $\mathcal{C}_n$ является синхронизируемым, а его крат-

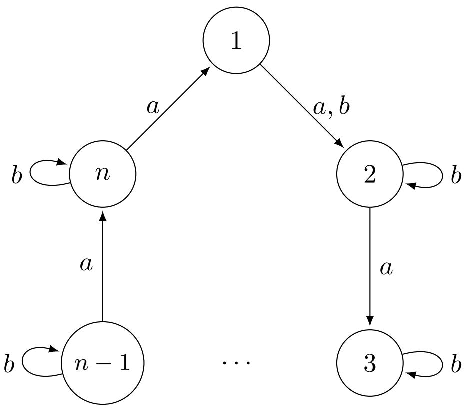


Рис. 2: Автомат $\mathcal{C}_n$

чайшее слово перезагрузки имеет вид $(ab^{n-1})^{n-2}a$, тем самым доказав, что $\mathrm{rt}(\mathcal{C}_n) = (n - 1)^2$.

Для каждого натурального $n \geq 2$ обозначим через $\mathfrak{C}(n)$ максимальный порог синхронизации всех синхронизируемых автоматов с n состояниями. Другими словами, для любого синхронизируемого автомата с n состояниями, мы можем гарантировать, что самое короткое слово перезагрузки для этого автомата имеет длину не больше $\mathfrak{C}(n)$. Черни своей серией автоматов доказал, что

$$(n-1)^2 \leq \mathfrak{C}(n) \leq 2^n - n - 1.$$

Верхняя граница тривиальна, поскольку это число непустых подмножеств размером больше единицы. Несколько лет спустя Петер Штарке [15] (переведено на английский в [16]) улучшил верхнюю границу до $1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ и впервые предположил, что $\mathfrak{C}(n) = (n-1)^2$. С тех пор эта гипотеза, получившая название *гипотезы Черни*, остается открытой. История работы над гипотезы содержит много интересных и глубоких результатов, см. обзорную статью [17].

Вполне достижимые автоматы. Хотя на момент написания диссертации гипотеза Черни все еще оставалась открытой в общем случае, она была доказана для нескольких подклассов автоматов. Сто́ит выделить случай *циклических* автоматов, в которых одна буква действует как циклическая перестановка всех состояний. Луи Дюбюк [7] доказал гипотезу Черни для такого рода автоматов. Это, наряду с несколькими другими примерами, наводит на мысль о том, что сто́ит сосредоточиться на некоторых конкретных классах синхронизируемых автоматов. Для данного автомата $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$ мы называем подмножество состояний $P \subseteq Q$ *достижимым*, если есть такое слово $w \in \Sigma^*$ что $Q \cdot w = P$. Если мы рассматриваем слова как функции, переводящие множество всех состояний в себя, то подмножество является достижимым, если оно является образом некоторого слова. Мы говорим, что автомат $\mathcal{A}$ является *вполне достижимым*, если достижимо каждое непустое подмножество. Заметим, что автомат является синхронизируемым, если достижимо некоторое подмножество размера один. Вот почему полная достижимость является специализацией концепции синхронизации.

Изучение вполне достижимых автоматов началось, хотя и не явно, с исследований Марины Масленниковой [13] по сложности языков. В этой работе она изучала сложность языков синхронизирующих слов некоторых автоматов. Сложность регулярного языка — это минимальное количество состояний, которыми должен обладать автомат, чтобы распознать этот язык. Масленникова доказала, что сложность языка всех синхронизирующих слов автоматов Черни растет экспоненциально с увеличением размера автомата. При этом она доказала, что автоматы Черни вполне достижимы. Хотя это не единственная причина, тот факт, что класс вполне достижимых автоматов содержит серию Черни, побудил к дальнейшему изучению автоматов с этим свойством.

Бондарь и Волков в [2] явно определили концепцию полной достижимости и приступили к изучению этого нового вида автоматов. При этом они ввели в рассмотрение два ключевых аспекта слова: его исключенные и повторяющиеся состояния. Будем рассматривать слова как преобразования множества состояний. Если размер образа слова меньше размера всего множества состояний, это означает, что есть состояния, которые не имеют прообраза относительно этого слова и, кроме того, есть состояния, которые имеют более одного состояния в качестве прообраза. Для данного слова w (в фиксированном, но произвольном автомате) множество состояний без прообраза называется *исключенным множеством* этого слова, а множество состояний с несколькими прообразами называется *повторяющимся множеством.* Размер исключенного множества для данного слова также имеет значение; он называется *дефектом* этого слова. Исходя из этих терминов, Бондарь и Волков предложили построить граф, который соединяет исключенные состояния с повторяющимися; сначала это делается для слов с дефектом 1. Сильная связность этого графа была достаточным, но не необходимым условием для полной достижимости автомата.

Хотя определение указанных графов и их использование для доказательства полной достижимости взяты из работы [2], истоки этих идей можно проследить до работ Игоря Рысцова, точнее, до его статьи [14]. Поэтому мы будем называть графы, определенные в [2] и [3], чтобы охарактеризовать полную достижимость, *графами Рысцова.*

В [3] Бондарь и Волков установили характеризацию вполне достижимых автоматов. Для этого они расширили построение ранее упомянутого графа, чтобы учесть слова с бо́льшим дефектом. Они предложили рекурсивное построение конечной серии графов. В каждом раунде в качестве набора вершин используются сильно связные компоненты ранее построенного графа, а для соединения этих вершин используются слова с бо́льшим дефектом. Число итераций в этом построении не превосходит числа состояний автомата. Используя эту конструкцию, Бондарь и Волков доказали, что данный автомат вполне достижим тогда и только тогда, когда граф, построенный после всего процесса, является сильно связным. Основной аргумент доказательства этого состоит в том, чтобы показать, что каждое непустое подмножество состояний имеет расширение, т.е. прообраз относительно некоторого слова, больший, чем исходное подмножество. Пересмотренная и расширенная версия этого процесса и доказательства представлены в [1].

С этих двух работ началось изучение полностью достижимых автоматов как специфического вида автоматов.

Здесь будет уместно рассказать о работе Хенка Дона [6]. В этой статье рассматриваются автоматы $\langle Q, \Sigma \rangle$, такие, что для каждого состояния $q \in Q$ существует слово с дефектом 1, которое исключает q. Дон называет такие автоматы *1-сокращающимися.* Используя другую терминологию, Дон доказывает, что если 1-сокращающийся автомат $\mathcal{A}$ порождает граф Рысцова с полным циклом, то $\mathcal{A}$ не только синхронизируем, но и вполне достижим и каждое непустое подмножество состояний достижимо словом, получающимся при приписывании друг к другу некоторых слов с дефектом 1.

В той же статье Дон выдвинул гипотезу, что для произвольного автомата с $n > 1$ состояниями, если подмножество размером $k < n$ достижимо, то существует слово длиной не более $n(n-k)$, которое достигает его. Это была очень сильная гипотеза, из которой, среди прочего, можно вывести гипотезу Черни. Позже эта гипотеза была опровергнута Гонзе и Юнгерсом [9]. В этой работе они продемонстрировали две серии автоматов: первая состоит из автоматов размера n, сравнимого с 3 по модулю 4, в которых существуют подмножества размером $n-2$, достижимые словами длины не меньшее $O(n^2)$; вторая серия автоматов увеличивает разрыв, указывая подмножества размером $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ (для $n > 6$), такие, что самые короткие слова, которые них достигают, имеют длину $2^n/n$. Кроме этих контрпримеров, в статье [9] предложен алгоритм, который за время, квадратичное от числа состояний автомата, позволяет вычислить граф Рысцова, предложенный в [2].

Определение того, является ли данный автомат вполне достижимым, является первой естественной проблемой, которую необходимо решить после введения этой концепции. Характеризация, представленная в [3] и [1], ее не решает, поскольку неизвестно, какова сложность построения всех слов с определенным дефектом или, по крайней мере, слов, необходимых для построения графов Рысцова. Проблема распознавания полной достижимости была решена Ференсом и Шикулой в [8], предложившими алгоритм, который за полиномиальное время от числа состояний автомата решает, является ли данный автомат вполне достижимым или нет. Идея алгоритма состоит в том, чтобы найти наибольшее подмножество, которое не может быть расширено. Оба условия — быть наибольшим и нерасширяемым — влекут, что это подмножество недостижимо. Если предложенный алгоритм не возвращает никакого подмножества, можно сделать вывод, что автомат, заданный в качестве входных данных, вполне достижим. В [8] указан также алгоритм для поиска короткого достигающего слова для любого подмножества состояний автомата при условии, что это подмножество достижимо. Используя этот алгоритм, можно получить частичный, но важный результат в отношении длины достигающих слов. Ференс и Шикула доказывают, что если автомат $\mathcal{A}$ имеет $n > 1$ состояний и вполне достижим, то для каждого подмножества размером $k < n$ существует достигающее это подмножество слово длиной не более $2n(n-k)$.

Имеются и другие рассмотрения вполне достижимых автоматов, которые выходят за рамки алгоритмики и ограничения длины достигающих слов. Сто́ит упомянуть работы Стефана Хоффмана [11] и [10]. В

[11] Хоффман характеризует примитивные группы степени[1] по меньшей мере 5 как такие группы перестановок, которые при наличии любого преобразования дефекта 1 гарантируют полную достижимость получающегося автомата. В [10] Хоффман возвращается к теме сложности языка синхронизирующих слов. Он доказывает достаточное условие для бинарных автоматов, при котором их язык синхронизирующих слов имеет максимальную сложность; затем он добавляет к примерам, приведенным в [13], новые серии автоматов с максимальной сложностью языка синхронизирующих слов.

Как мы видим, изучение вполне достижимых автоматов — это относительно новый аспект старой проблемы. Он оказался плодородной почвой для новых интересных открытий и проблем. В диссертации мы рассмотрим некоторые из этих новых открытий.

Цели и задачи исследования. Основной целью работы является дальнейшее изучение вполне достижимых автоматов. Для этого мы определили следующие более конкретные задачи:

- Найти альтернативные удобные характеризации вполне достижимых автоматов и методы для определения того, является ли данный автомат вполне достижимым.
- Изучить длины слов, достигающих каждое непустое подмножество.
- Определить, выполняется ли гипотеза Дона для какого-либо типа автоматов.

При преобразовании $f\colon Q \to Q$ конечного множества в себя, мы можем рассмотреть две стороны: *образ* и *ядро*. Ядро представляет собой разбиение множества Q, блоки которого состоят из состояний с одинаковым образом при f. Дополнительной целью работы является изучение автоматов, в которых для любого возможного разбиения множества состояний существует такое преобразование, что его ядро является данным разбиением.

Методология и методы диссертационного исследования. Проведенное исследование было в основном теоретическим. В нем использовались методы из нескольких областей математики и теоретической информатики. Среди них можно выделить теорию автоматов, теорию алгоритмов, теорию графов и теорию конечных групп перестановок. Для построения примеров проводились компьютерные эксперименты.

[1] Степень группы перестановок — это число точек, на которые действует группа. В данном случае это число состояний автомата.

Положения, выносимые на защиту:

1. Разработан алгоритм построения различных уровней графа Рысцова данного автомата за полиномиальное время от размера автомата.

2. Доказана характеризация бинарных вполне достижимых автоматов. На основе этой характеризации получен квазилинейный алгоритм для определения того, является ли данный бинарный автомат вполне достижимым.

3. Указано семейство стандартизированных бинарных вполне достижимых автоматов, удовлетворяющих гипотезе Дона.

4. Как обобщение исследований, выполненных в бинарном случае, найдена частичная характеризация вполне достижимых почти групповых автоматов. Кроме того, частично описана структура графов Рысцова для таких автоматов.

5. Рассмотрено понятие, двойственное к полной достижимости: автоматы, для которых все возможные разбиения множества состояний возникают как ядерные эквивалентности преобразований, заданных некоторыми словами. Для таких автоматов получена характеризация, проверяемая за полиномиальное время от размера автомата.

Научная новизна исследования. В диссертации приводятся (с соответствующими ссылками) некоторые известные результаты, нужные, чтобы поместить обсуждение в должный контекст. Все остальные результаты диссертации являются новыми и составляют вклад соискателя в рассматриваемую тему.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты расширяют знания не только об основном объекте исследования, которым являются вполне достижимые автоматы, но и о всей области, связанной с синхронизацией автоматов. Некоторые из описанных алгоритмов выполняются за полиномиальное время, что всегда является желательной характеристикой в этой области. Это создает стабильную основу для любой практической реализации, необходимой для дальнейших исследований.

Достоверность полученных результатов. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгостью используемого математического аппарата.

Личный вклад автора. Результаты, упомянутые в пп. 1, 4 и 5 раздела «Положения, выносимые на защиту», получены автором лично. Алгоритм из п. 1 опубликован в совместной статье [1] с Е.А. Бондарь и М.В. Волковым, которым принадлежат теоретические результаты этой статьи, не включенные в данную диссертационную работу. Теоретические результаты из пп. 2 и 3 раздела «Положения, выносимые на защиту», получены автором в нераздельном соавторе с научным руководителем; компьютерные эксперименты для нахождения примеров и контрпримеров в пп. 2 и 3 выполнены автором лично.

Апробация результатов. Результаты диссертации были представлены на следующих научных мероприятиях:

- Научный семинар «Алгебраические системы» Института естественных наук и математики, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия, 2021–2024.

- Международная (52-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений», Екатеринбург, Россия, 2022ю

- LATIN 2022: The 15th Latin American Theoretical Informatics Symposium, Гуанахуато, Мексика, 2022.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 3 работах, опубликованных в рецензируемых научных журналах и рецензируемых трудах международной конференции и входящих в международные базы цитирования Web of Science и Scopus.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, и заключения. Объем диссертации составляет 98 страниц, список литературы содержит 39 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обсуждаются актуальность и степень разработки темы исследования, ставятся основные задачи и дается обзор содержания диссертации.

Глава 1 посвящена алгоритму для построения графа Рысцова.

Если даны автомат $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$ и слово $w \in \Sigma^*$, *образом* w называется множество $Q \cdot w$, а *исключенным множеством* $\mathrm{excl}(w)$ слова w называется дополнением $Q \backslash Q \cdot w$ образа. Число $|\mathrm{excl}(w)|$ называется *дефектом* слова w. Если слово w имеет дефект 1, его исключенное множество состоит из одного состояния, называемого *исключенным состоянием* для w. Далее, для любого $w \in \Sigma^*$ множество

$$\{p \in Q \mid p = q_1 \cdot w = q_2 \cdot w \quad \text{для некоторых} \quad q_1 \neq q_2\}$$

называется *повторяющимся множеством* слова w и обозначается через $\mathrm{dupl}(w)$. Если w имеет дефект 1, его повторяющееся множество состоит из одного состояния, называемого *повторяющимся состоянием* для w. Мы отождествляем одноэлементные множества с их элементами, и, следовательно, для слова w с дефектом 1, $\mathrm{excl}(w)$ и $\mathrm{dupl}(w)$ означают его исключенное и, соответственно, повторяющееся состояния.

Если $\mathcal{A}$ — автомат с $n \geq 2$ состояниями, то построение графа Рысцова автомата $\mathcal{A}$, обозначаемого $\Gamma(\mathcal{A})$, требует итеративного построения промежуточных графов $\Gamma_1(\mathcal{A}), \Gamma_2(\mathcal{A}), \ldots$. Каждый раз, когда получается промежуточный граф $\Gamma_k(\mathcal{A})$, мы проверяем, является ли он сильно связным. Если это так, построение прекращается. В противном случае мы должны решить, можно ли построить следующий промежуточный граф. Для этого мы вычисляем сильно связные компоненты и определяем, является ли хотя бы одна из них *достаточно большой.* Если это так, то каждая сильно связная компонента консолидируется в одну вершину, и множество таких вершин выступает в роли множества вершин следующего графа. Таким образом, множество вершин промежуточных графов получается при консолидации ранее сформированных вершин. Иногда полезно различать состояния исходного автомата внутри этих вершин; если C является вершиной из $\Gamma_k(\mathcal{A})$, мы называем *листвой* вершины C множество этих состояний и обозначаем его через $\mathrm{leaf}(C)$.

В оригинальном построении, проделанном в [3] и [1], для вычисления промежуточного графа $\Gamma_k(\mathcal{A})$ необходимо учитывать все слова с дефектом k. Это связано с тем, что при определенных условиях такое слово может определять ребро вышеупомянутого графа; когда это происходит, мы говорим, что слово *вынуждает* ребро. В принципе, рассмотрение всех слов непрактично, поскольку количество указанных слов может быть экспоненциальным относительно n. В диссертации мы представляем схему вычисления всех необходимых компонентов промежуточных шагов, обходя требование учета всех возможных слов. Мы делаем это, рассматривая пары подмножеств, которые представляют ребра графов. Сначала мы показываем, что таких пар значительно меньше, чем слов. Более конкретно, если мы вычисляем граф $\Gamma_k(\mathcal{A})$, то число пар имеет порядок $O(n^{2k})$. Затем мы описываем процесс поиска в ширину для вычисления этих пар и доказываем, что его временна́я сложность является полиномиальной по отношению к n. Это подтверждается следующей теоремой.

Теорема 1.5. *Пусть $\mathcal{A}$ — автомат с n состояниями и m входными буквами. Для каждого $k < n$ существует алгоритм, который строит граф $\Gamma_k(\mathcal{A})$ за время $O(mn^{2k} \log(n))$.*

В **главе 2** посвящена бинарным автоматам, т.е. автоматам с двумя буквами. Мы изучаем, при каких условиях эти автоматы вполне достижимы. Сначала мы доказываем, что для бинарных автоматов с более чем двумя состояниями для полной достижимости необходимо, чтобы одна из букв была циклической перестановкой всех состояний, а другая имела дефект 1. В этой главе буквы обсуждаемых автоматов обозначаются следующим образом: a — буква дефекта 1, b — буква, которая действует как циклическая перестановка. Далее, наличие циклической перестановки позволяет нам рассматривать множество состояний как множество $\mathbb{Z}_n :=\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Это множество — носитель циклической группы $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$. Кроме того, мы рассматриваем автоматы $\langle \mathbb{Z}_n, \{a, b\}\rangle$ такие, что:

- буква a имеет дефект 1, $\mathrm{excl}(a) = 0$ и $0 \cdot a = \mathrm{dupl}(a)$;
- $q \cdot b = q \oplus 1$ для каждого $q \in \mathbb{Z}_n$.

Мы называем такие автоматы *стандартизированными*. Наши рассмотрения показывают, что мы можем получить стандартизированный двоичный автомат из любого произвольного бинарного автомата с буквой дефекта 1 и циклической перестановкой и что стандартизированная версия вполне достижима тогда и только тогда, когда вполне достижима исходный автомат. Поэтому для простоты мы рассматриваем стандартизированные автоматы.

Пусть $\langle \mathbb{Z}_n, \{a, b\}\rangle$ — стандартизированный автомат, а $w \in \{a, b\}^*$. Подмножество $S \subseteq \mathbb{Z}_n$ называется *w-инвариантным*, если $S \cdot w \subseteq S$. Используя это понятие, мы получаем основную теорему этой главы.

Теорема 2.1. *Бинарный автомат $\mathcal{A}$ с n состояниями вполне достижим тогда и только тогда, когда либо $n = 2$ и $\mathcal{A}$ является автоматом-переключателем, либо одна из букв в $\mathcal{A}$ действует как циклическая перестановка множества состояний, а другая буква имеет дефект* 1, *и в стандартизированном автомате $\langle \mathbb{Z}_n, \{a, b\}\rangle$, синтаксически эквивалентном $\mathcal{A}$, ни одна собственная подгруппа группы $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$ не является a-инвариантной.*

Отсюда выводится почти линейный по времени алгоритм, позволяющий определить полную достижимость для такого рода автоматов.

Помимо этой теоремы, мы устанавливаем связь между графами Рыстова бинарных вполне достижимых автоматов и некоторыми подгруппами группы $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$.

Мы продолжаем обсуждение бинарных вполне достижимых автоматов в **главе 3**. Сначала отметим, что в общем случае бинарные автоматы не удовлетворяют гипотезе Дона. Это недавний, на момент написания диссертации, результат, полученный Чжу, см. [18]. Тем не менее, гипотеза все еще остается открытой для стандартизированных автоматов. В этой главе мы демонстрируем наш подход к ее решению.

Мы сохраняем обозначения, используемые в **главе 2**, т.е. множество состояний равно $\mathbb{Z}_n$ для $n > 2$; b — циклическая перестановка; a — буква дефекта 1 и $0 = \mathrm{excl}(a)$. Кроме того, мы обозначаем $d = \mathrm{dupl}(a)$. Отметим, что буква дефекта 1 действует как перестановка на множестве $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$. Поэтому имеет смысл говорить о *орбите* d под действием a, т.е. о множестве элементов, которые могут быть достигнуты из d путем многократного применения буквы a. Обозначим это множество через $\mathrm{orb}(d)$. Далее, рассмотрим подгруппу $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$, порожденную этой орбитой. Мы называем эту подгруппу *орбитальная подгруппа* автомата. Наш основной результат заключается в следующем.

Теорема 3.1. *Каждый стандартизированный автомат $\langle \mathbb{Z}_n, \{a, b\} \rangle$, орбитальная подгруппа которого совпадает с группой $(\mathbb{Z}_n, \oplus)$, удовлетворяет гипотезе Дона.*

Чтобы доказать эту теорему, используется метод расширения. Пусть $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$ — автомат с $n > 2$ состояниями. Мы говорим, что слово $w \in \Sigma^*$ *расширяет* собственное непустое подмножество $S \subset Q$, если существует подмножество $P \subseteq Q$ такое, что $|P| > |S|$ и $P \cdot w = S$. В вполне достижимом автомате каждое собственное непустое подмножество имеет слово, которое его расширяет. Метод расширения направлен на ограничение длин слов, которые расширяют каждое подмножество. Более точно, если число состояний автомата равно n, то собственное непустое подмножество состояний называется *n-расширяемым*, если оно может быть расширено словом длины не более n. Мы доказываем, что если любое собственное непустое подмножество Q является n-расширяемым, то $\mathcal{A}$ удовлетворяет гипотезе Дона. Затем мы рассматриваем подграф графа Рысцова $\Gamma_1(\mathcal{A})$, ребра которого вынуждены только словами с дефектом 1 длиной менее n и описываем структуру этого подграфа. Это позволяет доказать нашу главную теорему.

Мы приводим несколько примеров того, что одного метода расширения недостаточно для доказательства гипотезы Дона для стандартизированных автоматов.

В **главе 4** мы обобщаем обсуждения **главы 2**. В этой главе мы рассматриваем автоматы $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$, где $\Sigma = \Sigma_0 \cup \{a\}$ и:

- буквы из Σ_0 — это перестановки множества Q;
- порождаемая этими перестановками подгруппа $G = \langle \Sigma_0 \rangle$ является транзитивной;
- буква a имеет дефект 1.

Мы называем автоматы с этими характеристиками *почти групповыми* автоматами. Исключенное состояние единственной буквы дефекта 1 обозначается через e, т.е. $\mathrm{excl}(a) = e$.

Напомним, что если G является транзитивной группой перестановок множества Q, то подмножество $B \subseteq Q$ называется *блоком импримитивности*, если $B \cdot g = B$ или $B \cdot g \cap B = \emptyset$ для каждого $g \in G$. Множество Q и одноэлементные подмножества называются тривиальными блоками. Группа с нетривиальным блоком импримитивности называется *импримитивной*. Все образы этого блока импримитивности под действием перестановок группы образуют разбиение множества Q; это разбиение называется *системой импримитивности*.

Известно, см. [11], что если почти групповой автомат имеет только тривиальный блок импримитивности, то он вполне достижим. Таким образом, мы сосредоточим наше внимание на таких почти групповых автоматах, что у группы G есть по крайней мере одна нетривиальная система импримитивности. Для каждой из этих систем существует блок, содержащий e. Мы доказываем, что если почти групповой автомат вполне достижим, то ни один блок импримитивности, содержащий e, не инвариантен относительно a. Это обобщение бинарного случая.

Другим обобщением, которое мы делаем, является описание структуры графов Рысцова, порожденных почти групповыми автоматами. Мы доказываем, что все слои вершин в графах Рысцова почти групповых автоматов образуют системы импримитивности.

Мы видим некоторое сходство между результатами, представленными в этой главе, и результатами, полученными в случае бинарных автоматов. Этот факт подсказывает, что должно быть условие полной достижимости, аналогичное условию теоремы 2.1, и мы стремились доказать это. Для этого нужно было бы доказать, что всякий раз, когда граф Рысцова почти группового автомата не является сильно связным, т.е. автомат не является вполне достижимым, существует блок импримитивности, содержащий e и инвариантный относительно буквы a. Но мы тут столкнулись с некоторыми трудностями. Хотя мы не смогли получить желаемый результат, мы нашли частичный ответ, охватывающий большое количество случаев.

Чтобы сформулировать этот частичный результат, мы должны обратиться к теории конечных групп перестановок. Нужны два определения: во-первых, *стабилизирующая подгруппа* подмножества элементов — множество всех перестановок, которые оставляют это подмножество инвариантным; во-вторых, *ядро* подгруппы, которое является пересечением всех сопряженных с ней подгрупп. Нас интересует ядро стабилизатора возможных блоков импримитивности, которые могла бы иметь группа G. Это ядро мы называем ядром самого блока.

Обозначим сильно связную компоненту графа $\Gamma_k(\mathcal{A})$, которая содержит e, через $C_e^{[k]}$, а ее ядро — через $\mathrm{Cr}(C_e^{[k]})$. Теперь мы можем сформулировать основную теорему главы.

Теорема 4.2. *Пусть $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma_0 \cup \{a\} \rangle$ — почти групповой автомат. Предположим, что граф $\Gamma(\mathcal{A})$ не является сильно связным. Это означает, что $\Gamma(\mathcal{A}) = \Gamma_k(\mathcal{A})$ для некоторого $k \geq 1$ и ${C_e}^{[k]} = {C_e}^{[j]}$ для каждого $j \geq k$. Кроме того, предположим, что для каждого $\ell \geq k$ ядра $\mathrm{Cr}({C_e}^{[\ell]})$ действуют транзитивно на ${C_e}^{[\ell]}$. Тогда множество $\mathrm{leaf}({C_e}^{[k]})$ инвариантно относительно a.*

В **главе 5** мы переключаем внимание с достижимых подмножеств на реализуемые разбиения множества состояний. Каждое преобразование определяет не только подмножество состояний, образ, но и разбиение или отношение эквивалентности в множестве состояний. Два разных состояния связаны этим отношением, если они имеют одинаковый образ при данном преобразовании. В предыдущих главах мы сосредоточили наше внимание на подмножествах и возможности получения их все в качестве образов преобразований. В этой главе мы изучаем автоматы, для которых преобразования могут реализовать все возможные разбиения множества состояний. Мы называем такие автоматы *вполне совместимыми*. Сначала мы приведем несколько примеров, а затем даем характеризацию этого нового вида автоматов.

Теорема 5.1. *Автомат $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$ вполне совместим тогда и только тогда, когда для каждой пары состояний $p, q \in Q$ существует такое слово $w \in \Sigma^*$ с дефектом 1, что $p \cdot w = q \cdot w$.*

Эта характеризация позволяет разработать простой алгоритм с полиномиальной временно́й сложностью для распознавания вполне совместимых автоматов. Мы приводим пример серии вполне совместимых автоматов с наименьшим из возможных синтаксических моноидов. В конце мы доказываем, что существует связь между некоторыми видами вполне совместимых автоматов и вполне достижимыми автоматами. Более конкретно, имеет место

Следствие 5.2. *Если автомат $\mathcal{A} = \langle Q, \Sigma \rangle$ является вполне совместимым, а группа, порождаемая Σ_0, транзитивна, то автомат $\mathcal{A}$ вполне достижим.*

В **заключении** подведены итоги диссертационной работы и предложены возможные направления дальнейшего исследования.

Заключение

В диссертации мы, в основном, рассматривали вполне достижимые автоматы. Такие автоматы являются частным случаем синхронизируемых. Мы сосредоточили наше внимание на автоматах, буквы которых имеют максимально возможный ранг, то есть на перестановках и буквах с дефектом 1. На первый взгляд, такого рода автоматы выглядят простыми, но они продемонстрировали большой потенциал для интересных исследований.

Основные результаты диссертации:

- Разработан алгоритм построения различных уровней графа Рысцова данного автомата за полиномиальное время от размера автомата.

- Доказана характеризация бинарных вполне достижимых автоматов. На основе этой характеризации получен квазилинейный алгоритм для определения того, является ли данный бинарный автомат вполне достижимым.

- Указано семейство стандартизированных бинарных вполне достижимых автоматов, удовлетворяющих гипотезе Дона.

- Как обобщение исследований, выполненных в бинарном случае, найдена частичная характеризация вполне достижимых почти групповых автоматов. Кроме того, частично описана структура графов Рысцова для таких автоматов.

- Рассмотрено понятие, двойственное к полной достижимости: автоматы, для которых все возможные разбиения множества состояний возникают как ядерные эквивалентности преобразований, заданных некоторыми словами. Для таких автоматов получена характеризация, проверяемая за полиномиальное время от размера автомата.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах, определенных ВАК РФ и Аттестационным советом УрФУ.

1. Eugenija A. Bondar, David Casas, and Mikhail V. Volkov. Completely reachable automata: An interplay between automata, graphs, and trees. *International Journal of Foundations of Computer Science*, **34**(06): 655—690, 2023; 2,25 п.л. / 0,75 п.л. (Scopus, WoS).

2. David Casas. A characterization of totally compatible automata. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, **27**(4): 249–257, 2022; 0,5 п.л. (Scopus).

3. David Casas and Mikhail V. Volkov. Binary completely reachable automata. In: A. Castañeda, F. Rodríguez-Henríquez (eds.), *LATIN 2022: Theoretical Informatics* [Lecture Notes in Computer Science, **13568**], pp. 345–358, Springer, Cham, 2022; 0,875 п.л. / 0,44 п.л. (Scopus).

Список литературы

[1] E. Bondar, D. Casas, and M. Volkov. Completely reachable automata: An interplay between automata, graphs, and trees. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 34(06):655–690, 2023.

[2] E. Bondar and M. Volkov. Completely reachable automata. In *Descriptional Complexity of Formal Systems*, pages 1–17. Springer, 2016.

[3] E. Bondar and M. Volkov. A characterization of completely reachable automata. In *Developments in Language Theory*, pages 145–155. Springer, 2018.

[4] J. Černỳ. Poznámka k homogénnym experimentom s konečnỳmi automatmi. *Matematicko-fyzikálny Časopis Slovensky Akadmie Vied*, 14(3):208–216, 1964.

[5] J. Černý. A note on homogeneous experiments with finite automata. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 24(2–4):123–132, 2019.

[6] H. Don. The Černý conjecture and 1-contracting automata. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 23(3): Paper 3.12, 2016.

[7] L. Dubuc. Sur les automates circulaires et la conjecture de Černý. *RAIRO – Theoretical Informatics and Applications*, 32(1-3):21–34, 1998.

[8] R. Ferens and M. Szykuła. Completely reachable automata: A polynomial algorithm and quadratic upper bounds. In *50th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP 2023)*, pages 59:1–59:17. Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik, 2023.

[9] F. Gonze and R. Jungers. Hardly reachable subsets and completely reachable automata with 1-deficient words. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 24(2–4):321–342, 2019.

[10] S. Hoffmann. Binary and circular automata having maximal state complexity for the set of synchronizing words. *Information and Computation*, 295: article no. 105076, 2023.

[11] S. Hoffmann. New characterizations of primitive permutation groups with applications to synchronizing automata. *Information and Computation*, 295: article no. 105086, 2023.

[12] C. Liu. *Some memory aspects of finite automata*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Electrical Engineering, 1962.

[13] M. Maslennikova. Reset complexity of ideal languages. In Mária Bieliková, Gerhard Friedrich, Georg Gottlob, Stefan Katzenbeisser, and György Turán, editors, *SOFSEM 2012: Theory and Practice of Computer Science (Institute of Computer Science Academy of Sciences of the Czech Republic)*, pages 33–44. See also `https://arxiv.org/abs/1404.2816`, 2012.

[14] I. Rystsov. Estimation of the length of reset words for automata with simple idempotents. *Cybernetics and Systems Analysis*, 36(3):339–344, 2000.

[15] P. Starke. Eine Bemerkung über homogene Experimente. *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik*, 2(4):257–259, 1966.

[16] P. Starke. A remark about homogeneous experiments. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 24(2–4):133–137, 2019.

[17] M. Volkov. Synchronization of finite automata. *Russian Mathematical Surveys*, 77(5):819–891, 2022.

[18] Z. Yinfeng. Around Don's conjecture for binary completely reachable automata. In *Developments in Language Theory*, pages 282–295. Springer, 2024.