Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого
Президента России Б.Н. Ельцина»
Институт естественных наук и математики
Кафедра теоретической и математической физики

На правах рукописи

Беляев Александр Владимирович

Математическое моделирование и анализ стохастической динамики дискретных популяций

Специальность 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Ряшко Лев Борисович

Екатеринбург — 2024

Оглавление

Стр.

Стр.

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Область научных исследований, связанная с моделированием и анализом популяционных систем, в последние годы привлекает внимание не только биологов, но и математиков. Интерес к данным моделям с математической точки зрения прежде всего связан с необходимостью их описания языком динамических систем. Основная задача заключается в описании бифуркаций и анализе возможных динамических режимов как регулярных, так и хаотических. Популяционные модели используются, например, для определения максимально допустимого уровня промыслов, выяснения механизмов воздействия биологических инвазий, экологических сдвигов и катастроф. Такие модели используются для понимания законов распространения паразитов, вирусов и болезней [1—5]. Одним из важнейших направлений применения популяционных моделей является идентификация условий, приводящих к вымиранию, и разработка методов предотвращения сокращения численности видов.

Самыми первыми популяционными моделями считаются модель экспоненциального роста (модель Мальтуса [6]) и логистическая модель Ферхюльста—Перла—Рида [7—9]. Известно огромное количество вариаций этой модели, например, модель Рикера, предложенная для описания динамики популяций рыб [10; 11], модель Базыкина, учитывающая сложный характер роста локальной популяции [12; 13], модель гиперболического роста [14], модель Бевертона—Холта, учитывающая конкуренцию видов и ограниченность роста [15; 16], модель Капицы, предложенная для описания роста населения Земли [17] и др.

В настоящее время изучению динамики локальных изолированных популяций посвящено большое количество исследований, представленных, например, в работах Е. Я. Фрисмана, М. П. Кулакова, О. Л. Ревуцкой, Е. В. Ласта, Д. О. Логофета, И. Н. Клочковой, О. Л. Ждановой [18—23]. Существует большое количество как непрерывных, так и дискретных математических моделей, которые применяются для описания динамики реальных популяций, исследованных, например, в работах Аллена, Хасселя, Рикера, Кребса и других [11; 15; 24—29]. Эти модели также применяются для теоретических исследований, направленных на определение принципов функционирования отдельной популяции и всего биологического сообщества (см., например, работы Николсона, Бейли, Розенцвейга, Мак-Артура и других [12; 13; 30—49]).

Следующим значимым этапом в области динамики популяций стало введение модели хищник-жертва, также известной как модель Лотки—Вольтерры [42]. Существует множество модификаций данной модели, среди которых можно отметить модель, предложенную А. Розенцвейгом и Р. Х. Мак-Артуром [35], а также модель Колмогорова [33; 34]. Известная модификация А. Д. Базыкина модели хищник-жертва учитывает насыщение роста хищника и ограниченные возможности увеличения численности [13]. Модель А. Д. Базыкина представляет собой обобщение классической модели Лотки—Вольтерры и демонстрирует более сложные динамические режимы. При определенных параметрах система способна переходить в режим автоколебаний, что приводит к формированию асимптотически устойчивого предельного цикла в фазовом пространстве, который не зависит от начальных условий

Первым разностным аналогом модели Лотки—Вольтерры является модель Николсона—Бейли, описывающая взаимодействия типа хозяин-паразит. В рамках исследований [30; 50] было выяснено, что такие взаимодействующие популяции имеют выраженные и непересекающиеся стадии развития, то есть поколения описываются дискретным законом. Это контрастирует с моделью Лотки—Вольтерры, в которой предполагается наложение поколений и непрерывность процессов рождаемости и смертности. Введение дискретных поколений приводит к временному отставанию между потреблением жертвы и воспроизводством хищника, что становится основным различием между дискретными и непрерывными моделями хищник-жертва [51; 52]. В дискретной модели, как и в аналогичной непрерывной, могут возникать колебания с возрастающей амплитудой, напоминающие вспышки. При этом численности паразита и хозяина колеблются вокруг своих стационарных состояний, причем колебания численности паразита отстают по фазе от колебаний хозяина на четверть периода. Несмотря на ограничения, присущие таким колебательным режимам, модель Николсона—Бейли нашла широкое применение, в том числе для описания пятнистого пространственного распределения планктона, представленног [24; 53; 54].

В настоящее время дискретные вариации модели хищник-жертва продолжают активно исследоваться [55—62]. Например, в рамках теории динамического хаоса в работах [57; 63—65] анализируются колебания в дискретных системах хищник-жертва (хозяин-паразит). В моделях с дискретным временем даже простейшие формы нелинейности могут приводить к появлению различных сложных динамических режимов [66—68]. Также следует отметить модели, учитывающие различные факторы взаимодействия, такие как совместная охота, разделение популяции по полу или возрасту [69—73], а также различные версии функций Холлинга [74].

Особое значение в дискретных популяционных моделях имеет концептуальная модель, предложенная Рикером [10] в контексте управления запасами и восполнения ресурсов в рыболовстве. Модель Рикера описывает популяцию с тенденцией к экспоненциальному росту при низкой плотности и к снижению при высокой плотности. В отличие от логистической, в этой модели отсутствует искусственное ограничение на размер популяций. Некоторые исследования модели Рикера представлены в работах [75—77].

Предложенная Робертом Мэйем исследовательская парадигма «простая модель – сложная динамика» [40] является важной отправной точкой в различных исследованиях. Простые модели популяций, описывающие сложные сценарии совместной динамики двух популяций логистического типа, рассматривались во многих работах (см., например [78—81]). В этих моделях были обнаружены различные нелинейные динамические режимы, такие как мультистабильность, трансверсальная неустойчивость и фрактальные бассейны [79], двухпериодические хаотические аттракторы [78], вызванная кризисом перемежаемость [80], двумерные торы [82] и т.д. В качестве основного инструмента для анализа этих режимов и их трансформаций используется современная теория бифуркаций [83—85]. Различные феномены, наблюдаемые в многомерных непрерывных моделях, наблюдаются также в дискретных моделях меньшей размерности, что позволяет избавиться от сложности моделирования непрерывных систем.

Среди систем взаимодействующих популяций особенно выделяется система связанных популяций, которую в популяционной экологии принято называть метапопуляцией [13; 86—88]. Метапопуляция состоит из группы пространственно разделенных популяций одного и того же вида, которые взаимодействуют на определенном уровне. Современные исследования метапопуляций учитывают пространственную неоднородность ареалов обитания [89]. Исследования метапопуляций на основе как непрерывных, так и дискретных моделей представлены в работах [24; 90—104].

Помимо моделей связанных популяционных систем следует упомянуть модели связанных механических, электронных и нейронных систем. Большое количество работ посвящено таким явлениям, как синхронизация [105; 106] и самоорганизация [107; 108]. В последнее время активно исследуются динамические режимы химер в связанных системах (см., например, [109—111]).

Присутствие случайных возмущений является неизбежным атрибутом функционирования любой живой системы, в частности популяционной. Случайные колебания среды могут кардинально изменить динамическое поведение системы, порождая режимы, не имеющие аналогов в исходной детерминированной модели (см., например, [2; 112]). Шум в нелинейных системах играет конструктивную роль [113; 114]. Активно исследуются такие нелинейные стохастические феномены, как индуцированные шумом переходы [113; 115—119], стохастические бифуркации [120—125], стохастический и когерентный резонанс [126—134], вызванный шумом порядок и хаос [135—139], вызванная шумом синхронизация [105; 106], возбудимость [140—142], перемежаемость [143—145], мультимодальность [146; 147], индуцированные шумом кризисы [148; 149]. В частности для моделей связанных систем активно изучаются индуцированные шумом изменения режимов динамики (см., например [150—155]). В последнее время, наряду с гауссовскими, активно изучаются динамические модели с более сложными случайными возмущениями, задаваемыми, например, шумами Леви [156—159].

Исследование детерминированной динамики метапопуляций привлекает внимание многих ученых, как в области экологии, так и математики [160—162]. Особый интерес представляют исследования эффектов взаимных миграций в метапопуляциях [97; 163—165]. В то время как детерминированные модели динамики популяций дают много информации о плотности популяции (и влиянии параметров модели на этот параметр), добавление внешнего шума обеспечивает дополнительный реализм и, следовательно, дополнительную информацию, представляющую интерес для исследователей популяционных моделей (см., например, [166; 205; 167—170]). Основная часть настоящей работы также посвящена исследованию стохастических феноменов в метапопуляционной модели таких, как временная стабилизация неустойчивого равновесия, разрушение противофазной и синфазной синхронизации, переключение между синфазным и противофазным режимом, переходы от порядка к хаосу и наоборот.

Прямое численное моделирование остается основным инструментом изучения подобных нелинейных стохастических явлений. В рамках этого чрезвычайно затратного метода трудно получить подробные параметрические описания различных стохастических режимов исследуемых моделей. Для проведения детального параметрического анализа вероятностных механизмов этих новых стохастических явлений требуется развитие аналитических подходов. Строгое математическое описание динамики вероятностных распределений в дискретных динамических системах с гауссовскими шумами дают функциональные уравнения с операторами Перрона—Фробениуса [171; 172]. Однако аналитическое решение таких уравнений даже в одномерном случае возможно только для специально отобранных примеров. В работах [173; 174] для аппроксимации распределения случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов дискретных систем (равновесий и циклов) был предложен конструктивный подход, основанный на анализе стохастической чувствительности. В дальнейшем этот подход был распространен на системы с более сложными квазипериодическими [175; 176] и хаотическими [177—179] аттракторами. На основе метода функции стохастической чувствительности и метода доверительных областей был решен широкий круг исследовательских задач: индуцированные шумом переходы между аттракторами и их частями, стохастическая возбудимость, обратные стохастические бифуркации, индуцированные шумом переходы порядок-хаос и т.д. [154; 180—182; 206; 183; 184]. С помощью этого аппарата были изучены вероятностные механизмы спайкинга и бёрстинга в нейронных моделях [185—188], явление индуцированного шумом вымирания в популяционных моделях [182; 189—191], стохастическая динамика бизнес циклов [192; 193] и связанных систем [89; 194].

Использование метода функции стохастической чувствительности удалось распространить и на модели, задаваемые кусочно-гладкими отображениями. Природа кусочно-гладких отображений приводит динамику описываемой модели к новым бифуркациям, не наблюдаемым в гладких системах, например, удвоение кусочности хаотического аттрактора и бифуркация столкновения с границей. Теория кусочно-гладких отображений в настоящее время широко развивается и, например, в работах [195—198] дается описание этих бифуркаций, а также инструментария, который представляется полезным в описании данных явлений. В работах [4; 40; 199] описываются примеры моделей популяций такого типа.

Целью данной диссертационной работы является математическое моделирование и анализ стохастических феноменов в моделях популяционной динамики с дискретным временем. Проведенные автором диссертации исследования были во многом мотивированы актуальными задачами, связанными с анализом новых феноменов в дискретных популяционных моделях со случайными возмущениями.

Для достижения цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Разработать конструктивные методы стохастического анализа, позволяющие проводить параметрическое исследование сложных динамических режимов, наблюдаемых в дискретных популяционных моделях с различными биологическими факторами.
2. Провести исследование аттракторов, бифуркационных сценариев и динамических режимов детерминированных моделей популяционной динамики: модели хищник-жертва, модели двух связанных популяций с миграцией и одномерной модели, задаваемой кусочно-гладким отображением.
3. Исследовать индуцированные шумом феномены в дискретных моделях популяционной динамики (двумерная модель хищник-жертва, модель двух связанных популяций с миграцией и одномерная модель, задаваемая кусочно-гладким отображением) с применением как прямого численного моделирования, так и теоретического подхода, основанного на методе функции стохастической чувствительности и доверительных областей, а также учитывающего расположение аттракторов и их бассейнов, имеющих фрактальную форму.
4. Разработать численные методы для исследования стохастических моделей популяционной динамики с дискретным временем и реализовать их в новых программных комплексах.

Методология и методы диссертационного исследования. В основе исследования лежат понятия и методы общей теории бифуркаций и критических линий, прямое численное моделирование детерминированных и стохастических систем, обработка результатов численного моделирования. Для анализа стохастических феноменов используется аппарат функции стохастической чувствительности и метод доверительных областей.

Положения, выносимые на защиту:

1. Разработаны новые методы математического моделирования, позволяющие конструктивно исследовать широкий круг стохастических феноменов возможных популяционных моделей с дискретным временем.
2. Проведено комплексное исследование влияния случайного воздействия и миграции на аттракторы модели двух связанных популяционных подсистем, включающее описание этих аттракторов, бифуркационный анализ. С помощью техники функции стохастической чувствительности и доверительных областей разработаны методы для изучения изменения поведения метапопуляции. Выявлена роль фрактальных решетчатых бассейнов в обнаружении таких индуцированных шумом феноменов, как разрушение противофазной и синфазной синхронизации, временная стабилизации неустойчивого равновесия, переключение между синфазным и противофазным режимом, переходы от порядка к хаосу и наоборот.
3. Разработан метод аппроксимации разброса случайных состояний вокруг хаотических аттракторов с использованием аппарата функции стохастической чувствительности и теории критических линий. Эффективность данного метода продемонстрирована в двух стохастических дискретных моделях популяционной динамики: двумерной модели хищник-жертва и одномерной модели, описываемой кусочно-гладким отображением.
4. Разработаны численные методы, реализованные в новых комплексах программ, которые позволяют проводить вычислительные эксперименты для исследования стохастических моделей популяционной динамики с дискретным временем, учитывающих различные биологические факторы.

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

1. В проведенных комплексных исследованиях моделей связанных популяций при изменении коэффициента связи впервые применен метод функции стохастической чувствительности и доверительных областей для выявления индуцированных шумом переходов и установлена их связь с бифуркациями и особенностями фазовых портретов в детерминированных моделей. В этих исследованиях показана эффективность

метода функции стохастической чувствительности и доверительных областей.

2. Для модели двух связанных популяций, каждая из которых задается дискретным отображением Рикера, выявлены механизмы индуцированных шумом переходов, связанных с дихотомией бассейнов притяжения, отражающих короткие и длинные переходные процессы решений и фрактальную структуру этих бассейнов, таких, как временная стабилизация неустойчивого равновесия, разрушение противофазной и синфазной синхронизации, переключение между синфазным и противофазным режимом, переходы от порядка к хаосу и наоборот.
3. Для аппроксимации разброса случайных состояний вокруг квазипериодического (замкнутой инвариантной кривой) и хаотического аттракторов применен метод функции стохастической чувствительности и доверительных областей.
4. Впервые метод функции стохастической чувствительности и техника доверительных областей использованы для описания разброса случайных состояний вокруг хаотических аттракторов стохастической модели популяционной динамики, которая описывается кусочно-гладким отображением.
5. Разработаны численные методы и алгоритмы, реализованные в новых программных комплексах, позволяющие проводить исследования в области математического моделирования и анализа стохастической динамики дискретных популяционных моделей.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость состоит в описании сложных стохастических феноменов в трех дискретных моделях популяционной динамики: 1) двумерная модель хищник-жертва; 2) модель двух связанных популяций с миграцией; 3) одномерная модель, задаваемая кусочно-гладким отображением; а также в разработке методов анализа этих феноменов с помощью аппарата функции стохастической чувствительности. Также теоретическая значимость работы состоит в следующем: найдены критерии вымирания популяции хищников в рассматриваемом варианте модели хищник-жертва, описаны границы хаотического аттрактора; для модели связанных популяций получены параметрические условия устойчивости равновесия, описаны параметрические зоны моно- и мультистабильности режимов, выявлены условия для возникновения индуцированных шумом временной стабилизации неустойчивого равновесия, разрушения синфазной и противофазной синхронизаций, переходов от порядка к хаосу и наоборот; для одномерной кусочно-гладкой модели определены зоны устойчивых равновесий и хаотических аттракторов, найдены параметрические границы хаотического аттрактора и критерии вымирания популяции в случае аддитивного и параметрического шума. Практическая значимость состоит в разработке методов и алгоритмов анализа моделей популяционных систем, позволяющих решать актуальные практические задачи выявления причин экологических сдвигов и катастрофических изменений в популяционных системах. Практическую ценность также представляют разработанные численные методы, реализованные в комплексах программ, которые позволяют проводить исследования в области математического моделирования и анализа стохастической динамики дискретных популяционных моделей.

Достоверность полученных результатов. Достоверность результатов диссертационной работы обеспечивается строгостью используемого математического аппарата, согласованностью результатов, полученных с помощью разработанных теоретических методов, с данными компьютерного моделирования. Достоверность и корректность результатов численного моделирования подтверждается успешным тестированием разработанных программных комплексов на модельных примерах и результатами численных экспериментов. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами.

Личный вклад автора. Основные результаты работы, а именно детальное исследование влияния случайного воздействия и миграции на аттракторы модели двух связанных популяционных подсистем, включающее описание этих аттракторов, бифуркационный анализ, изучение изменения поведения метапопуляции численно и аналитически с помощью метода функции стохастической чувствительности и доверительных областей в обнаружении индуцированных шумом феноменов, а также применение этих методов для двух других стохастических дискретных моделей популяционной динамики и программные комплексы, получены автором лично. Разработка и отладка алгоритмов, возникающих в ходе компьютерного моделирования, принадлежат автору лично. Формулирование цели, постановка задач диссертационной работы, выбор общих методик исследований выполнены совместно с научным руководителем. В совместных публикациях соавторам принадлежат выбор моделей и идеи возможных подходов исследования, а автору диссертации принадлежит проведение численных экспериментов и анализа, подготовка результатов к публикации.

Апробация результатов. Основные положения и результаты диссертации докладывались автором и обсуждались на 13 международных и всероссийских конференциях: 50-й, 51-й, 52-й, 53-й, 54-й, 55-й Всероссийской (международной) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (2019-2024); Международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024), посвященной 100-летию со дня рождения академика Н. Н. Красовского (9-13 сентября 2024); VII, VIII, IX, X Международной молодежной научной конференция «Физика. Технологии. Инновации.» (2020-2023); XXVIII Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (2021); Специальной сессии «Математическое моделирование динамических процессов» сателлитной конференции «Теория оптимального управления и приложения» (OCTA 2022) Международного конгресса математиков (МКМ 2022) 28 и 30 июня 2022 года (гибридный формат) (2022).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 7 работах, опубликованных в рецензируемых научных журналах и входящих в международные базы цитирования Web of Science и Scopus. Зарегистрированы 4 программы для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и 4 приложений. Полный объём диссертации составляет 143 страницы, включая 76 рисунков. Список литературы содержит 207 наименований.

Глава 1. Метод функции стохастической чувствительности и аппарат доверительных областей

В данной главе представлены теоретические основы вероятностного анализа стохастических систем, объясняются методы функций стохастической чувствительности и доверительных областей, которые широко используются для аппроксимации вероятностного распределения случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов. В основе этого метода лежат идеи, предложенные в работах Ряшко Л. Б. и Башкирцевой И. А. [173—179] Также излагается алгоритм нахождения границ хаотического аттрактора с помощью теории критических линий, который позволяет построить доверительные области для хаотического аттрактора.

1.1 Стохастическая чувствительность регулярных и хаотических аттракторов

Рассмотрим нелинейную стохастическую систему с дискретным временем

$$x_{t+1} = f(x_t, \eta_t), \qquad \eta_t = \varepsilon \xi_t, \tag{1.1}$$

где x — это n-мерный вектор, $f(x,\eta)$ — гладкая n-мерная вектор-функция, ξ_t — m-мерный некоррелированный случайный процесс с параметрами $E\xi_t = 0, E\xi_t\xi_t^T = V$ и ε — скалярный параметр интенсивности шума.

Пусть $\overline{x}_t$ — это решение детерминированной системы

$$x_{t+1} = f(x_t, 0) \tag{1.2}$$

с начальным условием $\overline{x}_0$. Обозначим через x_t^ε решение системы (1.1) с начальными условиями $x_0^\varepsilon = \overline{x} + \varepsilon\nu_0$, где ν — это n-мерный случайный вектор с параметрами $E\nu = 0, E\nu\nu^T = U$. Вектор ν некоррелирован с ξ_t.

При исследовании разброса случайных решений x_t^ε системы (1.1) вокруг детерминированного решения $\overline{x}_t$ будем использовать асимптотику:

$$z_t = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x_t^\varepsilon - \overline{x}_t}{\varepsilon}.$$

Рассмотрим следующую систему линейного расширения:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, 0), \\ z_{t+1} &= F(x_t) z_t + S(x_t)\xi_t. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь,

$$F(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0), \qquad S(x) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, 0).$$

Матрицы вторых моментов $M_t = E z_t z_t^T$ размерностью $n \times n$ удовлетворяют детерминированной системе

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, 0), \\ M_{t+1} &= F(x_t) M_t F^T(x_t) + S(x_t) V S^T(x_t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для зафиксированного детерминированного решения $\overline{x}_t$ вторые моменты M_t однозначно определяются уравнениями

$$M_{t+1} = F(\overline{x}_t) M_t F^T(\overline{x}_t) + S(\overline{x}_t) V S^T(\overline{x}_t), \qquad M_0 = U. \tag{1.5}$$

Последовательность матриц M_t определяет стохастическую чувствительность детерминированной последовательности $\overline{x}_t$ и дает при малой интенсивности шума следующее приближение:

$$E(x_t^\varepsilon - \overline{x}_t)(x_t^\varepsilon - \overline{x}_t)^T \approx \varepsilon^2 M_t.$$

1.1.1 Стохастическая чувствительность равновесия

Пусть $\overline{x}$ — экспоненциально устойчивое равновесие системы (1.2). Вследствие устойчивости $\overline{x}$ справедливо $\rho(F(\overline{x})) < 1$, где $\rho(F)$ — спектральный радиус матрицы F.

Для решения $\overline{x}_t \equiv \overline{x}$ систему (1.5) можно переписать в виде

$$M_{t+1} = F(\overline{x}) M_t F^T(\overline{x}) + S(\overline{x}) V S^T(\overline{x}), \qquad M_0 = U. \tag{1.6}$$

Поскольку $\rho(F(\overline{x})) < 1$, система (1.6) имеет единственное устойчивое стационарное решение $M_t \equiv M$, где матрица M описывается следующим матричным уравнением

$$M = F(\overline{x}) M F^T(\overline{x}) + Q, \qquad Q = S(\overline{x}) V S^T(\overline{x}). \tag{1.7}$$

Матрица M характеризует стохастическую чувствительность устойчивого равновесия $\overline{x}$.

1.1.2 Стохастическая чувствительность k-циклов

Пусть детерминированная система (1.2) имеет экспоненциально устойчивый k-цикл Γ с элементами $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$. Элементы этого цикла связаны следующими равенствами:

$$f(\overline{x}_i, 0) = \overline{x}_{i+1} (i = 1, \ldots, k-1), \qquad f(\overline{x}_k, 0) = \overline{x}_1.$$

Необходимое и достаточное условие экспоненциальной устойчивости цикла Γ:

$$\rho(F_k \cdot \ldots \cdot F_2 F_1) < 1, \qquad F_t = F(\overline{x}_t). \tag{1.8}$$

Тогда для цикла Γ уравнение (1.5) может быть записано следующим образом:

$$M_{t+1} = F_t M_t F_t^T + Q_t, \qquad Q_t = S(\overline{x}_t) V S^T(\overline{x}_t), \tag{1.9}$$

где матрицы F_t и Q_t являются k-периодическими.

В силу условия (1.8) это уравнение имеет единственное k-периодическое решение W_t, удовлетворяющее следующим равенствам:

$$W_{t+1} = F_t W_t F_t^T + Q_t, \qquad W_{k+1} = W_1. \tag{1.10}$$

Матрицы W_t определяют стохастическую чувствительность элементов $\overline{x}_t$ цикла Γ. Для вычисления матриц стохастической чувствительности W_1,$W_2, \ldots$,W_k, можно использовать следующий алгоритм.

Матрица W_1 — это решение матричного уравнения:

$$W_1 = F_1 W_1 F_1^T + Q, \tag{1.11}$$

где

$$F = F_k \cdot \ldots \cdot F_2 F_1, \quad Q = Q_k + F_k Q_{k-1} F_k^T + \ldots + F_k \cdot \ldots \cdot F_2 Q_1 F_2^T \cdot \ldots \cdot F_k^T.$$

Остальные матрицы стохастической чувствительности $W_2, \ldots, W_k$ находятся рекуррентно по формуле (1.10).

1.1.3 Стохастическая чувствительность замкнутой инвариантной кривой

В нелинейных дискретных системах размерности два и выше регулярные колебательные аттракторы могут быть более сложными. Здесь классическим примером является замкнутая инвариантная кривая, возникающая в результате бифуркации Неймарка-Сакера.

Пусть детерминированная система (1.2) имеет экспоненциально устойчивую замкнутую инвариантную кривую Γ. Такая кривая может быть образована решениями системы (1.2) разными способами. Рассмотрим случаи, когда кривая Γ состоит из равновесий, дискретных предельных циклов или квазипериодических решений.

Изучим асимптотику

$$z_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x_t^\varepsilon - \overline{x}_t^\varepsilon}{\varepsilon},$$

где x_t^ε — это решение стохастической системы (1.1), а $\overline{x}_t^\varepsilon$ — точка кривой Γ, ближайшая к x_t^ε.

Рассмотрим соответствующую систему стохастического линейного расширения:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, 0), x \in \Gamma, \\ z_{t+1} &= P(x_{t+1}) \left[F(x_t) z_t + S(x_t) \xi_t \right], z \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь,

$$F(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, 0), \qquad S(x) = \frac{\partial f}{\partial \eta}(x, 0),$$

$P(x)$ — это матрица проекции на гиперплоскость $\Pi(x)$, ортогональную кривой Γ в точке x.

Для вторых моментов $M_t = E z_t z_t^T$ можно записать следующую систему:

$$x_{t+1} = f(x_t, 0), M_{t+1} = P(x_{t+1}) \left[F(x_t) M_t F^T(x_t) + S(x_t) V S^T(x_t) \right] P(x_{t+1}). \tag{1.13}$$

Рассмотрим случай, когда кривая Γ представляет собой семейство k-циклов. Пусть $\overline{x}$ — произвольная точка кривой Γ и $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k\}$ — это k-цикл γ, начинающийся из точки $\overline{x} : \overline{x}_{t+1} = f(\overline{x}_t, 0)$, $\overline{x}_1 = \overline{x}$. Из (1.13) для цикла γ следует, что

$$M_{t+1} = P_{t+1} \left[F_t M_t F_t^T + Q_t \right] P_{t+1}, \tag{1.14}$$

где

$$P_t = P(\overline{x}_t), \qquad F_t = F(\overline{x}_t), \qquad Q_t = S(\overline{x}_t) V S^T(\overline{x}_t)$$

это k-периодические матрицы. Вследствие экспоненциальной устойчивости Γ система (1.14) имеет единственное k-периодическое решение W_t:

$$W_{t+1} = P_{t+1} \left[F_t W_t F_t^T + Q_t \right] P_{t+1}, \qquad W_{k+1} = W_1. \tag{1.15}$$

Набор матриц $\{W_1, \ldots, W_k\}$ определяет стохастическую чувствительность замкнутой инвариантной кривой Γ в точках $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k\} \subset \chi$. Следует обратить внимание, что первую матрицу W_1 можно найти из следующего уравнения

$$W_1 = F W_1 F^T + H,$$

где

$$F = P_1 F_k P_k F_{k-1} \cdot \ldots \cdot P_2 F_1, \qquad H = H^{(k)},$$
$$H^{(0)} = 0, \quad H^{(j)} = P_{j+1} \left[F_j H^{(j-1)} F_j^T + Q_j \right] P_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Остальные матрицы $W_2, \ldots, W_k$ находятся рекуррентно из формулы (1.15).

Благодаря наличию в формуле (1.15) матриц проекций, матрицы W_t являются сингулярными ($\det W_t = 0$). Итак, в двумерном случае мы можем использовать следующее представление: $W_t = m_t p_t p_t^T$. Здесь $m_t = p_t^T W_t p_t$ и p_t — это вектор, ортонормированный к Γ в точке $\overline{x}_t$. Таким образом, функция стохастической чувствительности $m(x)$ кривой Γ в точке $\overline{x}$ имеет значение $m(\overline{x}) = m_1$.

В случае, когда замкнутая кривая Γ образована семейством квазипериодических решений детерминированной системы (1.2), мы можем аппроксимировать Γ подходящей периодической последовательностью (k-циклом) и воспользоваться изложенной выше теорией. Следует обратить внимание, что чем выше порядок этого приближения, тем больший период k используемых циклов.

Нелинейные системы могут иметь аттракторы, образованные m отдельными замкнутыми инвариантными кривыми (m-торами). Для этого более общего случая можно использовать m-кратную суперпозицию одношаговых отображений. Для этой суперпозиции аттрактор из m частей распадается на m сосуществующих однокусочных аттракторов. Это позволяет нам использовать представленную выше теорию стохастической чувствительности для однокусочных замкнутых инвариантных кривых. Рассмотрим такой метод для случая 2-тора.

Динамическая система, полученная с помощью двойного стохастического отображения (1.1), записывается как:

$$x_{t+2} = f(f(x_t, \eta_t), \eta_{t+1}). \tag{1.16}$$

В новых переменных $y_t = x_{2t-1}$ и $\nu_{1,t} = \eta_{2t-1}, \nu_{2,t} = \eta_{2t}$ эту систему можно переписать в виде

$$y_{t+1} = f(f(y_t, \nu_{1,t}), \nu_{2,t}). \tag{1.17}$$

Рассмотрим функцию $\psi(y,\nu) = \varphi(\varphi(y, \nu_1), \nu_2)$ и $2m$-мерный случайный процесс $\nu_t = (\nu_{1,t}, \nu_{2,t})$, затем перепишем систему (1.17) в виде

$$y_{t+1} = \psi(y_t, \nu_t). \tag{1.18}$$

В результате анализ стохастической чувствительности двукусочной замкнутой инвариантной кривой $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ в исходной стохастической системе (1.1) сводится к исследованию стохастической чувствительности отдельных сосуществующих однокусочных инвариантных кривых Γ_1 и Γ_2 в стохастической системе (1.18).

1.1.4 Стохастическая чувствительность хаотического аттрактора

Рассмотрим теперь использование общего метода стохастической чувствительности в случае хаотических аттракторов. Здесь ограничимся одномерными системами с однокусочным хаотическим аттрактором.

Пусть детерминированная система (1.2) имеет хаотический аттрактор $\Gamma = (a, b)$. Предполагается, что функция $f(x, 0)$ имеет единственный максимум в точке $c \in (a, b)$:

$$\max f(x, 0) = f(c, 0), \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(c, 0) = 0.$$

Границы a и b хаотического аттрактора Γ связаны с точкой c следующим образом: $b = f(c, 0)$, $a = f(b, 0) = f(f(c, 0), 0)$.

Стохастическая чувствительность хаотического аттрактора Γ в граничных точках a и b определяется [177] стохастической чувствительностью соответствующих точек решения системы (1.2), проходящих через эти границы. Итак, рассмотрим решение $\overline{x}_t$ системы (1.2) с начальным состоянием $\overline{x}_1 = c$. Первые итерации дают нам $\overline{x}_2 = f(\overline{x}_1, 0) = b$, $\overline{x}_3 = f(\overline{x}_2, 0) = a$. Стохастическая чувствительность правой границы $x = b$ аттрактора Γ равна стохастической чувствительности M_2 состояния $\overline{x}_2$ решения $\overline{x}_t$: $M(b) = M_2$. Аналогично, стохастическая чувствительность $M(a)$ левой границы a равна стохастической чувствительности $\overline{x}_3$: $M(a) = M_3$. Из общей системы (1.4) следует, что

$$M_2 = q_1 M_1 + s_1, \qquad M_3 = q_2 M_2 + s_2, \tag{1.19}$$

где

$$q_1 = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c,0)\right]^2, \qquad s_1 = s(c), \qquad q_2 = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(b,0)\right]^2, \qquad s_2 = s(b),$$

где в свою очередь

$$s(x) = \frac{\partial f}{\partial \nu}(x,0) V \left[\frac{\partial f}{\partial \nu}(x,0)\right]^T.$$

Из $\frac{\partial f}{\partial x}(c,0) = 0$ следует, что

$$M(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(f(c,0),0)\right]^2 s(c) + s(f(c,0)), \qquad M(b) = s(c). \tag{1.20}$$

Метод функции стохастической чувствительности, представленный здесь для однокусочных хаотических аттракторов, может быть распространен на многокусочные хаотические аттракторы.

1.2 Доверительные области

Значения стохастической чувствительности можно эффективно использовать для аппроксимации дисперсии случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов в виде доверительных областей.

1.2.1 Доверительный эллипсоид вокруг равновесия

Пусть M — матрица стохастической чувствительности устойчивого равновесия $\overline{x}$ в системе (1.1). Используя эту матрицу, можно записать приближение плотности вероятности в форме нормального распределения

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\varepsilon^2)^n \det(M)}} \exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}(x-\overline{x})^T M^{-1}(x-\overline{x})\right\}.$$

Для геометрического описания пространственных особенностей разброса случайных состояний вокруг равновесия $\overline{x}$ можно использовать доверительные области в виде эллипсоидов.

В общем случае доверительный n-мерный эллипсоид записывается следующим образом

$$\big(x-\overline{x}, M^{-1}(x-\overline{x})\big) = \varepsilon^2 K(P), \tag{1.21}$$

где P — доверительная вероятность. Функция $K(P)$ обратная к функции

$$P(K) = \frac{\Phi_n(K)}{\Phi_n(\infty)}, \qquad \Phi_n(K) = \int_0^{\sqrt{K}} e^{-\frac{t^2}{2}} t^{n-1} dt.$$

Для $n = 1$ получим

$$P(K) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{K}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{K}{2}}\right), \qquad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} \text{ţ},$$

тогда доверительный интервал вычисляется как

$$(\overline{x} - r, \overline{x} + r), \qquad r = \varepsilon\sqrt{2M}\operatorname{erf}^{-1}(P). \tag{1.22}$$

Для двумерного случая имеем

$$P(K) = 1 - e^{-\frac{K}{2}}, \quad K(P) = -2\ln(1-P),$$

тогда доверительный эллипс определяется уравнением

$$\frac{z_1^2}{\mu_1} + \frac{z_2^2}{\mu_2} = \varepsilon^2 K(P), \tag{1.23}$$

где $z_1 = (x - \overline{x}, u_1), z_2 = (x - \overline{x}, u_2)$ — координаты эллипса в базисе нормированных собственных векторов u_1, u_2 матрицы M, параметры μ_1, μ_2 —

соответствующие собственные значения, а ε — интенсивность шума. Таким образом, собственные значения и собственные векторы матрицы стохастической чувствительности M существенно влияют на пространственную конфигурацию и размер доверительного эллипса.

Для трехмерного случая имеем

$$P(K) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[\int_0^{\sqrt{K}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \sqrt{K}e^{-\frac{K}{2}}\right] = \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{K}{2}}\right) - \sqrt{\frac{2K}{\pi}}e^{-\frac{K}{2}}.$$

Трехмерный доверительный эллипсоид определяется уравнением

$$\frac{z_1^2}{\mu_1} + \frac{z_2^2}{\mu_2} + \frac{z_3^2}{\mu_3} = \varepsilon^2 K(P), \tag{1.24}$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — собственные значения, u_1, u_2, u_3 — нормированные собственные векторы матрицы стохастической чувствительности M и $z_1 = (x - \overline{x}, u_1), z_2 = (x - \overline{x}, u_2), z_3 = (x - \overline{x}, u_3)$.

1.2.2 Доверительные области для k-циклов

Пусть $M_1, \ldots, M_k$ — матрицы стохастической чувствительности состояний $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k$ k-цикла Γ системы (1.1). Используя эти матрицы, можно записать аппроксимацию плотности вероятности случайного распределения вблизи Γ

$$\rho(x) = \frac{1}{k}\sum_{t=1}^{k}\frac{1}{\sqrt{(2\pi\varepsilon^2)^n \det(M_t)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon^2}(x - \overline{x}_t)^T M_t^{-1}(x - \overline{x}_t)\right\}.$$

В зависимости от размерности системы доверительные области для k-циклов имеют следующий вид.

При $n = 1$ доверительная область представляет собой набор из k доверительных интервалов вокруг состояний $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_k$ k-цикла Γ.

При $n = 2$ эти области представляют собой доверительные эллипсы, задаваемые уравнениями:

$$\frac{z_1^2}{\mu_{1,t}} + \frac{z_2^2}{\mu_{2,t}} = -2\varepsilon^2 \ln(1 - P), \qquad (t = 1, 2, \ldots, k). \tag{1.25}$$

Здесь $z_1 = (x - \overline{x}_t, u_{1,t}), z_2 = (x - \overline{x}_t, u_{2,t})$ — координаты эллипса в базисе нормированных собственных векторов $u_{1,t}, u_{2,t}$ матрицы M_t, а $\mu_{1,t}, \mu 2, t$ — соответствующие собственные значения.

При $n = 3$ эти области формируются доверительными эллипсоидами.

1.2.3 Доверительные области для замкнутой инвариантной кривой

Здесь ограничимся двумерным случаем. Пусть Γ — замкнутая инвариантная кривая системы (1.2) при $n = 2$, а $m(x)$ — функция стохастической чувствительности, определенная в точках Γ. Используя $m(x)$, можно найти доверительный интервал на линии, которая ортогональна замкнутой инвариантной кривой Γ в точке x. Границы этого интервала можно записать в виде

$$x_{1,2} = x \pm \varepsilon q \sqrt{2m(x)} p(x). \tag{1.26}$$

Здесь параметр $q = \operatorname{erf}^{-1}(P)$, $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, а P — доверительная вероятность. При изменении x вдоль Γ семейство этих интервалов образует соответствующую доверительную полосу вокруг Γ.

1.2.4 Доверительные области для хаотического аттрактора

В этом подразделе на примере двумерного случая показан алгоритм построения доверительных областей для хаотического аттрактора с помощью границы хаотического аттрактора, построенной по теории критических линий [200; 201].

Пусть дана детерминированная система, которая записана в общем виде:

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t), \end{cases} \tag{1.27}$$

Пусть A — хаотический аттрактор системы (1.27), l — линия такая, что $l = \{(x, y) | \det F(x, y) = 0\}$, где

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) & f'_y(x, y) \\ g'_x(x, y) & g'_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Пусть $LC_{-1} = l \cap A$. Отображение (1.27) переводит LC_{-1} в следующую критическую линию

$$LC = \{(x_0, y_0) | x_0 = f(x_{-1}, y_{-1}), y_0 = g(x_{-1}, y_{-1}),\ (x_{-1}, y_{-1}) \in LC_{-1}\}.$$

Далее таким же образом строятся следующие критические линии

$$LC_1 = \{(x_1, y_1) | x_1 = f(x_0, y_0), y_1 = g(x_0, y_0), (x_0, y_0) \in LC\},$$
$$LC_2 = \{(x_2, y_2) | x_2 = f(x_1, y_1), y_2 = g(x_1, y_1), (x_1, y_1) \in LC_1\}, \text{и так далее.}$$

Особенность критических линий заключается в том, что, замыкаясь, они образуют внутри абсорбирующую область — это область, в которой реализуется динамика системы: какой бы ни была начальная точка, через конечный момент времени состояние системы попадет в эту область и никогда ее не покинет. Кроме того, граница всего хаотического аттрактора A формируется данными критическими кривыми. Другими словами, состояние (x_t, y_t) детерминированного хаоса локализуется на границе LC, если прообраз (x_{t-1}, y_{t-1}) принадлежит LC_{-1}. Тогда последующие состояния $(x_{t+1}, y_{t+1}), (x_{t+2}, y_{t+2}), \ldots$ принадлежат $LC_1, LC_2, \ldots$ соответственно.

Далее аналогично случаю замкнутой инвариантной кривой для границ хаотического аттрактора A находится значение функции стохастической чувствительности. В каждой точке $(x_0, y_0) \in LC$ значения функции стохастической чувствительности определяются из общей системы (1.4) по формуле:

$$\mu_1(x_0, y_0) = n^\top(x_0, y_0) Q(x_{-1}, y_{-1}) n(x_0, y_0),$$

где $x_0 = f(x_{-1}, y_{-1})$, $y_0 = g(x_{-1}, y_{-1})$, а $n(x_0, y_0)$ — ортонормированный вектор к LC в точке (x_0, y_0) и $Q(x_{-1}, y_{-1})$ — матрица вносимого шума (единичная в случае аддитивного шума), которая рассчитывается по формуле (1.7).

Следующие значения $\mu_2, \mu_3, \ldots$ функции стохастической чувствительности в точках $(x_1, y_1) \in LC_1$, $(x_2, y_2) \in LC_2, \ldots$ находятся рекуррентным образом:

$$\mu_{t+1} = n_{t+1}^T (F_t W_t F_t^T + Q_t) n_{t+1},$$
$$W_{t+1} = \mu_{t+1} n_{t+1} n_{t+1}^T, \quad t = 1, 2, \ldots$$

$W_1 = \mu_1 n_1 n_1^T$ является матрицей стохастической чувствительности в точке (x_0, y_0) кривой LC. Последующие матрицы $W_2, W_3, \ldots$ характеризуют стохастическую чувствительность границ $LC_1, LC_2, \ldots$ в точках $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots$

Стоит отметить, что последовательность n_t ортонормированных векторов строится с помощью соответствующих касательных векторов q_t, которые находятся рекуррентно: $q_{t+1} = F_t q_t$. Здесь, q_0 — это вектор, касательный к LC_{-1} в точке (x_{-1},y_{-1}).

Зная значения стохастической чувствительности $\mu_t(x_t, y_t)$ границы LC_t хаотического аттрактора A, можно построить доверительные полосы. Эти полосы состоят из доверительных интервалов, границы которых в точке $(x_t,y_t) \in LC_t$ находятся в соответствии с правилом трех сигм по формуле:

$$\begin{aligned} x &= x_t \pm 3\varepsilon\sqrt{\mu_t(x_t, y_t)}n_1(x_t, y_t) \\ y &= y_t \pm 3\varepsilon\sqrt{\mu_t(x_t, y_t)}n_2(x_t, y_t) \end{aligned} \tag{1.28}$$

где $(n_1(x_t,y_t),\ \ n_2(x_t,y_t))^\top$ — это ортонормированный вектор к LC_t в точке (x_t,y_t).

Основные результаты главы

В данной главе были представлены теоретические основы вероятностного анализа стохастических систем, описаны методы функций стохастической чувствительности и доверительных областей [173—179]. Функция стохастической чувствительности является характеристикой, которая позволяет аппроксимировать вероятностное распределение случайных состояний вокруг детерминированных аттракторов. Доверительные области, которые строятся с помощью функции стохастической чувствительности, являются эффективной геометрической моделью этого распределения. Также был дан алгоритм нахождения границ хаотического аттрактора с помощью теории критических линий, предложены формулы, по которым можно построить доверительные полосы для границ хаотического аттрактора [206].

Глава 2. Модель хищник-жертва

В данной главе проводится анализ возможных режимов, в первую очередь, детерминированной модели хищник-жертва с дискретным временем в зависимости от параметров системы. Ранее в работах [66; 67; 202] проводился параметрический анализ существования и устойчивости равновесий данной модели с построением однопараметрических бифуркационных диаграмм и примеров фазовых портретов. В работе [202] помимо этого найдены условия для возникновения флип бифуркации и Неймарка—Сакера, а также описывается метод управления хаосом. В настоящей же работе демонстрируется бифуркационный сценарий на двупараметрической карте режимов и показывается сложная структура бассейнов притяжения аттракторов. Наряду с детерминированной системой в главе подробно изучается стохастическая, описывающая влияние внешнего случайного воздействия. Ранее данная модель не изучалась в стохастической интерпретации. Опираясь на технику функции стохастической чувствительности [175; 179] (см. главу 1), исследуется анализ разброса случайных состояний вокруг регулярных, периодических, квазипериодических и хаотических аттракторов.

2.1 Аттракторы и бифуркации детерминированной модели

В этой главе рассматривается модель динамики популяции [202], заданная следующим двумерным отображением:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) - b x_n y_n, \\ y_{n+1} = -c y_n + d x_n y_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

где x_n — плотность численности жертв, y_n — плотность численности хищников (исходя из биологического смысла $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$), α, b, c и d — положительные бифуркационные параметры модели. Последующее исследование модели (2.1) проводится при фиксированных значениях параметров $b = 1$ и $c = 0.2$.

Данная модель имеет три равновесия:

$$M_0(0;0),$$

$$M_1\left(\frac{\alpha-1}{\alpha};0\right),$$

$$M_2\left(\frac{c+1}{d};\frac{\alpha(d-1-c)-d}{bd}\right).$$

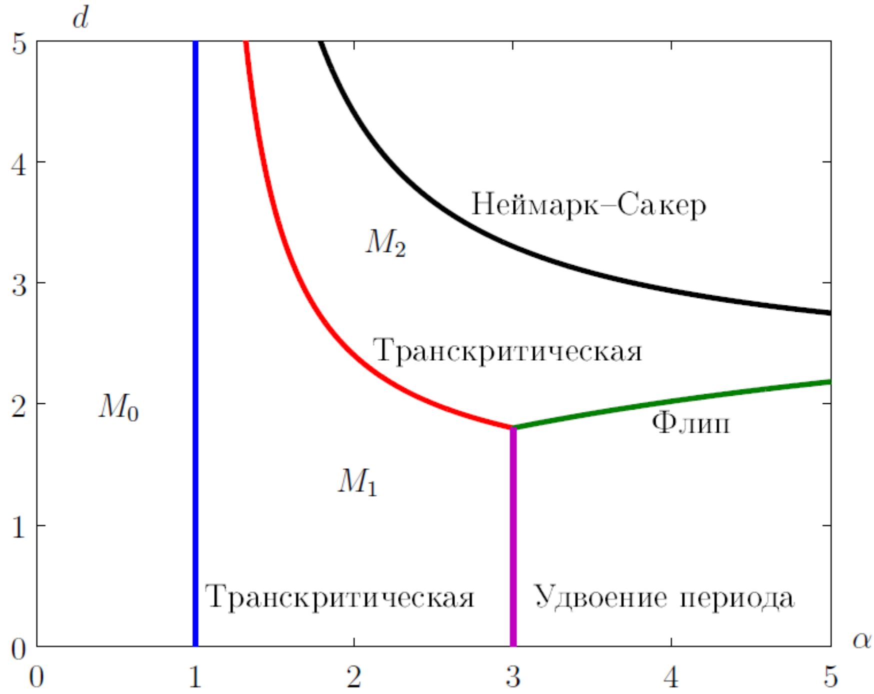


Рисунок 2.1 — Параметрические зоны устойчивости равновесий модели (2.1). Транскритическая (красная): $d=\frac{\alpha(1+c)}{\alpha-1}$, флип: $d=\frac{\alpha(1+c)(3+c)}{3+\alpha+c(\alpha-1)}$, Неймарк—Сакер: $d=\frac{\alpha(2+c)}{\alpha-1}$

На рисунке 2.1 изображены зоны устойчивости равновесий модели (2.1) в плоскости параметров α и d. Также построены кривые, соответствующие различным бифуркациям — транскритической (красный и синий), Неймарка—Сакера (черный), флип (зеленый), удвоения периода (пурпурный).

В зонах параметра, где равновесия являются неустойчивыми, наблюдаются различные режимы — периодические (циклы всевозможных периодов), квазипериодические (замкнутые инвариантные кривые (ЗИК)) и хаотические. На рисунке 2.2 разными цветами представлены различные динамические режимы модели (2.1). Оттенками зеленого показаны области устойчивых равновесий (M_0, M_1, и M_2), синий цвет соответствует зоне параметров, где решения уходят в бесконечность, остальными цветами показаны циклы периода от 2 до 17. Белые зоны на диаграмме отвечают циклам периода выше, чем 17, замкнутым инвариантным кривым или хаотическим аттракторам. Видно, что в

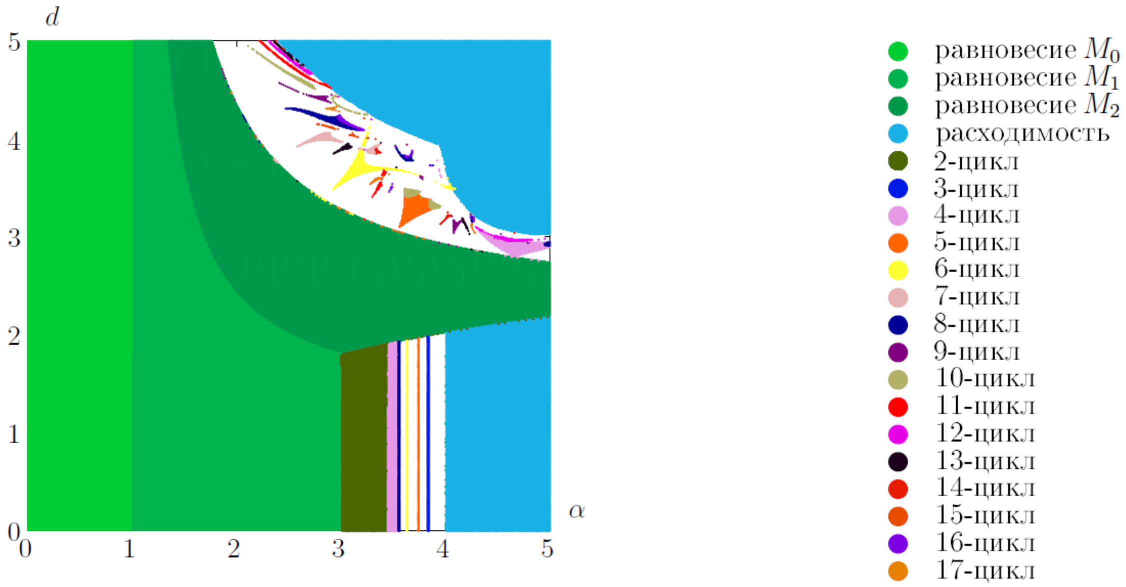
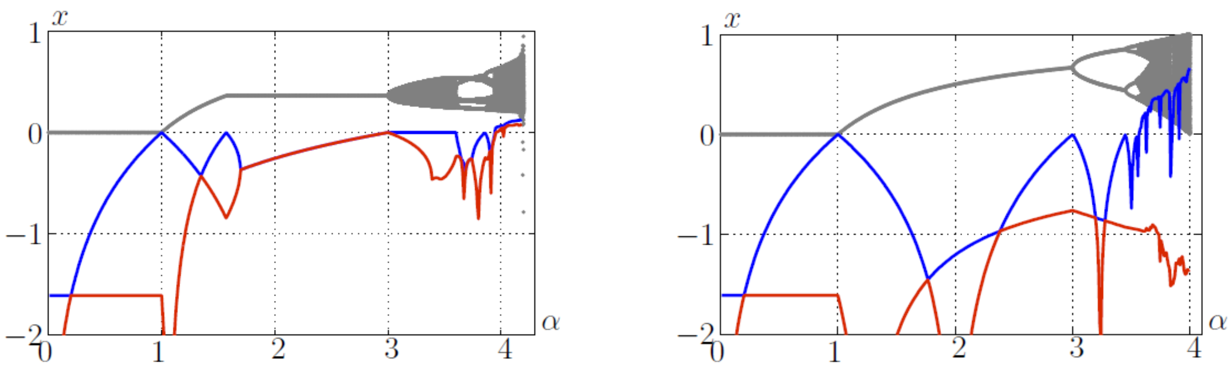


Рисунок 2.2 — Карта режимов модели (2.1) в плоскости параметров (α, d)

зависимости от сочетания бифуркационных параметров реализуются два бифуркационных сценария. Первый сценарий, соответствующий зоне параметров $\alpha > 3$ и $d < 2$, представляет собой классический каскад бифуркаций удвоения периода. Второй сценарий, соответствующий зоне параметров $\alpha > 1.5$ и $d > 2$, представляет бифуркации Неймарка—Сакера (рождение ЗИК) с возникновением зон периодических режимов (языков Арнольда).



а) б)

Рисунок 2.3 — Бифуркационная диаграмма и показатели Ляпунова модели (2.1) при: а) $d = 3.3$; б) $d = 1$

На рисунке 2.3 изображены показатели Ляпунова аттракторов модели (2.1) в зависимости от параметра α при следующих значениях параметра: а) $d = 3.3$ и б) $d = 1$. Серый цвет соответствует аттракторам модели, старший показатель Ляпунова показан синим цветом, а младший показатель — красным. Показатель Ляпунова позволяет определить, является ли поведение модели регулярным или хаотическим. Области изменения параметра α, где график показателя отрицательный, принадлежат регулярному аттрактору, а положительные области — хаотическому аттрактору. Старший показатель Ляпунова равен нулю в точках бифуркаций, а также в области ЗИК.

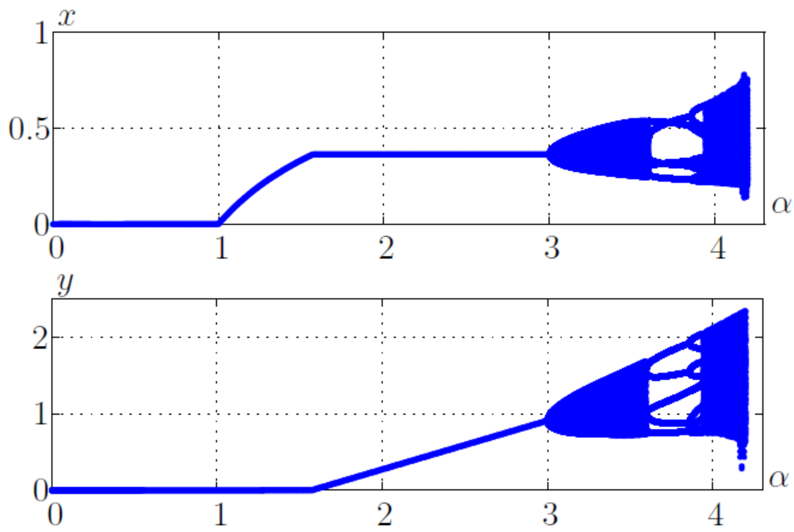


Рисунок 2.4 — Бифуркационная диаграмма модели (2.1) для $d = 3.3$

На рисунке 2.4 показана бифуркационная диаграмма модели (2.1) при изменении параметра α для фиксированного значения параметра $d = 3.3$. При $0 < \alpha < 3$ аттрактором системы всегда является одно из равновесий — M_0 (при $0 < \alpha \leqslant 1$), M_1 (при $1 < \alpha \leqslant 1.6$) или M_2 (при $1.6 < \alpha \leqslant 3$). Далее в области $3 < \alpha \leqslant 3.6$ наблюдается замкнутая инвариантная кривая. Затем в зоне $3.6 < \alpha \leqslant 3.9$ возникает цикл периода 5 со своим каскадом бифуркации удвоения периода, который сменяется хаотическим аттрактором при $\alpha > 3.9$. Легко заметить, что, только если значение бифуркационного параметра $\alpha > 1.6$, то в модели возможно сосуществование популяции жертв и хищников.

Рисунок 2.5 представляет бифуркационную диаграмму модели (2.1) при изменении параметра α для фиксированного значения параметра $d = 1$. В этом случае поведение жертв соответствует логистическому отображению. Аналогично рисунку 2.4 при $0 < \alpha < 3$ аттрактором системы всегда является равновесие. Затем происходит каскад бифуркаций удвоения периода, который в конечном итоге приводит систему к хаотическому режиму. Стоит заметить, что в отличие от случая $d = 3.3$ при $d = 1$ хищники не имеют шанса на выживание, и существует только популяция жертв.

На рисунке 2.6 представлены аттракторы модели (2.1) со своими бассейнами притяжения. Синим цветом изображен сам аттрактор, серый цвет

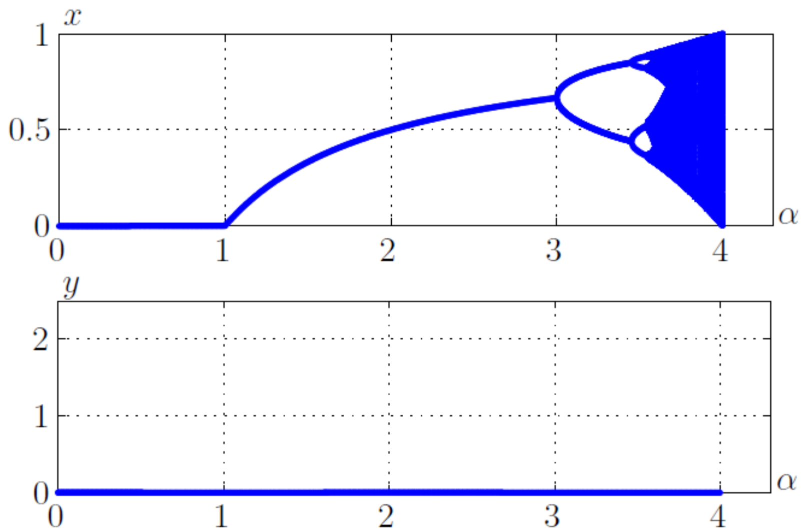


Рисунок 2.5 — Бифуркационная диаграмма модели (2.1) для $d = 1$

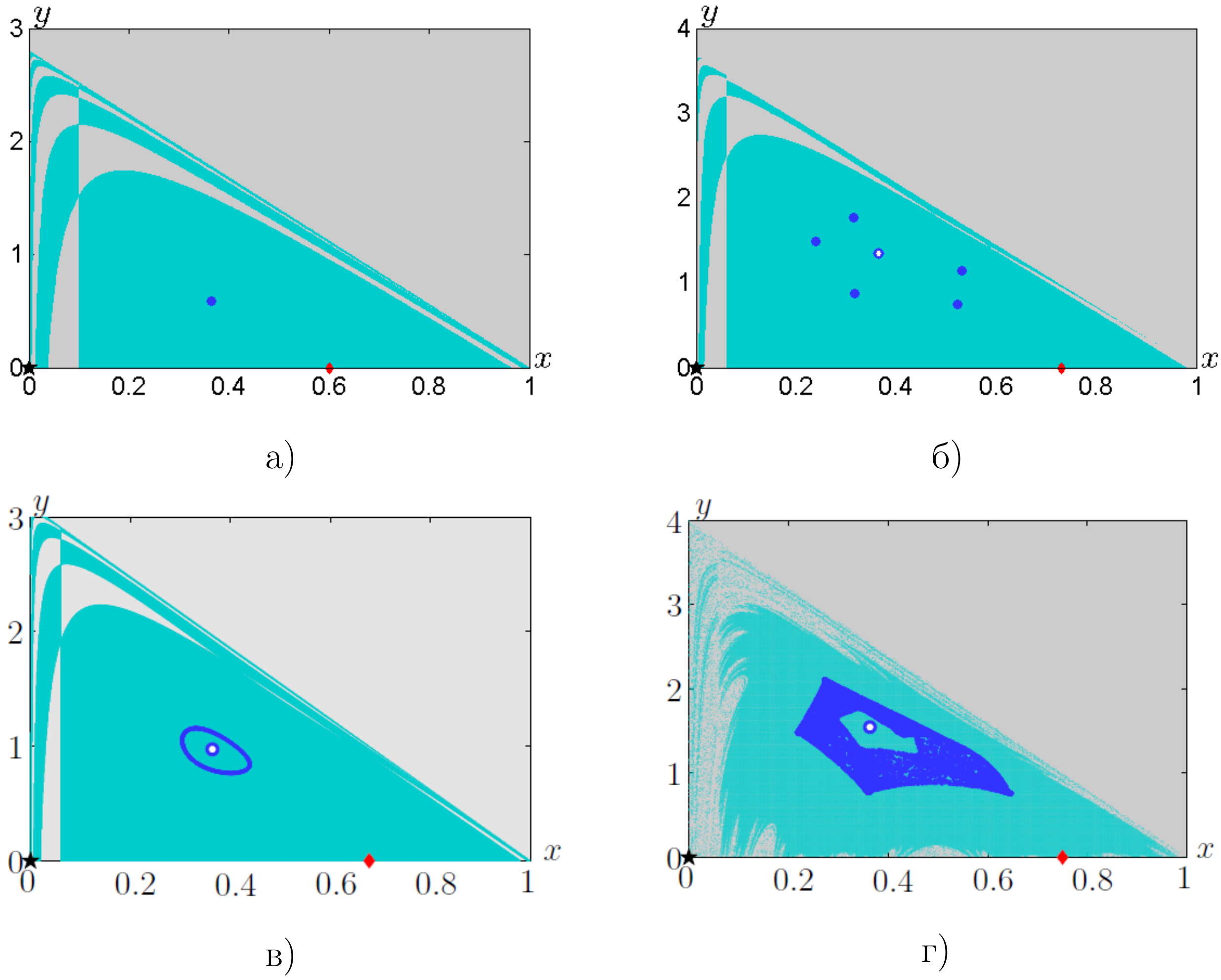


Рисунок 2.6 — Бассейны притяжения аттракторов при $d = 3.3$ для модели (2.1): а) равновесие M_2 при $\alpha = 2.5$; б) 5-цикл при $\alpha = 3.7$; в) ЗИК при $\alpha = 3.1$; г) хаос при $\alpha = 4$

соответствует точкам системы, с которых запущенный итерационный процесс расходится. Бирюзовый цвет отвечает за область точек, итерационный процесс которых сходится на аттрактор: а) равновесие M_2, б) 5-цикл, в) замкнутая инвариантная кривая и г) хаос. Ромб красного цвета — это равновесие M_1. На рисунках 2.6 б), в) и г) синей выколотой точкой отмечено неустойчивое равновесие M_2. Черная звезда в начале координат — это равновесие M_0. Видно, что при увеличении параметра α изменяется не только вид аттрактора, но и его бассейн притяжения.

2.2 Анализ стохастических явлений

Далее в этом разделе рассматривается стохастический вариант модели (2.1), учитывающий влияние внешнего случайного шума:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n) - bx_n y_n + \varepsilon\xi_{n,1}, \\ y_{n+1} = -cy_n + dx_n y_n + \varepsilon\xi_{n,2}, \end{cases} \tag{2.2}$$

где ε — интенсивность шума, $\xi_n = (\xi_{n,1},\ \xi_{n,2})^T$ — двумерный некоррелированный случайный процесс с параметрами $E\xi_n = 0$, $E\xi_n\xi_n^T = I$, $E\xi_n\xi_k^T = 0\,(n \neq k)$.

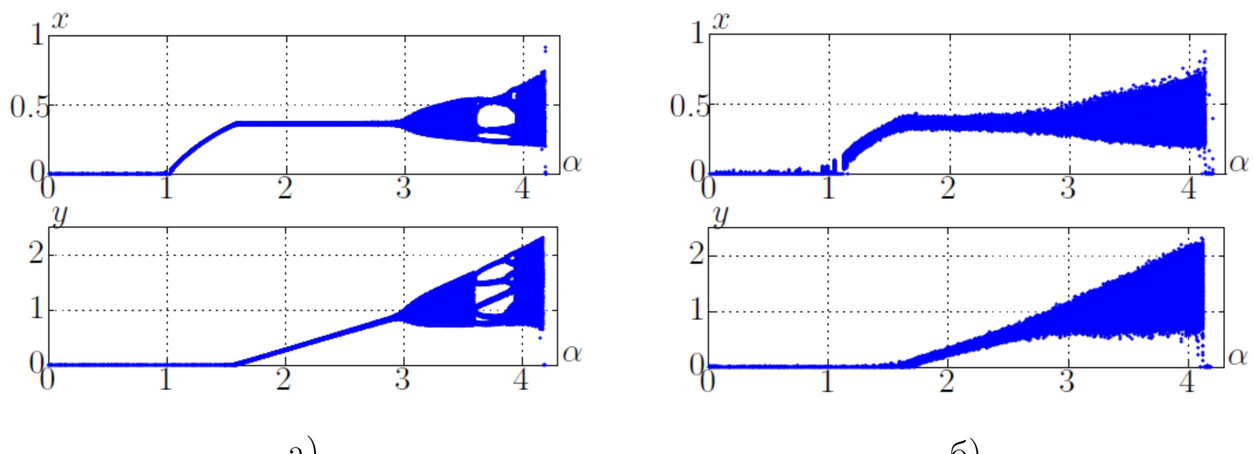
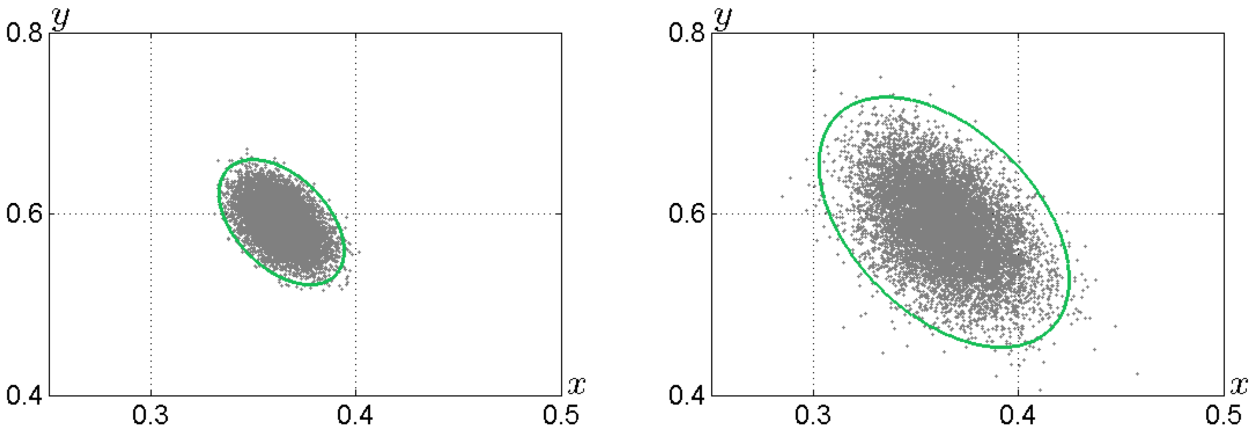


Рисунок 2.7 — Стохастические диаграммы модели (2.2) при $d = 3.3$ для: а) $\varepsilon = 0.001$; б) $\varepsilon = 0.01$

На рисунке 2.7 изображены случайные состояния модели (2.2) при $d = 3.3$ под действием аддитивного шума для разной интенсивности: а) $\varepsilon = 0.001$

и б) $\varepsilon = 0.01$. При увеличении интенсивности шума (рисунок 2.7б) разброс случайных состояний увеличивается, что приводит к размыванию внутренней структуры циклов и хаотических аттракторов.

В этом разделе на основе техники ФСЧ изучается разброс случайных состояний вокруг аттракторов модели (2.2): равновесие и цикл [173], замкнутая инвариантная кривая [175], хаотический аттрактор [179]. Используя формулы расчета стохастической чувствительности и доверительных эллипсов из главы 1, с доверительной вероятностью $P = 0.99$ были построены следующие доверительные эллипсы.

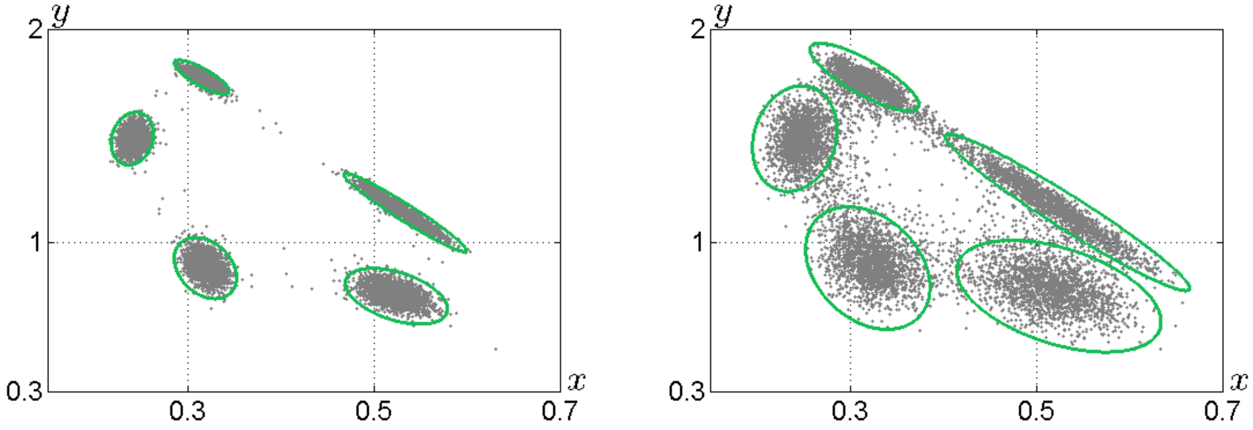


а) б)

Рисунок 2.8 — Доверительные эллипсы для равновесия M_2 модели (2.2) при $\alpha = 2.5$ и $d = 3.3$ для: а) $\varepsilon = 0.005$; б) $\varepsilon = 0.01$

На рисунке 2.8 вокруг равновесия ($\alpha = 2.5$ и $d = 3.3$) для модели (2.2) зеленым цветом представлены доверительные эллипсы, найденные из равенства (1.23), при двух различных значениях интенсивности шума: а) $\varepsilon = 0.005$ и б) $\varepsilon = 0.01$. Серым цветом показаны случайные состояния системы. Легко заметить, что доверительный эллипс хорошо описывает распределение случайных состояний стохастической модели, показывая чувствительность равновесия к вносимому шуму, и с увеличением интенсивности увеличивается.

Теперь построим доверительные эллипсы для цикла. На рисунке 2.9 вокруг элементов 5-цикла ($\alpha = 3.7$ и $d = 3.3$) для модели (2.2) зеленым цветом представлены доверительные эллипсы, построенные по формуле (1.23), при двух различных значениях интенсивности шума: а) $\varepsilon = 0.005$ и б) $\varepsilon = 0.01$. Серым цветом показаны случайные состояния системы. Аналогично рисунку 2.8 хорошо видно, что доверительные эллипсы соответствуют распределению случайных состояний вокруг элементов 5-цикла.



а) б)

Рисунок 2.9 — Доверительные эллипсы для 5-цикла модели (2.2) при $\alpha = 3.7$ и $d = 3.3$ для: а) $\varepsilon = 0.005$; б) $\varepsilon = 0.01$

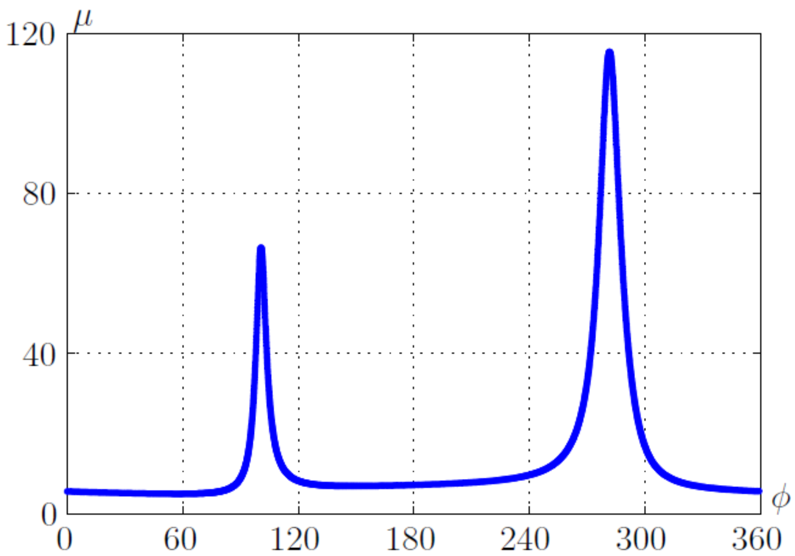


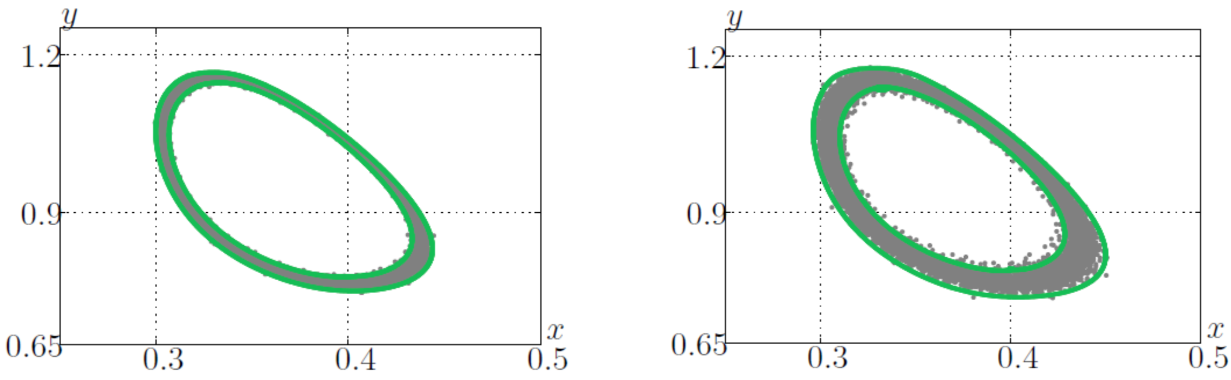
Рисунок 2.10 — Зависимость ФСЧ от угла φ для ЗИК модели (2.2) при $\alpha = 3.1$

На рисунке 2.10 показано изменение ФСЧ μ для ЗИК ($\alpha = 3.1$) модели (2.2) в зависимости от угла φ между вектором, проведенным параллельно оси из точки начала координат, и вектором, проведенным из начала координат к точке $(\overline{x}_i,\overline{y}_i)$. В данном случае центром координат является равновесие M_2. Значения ФСЧ μ получены с помощью теории и численных методов из главы 1.

Для описания разброса случайных состояний вдоль замкнутой инвариантной кривой в каждой его точке строится доверительный интервал по правилу трех сигма, опираясь на функцию стохастической чувствительности, следующим образом:

$$x = \overline{x} \pm 3\varepsilon\sqrt{\mu(\overline{x},\overline{y})}p_1(\overline{x},\overline{y}),$$
$$y = \overline{y} \pm 3\varepsilon\sqrt{\mu(\overline{x},\overline{y})}p_2(\overline{x},\overline{y}), \quad (2.3)$$

где $\mu(\overline{x},\overline{y})$ — значение функции стохастической чувствительности в точке $(\overline{x},\overline{y})$ и $p = (p_1(\overline{x},\overline{y}),\ p_2(\overline{x},\overline{y}))^\top$ — ортонормированный вектор к ЗИК в точке $(\overline{x},\overline{y})$. Построенные таким образом интервалы в каждой точке образуют доверительную полосу вдоль замкнутой инвариантной кривой.



а) б)

Рисунок 2.11 — Доверительные полосы для ЗИК модели (2.2) при $\alpha = 3.1$ и $d = 3.3$ для: а) $\varepsilon = 0.0005$; б) $\varepsilon = 0.001$

На рисунке 2.11 вокруг замкнутой инвариантной кривой ($\alpha = 3.1$ и $d = 3.3$) для модели (2.2) зеленым цветом представлены доверительные полосы, построенные по формуле (2.3), при двух различных значениях интенсивности шума: а) $\varepsilon = 0.0005$ и б) $\varepsilon = 0.001$. Серым цветом изображены случайные состояния системы. Видно, что чем больше значение интенсивности шума, тем шире полоса. Также легко заметить, что доверительные полосы хорошо описывают распределение случайных состояний стохастической модели, отражая зоны замкнутой инвариантной кривой более или менее чувствительные к вносимому шуму.

На рисунке 2.12 показана зависимость функции стохастической чувствительности для аттракторов модели (2.2) при изменении параметра: $\alpha \in [0, 3]$ — равновесие, $\alpha \in (3, 3.606]$ — ЗИК, $\alpha \in (3.606, 3.856]$ — 5-цикл и $\alpha \in [3.857, 3.941]$ — 10-цикл. Максимальное и минимальное собственное значение матриц стохастической чувствительности изображено синим и красным цветом, соответственно.

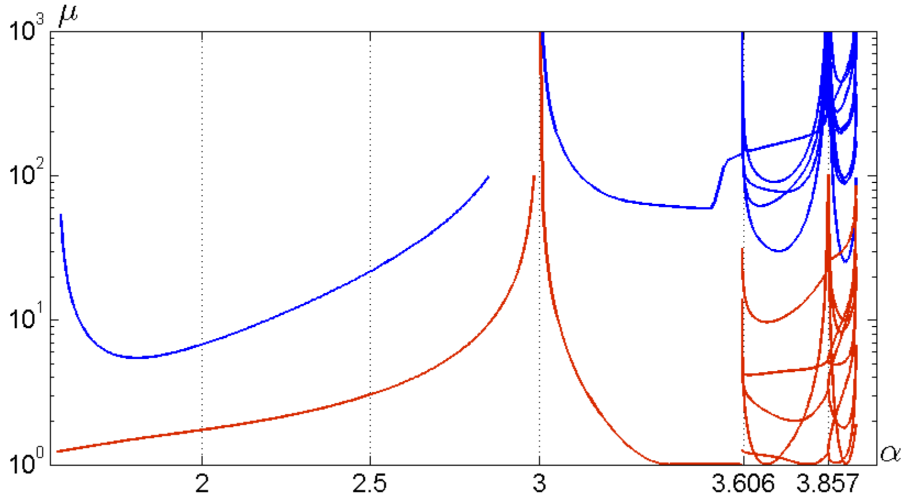


Рисунок 2.12 — Зависимость ФСЧ от параметра α для аттракторов модели (2.2) при $d = 3.3$

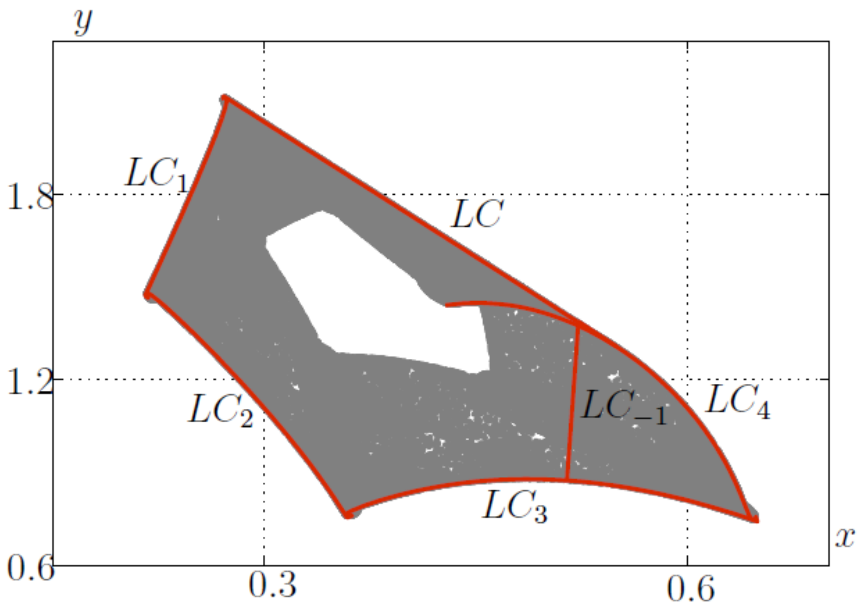
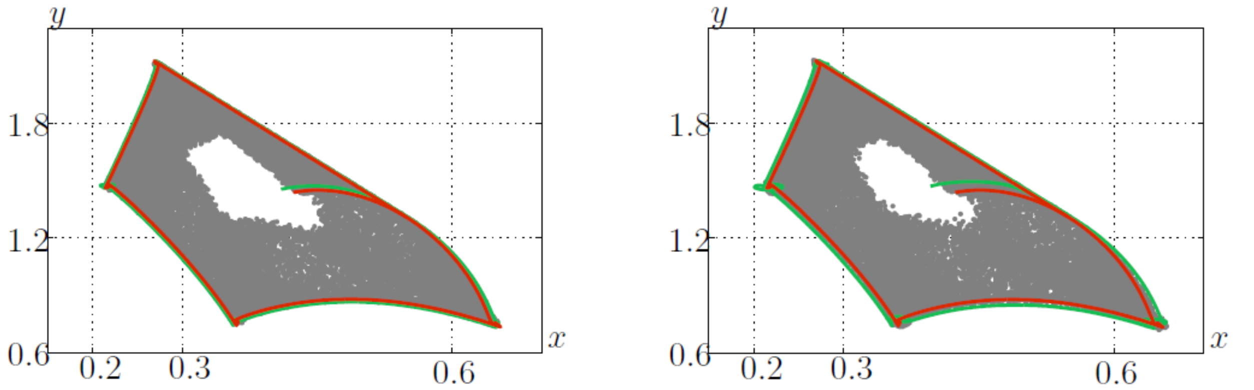


Рисунок 2.13 — Критические линии для хаоса при $\alpha = 4$ и $d = 3.3$ в модели (2.2)

Далее изучается чувствительность к вносимому шуму хаотического аттрактора A модели (2.2) [179]. На рисунке 2.13 для модели (2.1) серым цветом представлен детерминированный хаотический аттрактор ($\alpha = 4$ и $d = 3.3$), а красным цветом показаны критические линии $\{LC, LC_1, LC_2, LC_3, LC_4\}$, которые находятся из LC_{-1} алгоритмом, описанным в главе 1 (раздел 1.2.4).

На рисунке 2.14 для хаотического аттрактора ($\alpha = 4$ и $d = 3.3$) модели (2.2) зеленым цветом показана внешняя часть доверительной полосы, построенная по формуле (1.28), при разной интенсивности внешнего воздействия: а) $\varepsilon = 0.0005$ и б) $\varepsilon = 0.001$. Как и на рисунке 2.11 серым цветом



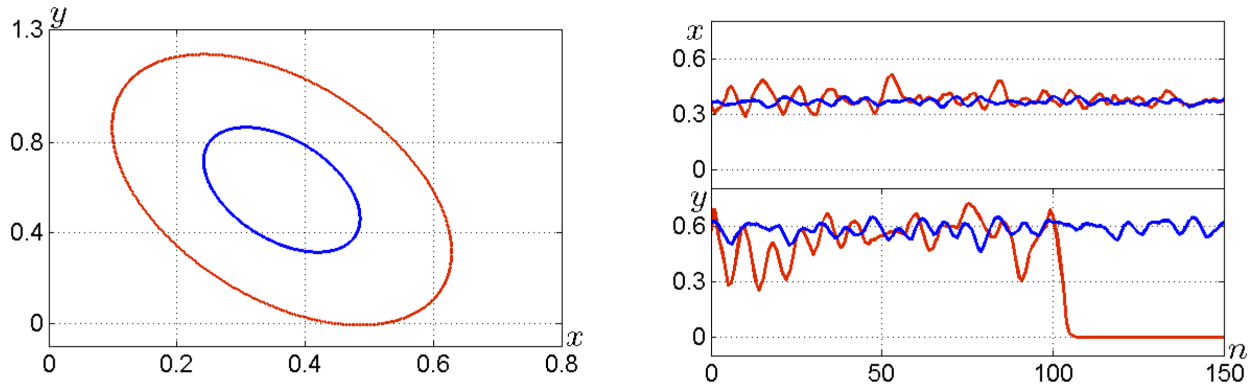
а) б)

Рисунок 2.14 — Внешняя граница доверительной полосы для модели (2.2) при $\alpha = 4$ и $d = 3.3$ для: а) $\varepsilon = 0.0005$; б) $\varepsilon = 0.001$

показаны случайные состояния. Красным цветом изображено семейство критических линий.

В модели (2.2) также наблюдается феномен вымирания популяции хищников, которое происходит при достижении интенсивности шума критического значения ε^*. В качестве примера данный феномен продемонстрирован на рисунке 2.15 для равновесия M_2 модели (2.2) при $\alpha = 2.5$ и $d = 3.3$. На рисунке 2.15 а) синим цветом показан доверительный эллипс для интенсивности шума $\varepsilon = 0.02$. При критическом значении интенсивности $\varepsilon = 0.0434$ видно, что доверительный эллипс (красный цвет) пересекает ось Ox. Соответственно, на рисунке 2.15 б) видно, что для при пересечении эллипсом «опасной» границы популяция хищников вымирает, а популяция жертв приходит в стационарное состояние существования. Аналогичным образом можно показать вымирание для прочих аттракторов системы.

На рисунке 2.16 представлена зависимость критической интенсивность шума от бифуркационного параметра α модели (2.2). Критическая интенсивность была найдена из условия пересечения доверительного эллипса для равновесия и циклов (или внешней границы доверительной полосы для ЗИК и хаотического аттрактора) с осью Ox. Видно, что при увеличении параметра α критическое значение интенсивности шума ε^*, вызывающее вымирание, уменьшается.



а) б)

Рисунок 2.15 — Вымирание популяции хищников в модели (2.2) для равновесия M_2 при $\alpha = 2.5$ и $d = 3.3$: а) доверительные эллипсы и б) временные ряды — при $\varepsilon = 0.02$ (синий) и $\varepsilon = 0.0434$ (красный)

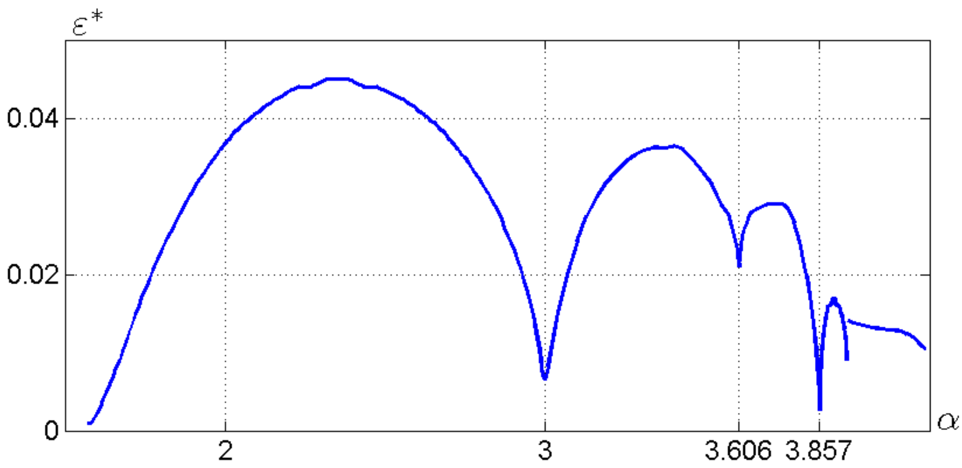


Рисунок 2.16 — Критическая интенсивность шума для модели (2.2) при $d = 3.3$

2.3 Основные результаты главы

В данной главе рассмотрена популяционная модель хищник-жертва с дискретным временем. В разделе 2.1 исследован детерминированный случай. Изучены равновесия, их устойчивость и бифуркационные сценарии, представленные картой динамических режимов в зависимости от параметров α, b, c и d. Построены бифуркационные диаграммы и бассейны притяжения изучаемых аттракторов. Обнаружено, что не для всех начальных значений плотностей популяций система может прийти в стационарный режим, возможен также неограниченный рост популяций. Изучены зоны параметра α, при которых поведение модели является хаотическим.

В разделе 2.2 в случае воздействия на систему внешнего аддитивного шума исследована чувствительность таких аттракторов данной модели, как равновесие, циклы, замкнутая инвариантная кривая и хаотический аттрактор. Были построены доверительные эллипсы и полосы рассеивания, позволяющие описать разброс случайных состояний. Показана зависимость функции стохастической чувствительности аттракторов от бифуркационных параметров. Также была найдена зависимость интенсивности шума от параметра α, при которой в системе наблюдается вымирание популяции хищников. Основные результаты исследований, представленные в этой главе, были опубликованы в работе [206].

Глава 3. Модель двух связанных популяций с миграцией

В данной главе исследуется пространственно структурированная метапопуляция, состоящая из двух связанных подсистем с локальной динамикой, которая моделируется дискретным отображением Рикера [10]. В изолированных подсистемах могут наблюдаться различные режимы: равновесный, периодический и хаотический. В случае же взаимодействия между популяциями поведение системы может существенно меняться, например, равновесный режим трансформируется в периодический, а хаотический режим переходит в порядок и наоборот. Стоит отметить, что исследования динамики взаимодействующих подсистем интенсивно развиваются и находят приложения в различных областях науки [105; 106; 203]. Целью главы является анализ динамических режимов корпоративного поведения при вариации интенсивности перетоков между популяционными подсистемами при разных значениях локального параметра естественного прироста, а также воздействие случайного возмущения на корпоративную динамику популяционных систем. Особенность и новизна исследований данной главы состоит в изучении стохастических феноменов в модели связанных популяционных подсистем.

Пусть динамика изолированной популяции моделируется отображением Рикера:

$$x_{n+1} = f(\mu, x_n), \qquad f(\mu, x) = x \exp\left(\mu(1-x)\right), \tag{3.1}$$

где μ — параметр естественного прироста. При изменении параметра μ система (3.1) демонстрирует разнообразие динамических режимов. На рисунке 3.1 изображена бифуркационная диаграмма модели (3.1) при изменении параметра μ. При $0 \leqslant \mu < 2$ система имеет в качестве аттрактора устойчивое равновесие $\overline{x} = 1$. С увеличением параметра μ оно теряет устойчивость, и наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода с последующим чередованием параметрических зон порядка и хаоса.

В главе изучается двумерная метапопуляционная модель, состоящая из двух подсистем, связанных взаимной миграцией:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(\mu_1, x_n) + \eta_n, \\ y_{n+1} = f(\mu_2, y_n) - \eta_n, \end{cases} \tag{3.2}$$

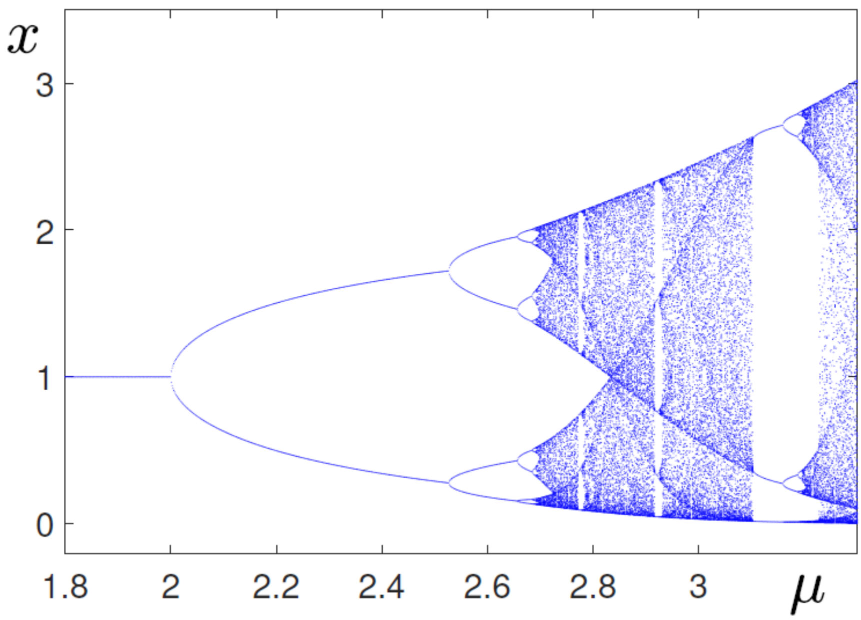


Рисунок 3.1 — Бифуркационная диаграмма изолированной системы Рикера (3.1)

где x_n и y_n — плотности популяций. Динамика этой системы моделируется отображением Рикера (3.1). В системе (3.2) параметры μ_1 и μ_2 характеризуют естественный прирост x- и y-популяций соответственно. Предполагается, что места обитания популяций имеют общую границу, вследствие чего возможна миграция особей с одной территории на другую. Миграция между популяциями пропорциональна разнице между y_n и x_n с коэффициентом связи $\sigma > 0$: $\eta_n = \sigma(y_n - x_n)$. Параметр σ регулирует силу миграционного потока. В моделировании динамики системы (3.2), чтобы обеспечить биологический смысл (неотрицательность y_n и x_n), используется соответствующее усечение (см. алгоритм ниже).

Алгоритм 1: Обеспечение неотрицательности y_{n+1} и x_{n+1} в системе (3.2). Предварительно посчитав $\eta_n = \sigma(y_n - x_n)$, корректируем это значение по алгоритму ниже.

- Если $\eta_n > y_n$, то:
  - Если $\eta_n > f(\mu_2, y_n)$, то $\eta_n = min(y_n, f(\mu_2, y_n))$.
  - Иначе $\eta_n = y_n$.
- Иначе если $\eta_n \geqslant 0$, то:
  - Если $\eta_n > f(\mu_2, y_n)$, то $\eta_n = f(\mu_2, y_n)$.
  - Иначе $\eta_n = \eta_n$.
- Иначе если $\eta_n \geqslant -x_n$, то:
  - Если $f(\mu_1, x_n) + \eta_n \leqslant 0$, то $\eta_n = -f(\mu_1, x_n)$.

– Иначе $\eta_n = \eta_n$.

– Иначе если $f(\mu_1, x_n) + \eta_n \leqslant 0$, то $\eta_n = -min(x_n, f(\mu_1, x_n))$.

– Иначе $\eta_n = -x_n$.

Также в этой главе в качестве стохастической модели рассматривается система (3.2), в которой случайным возмущениям подвержен коэффициент связи σ. Тогда миграционный член η_n выглядит следующим образом:

$$\eta_n = (\sigma + \varepsilon\xi_n)(y_n - x_n), \tag{3.3}$$

где ξ_n — независимые гауссовские шумы с параметрами $E\xi_n = 0, E\xi_n^2 = 1$, а ε — это интенсивность шума. Аналогично детерминированной модели для системы (3.2)-(3.3) используется Алгоритм 1, чтобы обеспечить неотрицательность x_n и y_n.

3.1 Параметрический анализ устойчивости равновесий

Система (3.2) имеет одно невырожденное равновесие $M(\overline{x}, \overline{y})$, где $\overline{x} = \overline{y} = 1$. В этом равновесии матрица Якоби имеет вид:

$$J = \begin{bmatrix} 1 - \mu_1 - \sigma & \sigma \\ \sigma & 1 - \mu_2 - \sigma \end{bmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы находятся из квадратного уравнения:

$$\lambda^2 - (2 - \mu_1 - \mu_2 - 2\sigma)\lambda + (1 - \mu_1 - \sigma)(1 - \mu_2 - \sigma) - \sigma^2.$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости равновесия M записываются как:

$$|2 - \mu_1 - \mu_2 - 2\sigma| < (1 - \mu_1)(1 - \mu_2) - \sigma(2 - \mu_1 - \mu_2) + 1 < 2.$$

Итак, параметрическая зона устойчивости определяется следующими неравенствами:

$$0 \leqslant \sigma < 1, \quad 0 < \mu_1 < 2 - \sigma,$$
$$0 < \mu_2 < \frac{4 - 4\sigma + \mu_1(\sigma - 2)}{2 - \mu_1 - \sigma}.$$

На рисунке 3.2 для нескольких значений параметра σ показаны зоны устойчивости параметров μ_1, μ_2, лежащие ниже соответствующих бифуркационных кривых. Как видно, с увеличением параметра связи σ эти зоны сжимаются, и при $\sigma \geqslant 1$ равновесие $M(1,1)$ становится неустойчивым при любых $\mu_1 > 0, \mu_2 > 0$. Таким образом, миграция в популяционной системе (3.2) разрушает устойчивый равновесный режим сосуществования.

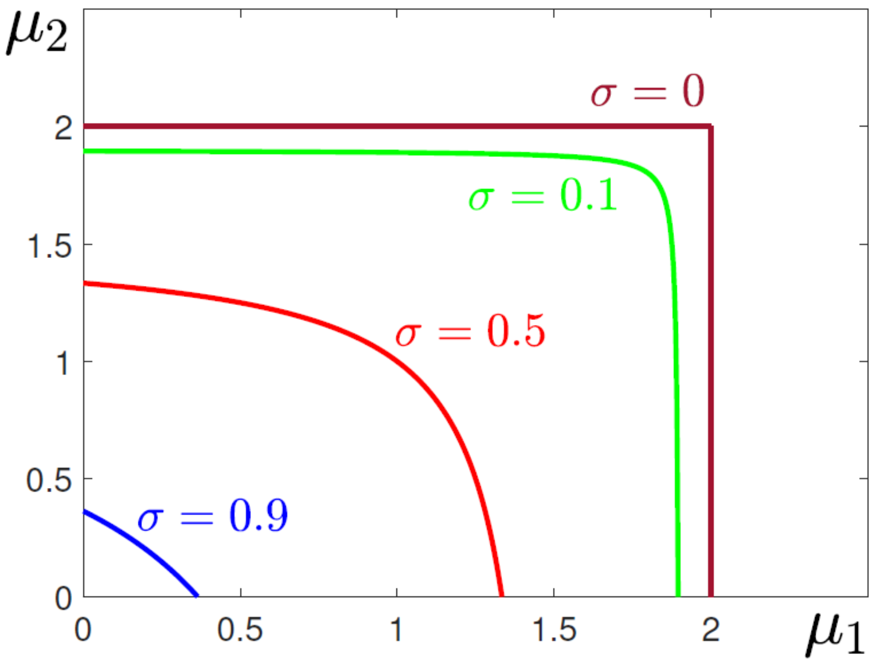


Рисунок 3.2 — Зоны устойчивости равновесия M(1,1) системы (3.2)

Далее в этой главе изучается поведение системы (3.2) при разных значениях параметров естественного прироста μ_1, μ_2 популяций x- и y-популяций соответственно:

- раздел 3.2 — $\mu_1 = \mu_2 = 1.8$, когда обе популяции в равновесном режиме,
- раздел 3.3 — $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$, когда обе популяции в периодическом режиме,
- подраздел 3.4.1 — $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$, когда популяция x в равновесном режиме, а популяция y — в хаотическом,
- подраздел 3.4.2 — $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$, случай аналогичен 3.4.1, но здесь сделан акцент на сравнении устойчивости режимов к случайным воздействиям.

3.2 Динамика связанных равновесных популяций

В данном разделе зафиксируем значения параметров $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 1.8$. Затем исследуем, как варьирование интенсивности миграции σ меняет общую динамику метапопуляции.

3.2.1 Анализ вариативности детерминированной динамики

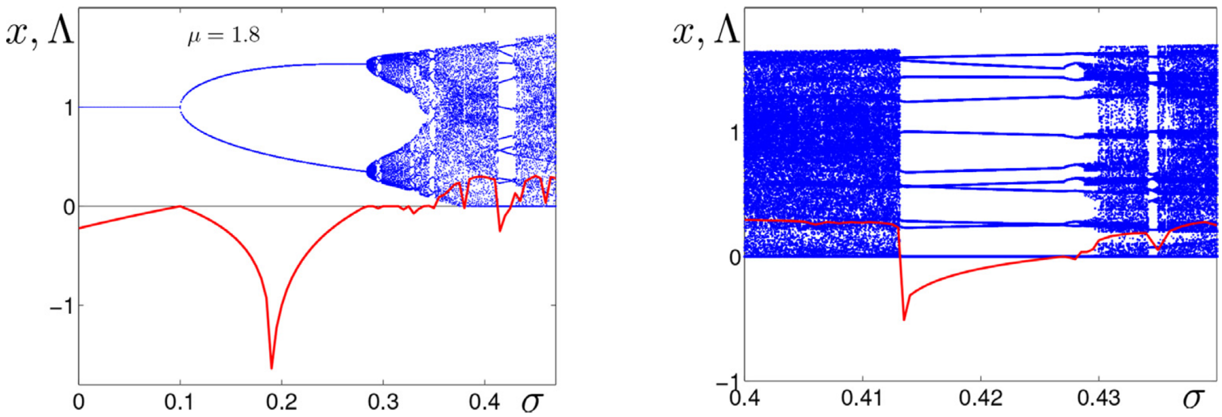


Рисунок 3.3 — Бифуркационная диаграмма для системы (3.2) при $\mu = 1.8$

Изменение динамического поведения метапопуляционной системы (3.2) при $\mu = 1.8$ в зависимости от параметра σ описывается бифуркационной диаграммой на рисунке 3.3. Здесь синим цветом изображены x-координаты аттракторов, а красным цветом показан старший показатель Ляпунова Λ. Как видно с ростом параметра σ равновесие теряет устойчивость при $\sigma = 0.1$ и рождается устойчивый 2-цикл. Этот 2-цикл превращается в 2-тор, далее 2-тор заменяется дискретным циклом и, наконец, наблюдается хаотический режим. Наибольший показатель Ляпунова имеет нулевые значения в точках бифуркации и положительные значения, когда система (3.2) хаотична. Следует отметить, что в этом случае система моностабильна.

На рисунке 3.4 проиллюстрировано разнообразие аттракторов системы (3.2) при $\mu = 1.8$ для различных параметров σ: равновесие (1,1) для $\sigma = 0.08$, 2-цикл для $\sigma = 0.26$, 2-тор для $\sigma = 0.298$, 22-цикл для $\sigma = 0.33$,

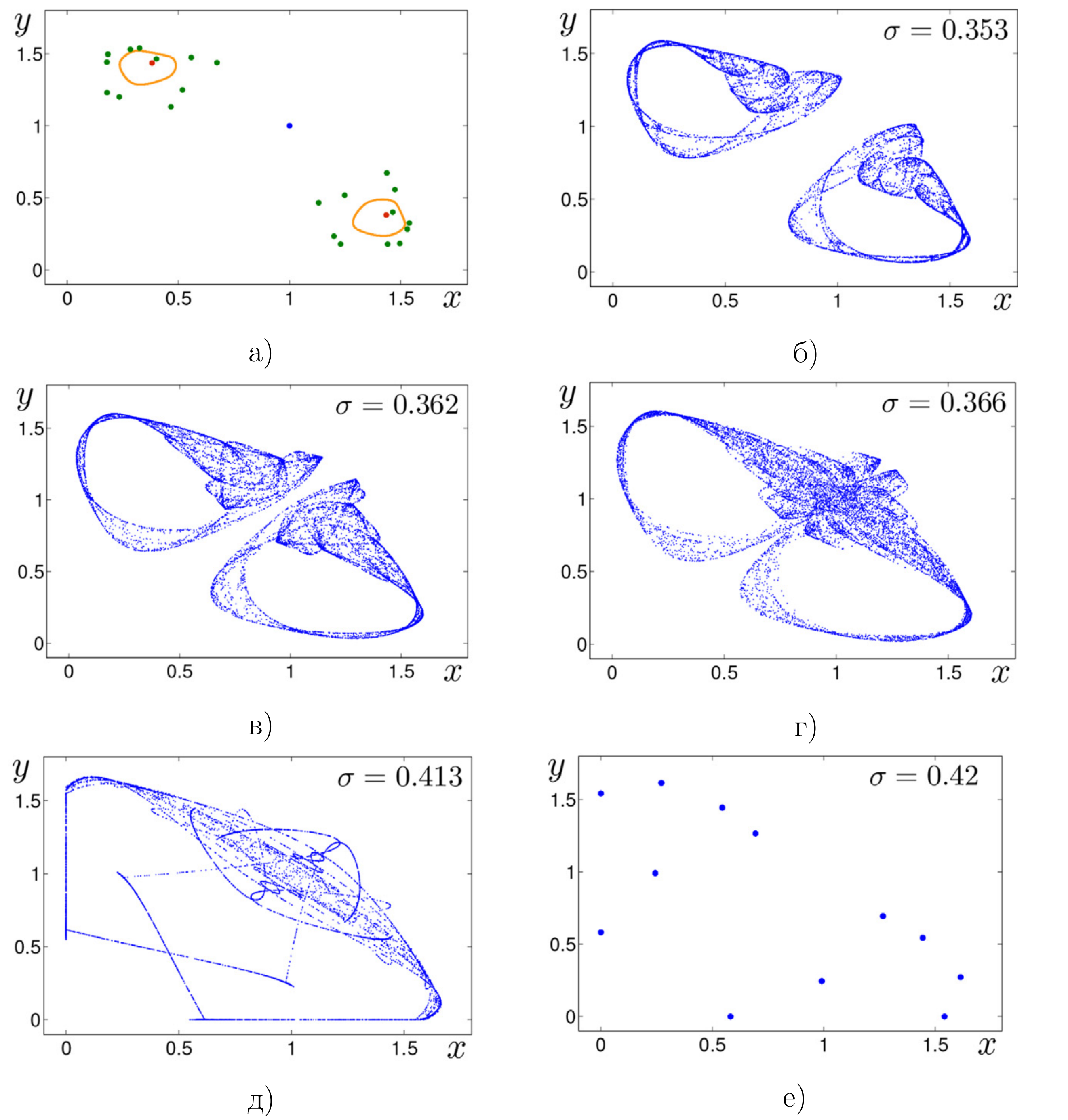


Рисунок 3.4 — Аттракторы метапопуляционной системы (3.2) при $\mu = 1.8$: а) равновесие (1,1) для $\sigma = 0.08$ (синий), 2-цикл для $\sigma = 0.26$ (красный), 2-тор для $\sigma = 0.298$ (оранжевый) и 22-цикл для $\sigma = 0.33$ (зелёный); двукусочный хаос для б) $\sigma = 0.353$ и в) $\sigma = 0.362$; однокусочный хаос для г) $\sigma = 0.366$ и д) $\sigma = 0.413$; е) 12-цикл для $\sigma = 0.42$

12-цикл для $\sigma = 0.42$ и различные хаотические аттракторы для $\sigma = 0.353$, $\sigma = 0.362$, $\sigma = 0.366$ и $\sigma = 0.413$.

В системе (3.2) при $\mu = 1.8$ возникают различные типы противофазных колебаний: периодические, квазипериодические и хаотические. Некоторые при-

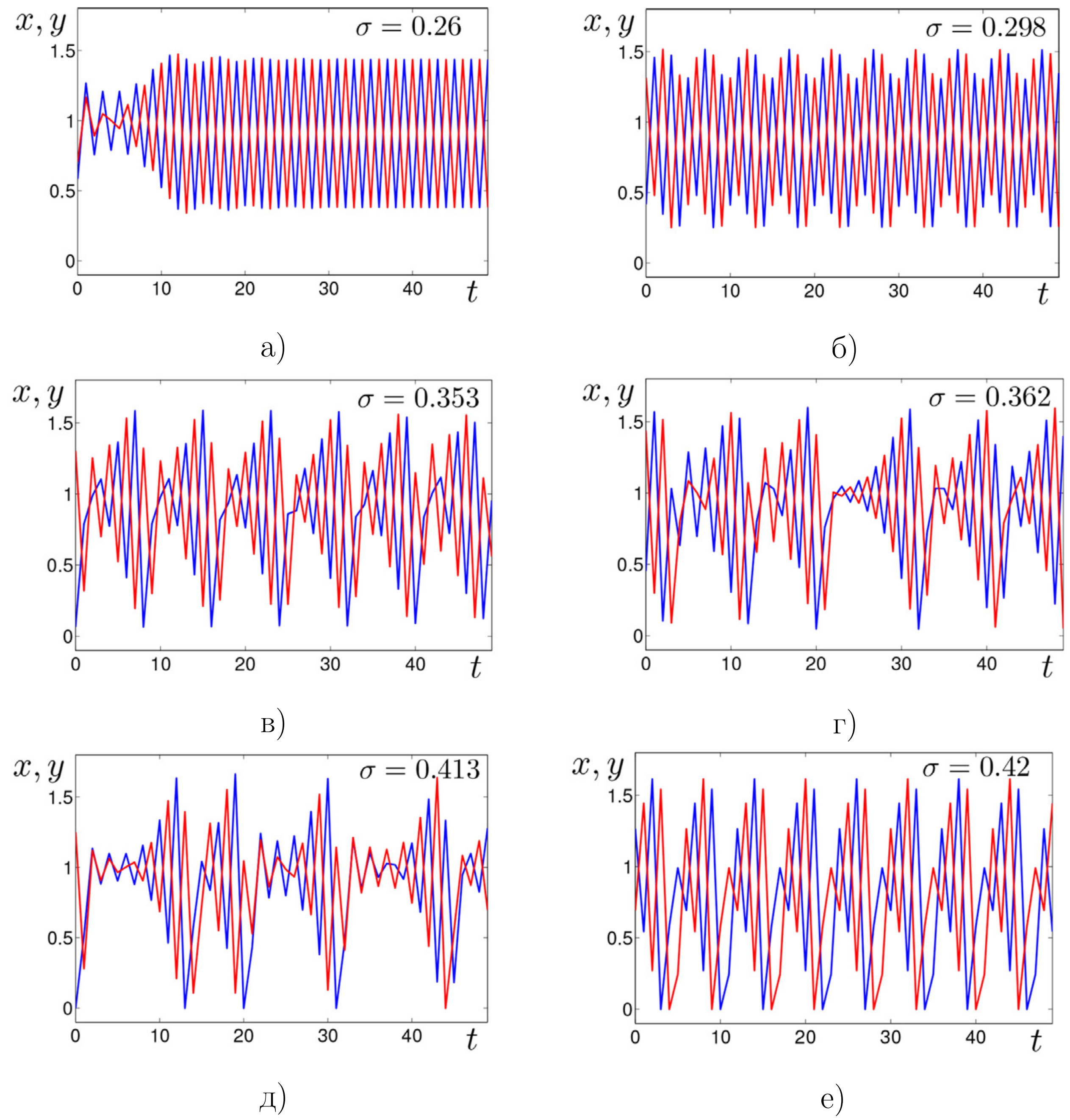


Рисунок 3.5 — Осцилляционные режимы системы (3.2) при $\mu = 1.8$: а) 2-цикл для $\sigma = 0.26$; б) 2-тор для $\sigma = 0.298$; хаос для в) $\sigma = 0.353$, г) $\sigma = 0.362$, д) $\sigma = 0.413$; е) 12-цикл для $\sigma = 0.42$

меры таких колебательных режимов показаны на рисунке 3.5, где временные ряды для x,y-координат решений показаны синим и красным цветом соответственно. На рисунке 3.5 а) для $\sigma = 0.26$ видно, как начальные синфазные колебания после кратковременного переходного процесса переходят в противофазный двухпериодический синхронизированный режим. На рисунке 3.5 б) для $\sigma = 0.298$ противофазные колебания имеют квазипериодическую форму. Более сложные формы колебаний в хаотическом режиме показаны на рисунке 3.5 в), г) и д). Здесь отчетливо видны колебания бёрстового типа с чередованием синфазных и противофазных частей. Поведение системы (3.2) в окне порядка (см. рисунок 3.3 справа) иллюстрируется на рисунке 3.5 е) при $\sigma = 0.42$, где метапопуляция демонстрирует противофазную синхронизацию в форме 12-цикла.

Таким образом, поведение метапопуляции, моделируемой системой (3.2), является достаточно сложным даже в простейшем случае, когда изолированные подсистемы находятся в одном и том же равновесном режиме при $\mu = 1.8$. Как можно заметить, миграция может существенно менять динамику системы и генерировать как регулярные (периодические или квазипериодические), так и хаотические колебательные режимы в метапопуляции.

3.2.2 Стохастические деформации периодических режимов и переход к хаосу

В этом подразделе показывается, как неизбежные случайные возмущения в параметре интенсивности миграции влияют на динамику метапопуляции. Здесь сосредоточено внимание на анализе влияния стохастических возмущений системы (3.2)-(3.3) при $\mu = 1.8$ на периодические колебательные режимы.

Влияние шума на 2-цикл

Сначала рассмотрим стохастическую систему (3.2)-(3.3) при $\mu = 1.8$ для $\sigma = 0.26$, где при $\varepsilon = 0$ детерминированным аттрактором является 2-цикл (см. красные точки на рисунке 3.4 а) и временной ряд на рисунке 3.5 а)).

На рисунке 3.6 а), б) показаны случайные состояния (зелёный цвет) стохастической системы (3.2)-(3.3) при $\mu = 1.8$ и детерминированный 2-цикл (красный) для $\sigma = 0.26$ в случае двух значений интенсивности шума: а) $\varepsilon = 0.01$ и б) $\varepsilon = 0.1$. Как видно, с увеличением шума разброс случайных состояний вокруг детерминированного аттрактора растет. На рисунке 3.6 в), г) показаны соответствующие временные ряды. Для $\varepsilon = 0.01$ система демонстрирует за-

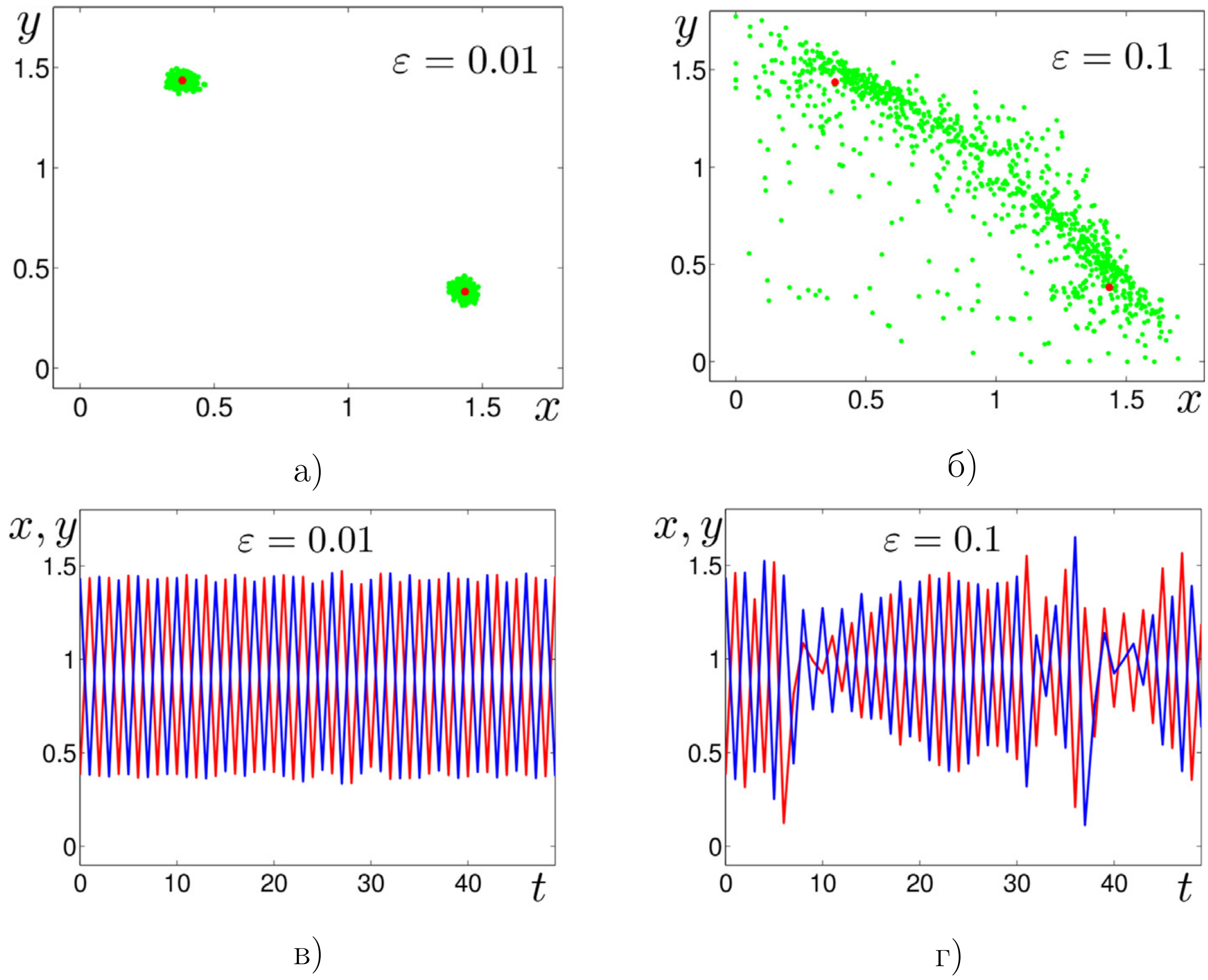


Рисунок 3.6 — Случайные состояния (зелёный цвет) стохастической системы (3.2)-(3.3) при $\mu = 1.8$ и $\sigma = 0.26$ для: а) $\varepsilon = 0.01$; б) $\varepsilon = 0.1$. Точки детерминированного 2-цикла показаны красным. В в), г) изображены соответствующие временные ряды

шумленные противофазные колебания, в то время как шум с интенсивностью $\varepsilon = 0.1$ вызывает временное разрушение противофазной синхронизации.

При дальнейшем увеличении интенсивности шума наблюдается новый стохастический феномен. На рисунке 3.7 показаны временные ряды x,y-координат решений системы (3.2)-(3.3) при $\mu = 1.8$ и $\sigma = 0.26$ для различных значений интенсивности шума: а) $\varepsilon = 0.01$, б) $\varepsilon = 0.5$ и в) $\varepsilon = 1$. На рисунке 3.7 а) для $\varepsilon = 0.01$ можно видеть зашумленные колебания вокруг состояний 2-цикла. При большем шуме (см. рисунок 3.7 б) для $\varepsilon = 0.5$) после некоторого переходного процесса амплитуда случайных состояний резко уменьшается и решения начинают локализоваться вблизи неустойчивого равновесия $(1, 1)$. Такая локализация носит временный характер: наблюдается чередование зон стабилизации и колебаний большой амплитуды. Таким образом, наблюдается феномен ин-

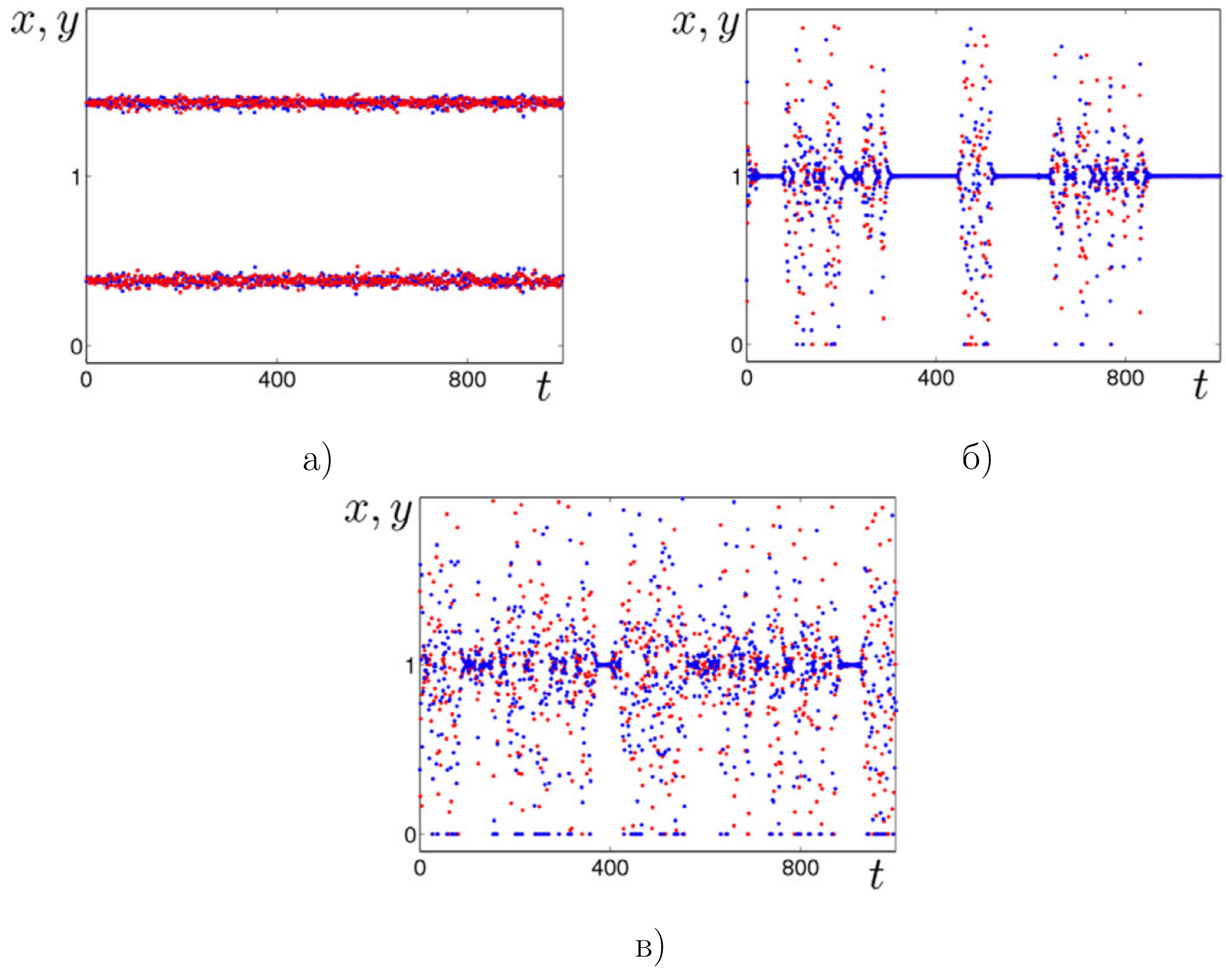
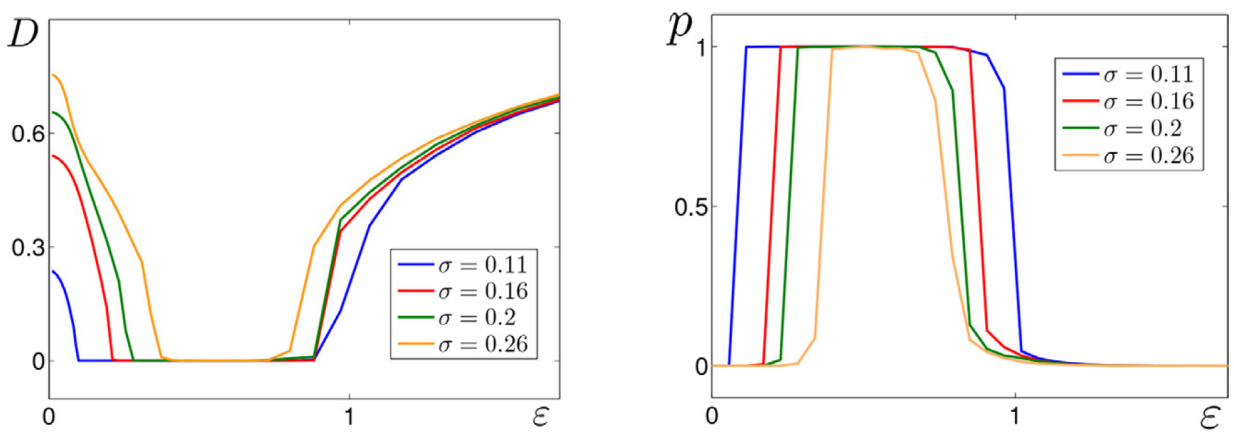


Рисунок 3.7 — Временные ряды x,y-координат решений стохастической системы (3.2)-(3.3) при $\mu = 1.8$ и $\sigma = 0.26$ для: а) $\varepsilon = 0.01$; б) $\varepsilon = 0.5$; в) $\varepsilon = 1$

дуцированной шумом временной стабилизации неустойчивого равновесия. При дальнейшем увеличении интенсивности шума (см. рисунок 3.7 в) для $\varepsilon = 1$) длительность участков стабилизации сокращается.

Результаты статистического анализа этого стохастического явления подробно показаны на рисунке 3.8 при $\mu = 1.8$. Здесь представлена зона изменения параметра σ, где в системе (3.2) аттрактором является 2-цикл. На рисунке 3.8 а) показаны зависимости среднеквадратичного отклонения D случайных состояний стохастической системы (3.2)-(3.3) от неустойчивого детерминированного равновесия (1,1) в зависимости от интенсивности шума для четырех значений параметра связи: $\sigma = 0.11$ (синий), $\sigma = 0.16$ (красный), $\sigma = 0.2$ (зелёный) и $\sigma = 0.26$ (оранжевый). Здесь просматривается общая закономерность: при увеличении интенсивности шума появляется ε-зона, в которой отклонение близко к нулю. Это указывает на индуцированную шумом локализацию случайных состояний вблизи неустойчивого равновесия (1,1).



а) б)

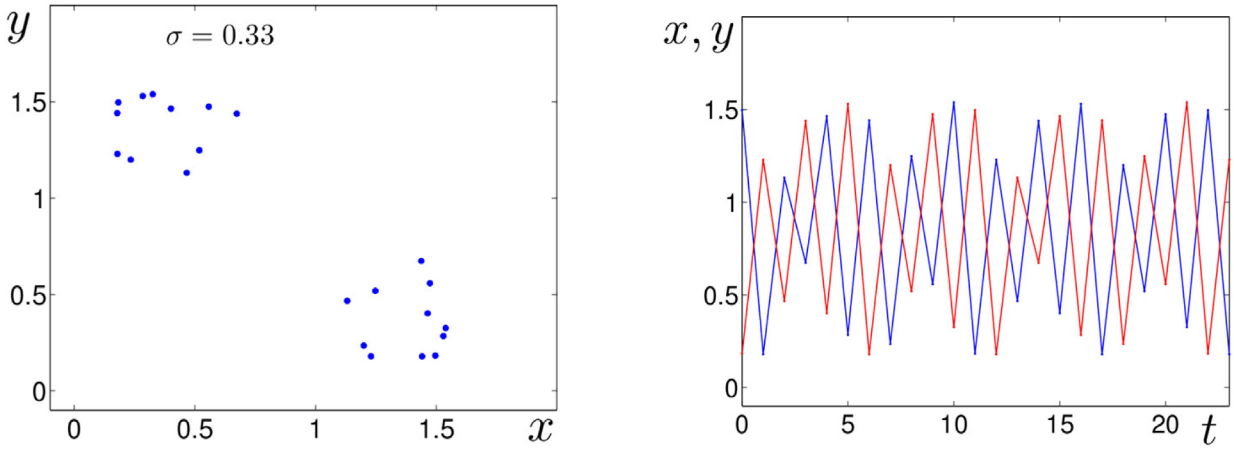
Рисунок 3.8 — Индуцированная шумом временная стабилизация равновесия (1,1) при $\mu = 1.8$: а) среднеквадратичное отклонение D случайных состояний системы (3.2)-(3.3) от равновесия (1,1) при $\sigma = 0.11$ (синий), $\sigma = 0.16$ (красный), $\sigma = 0.2$ (зелёный) и $\sigma = 0.26$ (оранжевый); б) вероятность попадания случайных состояний в круг $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 10^{-8}$ для того же набора параметра σ

Как видно на рисунке 3.8 а) после ε-зоны стабилизации функция D начинает расти. На рисунке 3.8 б) представлены графики вероятности p попадания случайных состояний стохастической системы (3.2)-(3.3) в достаточно малый круг $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 10^{-8}$ с неустойчивым равновесием (1,1) в центре. Как видно, с точки зрения распределения вероятностей ε-зона, в которой шум стабилизирует систему, довольно узкая.

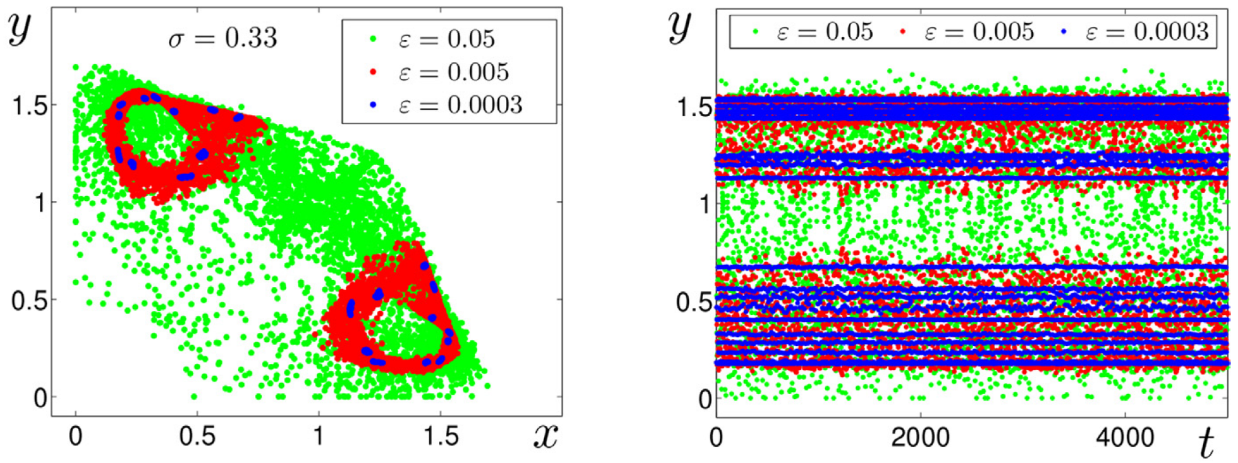
Влияние шума на 22-цикл

Теперь рассмотрим стохастическую систему (3.2)-(3.3) при $\mu = 1.8$ для $\sigma = 0.33$, где при $\varepsilon = 0$ детерминированным аттрактором является 22-цикл (см. зелёные точки на рисунке 3.4 а).

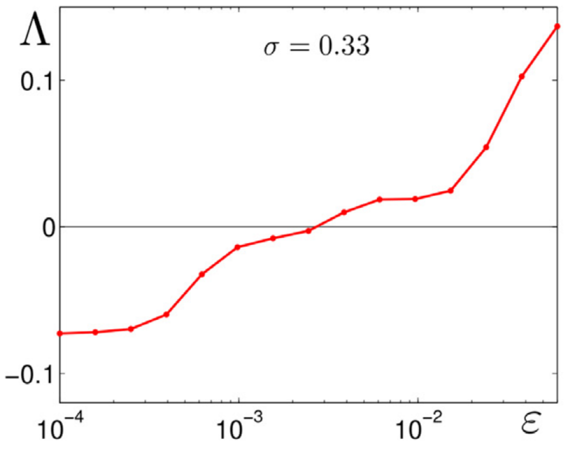
Состояния 22-цикла показаны на рисунке 3.9 а) вместе с временными рядами x,y-координат решений системы (3.2) при $\mu = 1.8$ и $\sigma = 0.33$. Как можно заметить, колебания плотности в подсистемах происходят в противофазном режиме. С увеличением интенсивности шума можно выделить два этапа в изменении поведения метапопуляции. Эти стадии показаны на рисунке 3.9 б), где



а)



б)



в)

Рисунок 3.9 — Стохастическая система (3.2)-(3.3) при $\mu = 1.8$ и $\sigma = 0.33$: а) состояния и соответствующие им временные ряды для 22-цикла детерминированной системы; б) случайные состояния и временные ряды для разных значений интенсивности шума ε; в) зависимость старшего показателя Ляпунова Λ от интенсивности шума ε

случайные состояния и соответствующие им y-временные ряды показаны для трех значений интенсивности шума ε.

При слабом шуме случайные решения слегка колеблются вблизи детерминированного 22-цикла (см. синие точки для $\varepsilon = 0.0003$ на рисунке 3.9 б)). При увеличении шума начинается первый этап качественной стохастической деформации динамики системы: система переходит в более сложный режим зашумленного 2-тора (см. красные точки для $\varepsilon = 0.005$ на рисунке 3.9 б)). При дальнейшем увеличении шума происходит третий этап: отдельные части этого 2-тора сливаются из-за стохастического смешивания случайных состояний, и формируется совместное вероятностное распределение (см. зелёные точки для $\varepsilon = 0.05$ на рисунке 3.9 б)).

Эти стохастические преобразования сопровождаются изменениями значений показателя Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$, показанного на рисунке 3.9 в). Функция $\Lambda(\varepsilon)$ монотонно возрастает и становится положительной. Это означает, что динамика системы переходит из регулярной в хаотическую уже на первом этапе стохастической деформации.

Влияние шума на 12-цикл

Затем рассмотрим зону параметров системы (3.2) при $\mu = 1.8$ вблизи значения бифуркации $\sigma_{cr} = 0.413163$. Как видно на бифуркационной диаграмме (рисунок 3.3, справа), при прохождении параметром σ значения σ_{cr} слева направо детерминированная система претерпевает бифуркацию кризиса с резкой трансформацией хаотического аттрактора в регулярный 12-цикл. Примеры таких аттракторов вблизи параметра бифуркации кризиса σ_{cr} показаны на рисунке 3.10. Влияние шума на аттракторы в окне порядка, расположенном справа от точки σ_{cr}, изучаются здесь на примере 12-цикла, наблюдаемого при $\sigma = 0.42$.

На рисунке 3.11 синими точками показан детерминированный 12-цикл системы (3.2) при $\mu = 1.8$ и $\sigma = 0.42$, а также случайные состояния стохастической системы (3.2)-(3.3). При слабом шуме случайные состояния локализуются вблизи детерминированного цикла (см. зелёные точки для $\varepsilon = 0.003$ на рисунке 3.11 а)). При увеличении шума происходит резкое качественное изменение

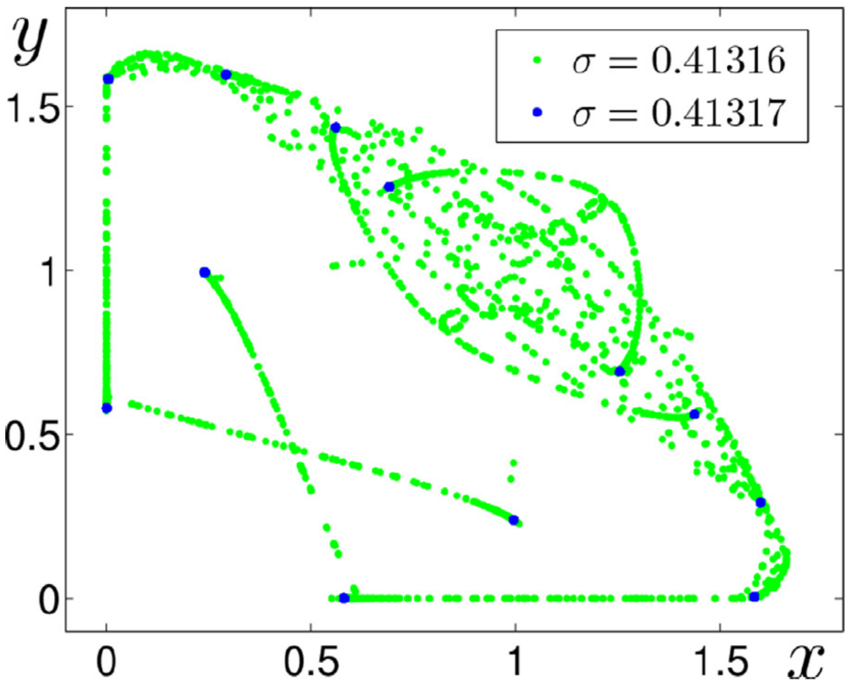


Рисунок 3.10 — Аттракторы детерминированной системы (3.2) при $\mu = 1.8$ вблизи параметра бифуркации кризиса $\sigma_{cr} = 0.413163$: хаотический аттрактор (зелёный) для $\sigma = 0.41316$ и 12-цикл (синий) для $\sigma = 0.41317$

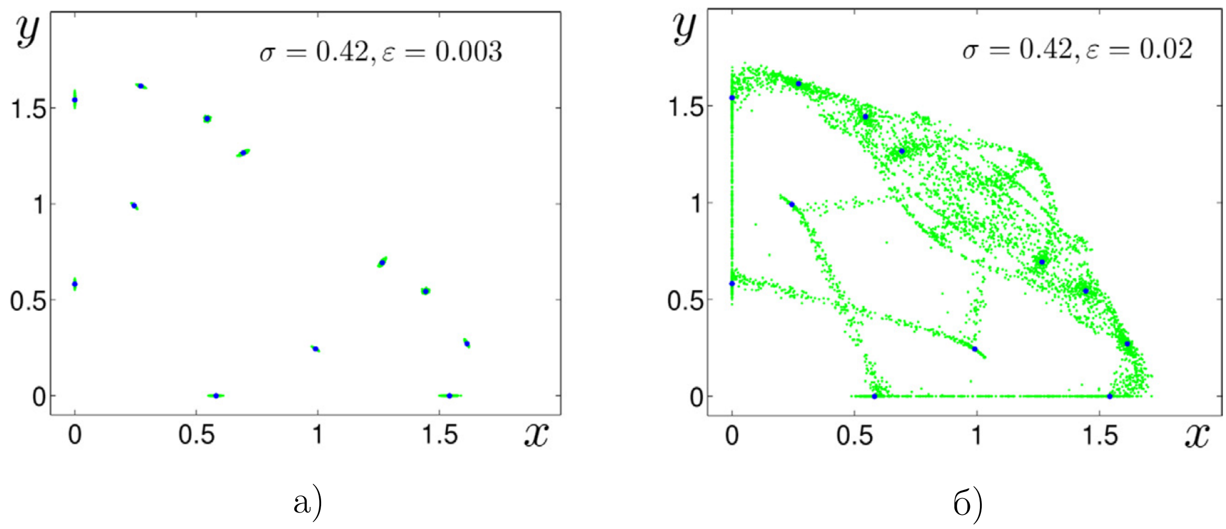


Рисунок 3.11 — Случайные состояния (зелёный цвет) стохастической системы (3.2)-(3.3) при $\mu = 1.8$ и $\sigma = 0.42$ для: а) $\varepsilon = 0.003$; б) $\varepsilon = 0.02$. Состояния детерминированного устойчивого 12-цикла показаны синими точками

вероятностного пространственного распределения случайных состояний. Это распределение показано зелёным цветом на рисунке 3.11 б) для $\varepsilon = 0.02$. Как можно заметить, пространственное расположение случайных состояний похоже на детерминированный хаотический аттрактор, показанный на рисунке 3.10 для $\sigma = 0.41316$.

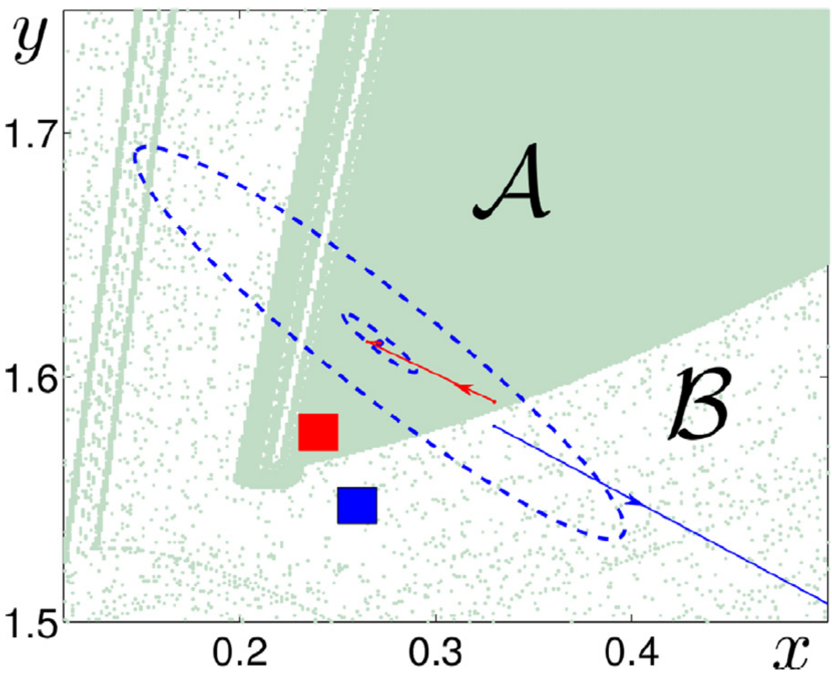


Рисунок 3.12 — Бассейны притяжения при $\mu = 1.8$ и $\sigma = 0.42$ и доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.003$ и $\varepsilon = 0.02$. Доверительная вероятность $P = 0.99$

Происхождение этого стохастического явления связано с особенностями переходных процессов в исходной детерминированной модели (3.2) при $\mu = 1.8$. Действительно, тип сходимости к аттрактору (в рассматриваемом случае это 12-цикл) существенно зависит от начального состояния. Это показано на рисунке 3.12 для $\sigma = 0.42$. Здесь синей точкой обозначена точка $\overline{x} = 0.27138, \overline{y} = 1.61401$ — это элемент устойчивого детерминированного 12-цикла. Каждое состояние этого цикла становится устойчивым равновесием в системе (3.2) через 12 шагов. На рисунке 3.12 зелёным цветом показан бассейн притяжения равновесия $(\overline{x}, \overline{y})$ в этой системе через 12 шагов. Как видно, этот бассейн содержит плотно закрашенную подобласть $\mathcal{A}$. Дополнение $\mathcal{B}$ имеет фрактальную решетчатую структуру [79; 204].

Эти две области $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ позволяют выделить два типа переходных процессов. Действительно, для начальных данных из зоны $\mathcal{A}$ решения системы (3.2) через 12 шагов быстро стремятся к равновесию $(\overline{x}, \overline{y})$. Это иллюстрирует рисунок 3.13, где построены состояния совокупности решений детерминированной системы, которые начинаются с $t = 0$ из узлов равномерной сетки на красном квадрате $[0.23, 0.25] \times [1.57, 1.585] \subset \mathcal{A}$. Этот красный квадрат показан на рисунке 3.12.

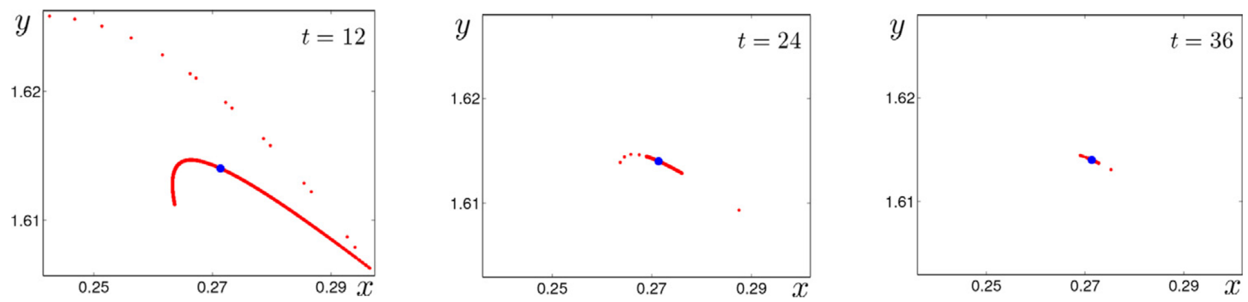


Рисунок 3.13 — Состояния системы при $\mu = 1.8$ и $\sigma = 0.42$, начинающиеся с $t = 0$ из узлов равномерной сетки на красном квадрате $[0.23, 0.25] \times [1.57, 1.585]$

Следует отметить, что для решений, начинающихся в $\mathcal{B}$, наблюдается другой тип переходного процесса. На рисунке 3.14 показаны состояния совокупности решений системы, которые начинаются с $t = 0$ из узлов равномерной сетки на синем квадрате $[0.25, 0.27] \times [1.54, 1.555] \subset \mathcal{B}$. В этом переходном процессе возникает метастабильное распределение, подобное хаотическому аттрактору (рисунок 3.10).

Таким образом, область $\mathcal{A}$ можно отнести к зоне регулярной динамики в отличие от области $\mathcal{B}$, где наблюдаются хаотические переходные процессы. Такая двойственность детерминированного поведения позволяет объяснить феномен стохастической генерации случайных распределений сложной пространственной формы, как на рисунке 3.11. Переход от зашумленного 12-цикла (рисунок 3.11 а)) к сложному пространственному распределению (рисунок 3.11 б)) можно проанализировать методом доверительных областей.

Метод доверительных областей позволяет аппроксимировать пространственную дисперсию случайных решений вокруг детерминированного аттрактора. В этом приближении ключевым моментом является стохастическая чувствительность аттрактора к случайным возмущениям. Метод функции стохастической чувствительности для регулярных (равновесий, циклов, торов) и хаотических аттракторов, а также метод доверительных областей изложены в главе 1 текущей работы.

На рисунке 3.12 построены доверительные эллипсы вокруг $(\overline{x}, \overline{y})$ для $\varepsilon = 0.003$ и $\varepsilon = 0.02$. Меньший эллипс полностью принадлежит области $\mathcal{A}$, тогда как больший эллипс частично занимает область $\mathcal{B}$. Такое расположение сигнализирует о том, что для $\varepsilon = 0.003$ стохастическая система будет демонстрировать зашумленный 12-цикл с небольшими отклонениями от детерминированных состояний, тогда как для $\varepsilon = 0.02$ будет сгенерирован новый стохастический

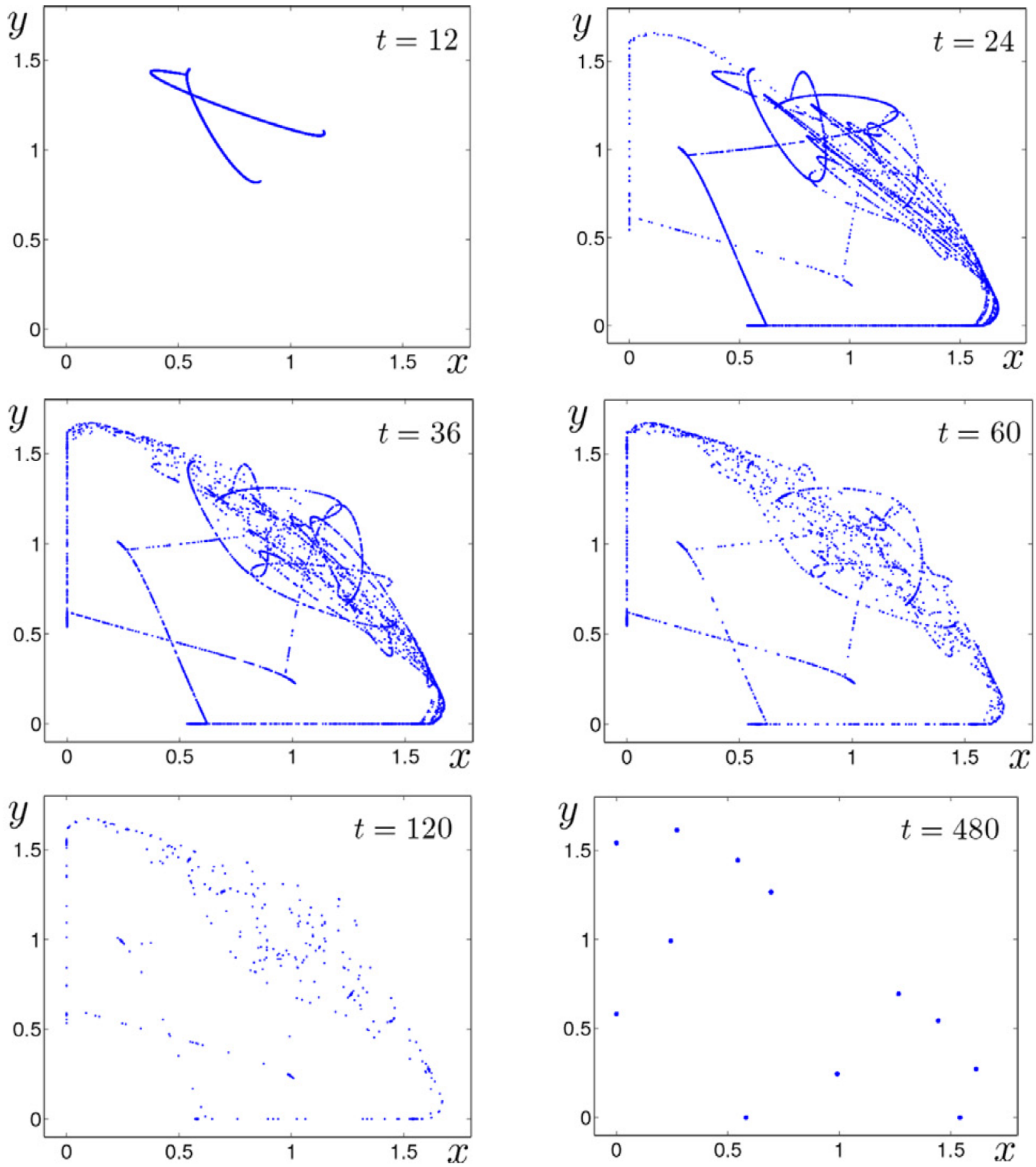


Рисунок 3.14 — Состояния системы при $\mu = 1.8$ и $\sigma = 0.42$, начинающиеся с $t = 0$ из узлов равномерной сетки на красном квадрате $[0.25, 0.27] \times [1.54, 1.555]$

аттрактор сложной пространственной формы. Этот аналитический прогноз подтверждается результатами прямого численного моделирования.

Рассмотрим, как связано это стохастическое преобразование вероятностного распределения с изменением старшего показателя Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$. На рисунке 3.15 график $\Lambda(\varepsilon)$ показан красным цветом для рассматриваемого случая $\sigma = 0.42$. Как видно, с увеличением интенсивности шума старший

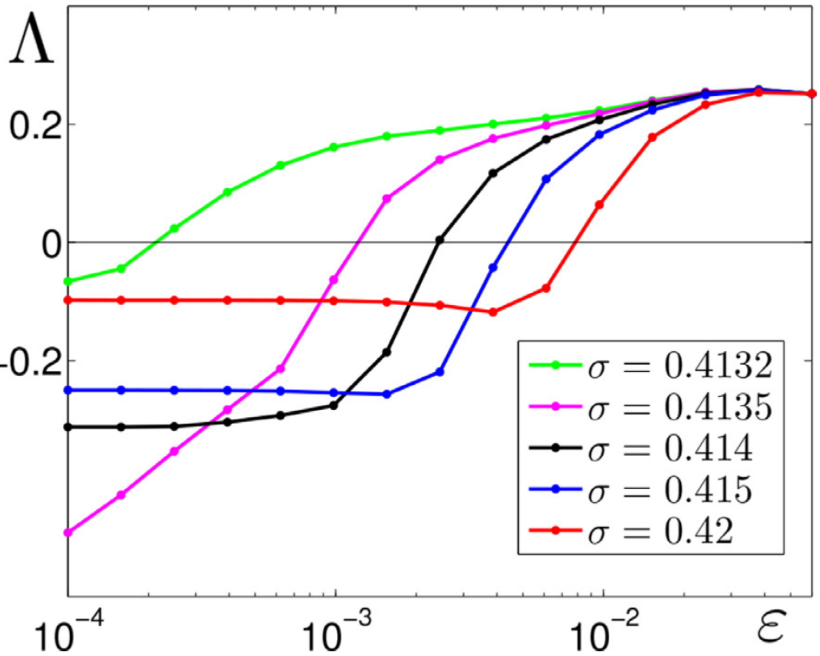


Рисунок 3.15 — Старший показатель Ляпунова стохастической системы (3.2)-(3.3) при $\mu = 1.8$ для разных значений параметра связи σ в зависимости от интенсивности шума ε

показатель Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$ растет и меняет знак с минуса на плюс. Следует обратить внимание, что значение $\Lambda(0.003)$ отрицательно, тогда как значение $\Lambda(0.02)$ положительно. Это означает, что для $\varepsilon = 0.003$ стохастический аттрактор регулярен, но при $\varepsilon = 0.02$ динамика системы хаотична. Индуцированный шумом переход от порядка к хаосу можно увидеть на рисунке 3.15 для других значений σ. Можно заметить, что чем ближе σ к границе бифуркации кризиса $\sigma_{cr} = 0.413163$, тем меньший шум вызывает переход от порядка к хаосу.

3.3 Динамика связанных периодических популяций

В данном разделе сосредоточимся на случае, когда обе популяции, будучи изолированными, 2-периодичны. Такие 2-периодические режимы наблюдаются при $2 < \mu < 2.52$ (см. рисунок 3.1). Здесь зафиксируем значения параметров $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ и изучим зависимость связанной динамики метапопуляции в зависимости от коэффициента связи σ.

3.3.1 Бифуркации и мультистабильность детерминированной модели

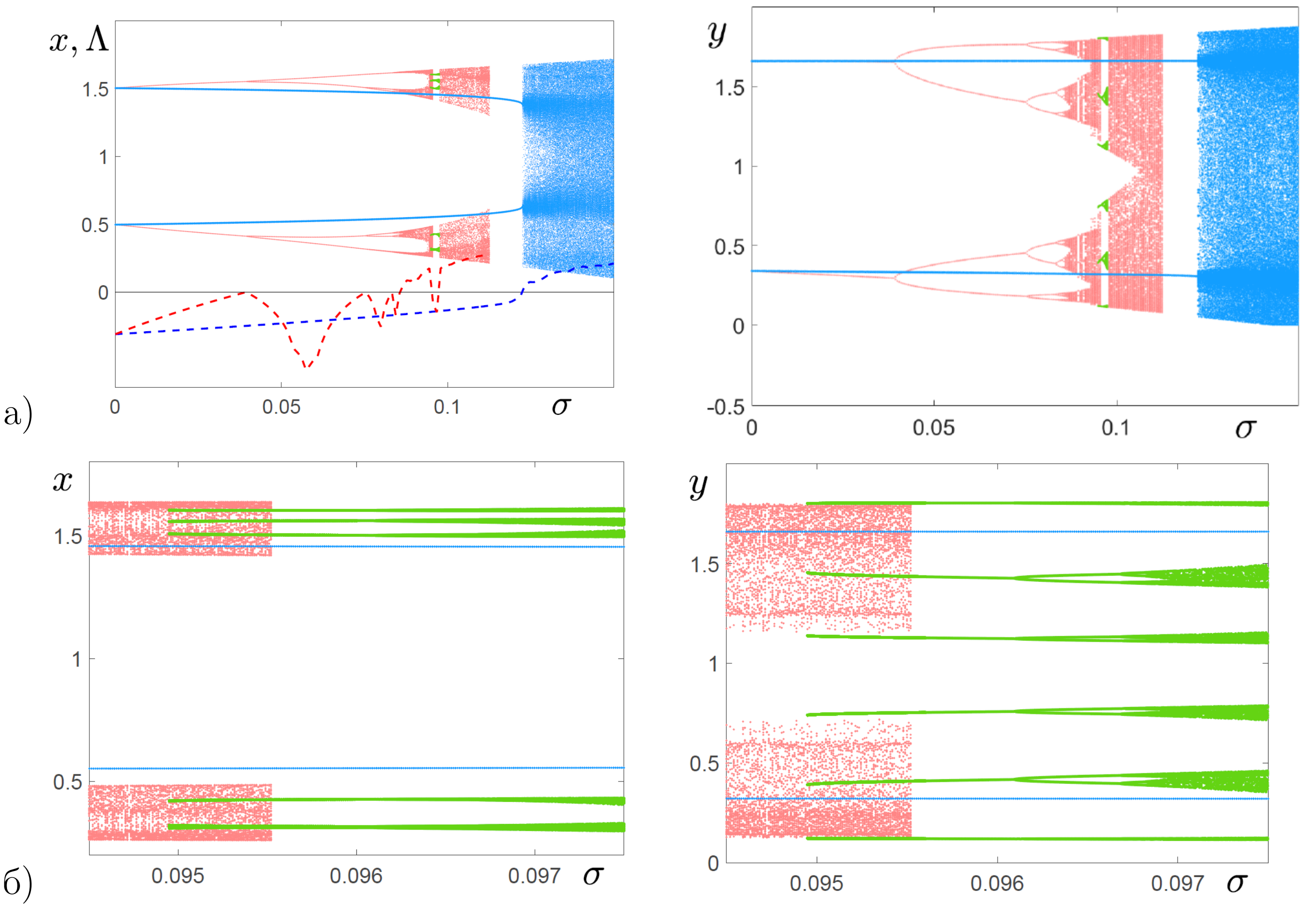


Рисунок 3.16 — Система (3.2) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$: а) бифуркационные диаграммы в зависимости от параметра σ; б) увеличенные фрагменты бифуркационных диаграмм. Здесь показано три семейства аттракторов: $\mathcal{R}$ (красный), $\mathcal{G}$ (зелёный) и $\mathcal{B}$ (синий). Также в а) пунктирными линиями показаны старшие показатели Ляпунова для аттракторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{B}$

На бифуркационной диаграмме (рисунок 3.16) видно, что связанная система (3.2) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ демонстрирует разнообразие динамических режимов, как регулярных, так и хаотических. Здесь наблюдаются зоны изменения параметра σ, где присутствует моно- и мультистабильность.

Сначала рассмотрим аттрактор $\mathcal{B}$, показанный синим цветом. В достаточно широкой зоне структурной устойчивости $0 < \sigma < 0.1224$ этот аттрактор представляет собой устойчивый 2-цикл $\mathcal{B}_2$. При прохождении параметром связи точки бифуркации кризиса $\sigma = 0.1224$ слева направо этот цикл теряет устойчивость и превращается в хаотический аттрактор $\mathcal{B}_{CH}$. Преобразование аттрактора $\mathcal{B}$ из регулярного в хаотический подтверждается соответствующим старшим показателем Ляпунова (синяя пунктирная линия).

На рисунке 3.16 наряду с аттрактором $\mathcal{B}$ изображены аттракторы $\mathcal{R}$ (красный) и $\mathcal{G}$ (зелёный). Аттракторы $\mathcal{R}$ и $\mathcal{G}$ гораздо более чувствительны к изменению параметра связи σ. Действительно, в интервале $0 < \sigma < 0.03937$ аттрактор $\mathcal{R}$ является устойчивым 2-цикл $\mathcal{R}_{2C}$. При переходе параметра σ через бифуркационное значение 0.03937 аттрактор $\mathcal{R}$ претерпевает цепочку бифуркаций удвоения периода с преобразованиями $\mathcal{R}_{2C} \to \mathcal{R}_{4C} \to \mathcal{R}_{8C} \to \ldots$, а также переходы к хаосу (см. старший показатель Ляпунова, показанный красным пунктиром).

На рисунке 3.16 б) в достаточно узкой зоне $0.09495 < \sigma < 0.0975$ показаны детали аттрактора $\mathcal{G}$. Здесь этот аттрактор является 6-циклом $\mathcal{G}_{6C}$ и далее показывает каскад бифуркаций удвоения периода $\mathcal{G}_{6C} \to \mathcal{G}_{12C} \to \mathcal{G}_{24C} \to \ldots$.

Таким образом, в метапопуляционной системе (3.2) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ наблюдаются σ-параметрические зоны моно-, би- и трыритмичности. Моноритмичность наблюдается при $0.11255 < \sigma < 0.15$, где единственным периодическим аттрактором $\mathcal{B}$ является либо 2-цикл $\mathcal{B}_{2C}$, либо хаотический $\mathcal{B}_{CH}$. Триритмичность наблюдается при $0.09495 < \sigma < 0.09552$, где два регулярных аттрактора $\mathcal{B}_{2C}$ и $\mathcal{G}_{6C}$ сосуществуют с хаотическим аттрактором $\mathcal{R}_{CH}$. В других σ-параметрических зонах, где система (3.2) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ является биритмичной, 2-цикл $\mathcal{B}_{2C}$ сосуществует с разными формами аттракторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{G}$.

Рисунок 3.17 иллюстрирует эти различные случаи фазовыми портретами с аттракторами и их бассейнами притяжения для нескольких значений параметра σ. В мультистабильных случаях на рисунке 3.17 а)-г) бассейн $\mathcal{B}_{2C}$ показан голубым, бассейн $\mathcal{R}$ — белым, бассейн $\mathcal{G}$ — зелёным. На рисунке 3.17 а) для $\sigma = 0.03$ изображено сосуществование двух 2-циклов $\mathcal{B}_{2C}$ и $\mathcal{R}_{2C}$. При этом в зависимости от того, в каком бассейне лежит начальная точка, решение системы сходится либо к режиму синфазной синхронизации (цикл $\mathcal{B}_{2C}$), либо к режиму противофазной синхронизации (цикл $\mathcal{R}_{2C}$). На рисунке 3.17 б) при $\sigma = 0.07$ 2-цикл $\mathcal{B}_{2C}$ (синфазная синхронизация) сосуществует с 4-циклом $\mathcal{R}_{4C}$ (противофазная синхронизация).

Режим триритмичности иллюстрируется рисунке 3.17 в) для $\sigma = 0.0952$. Здесь 2-цикл $\mathcal{B}_{2C}$ сосуществует с 6-циклом $\mathcal{G}_{6C}$ и хаотическим аттрактором $\mathcal{R}_{CH}$, поэтому противофазная синхронизация представлена в регулярной и ха-

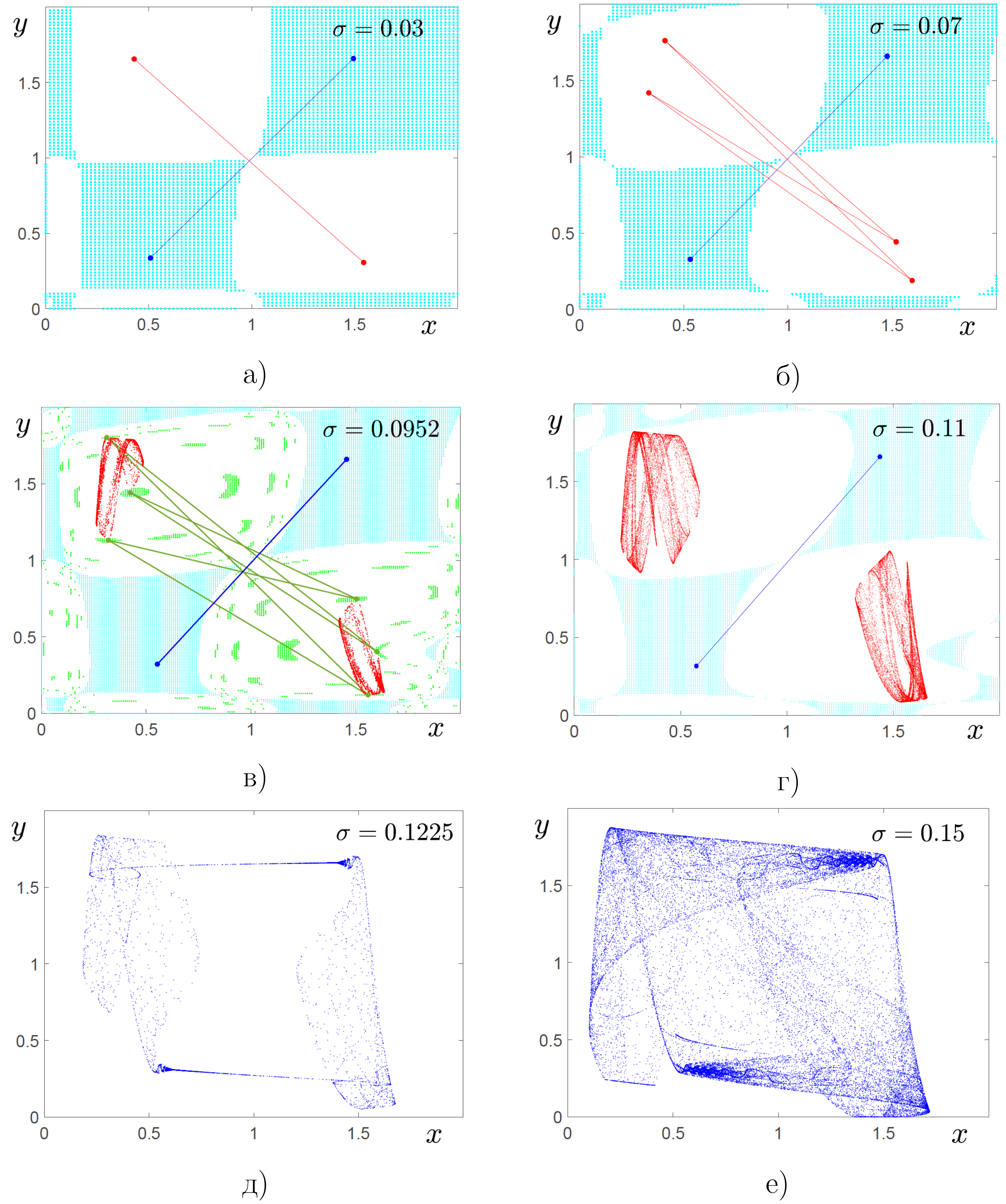


Рисунок 3.17 — Аттракторы системы (3.2) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ и их бассейны притяжения: а) два сосуществующих 2-цикла для $\sigma = 0.03$; б) 2-цикл (синий) и 4-цикл (красный) для $\sigma = 0.07$; в) 2-цикл (синий), 6-цикл (зелёный) и хаотический аттрактор (красный) для $\sigma = 0.0952$; г) 2-цикл (синий) и хаотический аттрактор (красный) для $\sigma = 0.11$; хаотические аттракторы для д) $\sigma = 0.1225$ и е) $\sigma = 0.15$

отической формах. Стоит отметить, что бассейн $\mathcal{G}_{6C}$ (зелёная область) имеет фрактальную структуру.

Пример режима биритмичности с регулярным аттрактором $\mathcal{B}_{2C}$ и хаотическим аттрактором $\mathcal{R}_{CH}$ представлен на рисунке 3.17 г) для $\sigma = 0.11$. При дальнейшем увеличении параметра связи σ хаотический аттрактор $\mathcal{R}_{CH}$ приближается к сепаратрисе, касается ее при $\sigma = 0.1125$ и исчезает из-за бифуркации кризиса. Изменение формы хаотических аттракторов $\mathcal{B}_{CH}$ в зоне моноритмичности показано на рисунке 3.17 д) для $\sigma = 0.1225$ и рисунке 3.17 е) для $\sigma = 0.15$.

Подводя итог, можно сказать, что эта довольно простая метапопуляционная модель демонстрирует богатое разнообразие динамических режимов, сочетающих многоритмичность с различными формами синхронизации, как регулярной, так и хаотической.

3.3.2 Стохастические переходы в зонах би- и триритмичности

В этом подразделе показываются дополнительные эффекты, вызванные случайным возмущением, для аттракторов системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$. Результаты стохастического воздействия существенно зависят от типов детерминированных аттракторов и геометрии их бассейнов притяжения. Рассмотрим индуцированные шумом эффекты для некоторых, обсуждавшихся выше, ключевых случаев детерминированной динамики.

Зона биритмичности $0 < \sigma < 0.03937$: 2-цикл + 2-цикл

В этой зоне биритмичности зафиксируем $\sigma = 0.03$. На рисунке 3.17 а) представлены сосуществующие 2-циклы $\mathcal{B}_{2C}$ и $\mathcal{R}_{2C}$, соответствующие режимам синфазной и противофазной синхронизации детерминированной системы (3.2) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ для этого значения параметра σ.

При слабом шуме случайные решения, начинающиеся с детерминированных циклов, располагаются в своих зонах притяжения. По мере увеличения

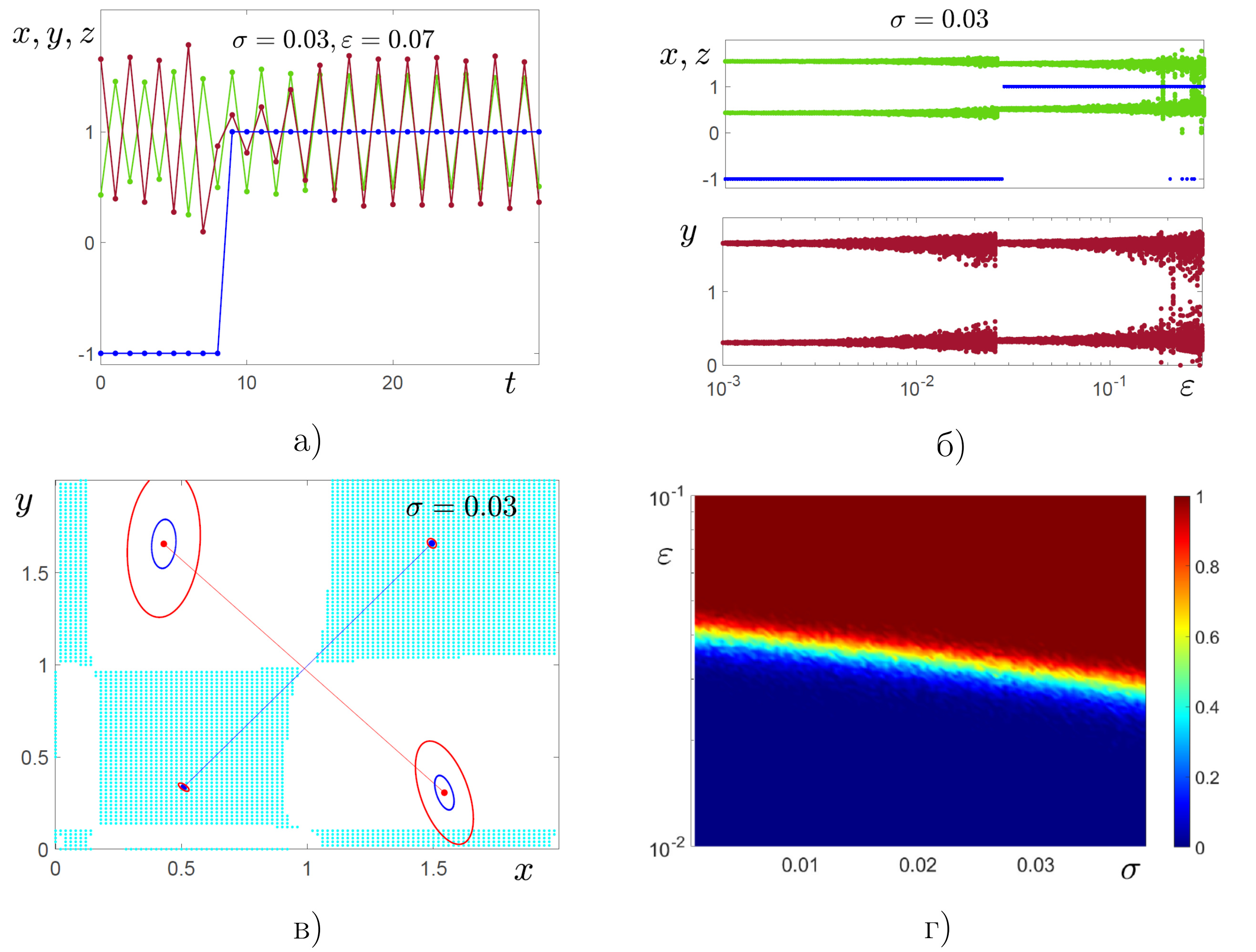


Рисунок 3.18 — Стохастическая система (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ и $\sigma = 0.03$: а) временные ряды x- (зелёный) и y-координат (коричневый) решений, начинающиеся с противофазного цикла $\mathcal{R}_{2C}$, индикатор синхронизации z (синий); б) случайные состояния решений, начинающиеся с $\mathcal{R}_{2C}$, индикатор синхронизации z в зависимости от интенсивности шума ε; в) доверительные эллипсы вокруг состояний противофазного цикла $\mathcal{R}_{2C}$ и синфазного цикла $\mathcal{B}_{2C}$ для $\varepsilon = 0.01$ (синий) и $\varepsilon = 0.03$ (красный); г) цветная шкала вероятности разрушения противофазной синхронизации

шума растет дисперсия, и решения могут переходить из одного бассейна в другой. На рисунке 3.18 а) показан пример такого перехода со изменением типа синхронизации для $\varepsilon = 0.07$. Здесь построены временные ряды x- (зелёный) и y-координат (коричневый) решений, начинающиеся с противофазного цикла $\mathcal{R}_{2C}$. Как видно, после некоторого переходного процесса противофазная синхронизация разрушается и временные ряды начинают проявлять синфазную синхронизацию. Здесь используется индикатор синхронизации $z_t = \operatorname{sgn}\left((x_{t+1} - x_t)(y_{t+1} - y_t)\right)$. Этот индикатор, изображенный синим цветом, позволяет однозначно определить момент времени смены режима с противофазного на синфазный. Следует отметить, что для $\varepsilon = 0.07$ сохраняется режим синфазной синхронизации.

Детали индуцированного шумом преобразования распределений координат решений системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$, начинающиеся с $\mathcal{R}_{2C}$, показаны на рисунке 3.18 б). Здесь пороговая интенсивность шума, обозначающая переход от $\mathcal{R}_{2C}$ к $\mathcal{B}_{2C}$, хорошо локализована как по скачкам распределения, так и по индикатору синхронизации z. Таким образом, с ростом шума происходит разрушение режима противофазной синхронизации. При дальнейшем увеличении шума, при $\varepsilon > 0.2$ начинают наблюдаться двунаправленные стохастические переходы $\mathcal{R}_{2C} \leftrightarrow \mathcal{B}_{2C}$. Это подтверждается переключением индикатора синхронизации между значениями 1 и -1.

Воспользуемся методом функции стохастической чувствительности и методом доверительных областей (теория описана в главе 1). Заметим, что размер эллипса пропорционален интенсивности шума ε. Выход эллипса в бассейн другого аттрактора можно использовать для оценки пороговой интенсивности шума.

На рисунке 3.18 в) вокруг состояний противофазного цикла $\mathcal{R}_{2C}$ и синфазного цикла $\mathcal{B}_{2C}$ построены доверительные эллипсы для двух значений интенсивности шума $\varepsilon = 0.01$ (синий) и $\varepsilon = 0.03$ (красный). Как видно, при одинаковой интенсивности шума доверительные эллипсы для $\mathcal{R}_{2C}$ намного больше, чем для $\mathcal{B}_{2C}$. Это означает, что с ростом шума более вероятен переход $\mathcal{R}_{2C} \rightarrow \mathcal{B}_{2C}$. Эллипсы при $\varepsilon = 0.01$ целиком принадлежат бассейну $\mathcal{R}_{2C}$, поэтому шум такой интенсивности не провоцирует стохастические переходы. При $\varepsilon = 0.03$ эллипсы частично лежат в бассейне $\mathcal{B}_{2C}$, поэтому происходит стохастический переход $\mathcal{R}_{2C} \rightarrow \mathcal{B}_{2C}$. Необходимо отметить, что такое предсказывание на основе доверительных эллипсов хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования, представленными на рисунке 3.18 б).

Некоторые дополнительные детали феномена индуцированной шумом разрушения противофазной синхронизации во всей зоне биритмичности $0 < \sigma < 0.03937$ показаны на рисунке 3.18 г). Здесь в цветной шкале представлена вероятность стохастических переходов $\mathcal{R}_{2C} \rightarrow \mathcal{B}_{2C}$ на временном интервале $[0, 10^4]$. Как можно заметить, увеличение параметра связи σ означает увеличение вероятности разрушения противофазного режима.

Зона трире́тмичности $0.09495 < \sigma < 0.09552$**: 2-цикл + 6-цикл + хаос**

В этой зоне трире́тмичности зафиксируем $\sigma = 0.0952$. На рисунке 3.17 в) представлены сосуществующие 2-цикл $\mathcal{B}_{2C}$, 6-цикл $\mathcal{G}_{6C}$ и хаотический аттрактор $\mathcal{R}_{CH}$. Следует обратить внимание, что $\mathcal{B}_{2C}$ представляет собой регулярную синфазную синхронизацию, тогда как $\mathcal{G}_{6C}$ и $\mathcal{R}_{CH}$ соответствуют режимам регулярной и хаотической противофазной синхронизации. Сосуществование сразу трёх аттракторов усложняет стохастические преобразования.

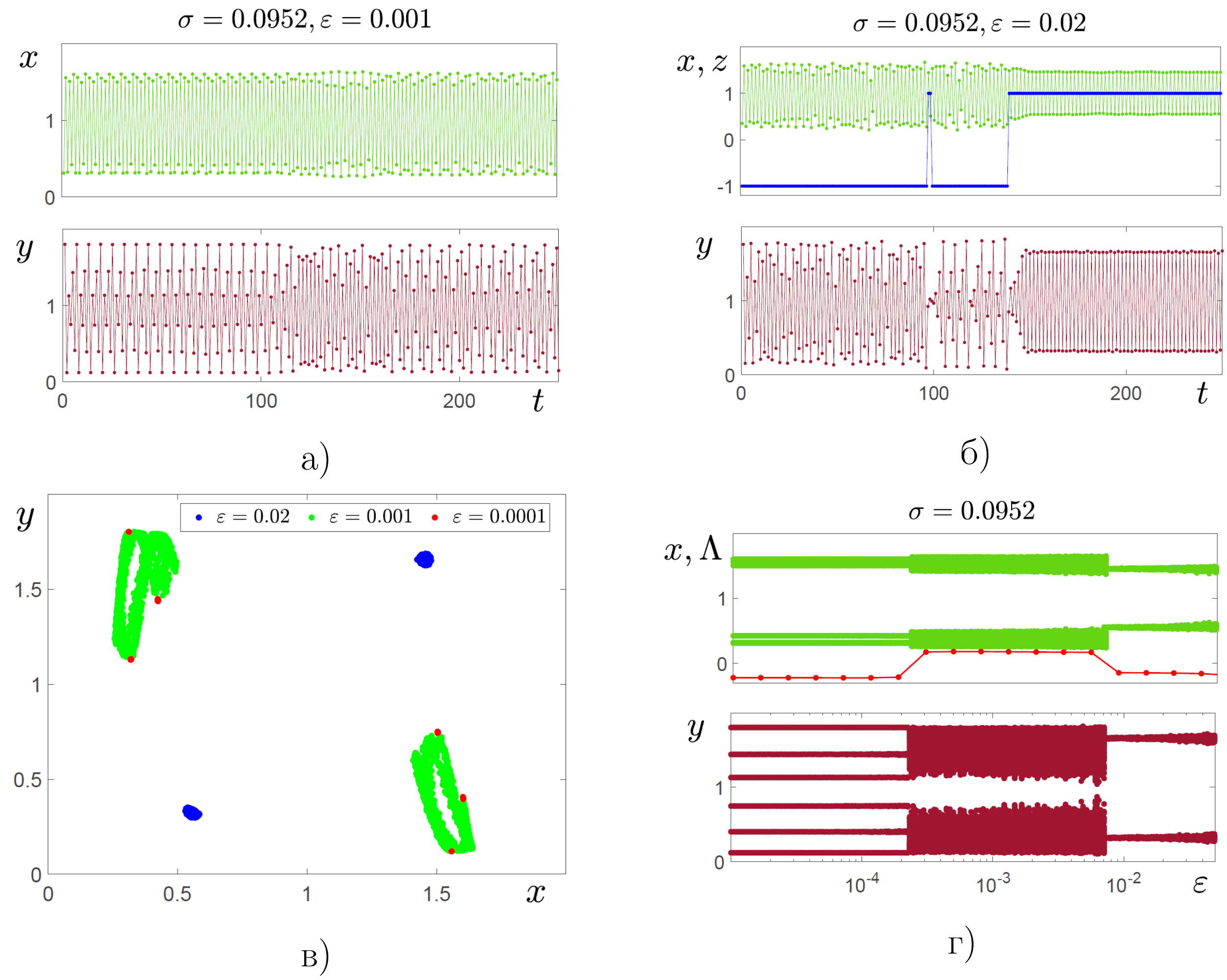
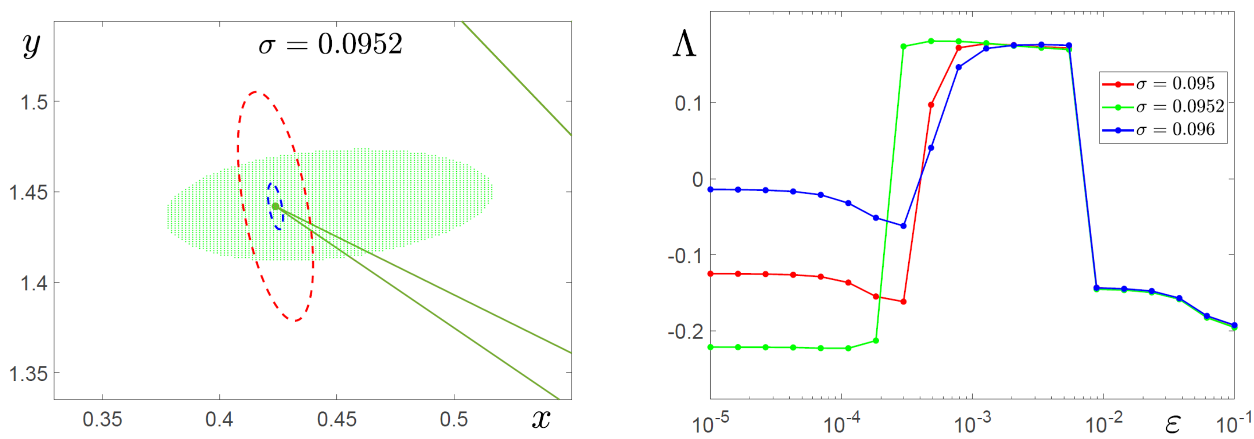


Рисунок 3.19 — Стохастическая система (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ в зоне триритмичности $0.09495 < \sigma < 0.09552$: для а)-г) параметр связи $\sigma = 0.0952$. В а) и б) построены временные ряды решений, начинающиеся с 6-цикла $\mathcal{G}_{6C}$. Индикатор z показан синим цветом. В в) построены случайные состояния решений, начинающиеся с 6-цикла, после 100 переходных итераций. В г) красным отмечен старший показатель Ляпунова

Рассмотрим поведение стохастических решений системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$, начинающиеся с детерминированного 6-цикла $\mathcal{G}_{6C}$. При слабом шуме интенсивностью $\varepsilon = 0.0001$ эти решения локализуются вблизи точек детерминированного цикла (см. красные точки на рисунке 3.19 в)). При большем шуме интенсивностью $\varepsilon = 0.001$ решения переходят в бассейн $\mathcal{R}_{CH}$. Этот переход можно увидеть во временных рядах (рисунок 3.19 а)) и случайных состояниях (рисунок 3.19 в), зелёный). Следует отметить, что при этих переходах противофазная синхронизация сохраняется, но меняется от регулярной к хаотической. Это также подтверждается графиком (зелёный) старшего показателя Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$, представленным на рисунке 3.20 б).

При дальнейшем увеличении шума начинают наблюдаться новые стохастические переходы. При $\varepsilon = 0.02$ случайные решения попадают в область синфазного 2-цикла $\mathcal{B}_{2C}$ и продолжают колебаться с малыми амплитудами вблизи его состояний (см. временной ряд на рисунке 3.19 б) и фазовые состояния, показанные синим цветом на рисунке 3.19 в)). Детали такого двухэтапного преобразования с постепенным увеличением интенсивности шума ε можно увидеть на рисунке 3.19 г). Здесь старший показатель Ляпунова отмечен красным.



а) б)

Рисунок 3.20 — Стохастическая система (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ в зоне трéритмичности $0.09495 < \sigma < 0.09552$: а) доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.0002$ (синий) и $\varepsilon = 0.001$ (красный) вместе с частью бассейна (светло-зелёный) детерминированного 6-цикла (зелёный) при $\sigma = 0.0952$; б) графики старшего показателя Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$ для разных значений σ

В этом преобразовании можно увидеть два важных перехода: «противофазная синхронизация» $\rightarrow$ «синфазная синхронизация» и «порядок» $\rightarrow$ «хаос»

$\to$ «порядок». Необходимо обратить внимание, что такие переходы наблюдаются для всей зоны триритмичности параметра σ (см. рисунок 3.20 б)).

На рисунке 3.20 а) продемонстрированы возможности аналитического исследования стохастических переходов из бассейна $\mathcal{G}_{6C}$ в бассейн $\mathcal{R}_{CH}$ с помощью доверительных эллипсов. Здесь построены доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.0002$ (синий) и $\varepsilon = 0.001$ (красный) вместе с частью бассейна (зелёный) вблизи одной из точек детерминированного цикла $\mathcal{G}_{6C}$, а бассейн $\mathcal{R}_{CH}$ изображен белым. Меньший эллипс целиком принадлежит бассейну $\mathcal{G}_{6C}$, поэтому при интенсивности шума $\varepsilon = 0.0002$ не наблюдаются стохастические переходы. При $\varepsilon = 0.001$ эллипс частично занимает бассейн $\mathcal{R}_{CH}$, поэтому происходит стохастический переход $\mathcal{G}_{6C} \to \mathcal{R}_{CH}$ («порядок» $\to$ «хаос»).

При выходе параметра σ из рассматриваемой параметрической зоны и пересечении точки бифуркации $\sigma = 0.09552$ слева направо хаотический аттрактор $\mathcal{R}_{CH}$ касается границы бассейна 6-цикла $\mathcal{G}_{6C}$ и исчезает. В результате система (3.2) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ трансформируется из триритмичной в биритмичную с сосуществованием 2-цикла $\mathcal{B}_{2C}$ и 6-цикла $\mathcal{G}_{6C}$.

Зона биритмичности $0.09552 < \sigma < 0.09611$: 2-цикл + 6-цикл

В этой зоне биритмичности зафиксируем $\sigma = 0.096$, когда сосуществуют 2-цикл $\mathcal{B}_{2C}$ и 6-цикл $\mathcal{G}_{6C}$.

На рисунке 3.21 а) показаны сосуществующие 2-цикл $\mathcal{B}_{2C}$ (синий) и 6-цикл $\mathcal{G}_{6C}$ (темно-зелёный). Здесь бассейн $\mathcal{B}_{2C}$ показан голубым цветом, остальная часть фазовой плоскости соответствует бассейну $\mathcal{G}_{6C}$. Однако бассейн $\mathcal{G}_{6C}$ можно разделить на две части: зелёную и белую. Такое разделение объясняется разными типами переходных процессов. Детерминированная траектория, начинающаяся в точке зелёной части, быстро сходится к циклу $\mathcal{G}_{6C}$. Эту часть бассейна $\mathcal{G}_{6C}$ называют коротким переходным («short transient») бассейном (ST-бассейном). При вычислениях точка (x_0, y_0) принадлежит ST-бассейну, если для точки (x_t, y_t) решения, начинающегося в (x_0, y_0), выполнено условие $\rho[(x_t, y_t), \mathcal{G}_{6C}] < 0.001$ при $t \leqslant 100$. Здесь используется следующая метрика: $\rho[(x, y), \mathcal{G}_{6C}] = \max_{1 \leqslant k \leqslant 6}(|x - \overline{x}_k| + |y - \overline{y}_k|)$, где $(\overline{x}_1, \overline{y}_1), \ldots, (\overline{x}_6, \overline{y}_6)$ — это состояния детерминированного 6-цикла $\mathcal{G}_{6C}$.

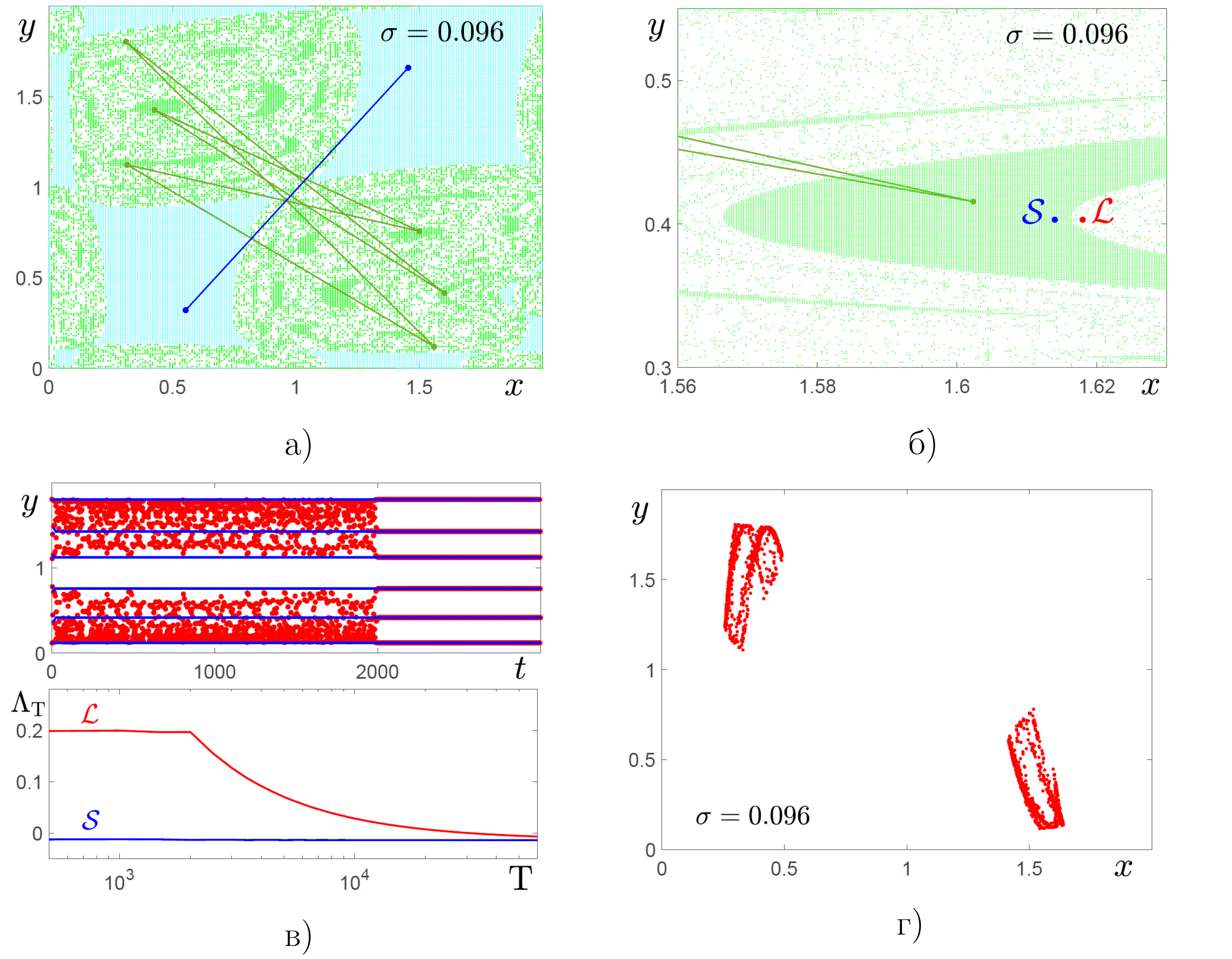


Рисунок 3.21 — Детерминированная система (3.2) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ и $\sigma = 0.096$: а) бассейн притяжения (светло-синий) 2-цикла $\mathcal{B}_{2C}$ (синий), короткий переходный (ST) бассейн (зелёный) 6-цикла $\mathcal{G}_{6C}$ (темно-зелёный); б) увеличенный фрагмент ST-бассейна с точками $\mathcal{S}(1.614, 0.403)$ и $\mathcal{L}(1.618, 0.403)$; в, вверху) временной ряд решений, начинающихся в точках $\mathcal{S}$ (синий) и $\mathcal{L}$ (красный); в, внизу) показатель Ляпунова Λ_T для переходных процессов решений, начинающихся в точках $\mathcal{S}$ и $\mathcal{L}$; г) фазовая траектория решения, начинающаяся в точке $\mathcal{L}$

Как видно на рисунке 3.21 а) ST-бассейн имеет фрактальную структуру. Вблизи точек $(\overline{x}_k, \overline{y}_k)$ находятся сплошные (плотно закрашенные) части ST-бассейна (см. увеличенный фрагмент на рисунке 3.21 б)). Подобные сплошные части можно увидеть и в других местах, но в основном ST-бассейн имеет решетчатую структуру. Чтобы проиллюстрировать короткие и длинные переходные процессы, рассмотрим решения, начинающиеся в близких точках $\mathcal{S}(1.614, 0.403)$ и $\mathcal{L}(1.618, 0.403)$, где $\mathcal{S}$ принадлежит ST-бассейну, а $\mathcal{L}$ — не принадлежит (см.

рисунок 3.21 б)). В верхней части рисунка 3.21 в) соответствующими цветами показаны временные ряды y-координат решений, начинающихся в точках $\mathcal{S}$ (синий) и $\mathcal{L}$ (красный). Как видно, для точек, не лежащих в ST-бассейне, переходный процесс может быть очень длительным.

Теперь сосредоточимся на пространственном расположении фазовых состояний решений, для которых характерен длительный переходный процесс. На рисунке 3.21 г) показана фазовая траектория решения, начинающаяся в точке $\mathcal{L}$. Интересно, что геометрия точек этой траектории аналогична хаотическому аттрактору $\mathcal{R}_{CH}$, показанному на рисунке 3.17 в) для $\sigma = 0.0952$. Действительно, на рисунке 3.21 г) мы видим пример переходного хаоса [137]. Хаотический характер этого переходного процесса подтверждается положительными значениями старшего показателя Ляпунова Λ_T, показанными внизу на рисунке 3.21 в). Здесь для решений, начинающихся в точках $\mathcal{S}$ (синий) и $\mathcal{L}$ (красный), построен график Λ_T, рассчитанный на переходном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$.

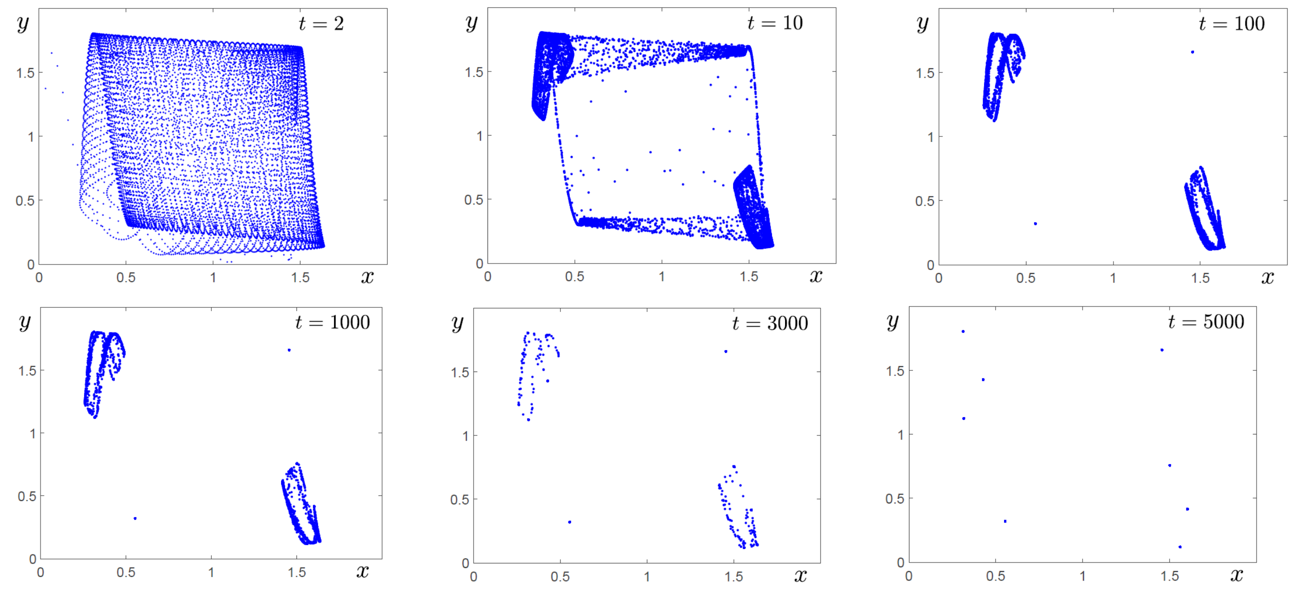


Рисунок 3.22 — Детерминированная система (3.2) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ и $\sigma = 0.096$: динамика совокупности решений детерминированной системы (3.2), начинающихся с $t = 0$ из узлов равномерной сетки на квадрате $[0, 2] \times [0, 2]$. Хорошо виден переходный аттрактор от $t = 100$ до $t = 3000$

На рисунке 3.22 показано расположение совокупности состояний системы (3.2) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ и $\sigma = 0.096$ после t итераций для $t = 2, 10, 100, 1000, 3000, 5000$. В качестве начальных точек взяты узлы равномерной сетки на квадрате $[0, 2] \times [0, 2]$ плоскости (x, y). Видно, что уже при $t = 100$ эта совокупность практически совпадает с множеством точек, показанным на рисунке 3.21 г). Этот переходный аттрактор, видимый до $t = 3000$, разрушается и превращается в множество из шести точек устойчивого 6-цикла $\mathcal{G}_{6C}$. Итак, этот переходный аттрактор описывает некоторое метастабильное состояние системы (3.2) с достаточно большой продолжительностью.

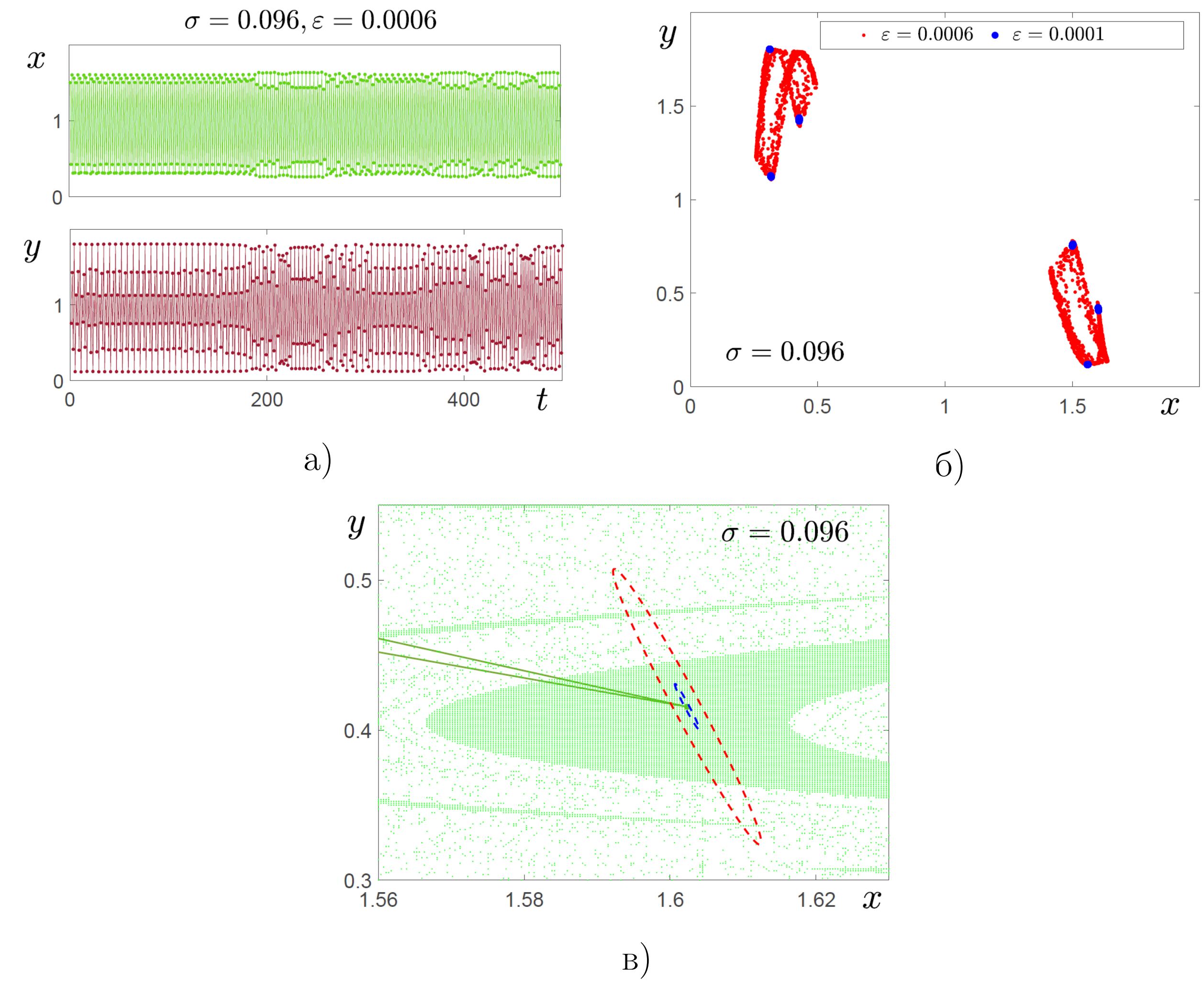


Рисунок 3.23 — Стохастическая система (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ и $\sigma = 0.096$: а) временные ряды решений, начинающиеся с 6-цикла $\mathcal{G}_{6C}$; б) случайные состояния решений, начинающиеся с 6-цикла $\mathcal{G}_{6C}$ для $\varepsilon = 0.0001$ (синий) и $\varepsilon = 0.0006$ (красный); в) ST-бассейн (зелёный) $\mathcal{G}_{6C}$ и доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.0001$ (синий) и $\varepsilon = 0.0006$ (красный)

Рассмотрим теперь, как эти особенности детерминированной модели влияют на поведение стохастической системы. На рисунке 3.23 а) для $\sigma = 0.096$, $\varepsilon = 0.0006$ показаны временные ряды решений стохастической системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$, начинающиеся с детерминированного 6-цикла $\mathcal{G}_{6C}$. Здесь наблюдается переход от регулярных зашумленных колебаний вблизи $\mathcal{G}_{6C}$ к более сложным стохастическим колебаниям. Соответствующая фазовая траектория показана красным на рисунке 3.23 б). Форма этих фазовых состояний аналогична форме детерминированного переходного аттрактора, показанного на рисунке 3.21 г).

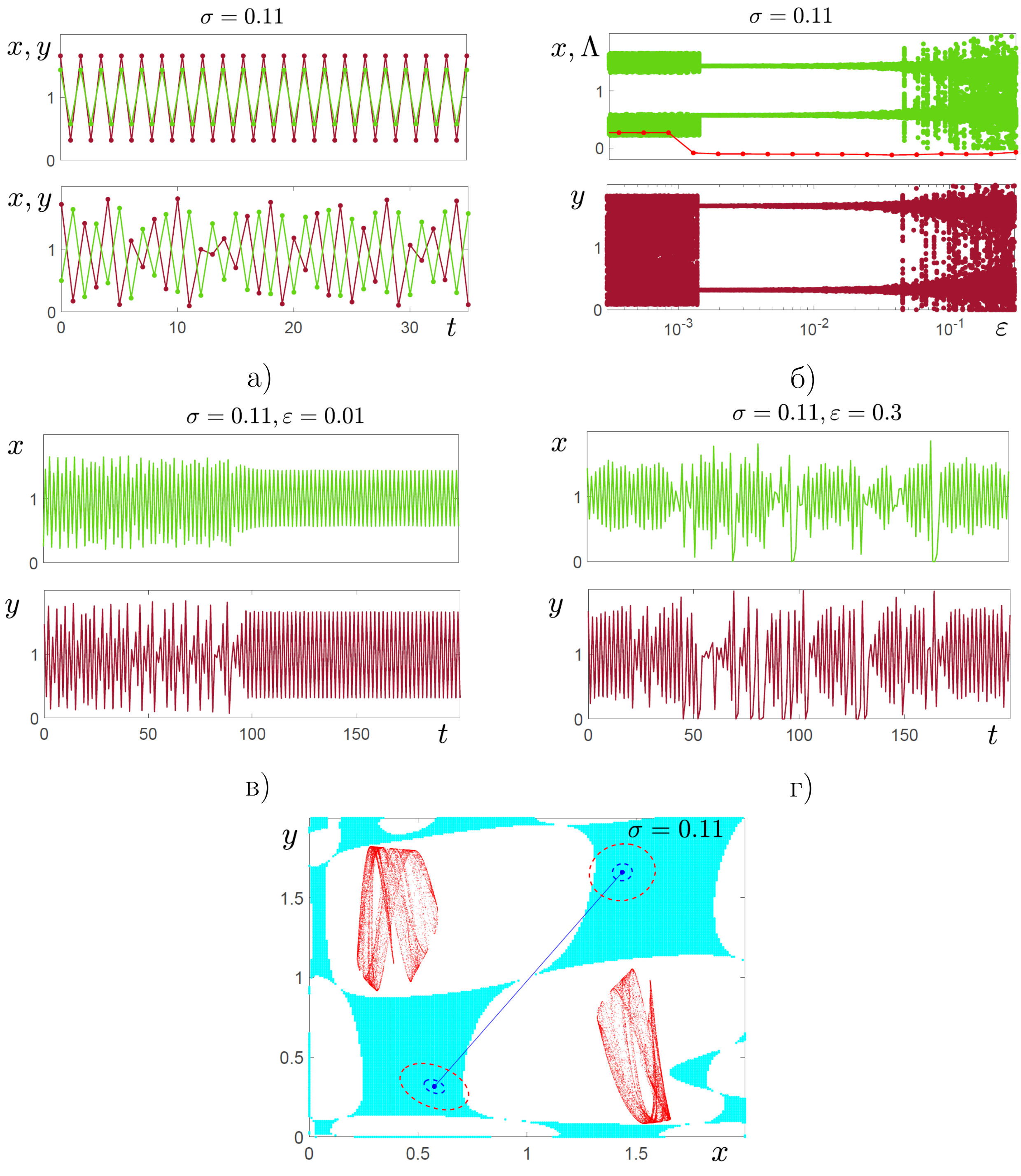
Такое поведение стохастических решений можно объяснить выходом случайных траекторий из ST-бассейна детерминированного цикла $\mathcal{G}_{6C}$ в зону длительных переходных процессов. На рисунке 3.23 в) показано, как эти переходы можно исследовать аналитически с помощью доверительных эллипсов. Для слабого шума $\varepsilon = 0.0001$ эллипс (синий) принадлежит ST-бассейну, а для $\varepsilon = 0.0006$ больший эллипс (красный) выходит из ST-бассейна. Такое расположение доверительных эллипсов и ST-бассейна сигнализирует о том, что при $\varepsilon = 0.0001$ случайные состояния располагаются вблизи состояний детерминированного цикла $\mathcal{G}_{6C}$, а при $\varepsilon = 0.0006$ происходит индуцированное шумом образование стохастического аттрактора другой формы (изображен красным цветом на рисунке 3.23 б)). Это предсказание подтверждается сравнением рисунка 3.23 б) и рисунка3.23 в).

Следует отметить, что такая трансформация случайных распределений сопровождается переходом от порядка к хаосу (см. смену знака старшего показателя Ляпунова на рисунке 3.20 б) при $\sigma = 0.096$).

Зона биритмичности $0.09768 < \sigma < 0.11255$: 2-цикл + хаос

Обсудим стохастические эффекты в этой зоне параметров при сосуществовании 2-цикла $\mathcal{B}_{2C}$ и хаотического аттрактора $\mathcal{R}_{CH}$ для $\sigma = 0.11$. Для $\sigma = 0.11$ детерминированные аттракторы с их бассейнами показаны на рисунке 3.17 г), а соответствующие временные ряды — на рисунке 3.24 а).

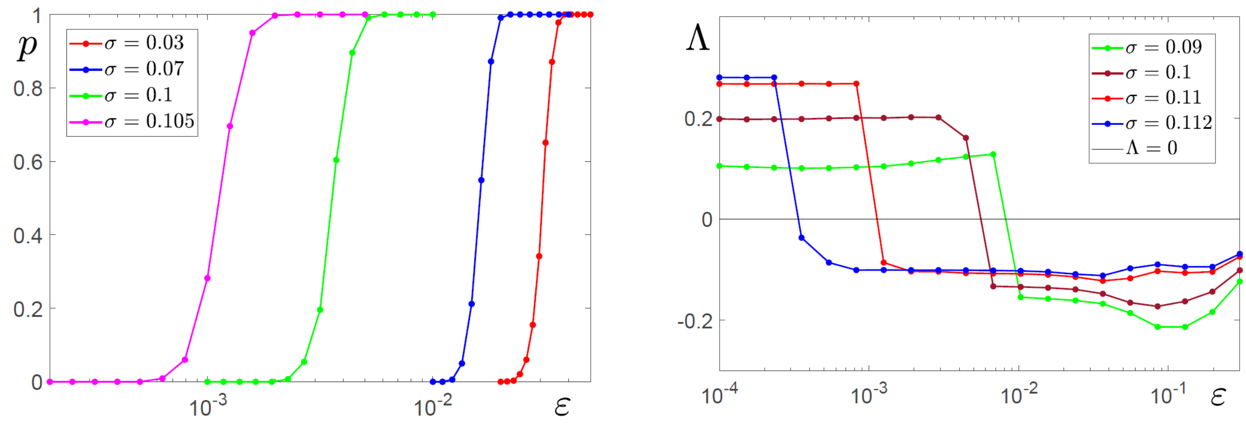
Рассмотрим стохастические решения, начинающиеся с точки хаотического аттрактора $\mathcal{R}_{CH}$. Деформации распределений этих решений при постепенном увеличении интенсивности шума показаны на рисунке 3.24 б). Здесь отчетливо видны два качественных изменения: первое соответствует переходу из бассейна хаотического аттрактора в окрестности 2-цикла, второй связан с возникновением двусторонних переходов между этими аттракторами. Как видно на графике показателя Ляпунова Λ (красный), первое преобразование сопровождается переходом от хаоса к порядку. Эти преобразования проиллюстрированы временными рядами на рисунке 3.24 в) для $\varepsilon = 0.01$ и на рисунке 3.24 г) для



д)

Рисунок 3.24 — Стохастические преобразования в системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ и $\sigma = 0.11$: а) временные ряды x- (зелёный) и y-координат (коричневый) детерминированных аттракторов $\mathcal{B}_{2C}$ (сверху) и $\mathcal{R}_{CH}$ (снизу); б) случайные состояния системы (3.2)-(3.3) в зависимости от интенсивности шума ε; в) временные ряды решений, начинающиеся с $\mathcal{R}_{CH}$ для $\varepsilon = 0.01$; г) временные ряды решений, начинающиеся с $\mathcal{B}_{2C}$ для $\varepsilon = 0.3$; д) доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.03$ (синий пунктир) и $\varepsilon = 0.1$ (красный пунктир)

$\varepsilon = 0.3$. На рисунке 3.24 г) показано, как второе преобразование, связанное с разрушением синфазной синхронизации, можно проанализировать с помощью доверительных эллипсов: для $\varepsilon = 0.03$ эллипсы (синий) лежат в бассейне $\mathcal{B}_{2C}$, а для $\varepsilon = 0.1$ эллипсы (красный) захватывают бассейн хаотического аттрактора $\mathcal{R}_{CH}$.



а) б)

Рисунок 3.25 — Статистики индуцированных шумом преобразований в зонах мультиритмичности системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$: а) вероятность $p(\varepsilon)$ переходов из противофазного режима синхронизации в синфазный режим; б) старший показатель Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$

Завершая исследование зон мультиритмичности, сравним, как зависят вероятность перехода p из противофазного режима в синфазный и показатели Ляпунова Λ от σ и ε. На рисунке 3.25 а) для различных значений σ построены графики вероятности переходов от соответствующих противофазных аттракторов к синфазному 2-циклу $\mathcal{B}_{2C}$. Как видно, ε-интервал, соответствующий началу этих переходов, достаточно узок. С увеличением параметра связи σ эти переходы происходят при меньшей интенсивности шума.

На рисунке 3.25 б) для различных значений σ, при которых существует хаотический аттрактор $\mathcal{R}_{CH}$, показаны старшие показатели Ляпунова для решений, начинающихся с $\mathcal{R}_{CH}$. Общим свойством здесь является подавление хаоса шумом: чем больше σ, тем меньшая интенсивность шума необходима для подавления хаоса.

Зона моноритмичности $0.11255 < \sigma < 0.1224$: 2-цикл

В этой моностабильной зоне все решения детерминированной системы, независимо от исходных данных, стремятся к циклу $\mathcal{B}_{2C}$. В данном подразделе будем рассматривать влияние случайных возмущений для двух значений параметра связи: $\sigma = 0.115$ и $\sigma = 0.122$.

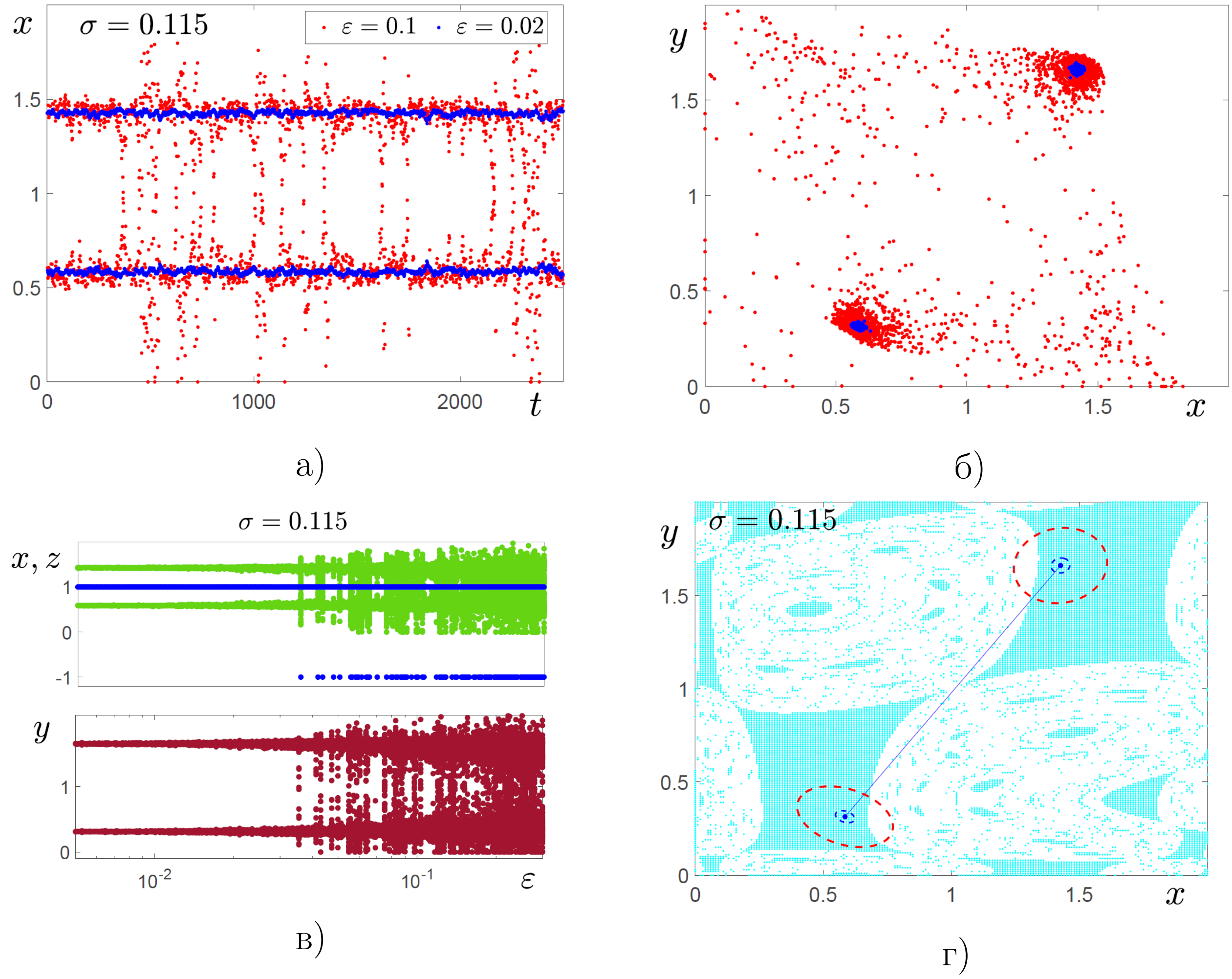


Рисунок 3.26 — Стохастические преобразования в системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ и $\sigma = 0.115$: а), б) временные ряды и фазовые траектории решений, начинающиеся с 2-цикла $\mathcal{B}_{2C}$ $\varepsilon = 0.02$ (синий) и $\varepsilon = 0.1$ (красный); в) координаты случайных состояний и индикатора синхронизации z (синий) в зависимости от интенсивности шума ε; г) доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.02$ (синий пунктир) и $\varepsilon = 0.1$ (красный пунктир) вокруг точек 2-цикла $\mathcal{B}_{2C}$ (синий) показаны на фоне ST-бассейна, изображенного голубым цветом

Стохастические преобразования колебательных режимов в системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ и $\sigma = 0.115$ продемонстрированы на рисунке 3.26. Здесь на рисунке 3.26 а),б) можно сравнить временные ряды и фазовые траектории решений системы (3.2)-(3.3), начинающиеся с 2-цикла $\mathcal{B}_{2C}$ для интенсивностей шума $\varepsilon = 0.02$ (синий) и $\varepsilon = 0.1$ (красный). Как видно для меньшего шума с интенсивностью $\varepsilon = 0.02$, стохастическое решение (синий) демонстрирует колебания малой амплитуды вблизи $\mathcal{B}_{2C}$. Для $\varepsilon = 0.1$ случайная траектория (красный) демонстрирует большие отклонения от зоны расположения детерминированного 2-цикла.

Детали качественных преобразований разброса случайных состояний в зависимости от интенсивности шума ε показаны на рисунке 3.26 в). Здесь наряду с координатами x и y изображен индикатор синхронизации z. Как можно заметить, такое преобразование в геометрии стохастических траекторий сопровождается временными разрушениями режима синфазной синхронизации.

На рисунке 3.26 г) показано, как эти качественные изменения стохастического колебательного режима можно теоретически проанализировать с помощью доверительных эллипсов. В этом анализе, как отмечалось выше, определяющей точкой является взаимное расположение доверительных эллипсов и ST-бассейна (голубой). Действительно, при $\varepsilon = 0.02$ эллипсы (синий пунктир) полностью лежат в ST-бассейне цикла $\mathcal{B}_{2C}$, а при $\varepsilon = 0.1$ эллипсы (красный пунктир) частично занимают бассейн длительных переходных процессов (белый цвет).

Сравним эти результаты, полученные для $\sigma = 0.115$, со случаем $\sigma = 0.122$, который ближе к точке бифуркации $\sigma = 0.1224$ (см. бифуркационную диаграмму на рисунке 3.16). На рисунке 3.27 показаны необходимые иллюстрации для случая $\sigma = 0.122$. Сравнивая рисунок 3.27 с рисунком 3.26, можно сделать вывод, что обсуждаемое стохастическое преобразование в последнем случае с $\sigma = 0.122$ происходит при значительно меньшей интенсивности шума ε. Этот вывод также хорошо подтверждается методом доверительных эллипсов (можно сравнить рисунок 3.26 г) и рисунок 3.27 г)).

В качестве заключительного этапа исследований этого подраздела сравним поведение показателей Ляпунова $\Lambda(\varepsilon)$ в рассматриваемой зоне моностабильности изменений параметра σ. На рисунке 3.28 показаны графики функции $\Lambda(\varepsilon)$ для различных значений параметра σ. Как видно, поведение этих функций имеет общую особенность: по мере увеличения интенсивности шума значения функции Λ сначала увеличиваются, а затем уменьшаются. Следует отметить, что при нахождении вблизи точки бифуркации кризиса $\sigma = 0.1224$ старший

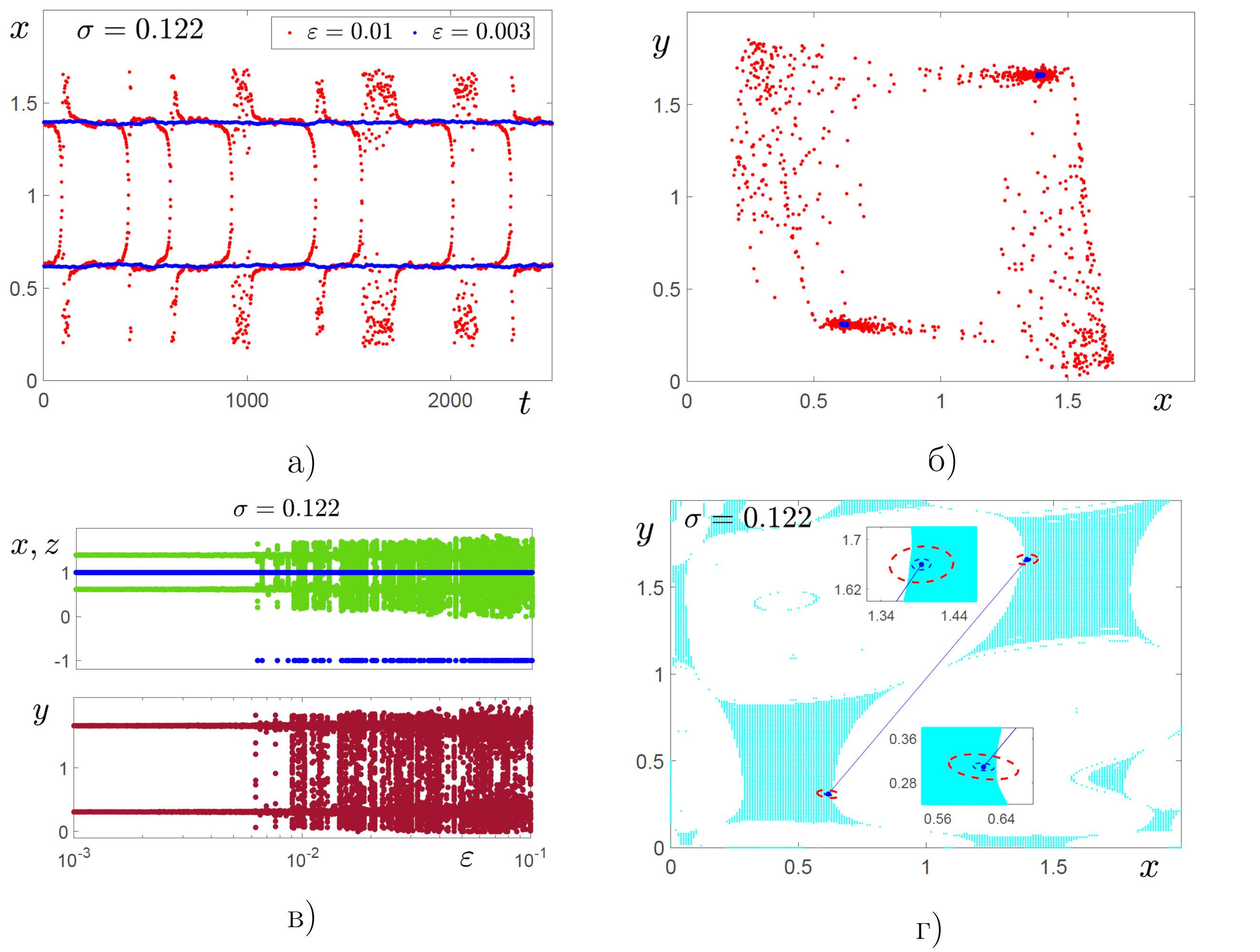


Рисунок 3.27 — Стохастические преобразования в системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ и $\sigma = 0.122$: а), б) временные ряды и фазовые траектории решений, начинающиеся с 2-цикла $\mathcal{B}_{2C}$ $\varepsilon = 0.003$ (синий) и $\varepsilon = 0.01$ (красный); в) координаты случайных состояний и индикатора синхронизации z (синий) в зависимости от интенсивности шума ε; г) доверительные эллипсы для $\varepsilon = 0.003$ (синий пунктир) и $\varepsilon = 0.01$ (красный пунктир) вокруг точек 2-цикла $\mathcal{B}_{2C}$ (синий) показаны на фоне ST-бассейна, изображенного голубым цветом

показатель Ляпунова меняет знак. Такое изменение сигнализирует о индуцированном шумом переходе системы от порядка к хаосу.

Если подвести итог, то исследование в данном разделе показало, что даже в очень простой системе, состоящей из двух популяций, связанных миграцией, возможны самые разнообразные динамические режимы, как регулярные, так и хаотические. Более того, в зависимости от исходных данных в системе может наблюдаться сосуществование трех колебательных режимов. Показано, что эти режимы весьма чувствительны как к изменению интенсивности миграции, так и к неизбежным случайным возмущениям. Эти результаты позволяют пролить

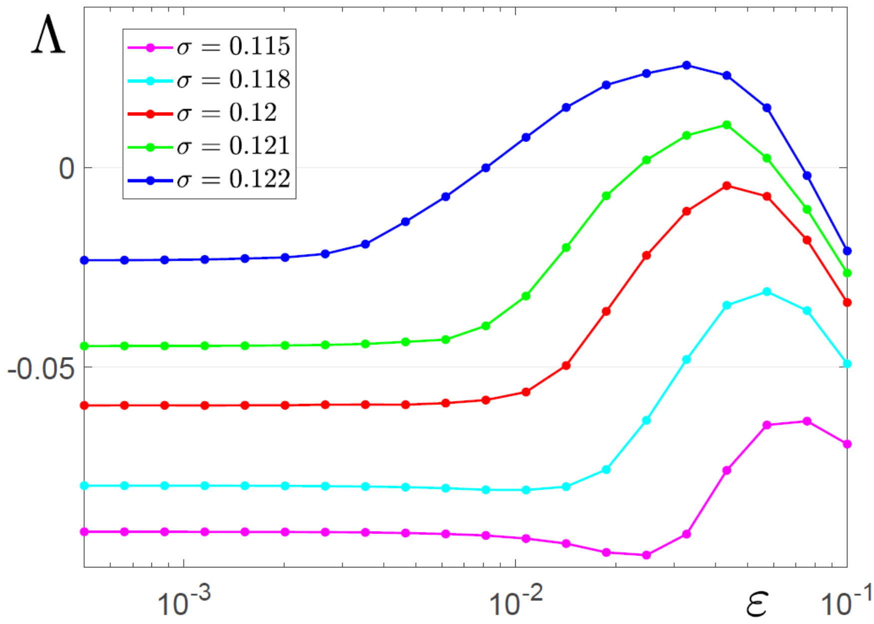


Рисунок 3.28 — Старший показатель Ляпунова стохастической системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ для разных значений параметра связи σ в зависимости от интенсивности шума ε

свет на внутренние механизмы, вызывающие неожиданные трансформации популяционных процессов.

3.4 Взаимодействие равновесной и хаотической популяций

3.4.1 Модель 1. Влияние миграции и шума на переходы хаос-порядок-хаос

Интересно исследовать поведение метапопуляции, когда изолированные подсистемы находятся в противоположных режимах: одна из подсистем проявляет режим устойчивого равновесия, а другая — хаотический режим. В данном подразделе сосредоточимся на этом случае и зафиксируем значения параметров $\mu_1 = 1.8$ (равновесный режим) и $\mu_2 = 3$ (хаотический режим) (см. рисунок 3.1).

Вариативность динамических режимов системы (3.2) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ можно увидеть на рисунке 3.29 а), где построена бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра σ. Здесь красным и серым цветом изображе-

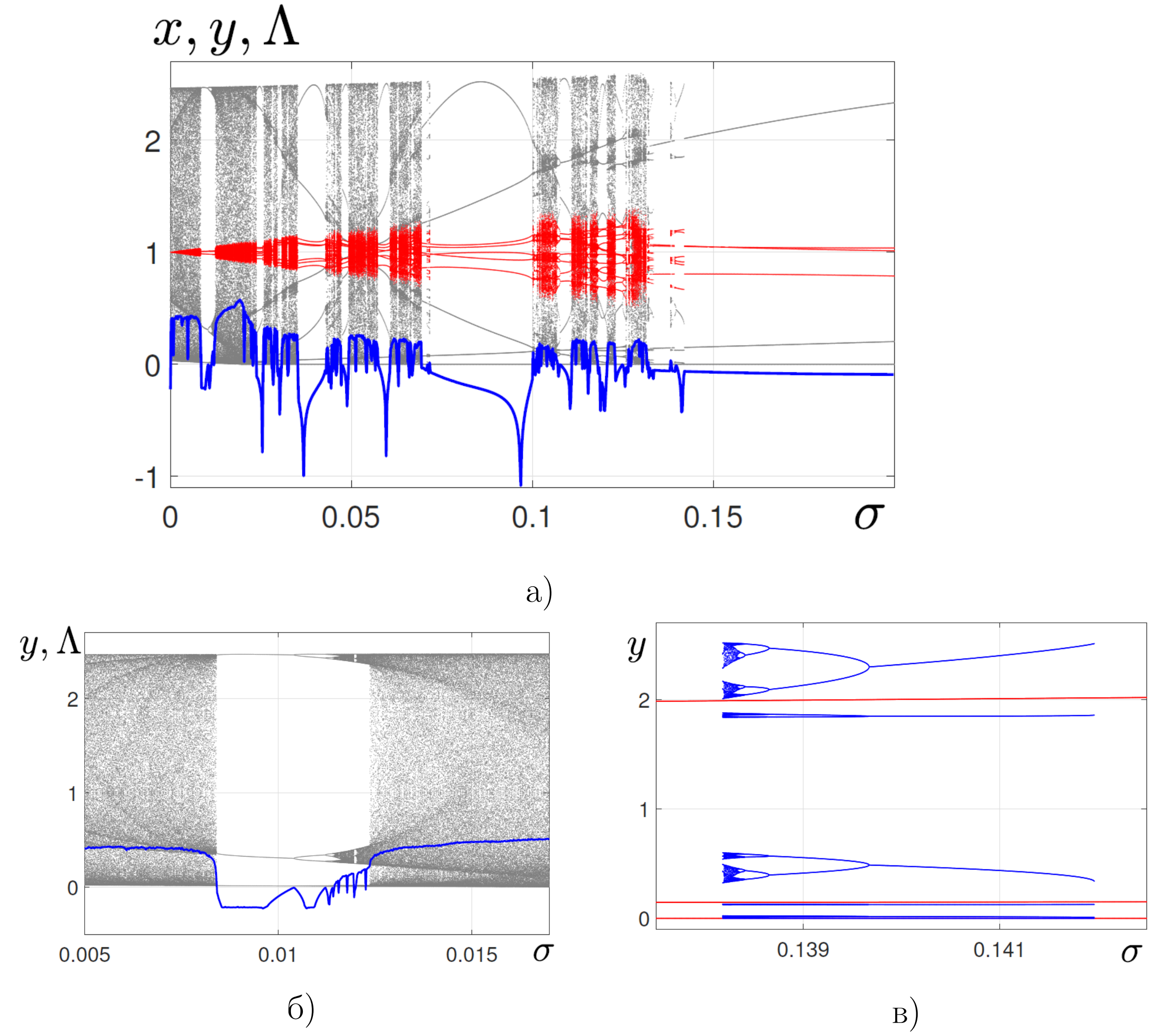
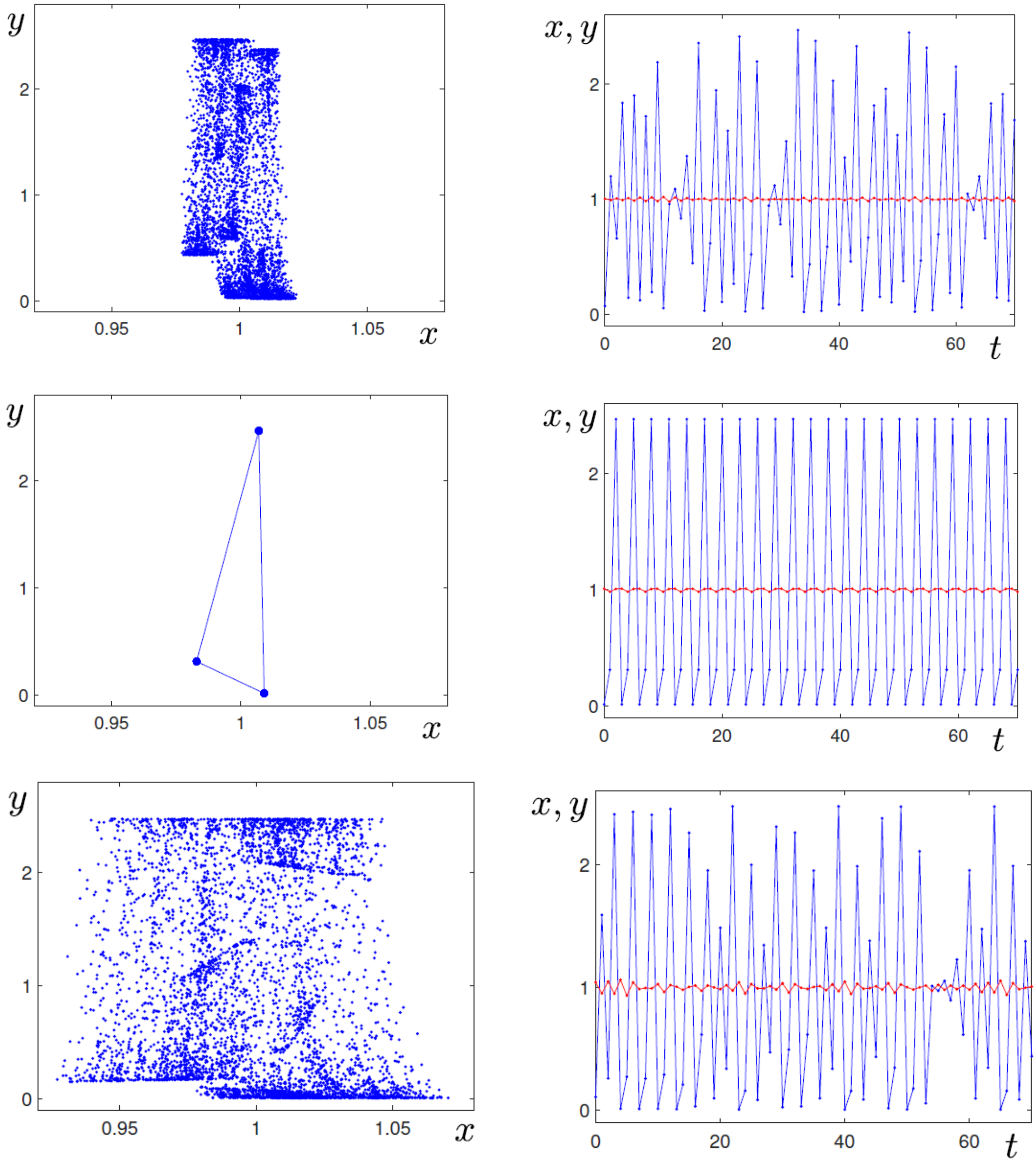


Рисунок 3.29 — Система (3.2) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$: а) бифуркационная диаграмма в зависимости от параметра σ; увеличенные фрагменты бифуркационной диаграммы б) в параметрической зоне I; в) в параметрической зоне II

ны, соответственно, x- и y-координаты аттракторов. Важную информацию об изменении динамических режимов можно извлечь из старшего показателя Ляпунова, показанного синим цветом. С ростом параметра σ в системе (3.2) наблюдается большое разнообразие динамических режимов: зоны порядка чередуются с зонами хаоса, а в окнах порядка наблюдаются циклы с различными периодами. Следует подчеркнуть, что миграции популяций с некоторым коэффициентом связи σ преобразуют связанное хаотическое поведение в новый регулярный периодический режим.

Далее остановимся на двух зонах параметров с качественно различной динамикой. Увеличенные фрагменты бифуркационной диаграммы представлены на рисунке 3.29 б) для $0.05 < \sigma < 0.015$ (зона I) и на рисунке 3.29 в) для

$0.1379 < \sigma < 0.1419$ (зона II). В зоне I можно увидеть окно периодичности, окруженное хаосом. Когда параметр σ проходит точку бифуркации кризиса $\sigma_1 = 0.008401$ слева направо, хаотический режим разрушается и появляется устойчивый 3-цикл. Этот цикл устойчив до $\sigma_2 = 0.01041$. При дальнейшем увеличении параметра σ система претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода и вновь переходит в хаос.



а) б) в)

Рисунок 3.30 — Аттракторы и временные ряды системы (3.2) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ в параметрической зоне моностабильности I: а) $\sigma = 0.005$; б) $\sigma = 0.01$; в) $\sigma = 0.015$. Во временных рядах координата x показана красным цветом, а координата y — синим

На рисунке 3.30 для зоны параметров I представлены характерные аттракторы и соответствующие им временные ряды для системы (3.2) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ при: а) $\sigma = 0.005$ (хаос), б) $\sigma = 0.01$ (3-цикл) и в) $\sigma = 0.015$ (хаос). Во временных рядах координата x показана красным цветом, а координата y — синим. Интересно, что амплитуда координаты y в случае хаоса а) и в) практически одинакова, тогда как амплитуда координаты x в хаосе случая в) значительно больше. В хаотических временных рядах наблюдается временная стабилизация вблизи неустойчивого равновесия M. Следует отметить, что в зоне параметров I система (3.2) моностабильна.

Рассмотрим теперь параметрическую зону II. В отличие от зоны I, в зоне II система (3.2) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ является бистабильной. Здесь сосуществуют два аттрактора: один из них представляет собой устойчивый 3-цикл, который практически не меняется с ростом σ. А второй аттрактор существует в разных формах: как регулярной, так и хаотической (см. рисунок 3.29 в)). В зоне параметров II система проявляет сложную форму бистабильности — биритмичность. Различные варианты биритмичности проиллюстрированы на рисунке 3.31 для трех значений параметра σ. Слева показаны сосуществующие аттракторы и их бассейны притяжения, а справа — соответствующие временные ряды. Во всех случаях одним из аттракторов является 3-цикл, показанный коричневыми точками. Другими аттракторами (зелёными), сосуществующими с этим 3-циклом, являются следующие: 6-кусочный хаос для $\sigma = 0.138$, 12-цикл для $\sigma = 0.1395$ и 6-цикл для $\sigma = 0.141$. Бассейн притяжения 3-цикла (показан оранжевым цветом) имеет сложную фрактальную структуру.

Таким образом, представленные примеры показывают, что в результате миграций между двумя моностабильными подсистемами совместная динамика системы может трансформироваться в биритмичную с сосуществованием как двух регулярных, так и регулярного с хаотическим колебательными режимами.

Теперь исследуем дополнительные эффекты, вызванные случайным возмущением, для аттракторов системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$.

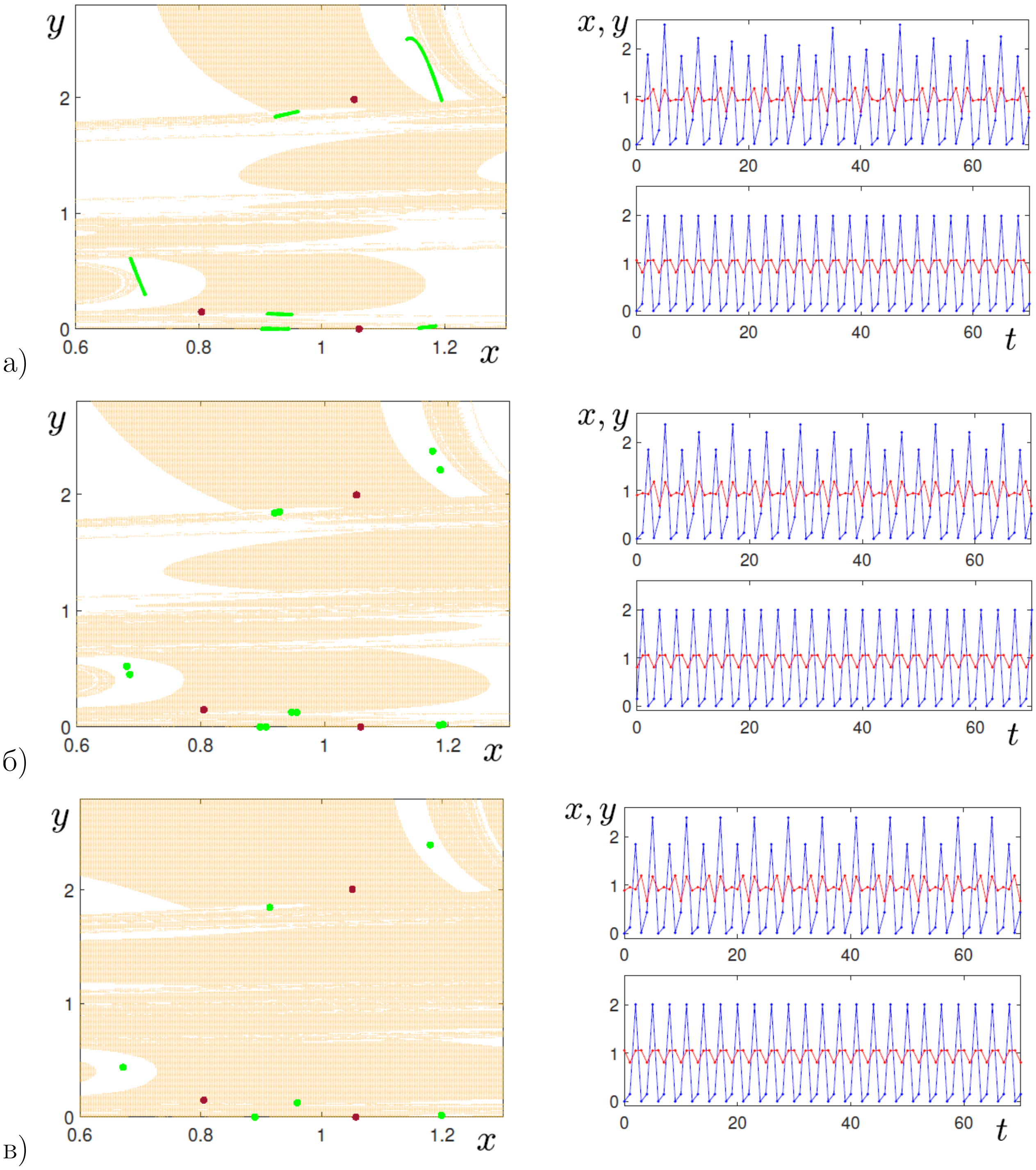


Рисунок 3.31 — Сосуществующие аттракторы, их бассейны притяжения и временные ряды системы (3.2) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ в параметрической зоне бистабильности II для: а) $\sigma = 0.138$; б) $\sigma = 0.1395$; в) $\sigma = 0.141$. Здесь 3-циклы показаны коричневым цветом, а сосуществующие аттракторы — показаны зелёным: а) хаос; б) 12-цикл; в) 6-цикл. Во временных рядах координата x показана красным цветом, а координата y — синим

Индуцированные шумом феномены в зоне моностабильности I

Рассмотрим влияние шума в зоне параметров $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, где в детерминированной системе (3.2) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ единственным аттрактором

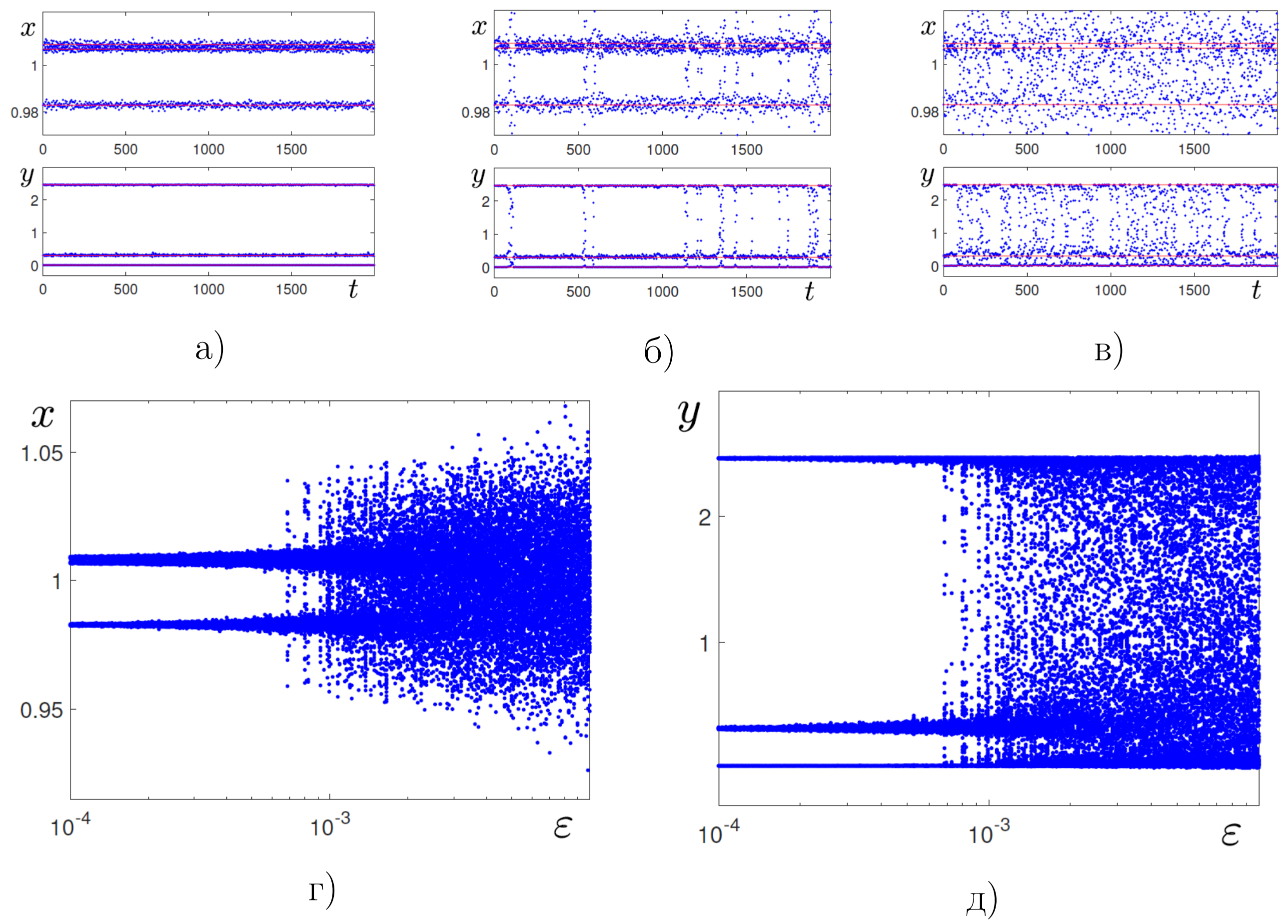
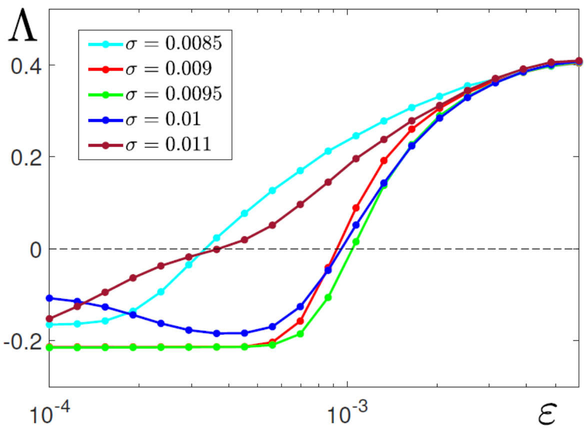


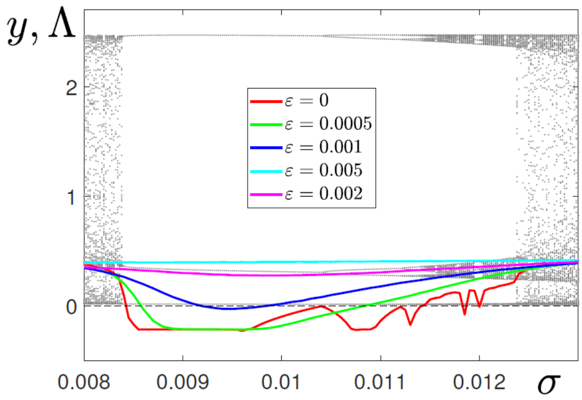
Рисунок 3.32 — Индуцированные шумом переходы 3-цикл $\to$ хаос в системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ и $\sigma = 0.01$ для: а) $\varepsilon = 0.0005$; б) $\varepsilon = 0.001$; в) $\varepsilon = 0.002$; случайные состояния в зависимости от интенсивности шума ε г) x-координата и д) y-координата

На рисунке 3.32 для системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ и $\sigma = 0.01$ показано, как внешнее воздействие влияет на систему при увеличении интенсивности шума ε. При слабом шуме случайные решения (синий) системы (3.2)-(3.3), начинающиеся с детерминированного 3-цикла (красный), слегка колеблются вблизи его состояний (см. рисунок 3.32 а) для $\varepsilon = 0.0005$). При увеличении шума можно наблюдать временное разрушение этого режима. При этом колебания вблизи детерминированного цикла чередуются с колебаниями вдали от него (см. рисунок 3.32 б) для $\varepsilon = 0.001$). Чем сильнее шум, тем больше времени система проводит вдали от детерминированного цикла (см. рисунок 3.32 в) для $\varepsilon = 0.002$). На рисунках 3.32 г),д) показаны детали таких преобразований распределения случайных состояний. Здесь в зависимости от интенсивности шума представлены x-координаты (см. рисунок 3.32 г)) и y-координаты (см.

рисунок 3.32 д)) случайных состояний решений системы (3.2)-(3.3), начинающиеся с детерминированного 3-цикла.



а)



б)

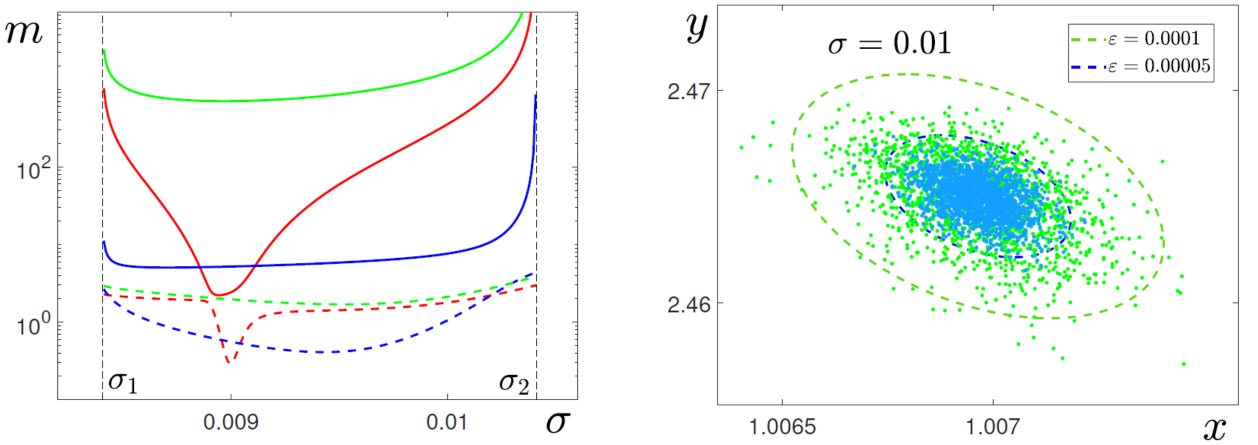
Рисунок 3.33 — Старшие показатели Ляпунова для системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ в зависимости от: а) интенсивности шума ε; б) коэффициента связи σ

Рассмотрим теперь, как такие преобразования сопровождаются изменением старшего показателя Ляпунова Λ. На рисунке 3.33 а) показаны графики функции $\Lambda(\varepsilon)$ для нескольких значений параметра σ, принадлежащих окну порядка. Все эти графики имеют общую особенность: с ростом интенсивности шума ε функция $\Lambda(\varepsilon)$ меняет знак с минуса на плюс. Как и в предыдущих разделах это изменение является критерием перехода от порядка к хаосу. Следует отметить, что такой индуцированный шумом переход от порядка к хаосу для значений σ, близких к границам окна порядка, происходит при меньших интенсивностях шума ε. Этот эффект хорошо виден на рисунке 3.33 б), где на фоне бифуркационной диаграммы показаны графики $\Lambda(\sigma)$ для разных значений ε. Видно, что с увеличением шума окно порядка сужается и исчезает.

Таким образом, случайные возмущения разрушают окно порядка, образовавшееся в результате взаимодействия в метапопуляционной системе (3.2) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$. Этот эффект можно проанализировать аналитическим подходом с использованием метода функции стохастической чувствительности.

Применение ФСЧ

Используя формулы (1.10), (1.11) и (1.25) из главы 1, можно вычислить стохастическую чувствительность в случае 3-цикла, а также построить доверительные эллипсы, описывающие разброс случайных состояний вокруг детерминированного аттрактора.



а) б)

Рисунок 3.34 — Стохастическая чувствительность 3-циклов для системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$: а) графики собственных значений матрицы стохастической чувствительности; б) доверительные эллипсы и случайные состояния вблизи точки 3-цикла для $\sigma = 0.01$. Здесь бифуркационные значения это $\sigma_1 = 0.008401$, $\sigma_2 = 0.01041$

На рисунке 3.34 а) для системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ сплошными и пунктирными линиями одинаковых цветов показаны графики функций $m_{i,1}(\sigma)$, $m_{i,2}(\sigma)$ показаны для зоны параметров I $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Как видно, стохастическая чувствительность точек 3-цикла существенно различается и неограниченно возрастает вблизи точек бифуркации σ_1 и σ_2.

На рисунке 3.34 б) построены два доверительных эллипса вокруг одной из точек 3-цикла для $\sigma = 0.01$ и двух значений интенсивности шума ε: $\varepsilon = 0.00005$ (синий пунктир) и $\varepsilon = 0.0001$ (зелёный пунктир). Точками того же цвета изображены случайные состояния стохастической системы (3.2)-(3.3). Можно заметить, что доверительные эллипсы хорошо описывают особенности пространственного распределения случайных состояний и их изменения при увеличении шума.

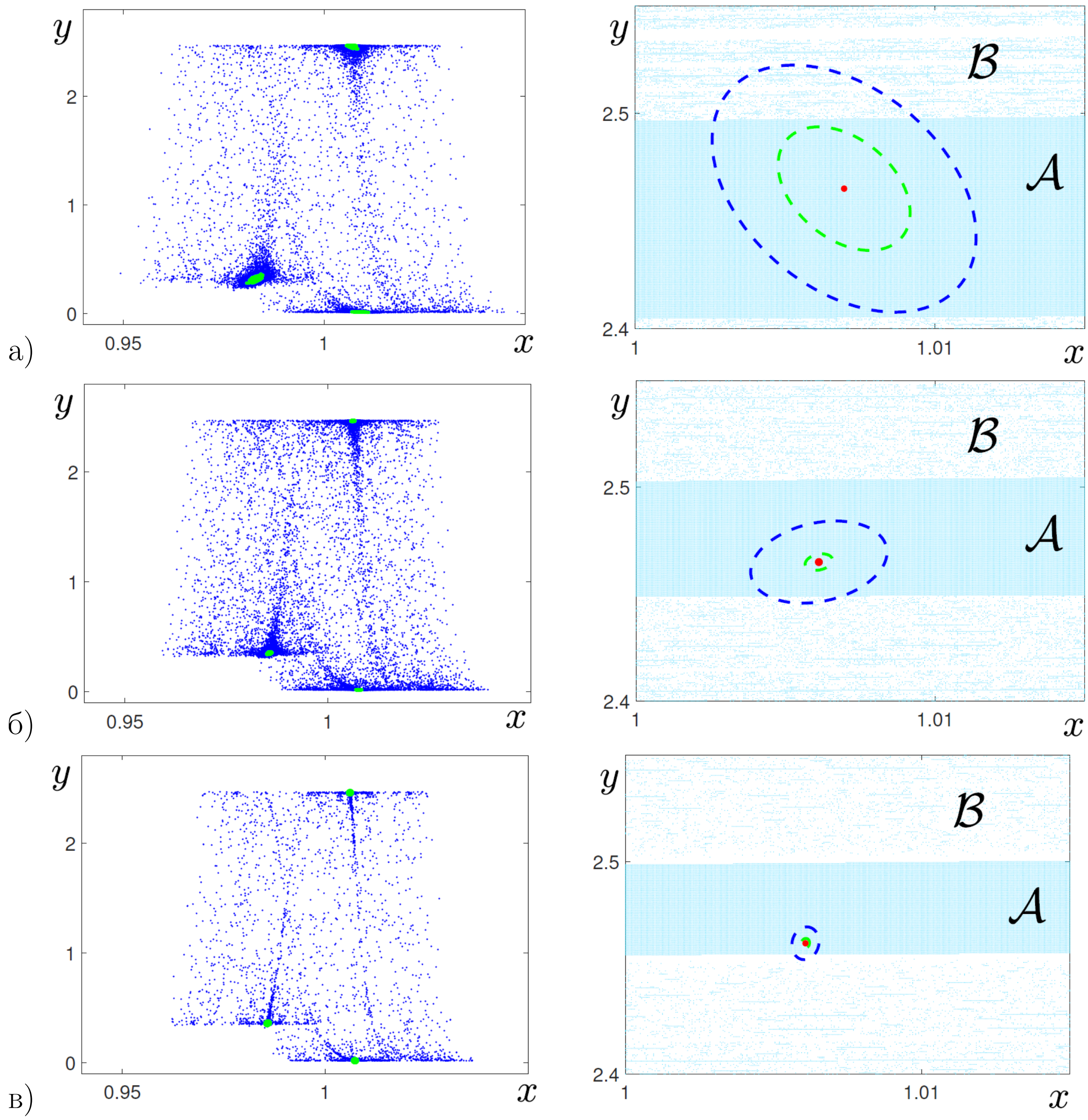


Рисунок 3.35 — Метод доверительных эллипсов для стохастической системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ для: а) $\sigma = 0.01$; б) $\sigma = 0.0085$; в) $\sigma = 0.00842$. Слева показаны случайные состояния для ε_1 (зелёный) и ε_2 (синий). Справа — точка (x_c, y_c) детерминированного цикла (красный), зоны $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, доверительные эллипсы для ε_1 (зелёный) и ε_2 (синий). Тогда: а) $x_c = 1.006964, y_c = 2.465029$, $\varepsilon_1 = 0.0005, \varepsilon_2 = 0.001$; б) $x_c = 1.006109, y_c = 2.464981$, $\varepsilon_1 = 0.0001, \varepsilon_2 = 0.0005$; в) $x_c = 1.006078, y_c = 2.461495$, $\varepsilon_1 = 0.00003, \varepsilon_2 = 0{,}0001$. Начальные точки коротких регулярных (длинных хаотических) переходных процессов показаны голубым (белым)

Теперь рассмотрим, как можно использовать метод доверительных эллипсов при параметрическом анализе индуцированных шумом феноменов, представленных выше.

На рисунке 3.35 а) слева показаны случайные состояния решений системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ для $\sigma = 0.01$, начинающиеся с детерминированного 3-цикла (см. рисунок 3.30 б)), для двух значений интенсивности шума ε. При $\varepsilon = 0.0005$ эти состояния (зелёные) локализованы вблизи точек детерминированного 3-цикла. Для большего шума $\varepsilon = 0.001$ эти состояния (синие) имеют гораздо большую дисперсию в зонах фазовой плоскости, находящихся далеко от детерминированного цикла. Следует отметить, что это стохастическое распределение похоже на распределение состояний в детерминированном хаотическом аттракторе (сравнить с рисунком 3.30 в)).

Столь резкое изменение динамики стохастической системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ можно объяснить особенностями решений исходной детерминированной системы (3.2). Действительно, начальное состояние решения определяет степень сходимости этого решения к 3-циклу. Здесь в зависимости от начальной точки возможны два варианта: решение имеет короткий переходный процесс перед выходом на цикл или достаточно длительный хаотический переходный процесс с блужданием по фазовой плоскости. В первом случае начальные точки образуют подпороговую зону, а во втором — надпороговую зону. На рисунке 3.35 а) справа изображены голубым цветом точки подпороговой зоны, а точки надпороговой зоны хаотических переходных процессов — белым.

Как видно, подпороговая зона содержит сплошную (плотно закрашенную) подобласть $\mathcal{A}$. Дополнение $\mathcal{B}$ к $\mathcal{A}$ представляет собой смесь точек под- и надпороговых зон и имеет решетчатую геометрию [79; 204]. Начиная переходный процесс в $\mathcal{A}$, детерминированное решение демонстрирует короткий переходный процесс. Для любой начальной точки, лежащей в $\mathcal{B}$ с коротким переходным процессом, существуют сколь угодно близкие начальные точки, соответствующие длительному хаотическому переходному процессу. Такое разбиение фазовой плоскости на зоны $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в детерминированной системе (3.2) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ позволяет выяснить механизмы возникновения индуцированного шумом хаоса в стохастической системе (3.2)-(3.3). Действительно, при слабом шуме случайные состояния локализуются вблизи детерминированного цикла и не выходят из зоны $\mathcal{A}$. При увеличении шума разброс растет, и случайные решения переходят из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, где с высокой вероятностью попадают в зону хаотических переходных процессов.

Такой переход случайных состояний из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$ можно предсказать методом доверительных эллипсов (см. рисунок 3.35 а) справа). Здесь красной точкой показана одна из точек 3-цикла с координатами $x_c = 1.006964, y_c = 2.465029$. Доверительные эллипсы показаны зелёным цветом для $\varepsilon = 0.0005$ и синим цветом для $\varepsilon = 0.001$. Как видно, маленький эллипс целиком принадлежит зоне $\mathcal{A}$. Такое расположение означает локализацию решений стохастической системы с $\varepsilon = 0.0005$ вблизи детерминированного цикла. Напротив, большой эллипс частично занимает зону $\mathcal{B}$. Это сигнализирует о появлении фаз хаотического блуждания случайных траекторий стохастической системы с $\varepsilon = 0.001$ вдали от цикла.

На рисунках 3.35 б),в) показано, как работает этот аналитический метод, когда параметр σ приближается к точке бифуркации кризиса $\sigma_1 = 0.008401$. Рисунок 3.35 б) иллюстрирует этот метод для $\sigma = 0.0085$, а рисунок 3.35 в) — для $\sigma = 0.00842$. Как следует из этого анализа, чем ближе σ к точке бифуркации σ_1, тем меньший шум приводит к выходам в зону хаотических переходных процессов. Этот эффект объясняется сочетанием двух факторов: по мере приближения параметра σ к точке бифуркации чувствительность цикла увеличивается, а ширина области $\mathcal{A}$ уменьшается (см. рисунки 3.34 и 3.35 справа). Стоит отметить, что метод доверительных эллипсов хорошо согласуется с результатами прямого численного моделирования этих индуцированных шумом феноменов.

Индуцированные шумом феномены в зоне бистабильности II

Рассмотрим теперь влияние шума в области параметров $0.1379 < \sigma < 0.1419$, где детерминированная система (3.2) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ является биритмичной с сосуществующими 3-циклом и другими колебательными аттракторами, как регулярными, так и хаотическими (см. рисунок 3.31).

Здесь рассмотрим стохастические феномены для двух значений σ, которые принадлежат этой зоне параметров: $\sigma = 0.141$, где 3-цикл сосуществует с 6-циклом (см. рисунок 3.31 в)) и $\sigma = 0.138$, где 3-цикл сосуществует с хаотическим аттрактором (см. рисунок 3.31 а)). При малом шуме решения стохастической системы локализуются вблизи детерминированного аттрактора, от которого они стартуют. По мере увеличения шума дисперсия траекторий увеличивается, и решения могут перемещаться из одного бассейна в другой.

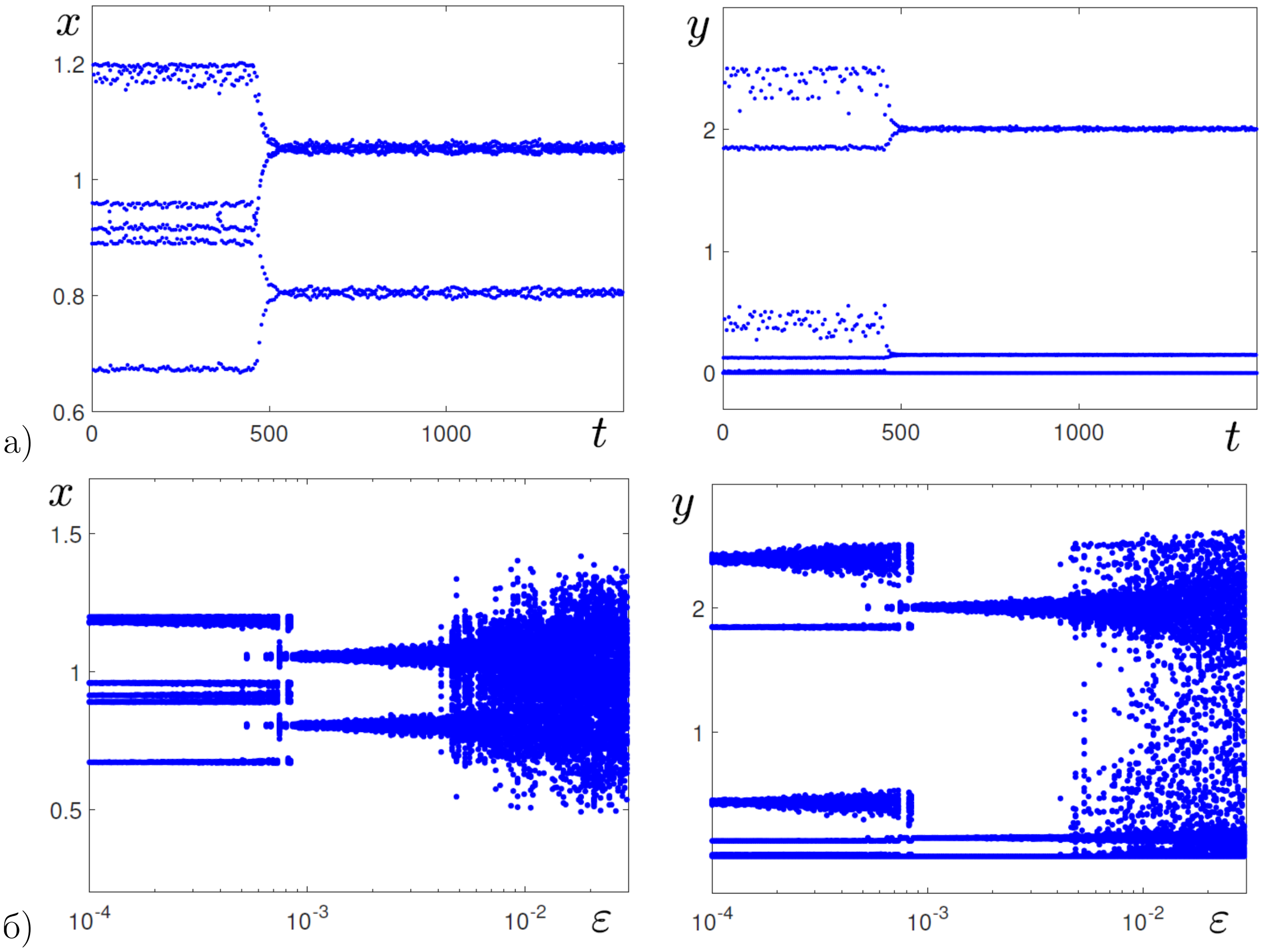
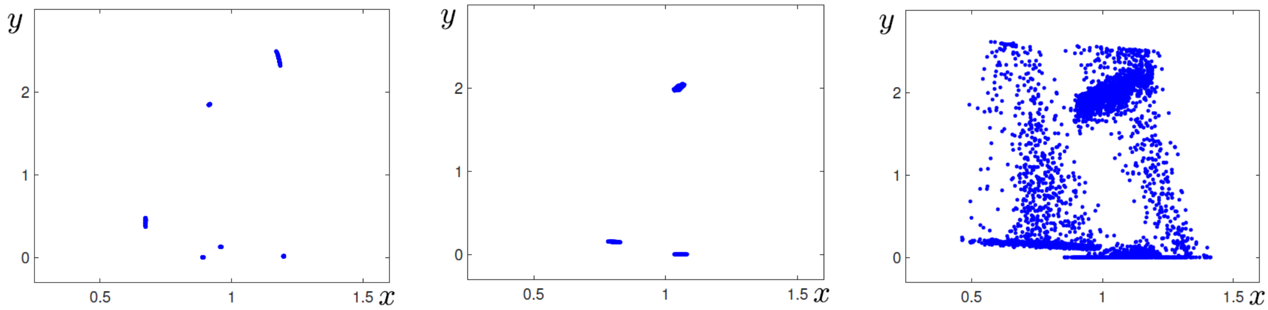
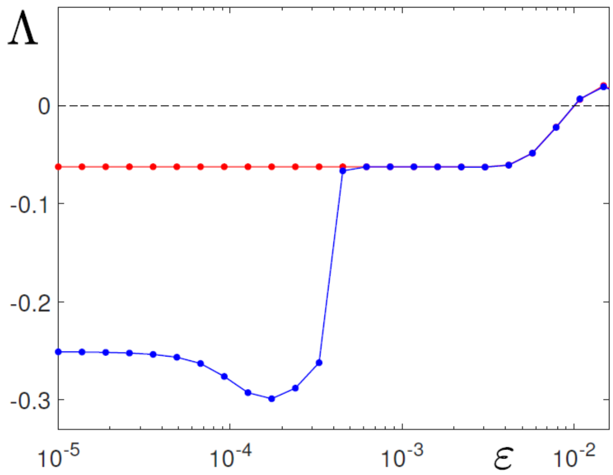


Рисунок 3.36 — Индуцированные шумом переходы 6-цикл → 3-цикл → хаос в стохастической системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ и $\sigma = 0.141$: а) временные ряды решений, начинающиеся с 6-цикла для $\varepsilon = 0.001$; б) случайные состояния в зависимости от интенсивности шума ε

На рисунке 3.36 а) для $\sigma = 0.141$ и $\varepsilon = 0.001$ показаны временные ряды случайных решений, начинающиеся с детерминированного 6-цикла. Как видно, после переходного процесса с колебаниями вблизи этого 6-цикла решение переходит в бассейн сосуществующего 3-цикла и далее колеблется вблизи него. Дополнительные детали стохастических преобразований случайных распределений координат x и y показаны на рисунке 3.36 б) для $\sigma = 0.141$ в зависимости от интенсивности шума. Здесь хорошо виден стохастический переход 6-цикл → 3-цикл. При дальнейшем росте интенсивности шума структура распределения резко меняется: происходит переход от зашумленного 3-цикла к новому распределению с большим разбросом. На рисунке 3.37 а) показаны три характерных распределения случайных состояний, описывающие стохастические преобразования: для $\varepsilon = 0.0003$ (слева), $\varepsilon = 0.002$ (в центре) и $\varepsilon = 0.015$ (справа).



а)



б)

Рисунок 3.37 — Индуцированные шумом переходы 6-цикл $\to$ 3-цикл $\to$ хаос в стохастической системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ для $\sigma = 0.141$: а) стохастические аттракторы для $\varepsilon = 0.0003$ (слева), $\varepsilon = 0.002$ (в центре) и $\varepsilon = 0.015$ (справа); б) старшие показатели Ляпунова $\Lambda_3(\varepsilon)$ (красный) и $\Lambda_6(\varepsilon)$ (синий) для решений, начинающихся с 3-цикла и 6-цикла

Интересно, как меняется старший показатель Ляпунова Λ с ростом ε. На рисунке 3.37 б) показаны два графика функции $\Lambda(\varepsilon)$ для решений, начинающихся с 3-цикла (Λ_3, красный) и 6-цикла (Λ_6, синий). При малом шуме показатели Ляпунова для обоих циклов практически не меняются. При увеличении шума начинают появляться переходы 6-цикл $\to$ 3-цикл, и кривая Λ_6 резко возрастает и сливается с Λ_3. Такой скачок хорошо локализует зону параметра ε, где происходит переход 6-цикл $\to$ 3-цикл. При дальнейшем увеличении шума значения $\Lambda_3(\varepsilon) \approx \Lambda_6(\varepsilon)$ начинают расти и становятся положительными. Например, для

$\varepsilon = 0.015$ имеем $\Lambda = 0.02$. Это означает, что аттрактор, показанный на рисунке 3.37 а) справа, хаотический. Таким образом, в стохастической системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ происходит стохастическое преобразование в два этапа: первый — это индуцированный шумом переход 6-цикл $\to$ 3-цикл, а второй этап — индуцированное шумом преобразование от порядка к хаосу.

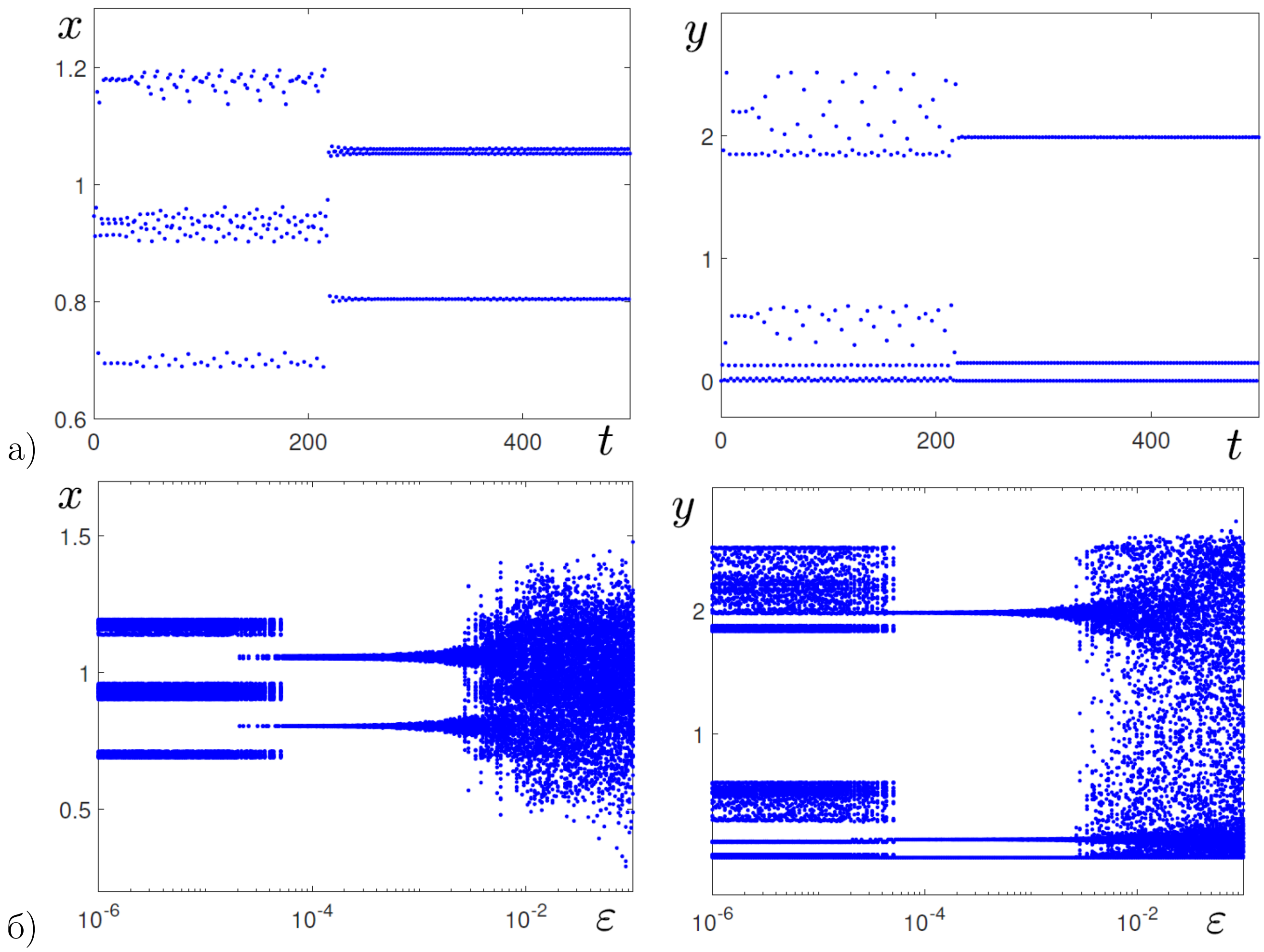
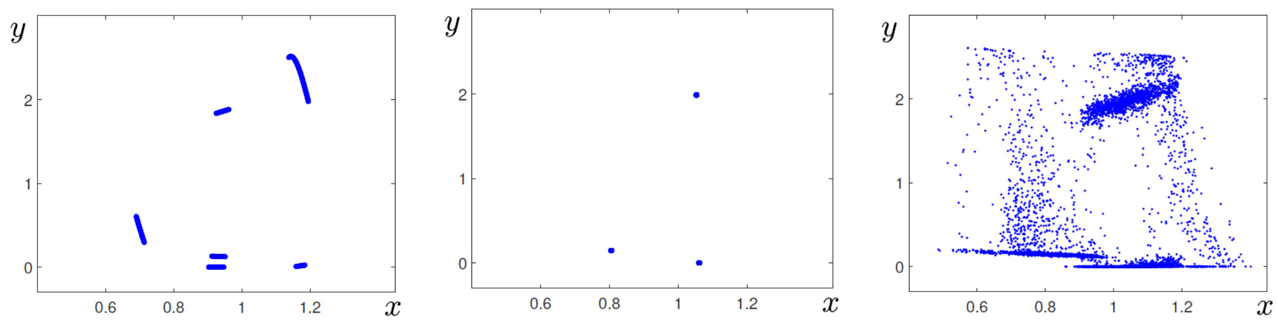


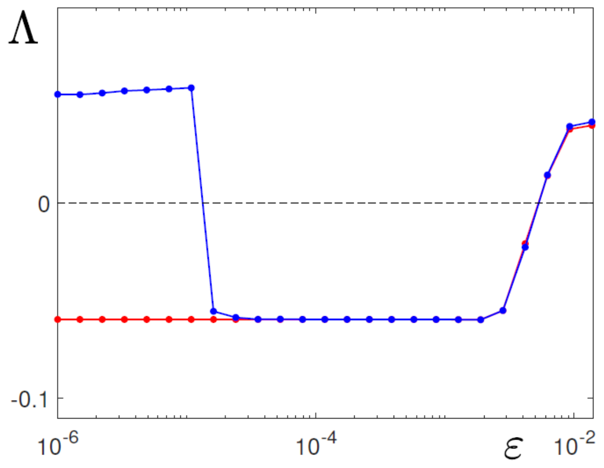
Рисунок 3.38 — Индуцированные шумом переходы хаос $\to$ 3-цикл $\to$ хаос в стохастической системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ и $\sigma = 0.138$: а) временные ряды решений, начинающиеся с хаотического аттрактора для $\varepsilon = 0.0001$; б) случайные состояния в зависимости от интенсивности шума ε

Теперь рассмотрим стохастические явления в системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ и $\sigma = 0.138$ с более сложным вариантом биритмичности с сосуществованием 3-цикла и хаотического аттрактора (СН). На рисунке 3.38 а) для $\sigma = 0.138$ и $\varepsilon = 0.0001$ показаны временные ряды случайных решений, начинающиеся с детерминированного хаотического аттрактора. Здесь видно, как после переходного процесса с колебаниями вблизи исходного детерминированного хаотического аттрактора решение переходит в бассейн сосуществующего

3-цикла и далее колеблется вблизи него. Этот феномен и дополнительные детали стохастических преобразований случайных распределений координат x и y показаны на рисунке 3.38 б) в зависимости от интенсивности шума ε. Здесь хорошо виден стохастический переход CH $\to$ 3-цикл.



а)



б)

Рисунок 3.39 — Индуцированные шумом переходы хаос $\to$ 3-цикл $\to$ хаос в стохастической системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ для $\sigma = 0.138$: а) стохастические аттракторы для $\varepsilon = 0.00001$ (слева), $\varepsilon = 0.0001$ (в центре) и $\varepsilon = 0.01$ (справа); б) старшие показатели Ляпунова $\Lambda_3(\varepsilon)$ (красный) и $\Lambda_{CH}(\varepsilon)$ (синий) для решений, начинающихся с 3-цикла и хаотического аттрактора

При дальнейшем росте интенсивности шума пространственная форма распределения резко меняется: происходит переход от зашумленного 3-цикла к другому распределению с большим разбросом. На рисунке 3.39 а) показаны три характерных распределения случайных состояний, описывающие стохастические преобразования: для $\varepsilon = 0.00001$ (зашумленный хаос, слева), $\varepsilon = 0.0001$ (зашумленный 3-цикл, в центре) и $\varepsilon = 0.01$ (новый индуцированный шумом хаос, справа).

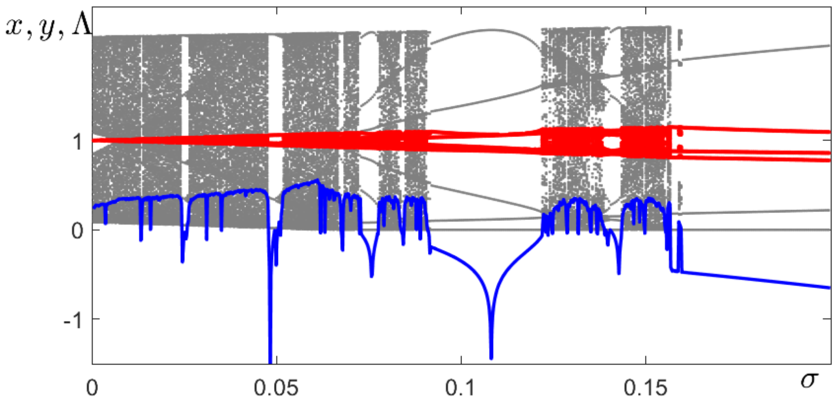
Рассмотрим, как в этом случае изменяется старший показатель Ляпунова Λ с ростом ε. На рисунке 3.39 б) показаны два графика функции $\Lambda(\varepsilon)$ для решений, начинающихся с сосуществующего детерминированного 3-цикла (Λ_3, красный) и детерминированного хаотического аттрактора CH (Λ_{CH}, синий). При малом шуме обе функции $\Lambda_3(\varepsilon)$ и $\Lambda_{CH}(\varepsilon)$ практически не меняются. С увеличением шума, при некоторой критической интенсивности, начинают появляться переходы CH $\to$ 3-цикл, и кривая Λ_{CH} резко убывает и сливается с Λ_3. Такой скачок хорошо локализует зону параметра ε, где происходит переход с хаотического аттрактора на 3-цикл. При дальнейшем увеличении шума значения $\Lambda_3(\varepsilon) \approx \Lambda_{CH}(\varepsilon)$ начинают расти и становятся положительными. При $\varepsilon = 0.01$ имеем $\Lambda = 0.02$. Тогда аттрактор, изображенный на рисунке 3.39 а) справа, хаотический. Таким образом, в стохастической системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ и $\sigma = 0.138$ происходит двухэтапное стохастическое преобразование: сначала индуцированный шумом переход CH $\to$ 3-цикл, а затем — индуцированное шумом обратное преобразование порядок $\to$ хаос.

Подводя итог, можно сказать, что наличие связи между популяциями и случайных возмущений может кардинально изменить динамику метапопуляции, вызывая переходы от порядка к хаосу и наоборот.

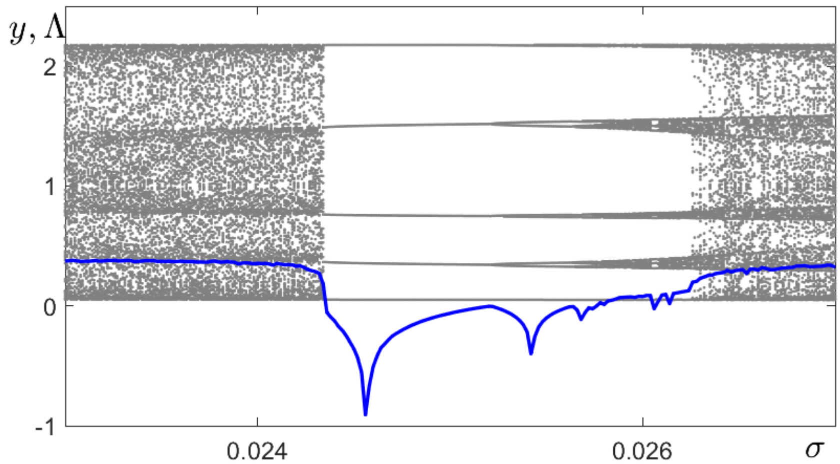
3.4.2 Модель 2. Сравнительный анализ стохастических переходов порядок-хаос

В этом подразделе так же, как в предыдущем (3.4), изучается поведение системы в зависимости от σ в случае, когда первая изолированная подсистема находится в равновесном состоянии с $\mu_1 = 1$, а вторая изолированная подсистема — в хаотическом с $\mu_2 = 2.8$. Но в текущем подразделе сделан акцент на сравнении устойчивости режимов к случайным воздействиям.

На рисунке 3.40 а) представлены изменения динамических режимов в метапопуляционной модели (3.2) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$ при варьировании параметра σ, где красным цветом изображены x-координаты аттракторов, а серым — y-координаты. Как видно, здесь наблюдается чередование периодических и хаотических режимов: существует большое окно порядка посередине, а затем в зоне $\sigma > 0.16$ устанавливается порядок в форме устойчивого 3-цик-



а)



б)

Рисунок 3.40 — Бифуркационная диаграмма для системы (3.2) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$: а) $\sigma \in [0; 0.2]$; б) увеличенный фрагмент для $\sigma \in [0.023; 0.027]$

ла. Зоны порядка и хаоса хорошо различаются по знаку старшего показателя Ляпунова, изображенного на рисунке 3.40 синим цветом.

На рисунке 3.40 б) представлен увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы для $0.023 \leqslant \sigma \leqslant 0.027$. Здесь можно видеть, как в результате бифуркации кризиса появляется устойчивый 5-цикл, который после каскада бифуркаций удвоения периода вновь трансформируется в хаос.

На рисунке 3.41 изображены примеры осцилляционных аттракторов системы (3.2) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$ и соответствующих временных рядов для различных значений параметра σ: а), б) 5-цикл для $\sigma = 0.0246$; в), г) хаос для $\sigma = 0.027$; д), е) 3-цикл для $\sigma = 0.17$.

На рисунке 3.42 а) показан увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы, изображенной на рисунке 3.40, который иллюстрирует бистабильный

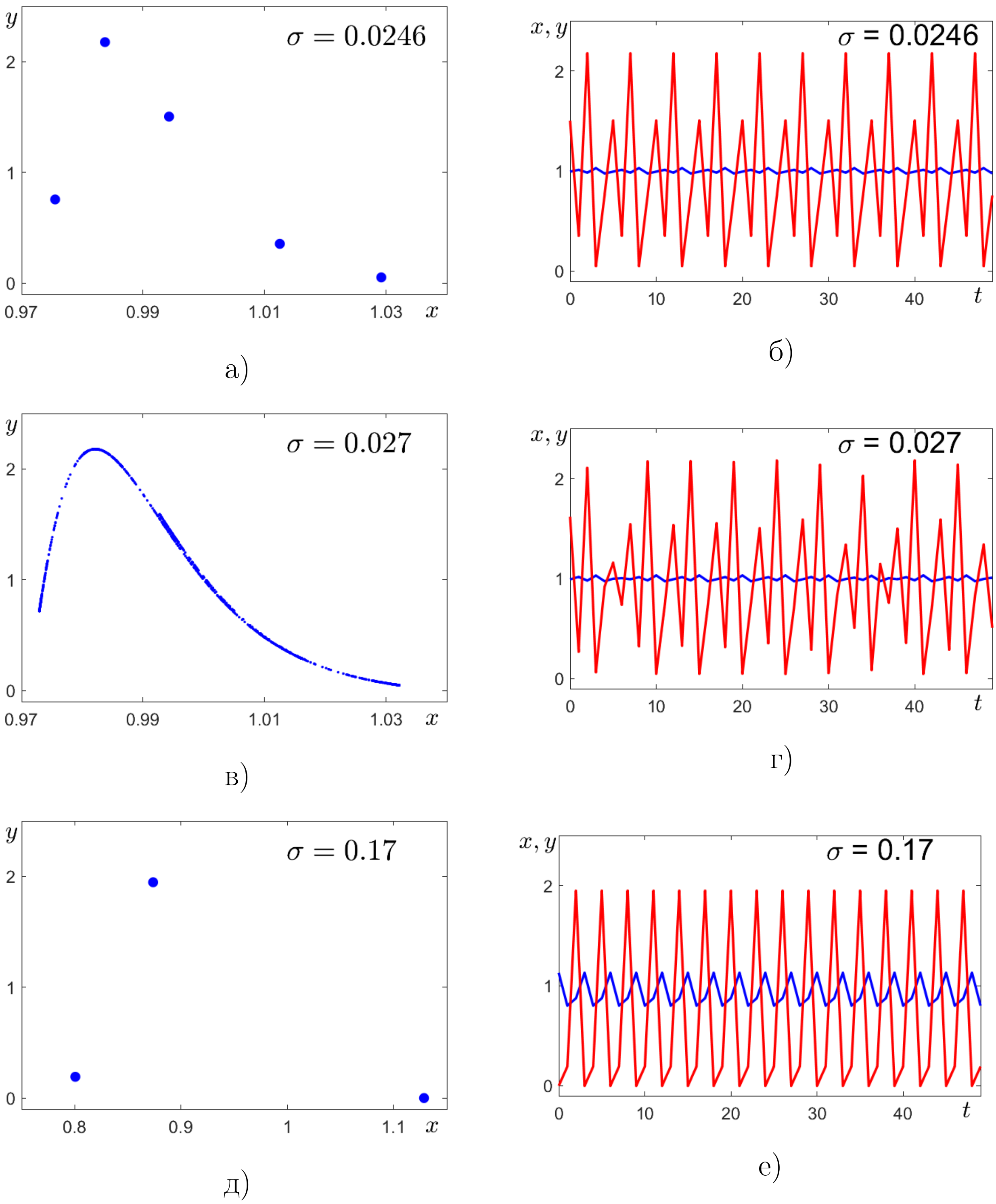
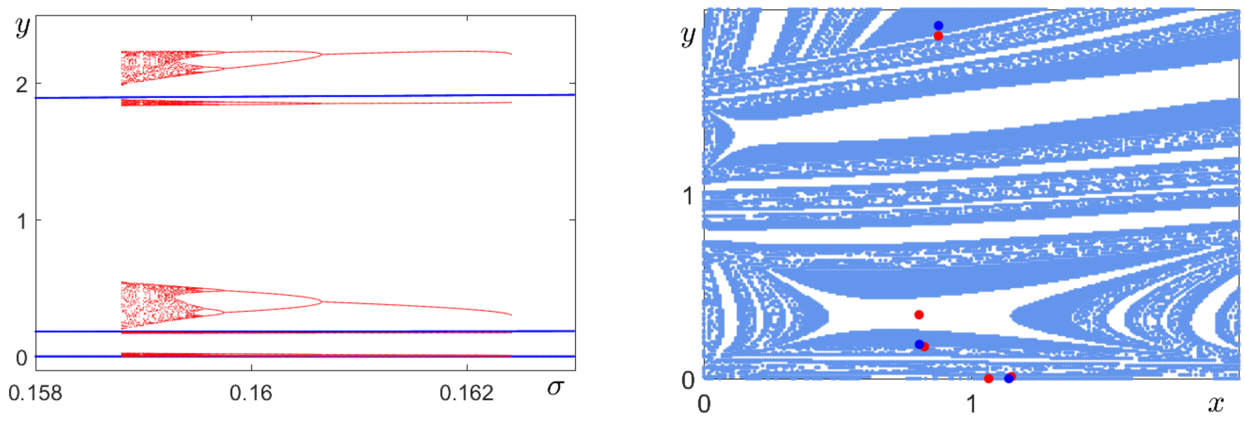


Рисунок 3.41 — Аттракторы и временные ряды решений системы (3.2) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$: а), б) 5:=цикл для $\sigma = 0.0246$; в), г) хаос для $\sigma = 0.027$; д), е) 3-цикл для $\sigma = 0.17$

режим: синим изображен 3-цикл, а красным — сосуществующий аттрактор, имеющий разную форму. Эта бистабильность для $\sigma = 0.162$ представлена на рисунке 3.42 б) двумя бассейнами притяжения. Синими точками показан 3-цикл



а) б)

Рисунок 3.42 — Зоны бистабильности системы (3.2) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$: а) бифуркационная диаграмма; б) бассейны притяжения для $\sigma = 0.162$

со своей областью притяжения (голубой), а красным цветом изображен 6-цикл с бассейном притяжения (белый).

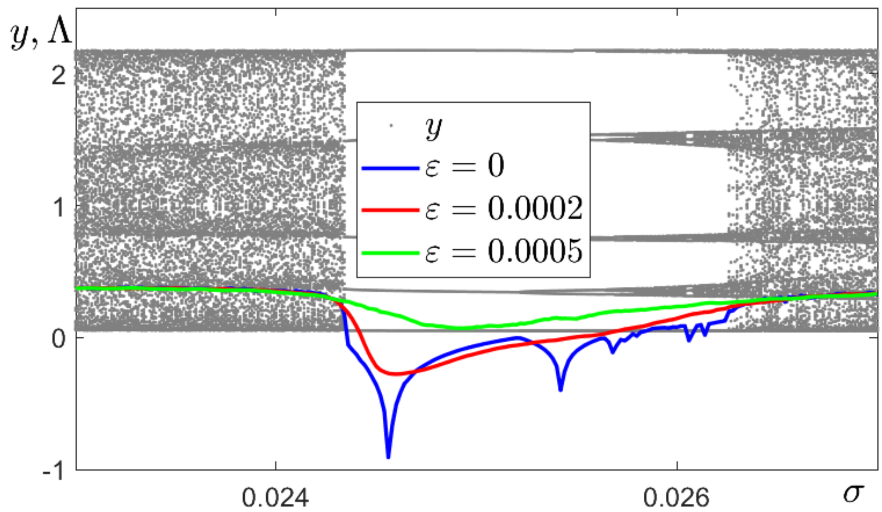
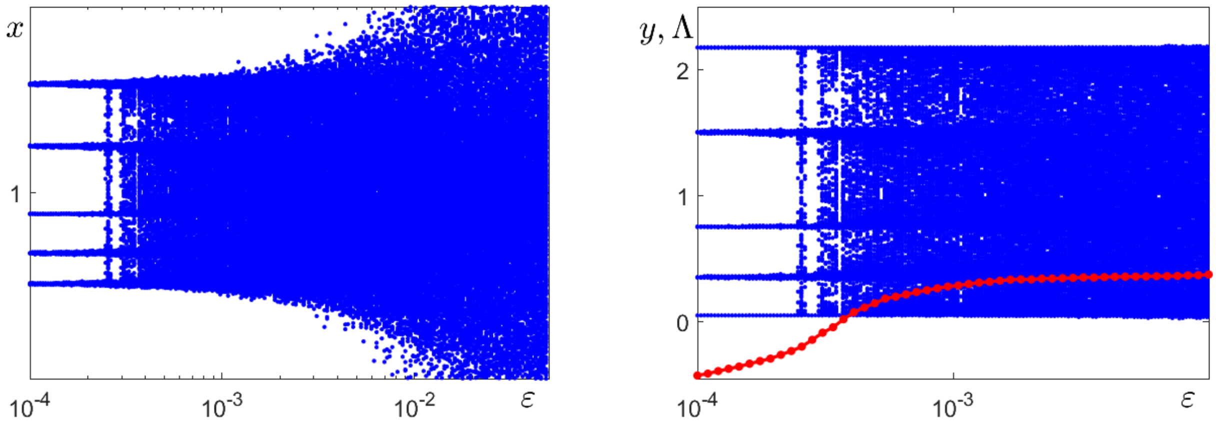


Рисунок 3.43 — Бифуркационная диаграмма для детерминированной системы (3.2) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$ и показатели Ляпунова для различных значений интенсивности шума

На рисунке 3.43 изображена бифуркационная диаграмма с показателями Ляпунова для $0.023 \leqslant \sigma \leqslant 0.027$ и разной интенсивности шума ε: $\varepsilon = 0$ (синий), $\varepsilon = 0.0002$ (красный), $\varepsilon = 0.0005$ (зелёный). Можно заметить, что с увеличением интенсивности шума зона порядка сужается и впоследствии исчезает, что подтверждается показателями Ляпунова. Так, например, при $\varepsilon = 0.0005$ стохастическая система на всем интервале $0.023 \leqslant \sigma \leqslant 0.027$ является хаотической.



а) б)

Рисунок 3.44 — Координаты состояний стохастической системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$ для $\sigma = 0.0246$ (5-цикл) в зависимости от интенсивности шума. Старший показатель Ляпунова изображен красным цветом

Рассмотрим подробнее вызванную шумом стохастическую трансформацию 5-цикла в хаотический аттрактор. На рисунке 3.44 для $\sigma = 0.0246$ представлена зависимость распределения точек аттрактора от интенсивности шума. Отчетливо видно, что при малых шумах случайные состояния концентрируются вблизи точек цикла. Однако когда интенсивность шума превосходит некоторое критическое значение, форма распределения случайных состояний резко меняется — начинаются переходы между состояниями цикла. Изменение формы распределения сопровождается переходом к хаосу, что подтверждается положительными значениями показателя Ляпунова, изображенного красным цветом на рисунке 3.44 б).

Используя формулы (1.10),(1.11) и (1.25) из главы 1, можно вычислить стохастическую чувствительность в случае 5-цикла (например, для $\sigma = 0.0246$), а также построить доверительные эллипсы, описывающие разброс случайных состояний вокруг детерминированного аттрактора. На рисунке 3.45 а) показаны фазовые траектории решений, стартующих с детерминированного 5-цикла. При малом значении интенсивности шума ($\varepsilon = 0.0001$ случайные состояния (красный цвет) локализуются вокруг точек 5-цикла. С увеличением интенсивности шума ($\varepsilon = 0.0004$) распределение случайных состояний (синий цвет) принимает качественно иную пространственную форму. Стоит отметить, что это стохастическое распределение очень похоже на детерминированный хаос (см. рисунок 3.41 в)), что объясняется особенностью данной модели. Что касается переходного процесса в детерминированной системе, здесь в зависимости

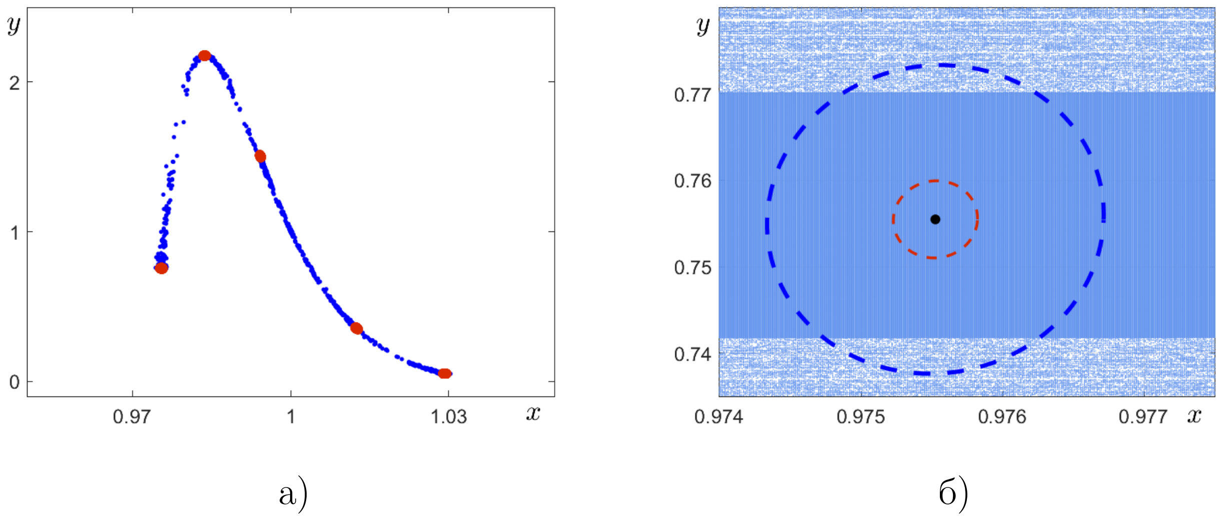


Рисунок 3.45 — Стохастические трансформации в системе (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$ для $\sigma = 0.0246$: а) фазовые траектории решений для 5-цикла при $\varepsilon = 0.0001$ (красный) и $\varepsilon = 0.0004$ (синий); б) доверительные эллипсы при $\varepsilon = 0.0001$ (красный пунктир) и $\varepsilon = 0.0004$ (синий пунктир) для точки 5-цикла

от начальной точки возможны два сценария: решение имеет короткий переходный процесс к циклу, либо достаточной долгий хаотический переходный процесс, достаточно далекий от точек цикла. Начальные состояния, отвечающие коротким переходным процессам, изображены на рисунке 3.45 б) синим цветом, а длинным переходным процессам — белым цветом. Видно, что синие точки вблизи состояния цикла формируют некоторую сплошную полосу (бассейн $\mathcal{A}$). Вне этой полосы (бассейн $\mathcal{B}$) синие точки в любой, сколь угодно малой окрестности, соседствуют с белыми.

Действительно, при слабом шуме случайные состояния локализованы вблизи детерминированного цикла и не выходят из бассейна $\mathcal{A}$. При увеличении шума дисперсия растет, и случайные решения попадают в бассейн $\mathcal{B}$, где с высокой вероятностью генерируются хаотические переходные процессы. Такой переход может быть аналитически описан с помощью метода доверительных эллипсов. На рисунке 3.45 б) изображены эллипсы для $\varepsilon = 0.0001$ (красный пунктир) и $\varepsilon = 0.0004$ (синий пунктир). Как видим, переход эллипса из бассейна $\mathcal{A}$ в бассейн $\mathcal{B}$ может быть использован для оценки критического значения интенсивности шума, отвечающего переходу от порядка к хаосу.

Рассмотрим теперь влияние шума на поведение метапопуляционной системы в зоне $0.046 \leqslant \sigma \leqslant 0.054$. В этой зоне наблюдается окно порядка с устойчивым 3-циклом. Для этой зоны на рисунке 3.46 показаны детали би-

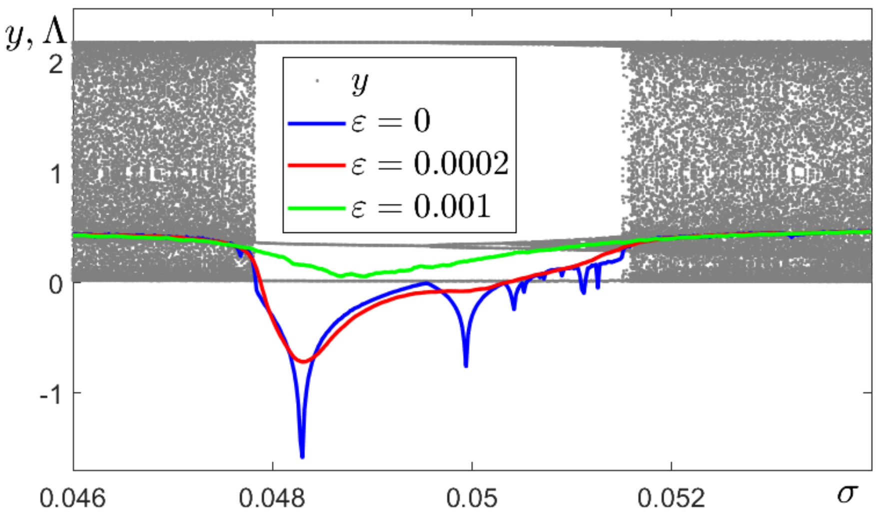
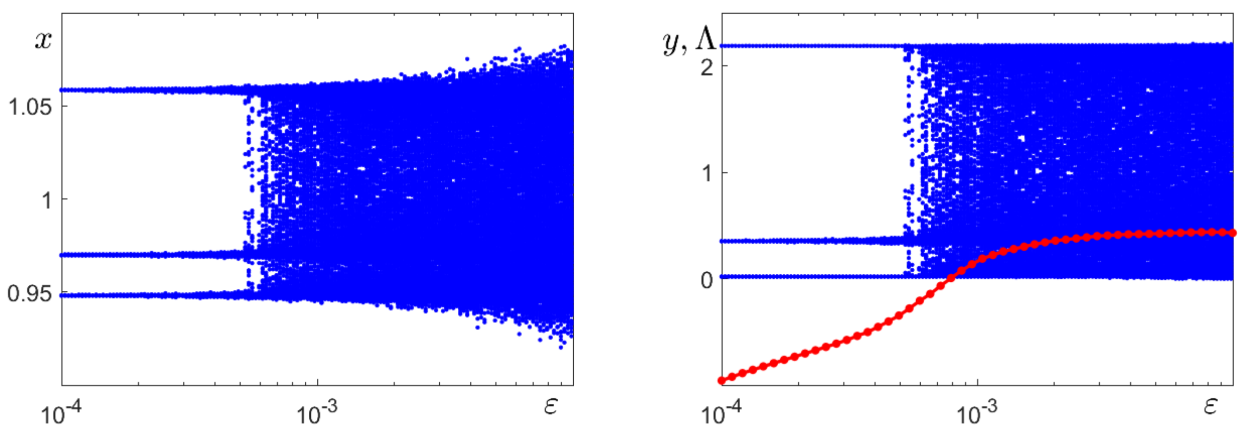


Рисунок 3.46 — Бифуркационная диаграмма для системы (3.2) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$ с показателями Ляпунова

фуркационной диаграммы с показателями Ляпунова для разной интенсивности шума: $\varepsilon = 0$ (синий цвет), $\varepsilon = 0.0002$ (красный цвет), $\varepsilon = 0.001$ (зелёный цвет). Здесь, аналогично случаю, рассмотренному на рисунке 3.43, можно видеть, что с увеличением интенсивности шума зона порядка сужается и затем исчезает. В системе происходит переход от порядка к хаосу, что подтверждается показателем Ляпунова, например, для $\varepsilon = 0.001$. Как видим, здесь 3-цикл трансформируется в хаотический аттрактор при гораздо большем шуме, чем рассмотренный выше 5-цикл.



а) б)

Рисунок 3.47 — Координаты случайных состояний системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$ для $\sigma = 0.0483$ (3-цикл) в зависимости от интенсивности шума с показателем Ляпунова (красный)

Проанализируем детали стохастической трансформации 3-цикла для $\sigma = 0.0483$ из окна порядка (см. рисунок 3.46). На рисунке 3.47 представлена зависимость распределения точек аттрактора от интенсивности шума ε. В данном случае также хорошо заметно, что с увеличением интенсивности шума происходит переход от 3-цикла к хаотическому аттрактору, что подтверждается показателем Ляпунова на рисунке 3.47 б).

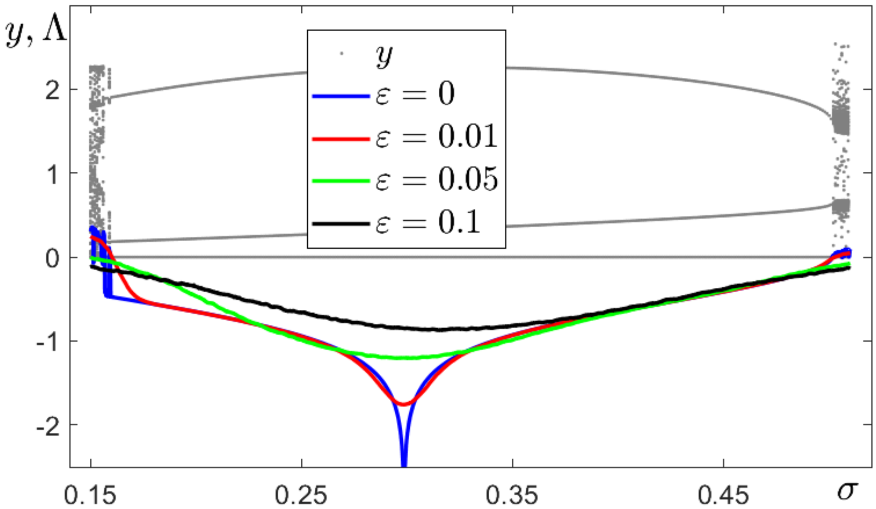


Рисунок 3.48 — Бифуркационная диаграмма для системы (3.2) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$ с показателями Ляпунова

Теперь рассмотрим достаточно большую параметрическую зону $0.15 \leqslant \sigma \leqslant 0.51$, где регулярным аттрактором системы тоже является 3-цикл. На рисунке 3.48 изображена бифуркационная диаграмма с показателями Ляпунова для разной интенсивности шума: $\varepsilon = 0$ (синий цвет), $\varepsilon = 0.01$ (красный цвет), $\varepsilon = 0.05$ (зелёный цвет), $\varepsilon = 0.1$ (черный цвет). В отличие от случаев выше, эта зона 3-цикла устойчива к шуму и сохраняет режим порядка, что подтверждается показателями Ляпунова.

Исследуем влияние случайного шума на 3-циклы из зоны $0.15 \leqslant \sigma \leqslant 0.51$, а именно для $\sigma = 0.17$ (см. рисунок 3.49 а), б)) и для $\sigma = 0.45$ (см. рисунок 3.49 в), г)). На рисунке 3.49 представлена зависимость распределения точек аттрактора от интенсивности шума. Отчетливо видно, что при увеличении интенсивности шума случайные состояния 3-цикла размываются и формируют случайное распределение. Как видим, здесь, в отличие от рассмотренных выше случаев, показатель Ляпунова при увеличении интенсивности шума остается отрицательным, то есть перехода к хаосу не происходит.

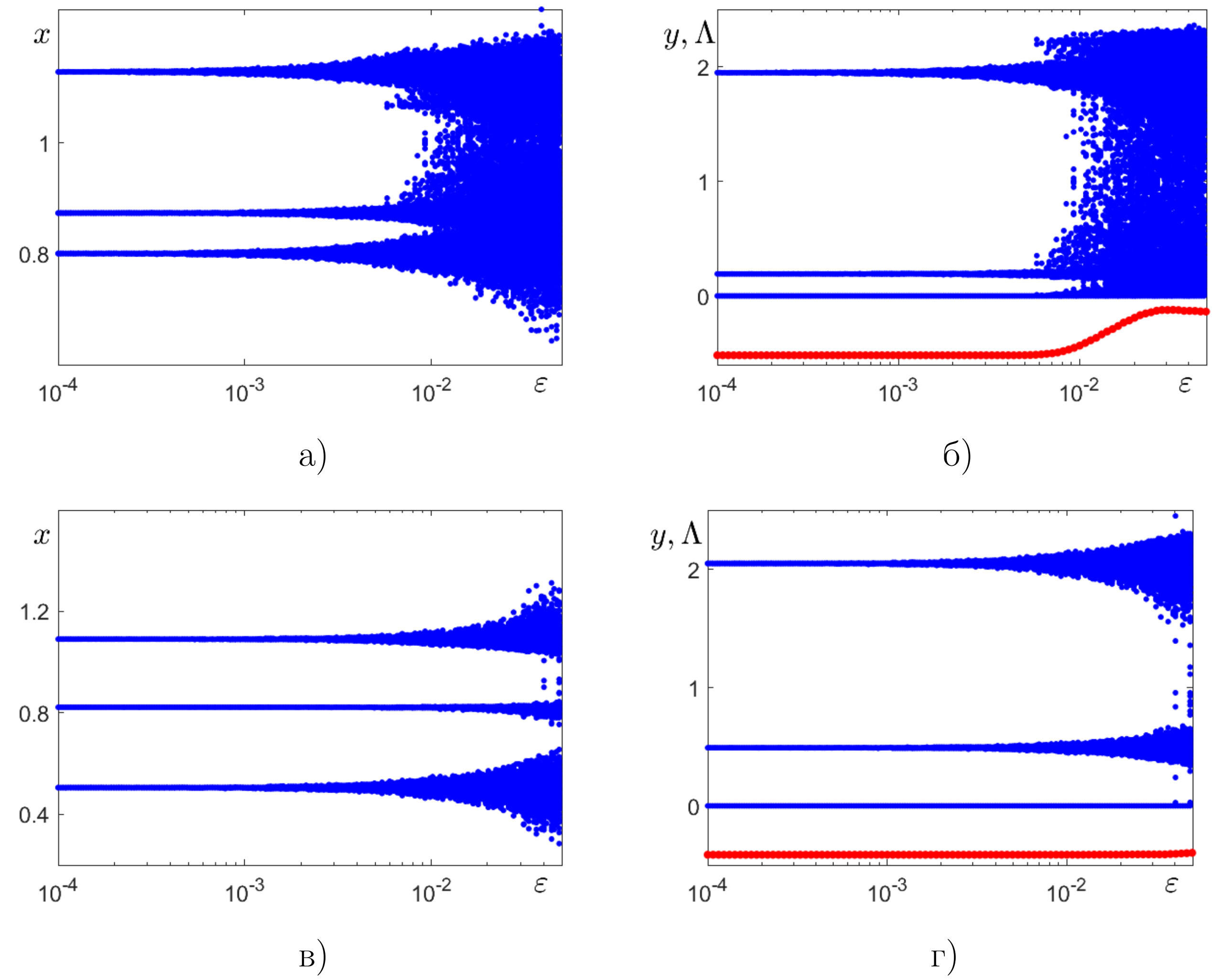
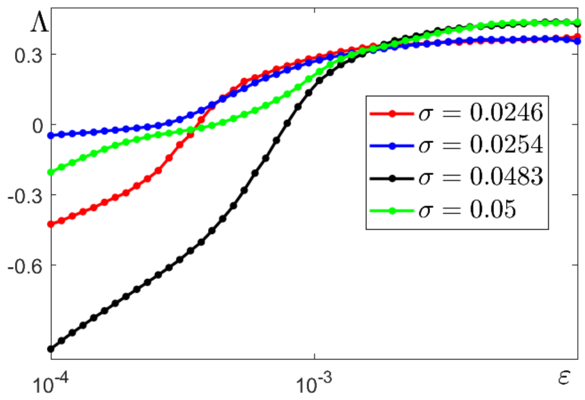
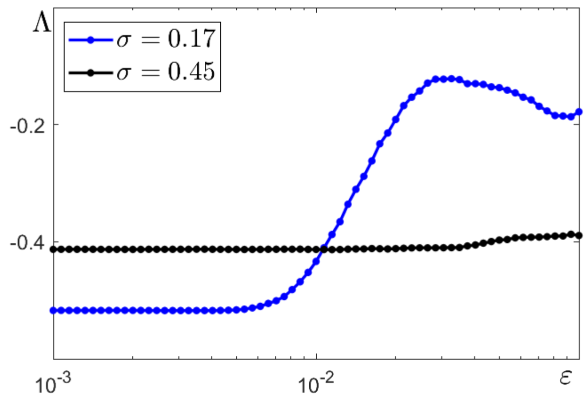


Рисунок 3.49 — Координаты случайных состояний системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$ для 3-цикла с показателем Ляпунова (красный): а), б) $\sigma = 0.17$; в), г) $\sigma = 0.45$

В качестве заключительного этапа исследования сравним поведение показателей Ляпунова (см. рисунок 3.50) в зависимости от интенсивности шума для некоторых значений параметра σ, представляющих все три рассмотренные выше параметрические зоны порядка. Как видно на рисунке 3.50 а) регулярные аттракторы из первой (см. рисунок 3.43) и второй (см. рисунок 3.46) параметрических зон чувствительны к внешнему воздействию и наблюдается переход от порядка к хаосу. В третьей же зоне (см. рисунок 3.48), наоборот, при увеличении интенсивности шума порядок сохраняется (см. рисунок 3.50 б)). При этом показатель Ляпунова для 3-цикла при $\sigma = 0.17$ более чувствителен к изменению шума, чем при $\sigma = 0.45$.





а) б)

Рисунок 3.50 — Показатели Ляпунова системы (3.2)-(3.3) при $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$ для разных значений параметра связи σ в зависимости от интенсивности шума ε

3.5 Основные результаты главы

В данной главе рассмотрена метапопуляционная модель двух связанных популяций, каждая из которых моделируется дискретным отображением Рикера. Исследовано влияние на систему взаимной миграции, а также случайных возмущений.

В разделе 3.2 показаны результаты анализа случая $\mu_1 = \mu_2 = 1.8$, когда обе популяции находятся в равновесном режиме. Было проиллюстрировано, что при увеличении связи исходная детерминированная модель демонстрирует богатое разнообразие динамических режимов, как регулярных, так и хаотических. Выявлено, что при случайном воздействии в системе наблюдаются следующие стохастические явления: 1) индуцированное шумом разрушение противофазной синхронизации; 2) временная стабилизация неустойчивого равновесия; 3) переходы от порядка к хаосу. Для параметрического анализа этих явлений использована статистика, полученная в результате прямого численного моделирования, и теоретический подход, основанный на методе функции стохастической чувствительности. В этом анализе было показано, что особую роль играют хаотические переходные процессы и фрактальные бассейны. Стоит отметить, что этот подход можно использовать для анализа более сложных метапопуляций.

В разделе 3.3 проведено исследование фундаментальных механизмов, генерирующих режимы переключения в динамике метапопуляционной системы в случае $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$, когда обе популяции находятся в периодическом режиме. В подразделе 3.3.1 динамика этой системы изучается для детерминированного случая в зависимости от параметра связи. Выявлены зоны структурной устойчивости с моно-, би- и триритмичными режимами с сосуществованием регулярных и хаотических аттракторов. Найдены бассейны этих аттракторов, соответствующие синфазной и противофазной синхронизации. Подраздел 3.3.2 посвящен анализу индуцированных шумом переключений в метапопуляционной системе при случайных возмущениях параметра связи. Для всех параметрических зон структурной устойчивости детерминированной системы стохастические деформации исследуются численно с последующим статистическим анализом. Здесь изучается индуцированное шумом переключение между режимами синфазной и противофазной синхронизации, а также между порядком и хаосом. Определена важная роль длительных переходных процессов и их бассейнов в понимании механизмов этих стохастических преобразований. Индуцированное шумом переключение прогнозируется с использованием аналитического метода, учитывающего взаимное расположение аттракторов, их бассейнов и доверительных областей, построенных методом функции стохастической чувствительности.

В разделе 3.4 проведен анализ совместной динамики двух связанных популяций, которые, будучи изолированными, демонстрируют противоположные режимы поведения: одна из популяций находится в режиме устойчивого равновесия, а другая — в хаотическом режиме. В подразделе 3.4.1 было показано, что за счет внесения связи между популяциями общий хаотический режим метапопуляции может трансформироваться в регулярный. С помощью бифуркационного анализа выявлены параметрические зоны моно- и биритмичности. Основной целью раздела было изучение того, как случайные возмущения в коэффициенте связи разрушают исходные детерминированные режимы совместной динамики. Внимание было уделено двум параметрическим зонам с качественно разной динамикой: зоне I, где окно периодичности окружено хаосом, и зоне II, где сосуществуют два аттрактора, один из которых представляет собой устойчивый 3-цикл, а другой колебательный аттрактор является регулярным или хаотическим. В зоне I показано, что увеличение шума вызывает переход от порядка к хаосу. Это явление проанализировано с помощью подхода, сочетающего исследования хаотических переходных процессов и метода доверительных областей. В зоне II с помощью аппарата показателей Ляпунова продемонстрировано, как шум вызывает многоступенчатые переходы «6-цикл $\rightarrow$ 3-цикл $\rightarrow$ хаос» или «хаос $\rightarrow$ 3-цикл $\rightarrow$ хаос». В подразделе 3.4.2 сделан акцент на сравнении устойчивости режимов к случайным возмущениям. Для детерминированной модели проведен бифуркационный анализ и локализованы параметрические зоны периодических и хаотических режимов. Методами прямого численного моделирования с использованием показателей Ляпунова исследованы стохастические переходы от порядка к хаосу. В исследовании индуцированных шумом переходов продемонстрированы возможности аналитического подхода, основанного на технике функции стохастической чувствительности и методе доверительных областей. Проведен сравнительный анализ воздействия случайных возмущений на циклы для трех зон порядка. Выявлены условия, при которых происходит переход от периодического режима к хаотическому. Показано, что для достаточно больших значений коэффициента связи 3-цикл, описывающий установившийся режим динамики метапопуляции, является устойчивым к шуму, сохраняя свойство порядка. С биологической точки зрения это может быть обосновано неоднородными условиями среды, когда две популяции имеют разный параметр естественного прироста, а также внутренним свойством системы. Основные результаты исследований, представленные в этой главе, были опубликованы в работах [205; 207—210].

Глава 4. Кусочно-гладкая популяционная модель

Данная глава посвящена применению метода функции стохастической чувствительности к аттракторам кусочно-гладкого одномерного отображения, описывающего динамику численности популяции. Первым этапом исследования является параметрический анализ возможных режимов детерминированной модели: определение зон существования устойчивых равновесий и хаотических аттракторов. Для определения параметрических границ хаотического аттрактора применяется теория критических точек. В случае, когда на систему оказывает влияние случайное воздействие, на основе техники функции стохастической чувствительности дается описание разброса случайных состояний вокруг равновесия и хаотического аттрактора. Проводится сравнительный анализ влияния параметрического и аддитивного шума на аттракторы системы. С помощью техники доверительных интервалов изучаются вероятностные механизмы вымирания популяции под действием шума. Анализируются изменения параметрических границ существования популяции под действием случайного возмущения.

4.1 Параметрический и бифуркационный анализ режимов детерминированной модели

Рассмотрим модель, описывающую динамику численности популяции, которая задается кусочно-гладким отображением и представлена в работе [40]:

$$x_{n+1} = f(x_n) = \begin{cases} \lambda x_n, & x_n < 1, \\ \lambda x_n^{1-b}, & x_n \geqslant 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

где x_n — численность популяции (исходя из биологического смысла $x_n \geqslant 0$), $\lambda > 0$ и $b > 0$ — бифуркационные параметры системы.

Данное отображение имеет два равновесия:

$$\bar{x}_1 = 0,$$
$$\bar{x}_2 = \lambda^{\frac{1}{b}}.$$

Равновесие $\overline{x}_1$ существует при $\lambda > 0$, а равновесие $\overline{x}_2$ — при $\lambda \geqslant 1$. Характеристикой устойчивости равновесий для одномерных отображений является характеристический показатель $f'(\overline{x})$, который для устойчивого равновесия должен удовлетворять условию $|f'(\overline{x})| < 1$. Для равновесий отображения (4.1) характеристические показатели имеют следующий вид:

$$f'(\overline{x}_1) = \lambda,$$
$$f'(\overline{x}_2) = 1 - b.$$

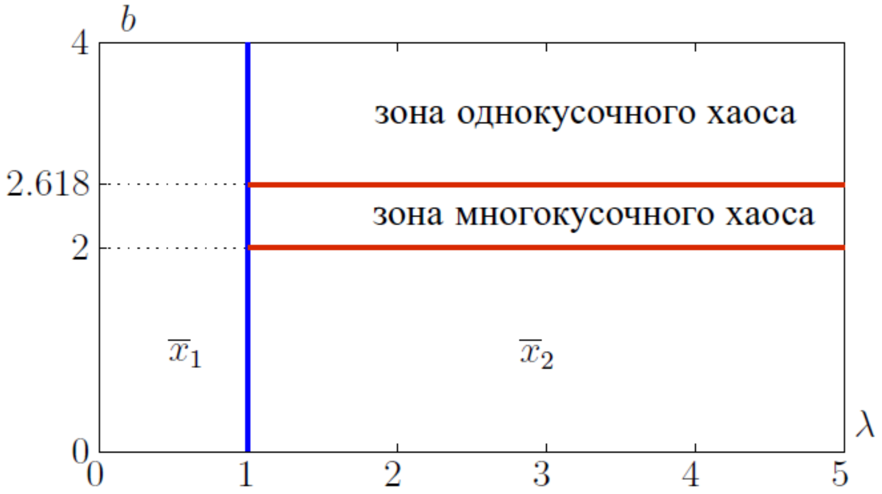


Рисунок 4.1 — Карта динамических режимов модели (4.1)

Таким образом, равновесие $\overline{x}_1$ устойчиво при $0 < \lambda < 1$ и $b > 0$, а равновесие $\overline{x}_2$ устойчиво при $\lambda > 1$ и $0 < b < 2$. На рисунке 4.1 представлена карта динамических режимов модели (4.1). На карте показаны параметрические зоны существования устойчивых равновесий $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$, зона однокусочного хаотического аттрактора, а также зона многокусочных хаотических аттракторов. При приближении параметра b к значению 2 сверху (если $\lambda > 1$), в системе наблюдается каскад бифуркаций удвоения кусочности хаотического аттрактора. Данная бифуркация свойственна кусочно-гладким отображениям и подробно описана, например, в работах [196—198].

На рисунке 4.2 показана бифуркационная диаграмма изменения численности популяции x в зависимости от параметра λ при фиксированном значении параметра $b = 3$. Для $0 < \lambda < 1$ система всегда имеет единственный аттрактор — равновесие $\overline{x}_1 = 0$. Далее в точке бифуркации $\lambda = 1$ происходит рождение хаотического аттрактора, который наблюдается и при дальнейшем изменении параметра λ. При этом кусочность этого аттрактора не меняется, увеличивается только его размер. Красным цветом представлены линии $c = \lambda$ и $c_1 = \lambda^{2-b}$,

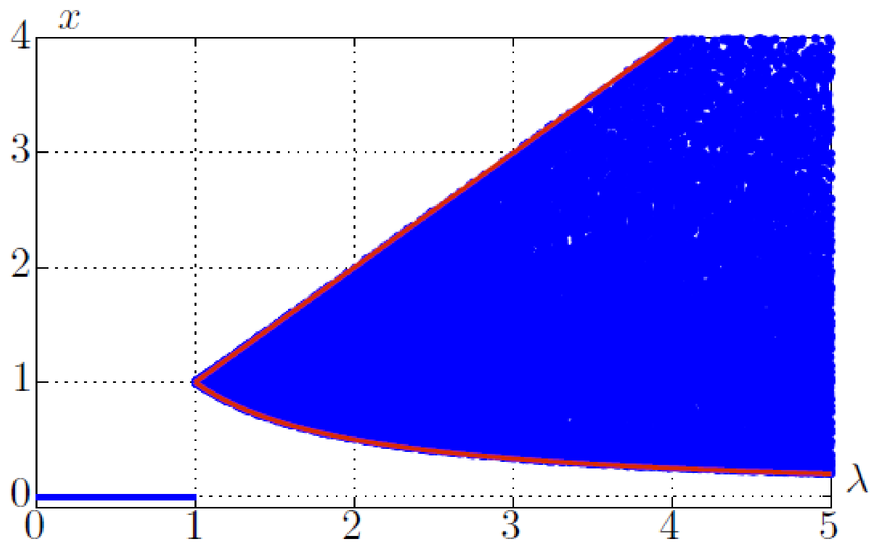


Рисунок 4.2 — Бифуркационная диаграмма модели (4.1) изменения численности популяции x в зависимости от параметра λ при $b = 3$

описывающие границы хаотического аттрактора, полученные как критические точки $c = f(c_{-1})$ и $c_1 = f(c)$, где $c_{-1} = 1$ точка максимума функции $f(x)$ [198] (см. подраздел 1.2.4 текущей работы).

На рисунке 4.3 а) представлена бифуркационная диаграмма модели (4.1) изменения численности популяции x в зависимости от параметра b при фиксированном значении параметра $\lambda = 2$. Для $0 < b < 2$ в системе существует одно устойчивое равновесие $\overline{x}_2$. В зоне $2 < b < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ наблюдается каскад удвоения кусочности хаотического аттрактора. Аналогично рисунку 4.2 красным цветом изображены границы хаотического аттрактора: две внешние $c = \lambda$ и $c_1 = \lambda^{2-b}$ и две внутренние $c_2 = \lambda^{3-b}$ и $c_3 = \lambda^{(b-2)^2}$. На рисунках 4.3 б) и 4.3 в) показаны приближенные участки бифуркационной диаграммы так, что на рисунке 4.3 б) показана верхняя половина четырехкусочного хаотического аттрактора, а на рисунке 4.3 в) — верхняя четверть восьмикусочного хаотического аттрактора. Таким образом, в модели (4.1) наблюдается самоподобие.

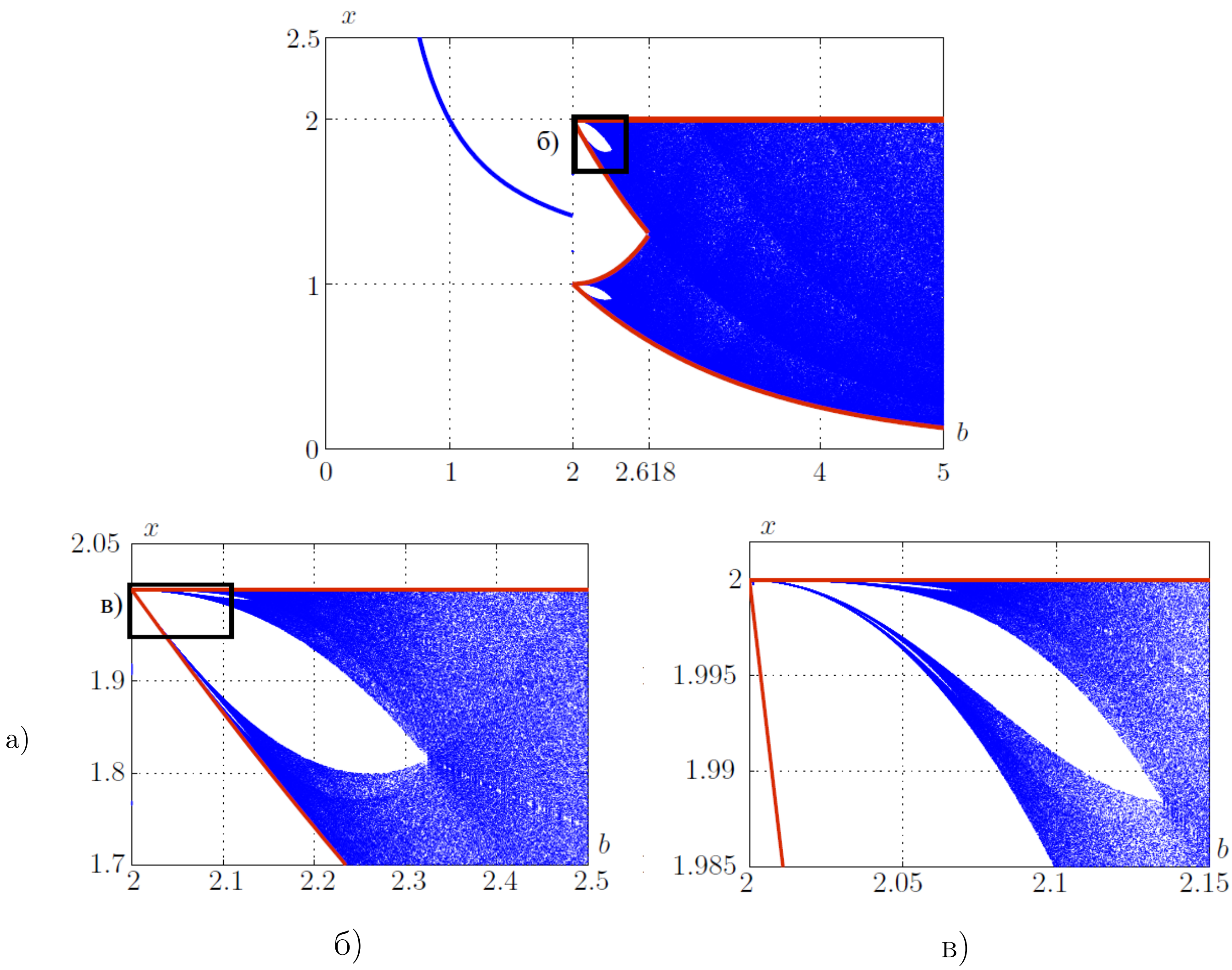


Рисунок 4.3 — Бифуркационная диаграмма модели (4.1) изменения численности популяции x в зависимости от параметра b при $\lambda = 2$

4.2 Сравнительный анализ воздействия аддитивного и параметрического шума на аттракторы системы

Далее рассматривается стохастическая модель, описывающая влияние аддитивного ($\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$) или параметрического ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$) шума:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \lambda x_n + \varepsilon_1\sigma_1\xi_n + \varepsilon_2\sigma_2 x_n\xi_n, & x_n < 1, \\ \lambda x_n^{1-b} + \varepsilon_1\sigma_1\xi_n + \varepsilon_2\sigma_2 x_n^{1-b}\xi_n, & x_n \geqslant 1, \end{cases} \tag{4.2}$$

где ε_1, ε_2 — интенсивность случайного воздействия и ξ_n — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами $(0, 1)$. Далее предполагается, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$.

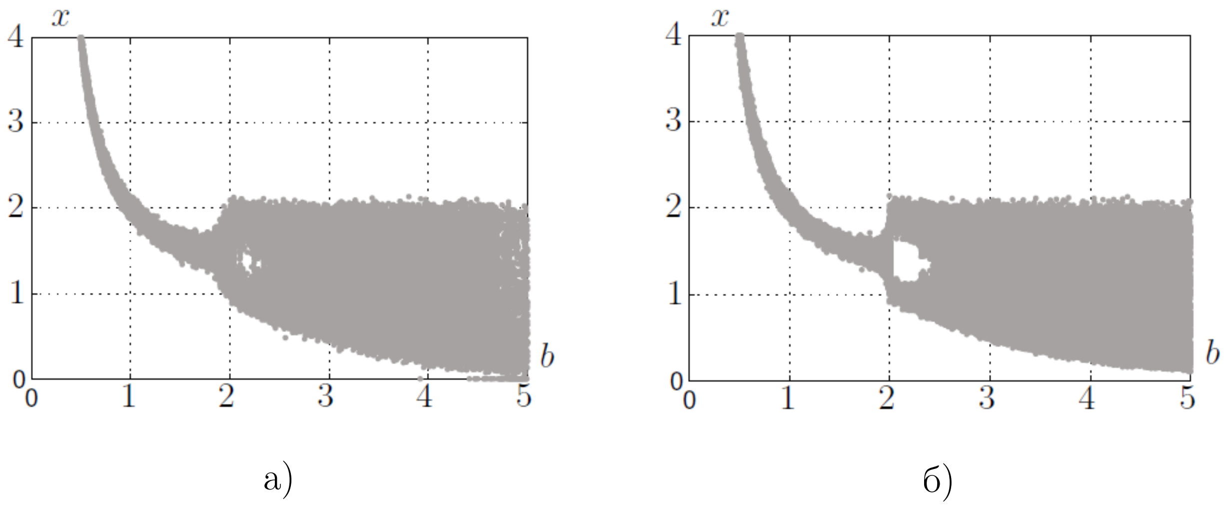


Рисунок 4.4 — Случайные состояния модели (4.2) при $\lambda = 2$ и $\varepsilon = 0.05$: а) для аддитивного шума $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$; б) для параметрического шума $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$

Под влиянием случайного воздействия состояния модели покидают детерминированный аттрактор и образуют вокруг него пучок случайных состояний. На рисунке 4.4 изображены случайные состояния модели (4.2) под действием аддитивного шума (рисунок 4.4 а), то есть $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, и параметрического шума (рисунок 4.4 б), то есть $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$, для одинаковой интенсивности. При увеличении интенсивности шума разброс случайных состояний увеличивается, а также границы между кусочками хаотического аттрактора размываются. Легко заметить, что распределение случайных состояний для аддитивного шума отличается от распределения состояний для параметрического шума при одинаковой интенсивности случайного возмущения.

Так как для равновесия $\overline{x}_2$ модели (4.2) $f'(\overline{x}_2) = 1 - b$, а также $s(\overline{x}_2) = 1$ для аддитивного шума и $s(\overline{x}_2) = \lambda^{\frac{2}{b}-2}$ для параметрического, то функция стохастической чувствительности по формуле (1.7) имеет аналитический вид:

$$w^a = \frac{1}{1-(1-b)^2}, \qquad w^p = \frac{\lambda^{\frac{2}{b}-2}}{1-(1-b)^2}. \tag{4.3}$$

Здесь и далее введены обозначения: w^a — стохастическая чувствительность в случае воздействия аддитивного шума и w^p — в случае параметрического. На рисунке 4.5 а) для $0 < b < 2$ представлены зависимости этих функций: w^a — красной сплошной линией, w^p — синей сплошной линией. Видно, что чувствительность равновесия выше к аддитивному шуму, чем к параметрическому.

Если $A = [c_1, c]$ — однокусочный хаотический аттрактор, и функция $f(x)$ имеет на отрезке $[c_1, c]$ единственный максимум, тогда функции стохастической чувствительности $w(c)$ и $w(c_1)$ для границ этого хаотического аттрактора соответственно могут быть найдены по следующим формулам [177] (см. подраздел 1.1.4 текущей работы):

$$\begin{aligned} w(c_1) &= (f'(f(c_{-1})))^2 s(c_{-1}) + s(f(c_{-1})), \\ w(c) &= s(c_{-1}), \end{aligned} \tag{4.4}$$

где c_{-1} — точка максимума функции $f(x)$, описывающей детерминированную динамику, а $s(x)$ — функция, описывающая вносимое случайное воздействие.

Так как для модели (4.2) выполняются следующие равенства $c_{-1} = 1$, $c = f(c_{-1}) = \lambda$, $c_1 = f(c) = \lambda^{2-b}$ и $f'(c) = 1 - b$, а также $s(x) = 1$ для аддитивного шума, и $s(x) = x^{2-2b}$ для параметрического, то, опираясь на (4.4), стохастическая чувствительность границ хаотического аттрактора может быть описана следующими формулами:

$$\begin{aligned} w^a(c_1) &= (1-b)^2 \lambda^{2-2b} + 1, \\ w^p(c_1) &= (1-b)^2 \lambda^{2-2b} + \lambda^{2-2b}, \\ w^a(c) &= w^p(c) = 1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

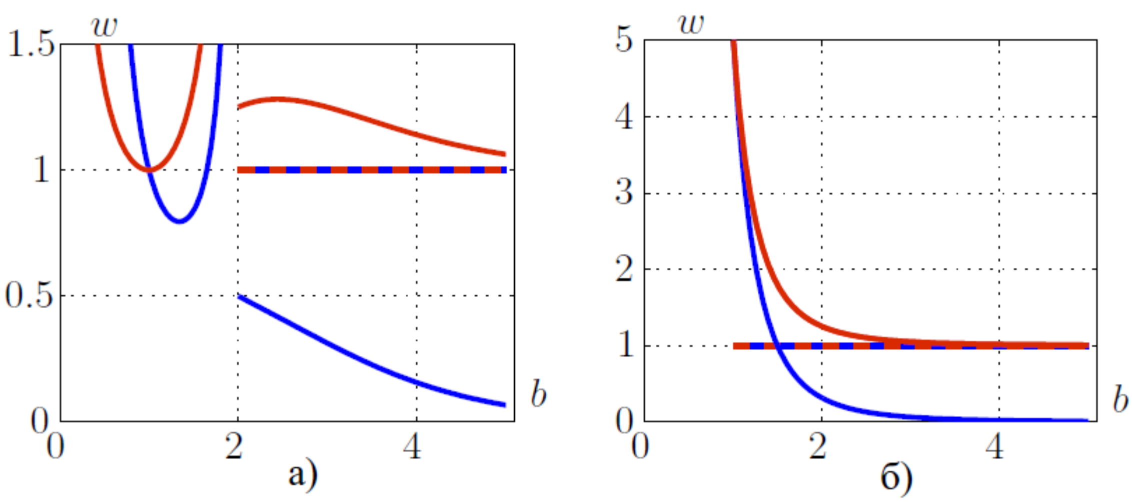
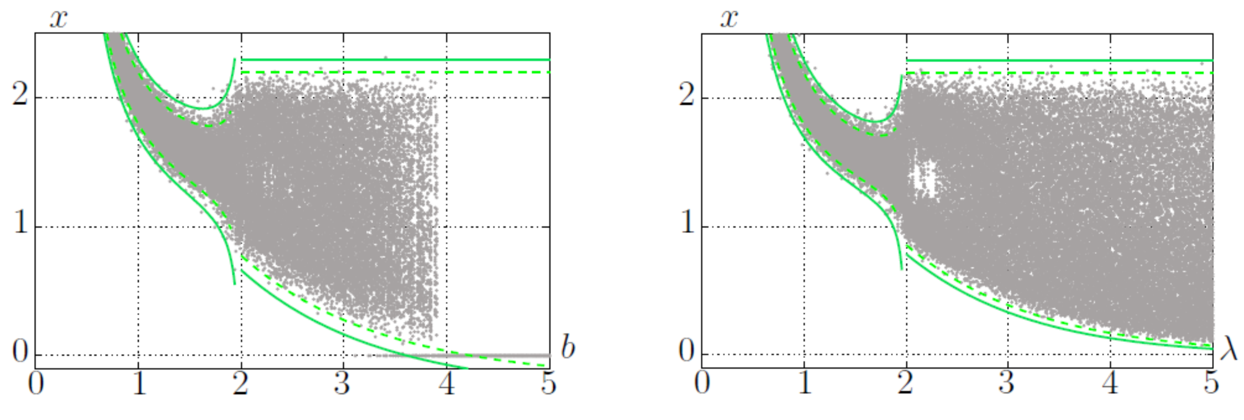


Рисунок 4.5 — Функция стохастической чувствительности для равновесия и границ хаотического аттрактора модели (4.2) при: а) $\lambda = 2$; б) $b = 3$. Здесь красные линии соответствуют аддитивному шуму, синие — параметрическому

На рисунке 4.5 а) для $b > 2$ и на рисунке 4.5 б) представлены зависимости ФСЧ для границ хаотического аттрактора: w^a — красной сплошной линией, w^p — синей сплошной линией. Аналогично случаю равновесия, чувствительность нижней границы хаотического аттрактора $c_1 = \lambda^{2-b}$ выше к аддитивному шуму, чем к параметрическому.

Используя функцию стохастической чувствительности, удобно описывать разброс случайных состояний вокруг детерминированного аттрактора. Для случайных состояний модели (4.2) можно построить интервалы рассеивания $(\overline{x}-r, \overline{x}+r)$ вокруг детерминированного равновесия или границы хаотического аттрактора, где $r = \varepsilon\sqrt{2w^\bullet}\,\mathrm{erf}^{-1}(P)$, и $\overline{x}$ — равновесие или граница хаотического аттрактора, $w^\bullet$ — стохастическая чувствительность равновесия или границы хаотического аттрактора, найденные по формулам (4.3), (4.5), P — доверительная вероятность, $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$.

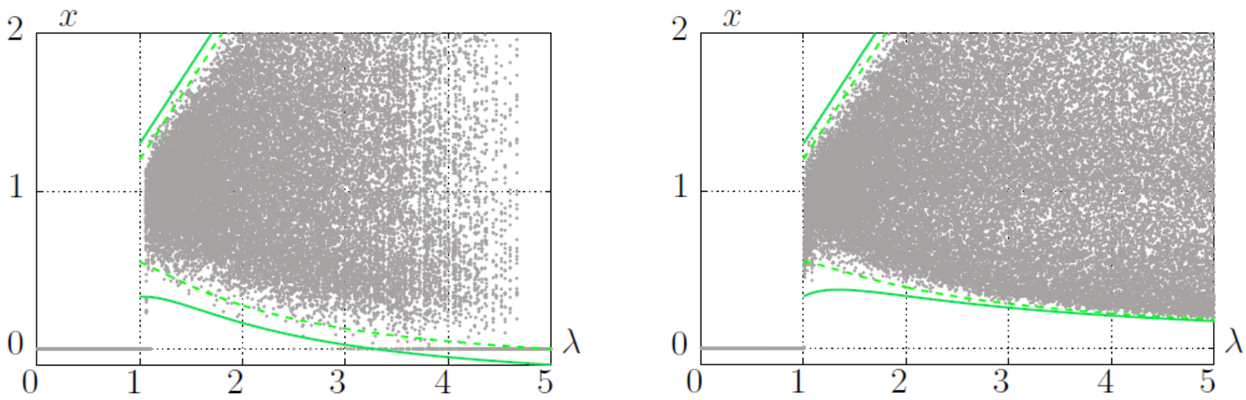
На рисунке 4.6 для двух значений доверительной вероятности $P = 0.9973$ (зелёная сплошная линия) и $P = 0.9545$ (зелёная пунктирная линия), отвечающих стандартным правилам двух и трех сигм, представлены полосы рассеивания для равновесия и границ хаотического аттрактора при $\lambda = 2$: случай 4.6 а) для аддитивного шума $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, и случай 4.6 б) для параметрического шума $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$. Серым цветом изображены случайные состояния модели для интенсивности $\varepsilon = 0.1$ соответствующего шума. Как можно заметить, полосы рассеивания хорошо описывают распределение случайных состояний стохастической модели.



а) б)

Рисунок 4.6 — Доверительные полосы (зеленый) и случайные состояния (серый) модели (4.2) при $\lambda = 2$ и $\varepsilon = 0.1$ для: а) аддитивного шума $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$; б) параметрического шума $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$. Здесь $P = 0.9973$ (зелёная сплошная линия) и $P = 0.9545$ (зелёная пунктирная линия)

На рисунке 4.7 для двух значений доверительной вероятности $P = 0.9973$ (зелёная сплошная линия) и $P = 0.9545$ (зелёная пунктирная линия) представлены полосы рассеивания для границ хаотического аттрактора при $b = 3$:



а) б)

Рисунок 4.7 — Доверительные полосы (зеленый) и случайные состояния (серый) модели (4.2) при $b = 3$ и $\varepsilon = 0.1$ для: а) аддитивного шума $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$; б) параметрического шума $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$. Здесь $P = 0.9973$ (зелёная сплошная линия) и $P = 0.9545$ (зелёная пунктирная линия)

случай 4.7 а) для аддитивного шума $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$, и случай 4.7 б) для параметрического шума $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$. Серым цветом изображены случайные состояния модели для интенсивности $\varepsilon = 0.1$ соответствующего шума. В обоих представленных примерах (рисунки 4.6, 4.7) наблюдается феномен вымирания популяции, когда значение ее численности в некоторый момент времени обращается в ноль. Пересечение доверительной полосы с «опасной» границей $x = 0$ для фиксированного значения интенсивности шума предсказывает вымирание популяции в этих условиях. На рисунках 4.6 а) и 4.7 а) обнаруживаются три зоны с различной динамикой, реализуемой за рассматриваемое время:

– *первая зона* — популяция не вымирает (примерные интервалы: $b < 3$ или $\lambda < 3$),
– *вторая зона* — популяция сначала существует, а затем вымирает (примерные интервалы: $3 < b < 4$ или $3 < \lambda < 4.7$),
– *третья зона* — ни одного представителя популяции не существует (примерные интервалы: $b > 4$ или $\lambda > 4.7$).

На рисунке 4.8 этот феномен показан на временных рядах для $\lambda = 4$, $b = 3$ и $\varepsilon = 0.1$. Хорошо видно, что под действием аддитивного шума случайная траектория в некий момент времени достигает «опасного» значения $x = 0$, и далее численность популяции равняется нулю (*вторая зона*). Для параметрического шума при том же значении интенсивности данный феномен не наблюдается. Сколько бы близко значение популяции не приближалось к «опасной» границе, вымирание не происходит. Данное поведение хорошо видно на рисунках 4.6 и 4.7. Доверительная полоса для случая параметрического шума для заданной интенсивности не пересекает «опасную» границу $x = 0$. Стоит отметить, что данное сравнение производится в условии фиксированного и одинакового значения интенсивности шума, вне зависимости от его вида. Другая ситуация наблюдается при изменении интенсивности случайного воздействия.

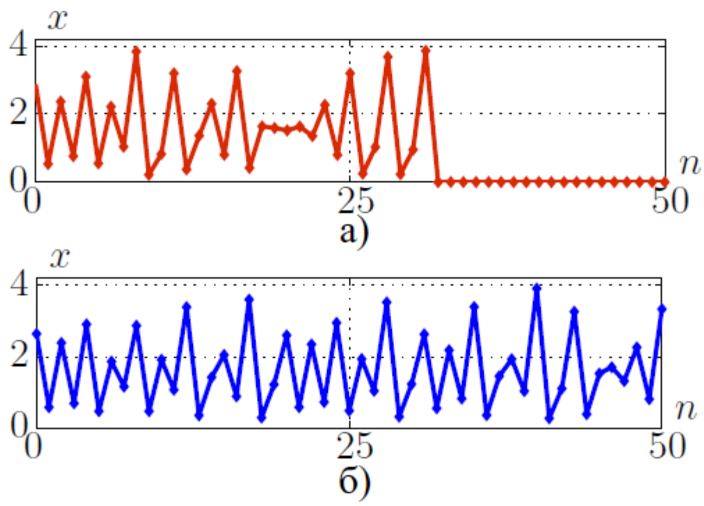


Рисунок 4.8 — Вымирание популяции в модели (4.2): временные ряды при $\lambda = 4$, $b = 3$ и $\varepsilon = 0.1$ для: а) аддитивного шума $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$; б) параметрического шума $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$

Выше было показано, что индуцированное шумом вымирание зависит от двух основных внутренних факторов: во-первых, от чувствительности аттрактора модели к вносимому возмущению, и во-вторых, от удаленности этого аттрактора от «опасной» границы. Таким образом, имея аналитические представления равновесия $\overline{x}_2 = \lambda^{\frac{1}{b}}$ или нижней границы хаотического аттрактора $\overline{x} = \lambda^{2-b}$, соответствующие им значения чувствительности $w^\bullet = w$ и $w^\bullet = w(c_1)$, а также воспользовавшись для удобства вычислений правилом трех сигма, можно записать условие пересечения нижней границы полосы рассеивания с опасной границей $x = 0$ в виде $\overline{x} - 3\varepsilon\sqrt{w^\bullet} = 0$. Отсюда легко выразить значение интенсивности шума ε такое, что при интенсивности шума выше, чем найденное, в системе с доверительной вероятностью $P = 0.9973$ будет наблюдаться феномен вымирания. Данное значение интенсивности шума будем называть критической интенсивностью, и формулы для ее вычисления следующие:

1. $\varepsilon^* = \dfrac{\lambda^{\frac{1}{b}}}{3\sqrt{w}}$ для равновесия;

2. $\varepsilon^* = \dfrac{\lambda^{2-b}}{3\sqrt{w(c_1)}}$ для нижней границы хаотического аттрактора.

На рисунке 4.9 изображена критическая интенсивность ε^* случайного воздействия, больше которой для заданных значений параметров λ и b в системе будет наблюдаться вымирание популяции. Красным цветом представлен случай аддитивного шума, а синим — параметрического. Как легко заметить, для возникновения вымирания популяции под действием параметрического шума требуется интенсивность выше, чем для случая аддитивного шума.

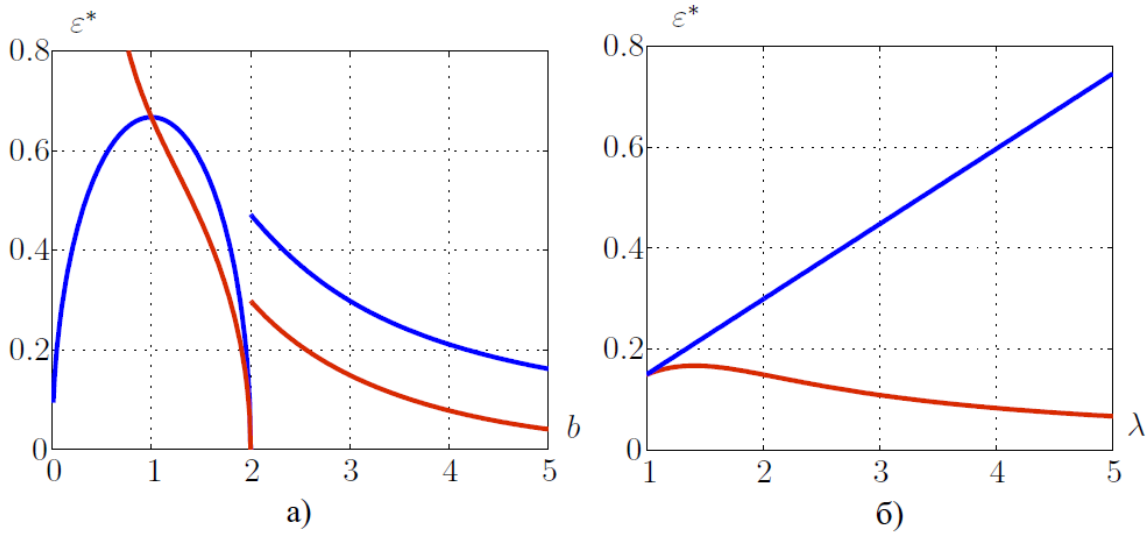


Рисунок 4.9 — Критическая интенсивность шума для модели (4.2) при: а) $\lambda = 2$; б) $b = 3$. Здесь красные линии соответствуют аддитивному шуму, синие — параметрическому

На рисунке 4.10 феномен вымирания популяции под действием параметрического шума показан на временных рядах для $\lambda = 2$, $b = 3$ при $\varepsilon = 0.5$ и для $\lambda = 2$, $b = 1$ при $\varepsilon = 0.8$. Как и предсказывалось выше, при достаточно большой интенсивности шума вымирание наблюдается и в случае воздействия на систему параметрического шума.

4.3 Основные результаты главы

В данной главе рассмотрена одномерная кусочно-гладкая популяционная модель с дискретным временем. В разделе 4.1 построена карта динамических

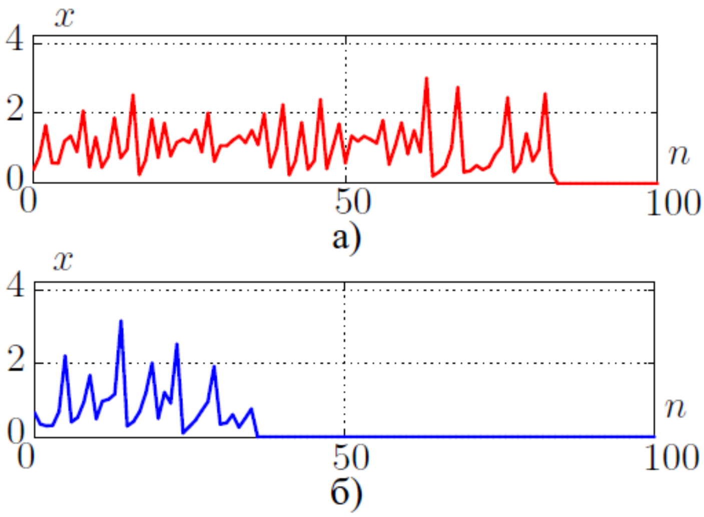


Рисунок 4.10 — Вымирание популяции в модели (4.2): временные ряды для параметрического шума $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ при: а) $\lambda = 2$, $b = 3$ и $\varepsilon = 0.5$; б) $\lambda = 2$, $b = 1$ и $\varepsilon = 0.8$

режимов данной модели: определены зоны существования устойчивых равновесий и хаотических аттракторов. Также изучены бифуркационные диаграммы, показано самоподобие. С помощью теории критических линий найдены параметрические границы хаотического аттрактора.

В разделе 4.2 изучено влияние случайного возмущения двух типов (аддитивный и параметрический шум) на одномерную кусочно-гладкую модель, описывающую динамику численности одной популяции. Проведен сравнительный анализ влияния параметрического и аддитивного шума на аттракторы системы. Впервые метод функции стохастической чувствительности и техника доверительных областей были использованы для описания хаотического аттрактора стохастической модели популяционной динамики, описываемой кусочно-гладким отображением, при случайном воздействии как аддитивного, так и параметрического вида. Найдены критерии вымирания популяции. Основные результаты исследований, представленные в этой главе, были опубликованы в работе [211].

Глава 5. Разработанные программные комплексы

Данная глава посвящена описанию разработанных программных комплексов, позволяющих проводить компьютерное моделирование стохастической динамики дискретных популяций и наглядную визуализацию результатов проводимых расчетов, а также реализующих алгоритмы анализа стохастических явлений.

5.1 Описание программных комплексов

Для проведения моделирования и анализа стохастической динамики дискретных популяционных систем было разработано пять программных комплексов. Эти комплексы предназначены для вычисления стохастической чувствительности и нахождения доверительных областей, для двумерной модели хищник-жертва, модели двух связанных популяций с миграцией и для одномерной кусочно-гладкой модели.

Комплекс программ по вычислению стохастической чувствительности и построения доверительных областей (глава 1 диссертации) решает следующие задачи:

- Реализация итерационного метода для вычисления матрицы стохастической чувствительности равновесия;
- Построение алгоритма поиска k-периодического решения матричного уравнения для анализа стохастической чувствительности дискретных циклов;
- Разработка метода отыскания функции стохастической чувствительности для замкнутой инвариантной кривой;
- Составление алгоритмов для анализа стохастической чувствительности хаотических аттракторов;
- Реализация алгоритма построения доверительных эллипсов для описания разброса случайных состояний решений для равновесия и k-циклов;
- Реализация алгоритма формирования доверительных полос вокруг замкнутой инвариантной кривой;

– Разработка процедуры для отыскания границ доверительных областей вокруг хаотического аттрактора с помощью критических линий.

Комплекс программ по стохастическим эффектам в модели хищник-жертва (глава 2 диссертации) решает следующие задачи:

– Параметрический анализ устойчивости равновесий и построение карты режимов;
– Бифуркационный анализ, построение показателей Ляпунова и аттракторов детерминированной модели (2.1);
– Построение бассейнов притяжения аттракторов детерминированной модели (2.1);
– Параметрический анализ стохастической чувствительности аттракторов, построение доверительных областей;
– Вычисление границ хаотического аттрактора с помощью теории критических линий;
– Анализ механизмов феномена индуцированного шумом вымирания с помощью метода доверительных областей.

Комплекс программ по стохастическим эффектам в модели двух связанных популяций с миграцией (глава 3 диссертации) решает следующие задачи:

– Параметрический анализ равновесий модели (3.1);
– Параметрический анализ бифуркаций, показателей Ляпунова, построение аттракторов детерминированной модели;
– Выявление зон моно-,би- и тристабильности модели;
– Анализ осциляционных режимов модели;
– Построение бассейнов притяжения, а также — бассейнов коротких и долгих переходных процессов;
– Параметрический анализ стохастической чувствительности регулярных и хаотических аттракторов, исследование переходов между ними с использованием метода доверительных областей;
– Параметрический и статистический анализ индуцированных шумом следующих феноменов: временная стабилизация неустойчивого равновесия, разрушение противофазной и синфазной синхронизаций, переключения между режимами синфазной и противофазной синхронизации, переходы от порядка к хаосу и наоборот;
– Вычисление вероятности разрушения противофазной синхронизации.

Комплекс программ по стохастическим эффектам в одномерной кусочно-гладкой модели популяционной динамики (глава 4 диссертации) решает следующие задачи:

– Построение карты динамических режимов модели (4.1);
– Определение зон существования устойчивых равновесий и хаотических аттракторов, бифуркационный анализ;
– Параметрический анализ границ хаотического аттрактора;
– Параметрический анализ стохастической чувствительности равновесий и хаотического аттрактора при воздействии аддитивного и параметрического шумов, построение доверительных областей;
– Анализ механизмов феномена индуцированного шумом вымирания с помощью метода доверительных областей, вычисление критической интенсивности шума.

5.2 Основные результаты главы

В данной главе описана функциональность пяти комплексов программ, позволяющих проводить исследование в области математического моделирования и анализа стохастической динамики дискретных популяционных моделей. Результаты математического моделирования, представленные в текущей работе, получены с помощью описанных в данной главе комплексов программ. Программные комплексы написаны на языке программирования Python (версия 3.4.2), некоторые вспомогательные вычисления проводились в Wolfram Mathematica. Работоспособность программных комплексов проверена на операционной системе Windows 10. Для визуализации результатов расчетов использовались средства Matlab.

Представленные в этой главе комплексы программ зарегистрированы в Федеральной службе по интеллектуальной собственности. Получено четыре свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [212—215].

Заключение

В диссертации были исследованы стохастические феномены в дискретных моделях популяционной динамики. Детальное изучение этих явлений проводилось на примере концептуальных моделей с разным внутренним устройством. Была рассмотрена двумерная модель хищник-жертва, модель двух связанных популяций с миграцией и одномерная популяционная модель, задаваемая кусочно-гладким отображением. Новизна работы заключается в применении метода функции стохастической чувствительности и доверительных областей для выявления индуцированных шумом переходов в моделях связанных популяций с миграцией, а также в моделях хищник-жертва и одномерной кусочно-гладкой для описания хаотического аттрактора в стохастическом случае. Полученные аналитические аппроксимации и разработанные численные методы, реализованные в комплексах программ, позволили изучить механизмы поведения исследуемых систем.

Основные результаты диссертации могут быть сформулированы следующим образом:

1. Разработаны новые методы математического моделирования и анализа механизмов стохастических феноменов в моделях популяционной динамики с дискретным временем, основанные на технике функции стохастической чувствительности и методе доверительных областей.
2. Проведено комплексное исследование детерминированной динамики и индуцированных шумом явлений в нескольких популяционных моделях (двумерная модель хищник-жертва, модель двух связанных популяций с миграцией и одномерная модель, задаваемая кусочно-гладким отображением).
3. Выявлены основные типы стохастических феноменов в модели метапопуляции, состоящей из двух связанных подсистем с локальной динамикой, которая моделируется дискретным отображением Рикера, для четырех различных случаев внутренних параметров системы:
    a) $\mu_1 = \mu_2 = 1.8$ — популяции в равновесном режиме
        1) временное разрушение противофазной синхронизации;
        2) временная стабилизация неустойчивого равновесия;

3) переход «порядок» $\to$ «хаос».

б) $\mu_1 = 2.2$, $\mu_2 = 2.4$ — популяции в периодическом режиме

1) разрушение противофазной синхронизации — переход с противофазного 2-цикла на синфазный 2-цикл;
2) переход «порядок» (6-цикл) $\to$ «хаос» $\to$ «порядок» (2-цикл);
3) разрушение синфазной синхронизации — переход с синфазного 2-цикла на хаос.

в) $\mu_1 = 1.8$, $\mu_2 = 3$ и $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2.8$ — популяция x в равновесном режиме, а популяция y — в хаотическом

1) переход «порядок» (3-цикл и 5-цикл) $\to$ «хаос»;
2) переход 6-цикл $\to$ 3-цикл $\to$ «хаос»;
3) переход «хаос» $\to$ 3-цикл $\to$ «хаос»;
4) генерация случайного распределения, подобному хаотическому.

4. Для аппроксимации разброса случайных состояний вокруг хаотических аттракторов в двух стохастических дискретных моделях популяционной динамики: двумерной модели хищник-жертва и одномерной модели, описываемой кусочно-гладким отображением, разработаны численные методы, использующие технику функций стохастической чувствительности и аппарат доверительных областей. Для этих моделей исследован феномен индуцированного шумом вымирания популяций.
5. Проведен сравнительный анализ влияния параметрического и аддитивного шума на аттракторы системы одномерной популяционной модели, задаваемой кусочно-гладким отображением.
6. Разработанные численные методы и алгоритмы реализованы в новых программных комплексах, позволяющих проводить компьютерные эксперименты для изучения стохастических моделей популяционной динамики с дискретным временем (двумерная модель хищник-жертва, модель двух связанных популяций с миграцией и одномерная модель, задаваемая кусочно-гладким отображением). Корректность и эффективность разработанных методов и программных комплексов были протестированы на модельных примерах и подтверждены результатами численных экспериментов.

Рекомендации и дальнейшие перспективы разработки темы. Возможными направлениями для продолжения исследований по тематике данной диссертации могут быть: 1) изучение стохастических феноменов в моделях со сложной геометрией нелинейных связей между популяциями; 2) исследование стохастических моделей с цветными шумами и шумами Леви; 3) изучение моделей метапопуляций, учитывающих структурирование по возрасту и распространение инфекций; 4) развитие и улучшение разработанных численных методов и алгоритмов; 5) расширение созданных программных комплексов на новые задачи с использованием машинного обучения.

Благодарности. Автор благодарит научного руководителя, профессора кафедры теоретической и математической физики УрФУ, д.ф.-м.н. Ряшко Л. Б., и профессора кафедры теоретической и математической физики, д.ф.-м.н. Башкирцеву И. А. за неоценимую помощь в постановке задач и разработке методологии математических исследований. Также автор выражает благодарность к.ф.-м.н. Переваловой Т. В. за полезные обсуждения и поддержку в проведении исследований. Диссертационные исследования проведены при поддержке грантов Российского научного фонда: «Математическое моделирование и анализ индуцированных шумом явлений в биологических системах» (проект №16-11-10098), «Стохастическая нелинейная динамика живых систем: модели, явления и методы анализа» (проект №21-11-00062), «Математическое моделирование и стохастический анализ регулярной и хаотической динамики живых систем» (проект №24-11-00097), а также при поддержке Уральского математического центра УрФУ (соглашение №075-02-2024-1428).

Список литературы

1. Chesson, P. Stochastic population models / P. Chesson // Ecological Heterogeneity. Ecological Studies (Analysis and Synthesis). New York: Springer. — 1991. — Vol. 86. — P. 123—143.
2. Lande, R. Stochastic population dynamics in ecology and conservation / R. Lande, S. Engen, B.-E. Saether. — Oxford University Press, 2003.
3. Turchin, P. Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis / P. Turchin. — Princeton University Press, 2003.
4. Murray, J. D. Discrete population models for a single species / J. D. Murray // Interdisciplinary Applied Mathematics. New York: Springer. — 1993. — P. 44—78.
5. Uyenoyama, M. The Evolution of Population Biology / M. Uyenoyama. — Cambridge University Press, 2004.
6. Мальтус, Т. Опыт о законе народонаселения / Т. Мальтус. – Москва: Директмедиа Паблишинг, 2008.
7. Pearl, R. On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation / R. Pearl, L. J. Reed // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. — 1920. — Vol. 6, no. 6. — P. 275—288.
8. Kingsland, S. The Refractory Model: The Logistic Curve and the History of Population Ecology / S. Kingsland // The Quarterly Review of Biology. — 1982. — Vol. 57, no. 1. — P. 29—59.
9. Lloyd, P. J. American, German and British Antecedents to Pearl and Reed's Logistic Curve / P. J. Lloyd // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. — 1967. — Vol. 21, no. 2. — P. 99—108.
10. Ricker, W. E. Stock and Recruitment / W. E. Ricker // Journal of the Fisheries Board of Canada. — 1954. — Vol. 11, no. 5. — P. 559—623.
11. Pisarchik, A. N. Control of multistability / A. N. Pisarchik, U. Feudel // Physics Reports. — 2014. — Vol. 540. — P. 167—218.

12. Базыкин, А. Д. О диссипативных структурах в экологических системах / А. Д. Базыкин, Г. С. Маркман // Факторы разнообразия в математической экологии и популяционной генетике. Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР. — 1980. — С. 135—148.
13. Базыкин, А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А. Д. Базыкин. — Москва : Наука, 1985.
14. Vandermeer, J. H. Population Ecology: First Principles / J. H. Vandermeer, D. E. Goldberg. — Princeton University Press, 2003.
15. Безручко, Б. П. Математическое моделирование и хаотические временные ряды / Б. П. Безручко, Д. А. Смирнов. — Саратов : ГосУНЦ «Колледж», 2005.
16. Beverton, R. J. H. On the Dynamics of Exploited Fish Populations / R. J. H. Beverton, S. J. Holt. — Caldwell (NJ) : Blackburn Press, 2004.
17. Капица, С. П. Общая теория роста человечества: сколько людей жило, живет и будет жить на Земле / С. П. Капица. — Москва : Наука, 1999.
18. Ласт, Е. В. Динамическая неустойчивость в математической модели динамики численности популяций лососевых видов рыб / Е. В. Ласт, С. П. Луппов, Е. Я. Фрисман // Дальневосточный математический журнал. — 2001. — Т. 2, № 1. — С. 114—125.
19. Логофет, Д. О. Математика модели Лефковича: репродуктивный потенциал и асимптотические циклы / Д. О. Логофет, И. Н. Клочкова // Математическое моделирование. — 2002. — Т. 14, № 10. — С. 116—126.
20. Фрисман, Е. Я. Нелинейные связи в популяционной динамике, связанные с возрастной структурой и влиянием промысла / Е. Я. Фрисман, Е. В. Ласт // Известия РАН. Серия биологическая. — 2005. — Т. 32, № 5. — С. 517—530.
21. Logofet, D. O. Convexity in projection matrices: projection to a calibration problem / D. O. Logofet // Ecological Modelling. — 2008. — Vol. 216, no. 2. — P. 217—228.
22. Жданова, О. Л. Нелинейная динамика численности популяции: влияние усложнения возрастной структуры на сценарии перехода к хаосу / О. Л. Жданова, Е. Я. Фрисман // Журнал общей биологии. — 2011. — Т. 72, № 3. — С. 214—229.

23. Фрисман, Е. Я. Классификация динамических математических моделей и наблюдаемых в них нелинейных эффектов / Е. Я. Фрисман, М. П. Кулаков, О. Л. Ревуцкая // Региональные проблемы. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 17—29.

24. Allen, J. P. Mathematical models of species interactions in time and space / J. P. Allen // The American Naturalist. — 1975. — Vol. 109, no. 967. — P. 319—342.

25. Рикер, У. Е. Методы оценки и интерпретации биологических показателей популяций рыб / У. Е. Рикер. — Москва : Пищевая промышленность, 1979.

26. Розенберг, Г. С. Модели в фитоценологии / Г. С. Розенберг. — Москва : Наука, 1984.

27. Krebs, P. J. Population Fluctuations in Rodents / P. J. Krebs. — Chicago : The University of Chicago Press, 2013.

28. Логофет, Д. О. Поливариантный онтогенез у вейников: новые модели и новые открытия / Д. О. Логофет, Н. Г. Уланова, И. Н. Белова // Журнал общей биологии. — 2015. — Т. 76, № 6. — С. 438—460.

29. Harvesting wildlife affected by climate change: a modelling and management approach for polar bears / E. V. Regehr [et al.] // Journal of Applied Ecology. — 2017. — Vol. 54, no. 5. — P. 1534—1543.

30. Nicholson, A. J. Supplement: the Balance of Animal Populations / A. J. Nicholson // Journal of Animal Ecology. — 1933. — Vol. 2, no. 1. — P. 131—178.

31. Nicholson, A. J. The Balance of Animal Populations / A. J. Nicholson, V. A. Bailey // Proceedings of the Zoological Society of London. — 1935. — Vol. 105, no. 3. — P. 551—598.

32. Nicholson, A. J. An outline of the dynamics of animal populations / A. J. Nicholson // Australian Journal of Zoology. — 1954. — Vol. 2, no. 1. — P. 9—65.

33. Колмогоров, А. Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества, и его применение к одной биологической

проблеме / А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов // Бюллетень МГУ, серия «Математика и механика». — 1937. — Т. 6, № 1. — С. 1—26.

34. Колмогоров, А. Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций / А. Н. Колмогоров // Проблемы кибернетики. — 1972. — № 5. — С. 100—106.

35. Rosenzweig, A. Graphical representation and stability conditions of predator-prey interaction / A. Rosenzweig, R. H. MacArthur // The American Naturalist. — 1963. — Vol. 97, no. 895. — P. 209—223.

36. Шапиро, А. П. К вопросу о циклах в возвратных последовательностях / А. П. Шапиро // Управление и информация, Владивосток: ДВО АН СССР. — 1972. — Т. 3. — С. 96—118.

37. May, R. M. Stability and Complexity in Model Ecosystems / R. M. May. — Princeton : Princeton University Press, 1973.

38. May, R. M. Biological populations with non-overlapping generations: stable points, stable cycles and chaos / R. M. May // Science. — 1975. — Vol. 186, no. 4164. — P. 645—647.

39. May, R. M. Biological population obeying difference equations: stable points, stable cycles and chaos / R. M. May // Journal of Theoretical Biology. — 1975. — Vol. 51, no. 2. — P. 511—524.

40. May, R. M. Simple mathematical models with very complicated dynamics / R. M. May // Nature. — 1976. — Vol. 261. — P. 459—467.

41. May, R. M. Synchronicity, chaos and population cycles: spatial coherence in an uncertain world / R. M. May, A. L. Lloyd // Trends in ecology & evolution. — 1999. — Vol. 14, no. 11. — P. 417—647.

42. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. — Москва : Наука, 1976.

43. Тузинкевич, А. В. Интегральные модели пространственно-временной динамики экосистем / А. В. Тузинкевич. — Владивосток : ИАПУ ДВО АН СССР, 1989.

44. Tuzinkevich, A. V. Dissipative structures and patchiness in spatial distribution of plants / A. V. Tuzinkevich, Y. Y. Frisman // Ecological Modelling. — 1990. — Vol. 52. — P. 207—223.

45. Топаж, А. Г. Дискретные модели популяционной динамики: достоинства, проблемы и обоснование / А. Г. Топаж, А. В. Абрамова, С. Е. Толстопятов // Science. — 2016. — Т. 8, № 2. — С. 267—284.
46. Недорезов, Л. В. Непрерывно-дискретные модели динамики численности двух возрастной популяции / Л. В. Недорезов, В. Л. Неклюдова // Сибирский экологический журнал. — 1999. — Т. 4. — С. 371—375.
47. Недорезов, Л. В. Дискретно-непрерывная модель динамики численности двухполой популяции / Л. В. Недорезов, Ю. В. Утюпин // Сибирский математический журнал. — 1999. — Т. 44, № 3. — С. 650—659.
48. Апонин, Ю. М. Иерархия моделей математической биологии и численно-аналитические методы их исследования / Ю. М. Апонин, Е. А. Апонина // Математическая биология и биоинформатика. — 2007. — Т. 2, № 2. — С. 347—360.
49. Stéphanou, A. Hybrid modelling in biology: a classification review / A. Stéphanou, V. Volpert // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. — 2016. — Vol. 11, no. 1. — P. 37—48.
50. Varley, G. C. The natural control of population balance in the knapweed gall-fly (Urophora jaceana) / G. C. Varley // Journal of Animal Ecology. — 1947. — Vol. 16. — P. 139—187.
51. Hassell, M. P. Host-parasitoid population dynamics / M. P. Hassell // Journal of Animal Ecology. — 2000. — Vol. 69, no. 4. — P. 543—566.
52. Nedorezov, L. V. Chaos and Order in Population Dynamics: Modeling, Analysis, Forecast / L. V. Nedorezov. — Saarbrucken : LAP Lambert Academic Publishing, 2012.
53. Hassell, M. P. Stability and complexity in model ecosystems / M. P. Hassell, H. N. Comins, R. M. May // Nature. — 1991. — Vol. 353. — P. 255—258.
54. Comins, H. N. The spatial dynamics of host-parasitoid systems / H. N. Comins, M. P. Hassell, R. M. May // Journal of Animal Ecology. — 1992. — Vol. 61, no. 3. — P. 735—748.
55. Chaotic dynamics of a discrete prey-predator model with Holling type II / H. N. Agiza [et al.] // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2009. — Vol. 10, no. 1. — P. 116—129.

56. Hu, Z. Stability and bifurcation analysis of a discrete predator–prey model with nonmonotonic functional response / Z. Hu, Z. Teng, L. Zhang // Nonlinear Analysis: Real World Applications. — 2011. — Vol. 12, no. 4. — P. 2356—2377.

57. Mistro, D. P. Spatiotemporal complexity of biological invasion in a space-and time-discrete predator–prey system with the strong Allee effect / D. P. Mistro, L. A. D. Rodrigues, S. Petrovskii // Ecological Complexity. — 2012. — Vol. 9, no. 4. — P. 16—32.

58. He, Z. Complex dynamic behavior of a discrete-time predator–prey system of Holling-III type / Z. He, B. Li // Advances in Difference Equations. — 2014. — Vol. 180.

59. Анализ индуцированного шумом разрушения режимов сосуществования в популяционной системе «хищник–жертва» / И. А. Башкирцева [и др.] // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 4. — С. 647—660.

60. Khan, A. Q. Neimark-Sacker bifurcation of a two-dimensional discrete-time predator-prey model / A. Q. Khan // SpringerPlus. — 2016. — Vol. 5, no. 126.

61. Huang, T. Bifurcation, chaos and pattern formation in a space-and time-discrete predator–prey system / T. Huang, H. Zhang // Chaos, Solitons & Fractals. — 2016. — Vol. 91. — P. 92—107.

62. Complex patterns in a space-and time-discrete predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response / T. Huang [et al.] // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2017. — Vol. 43. — P. 182—199.

63. Kon, R. Multiple attractors in host-parasitoid interactions: Coexistence and extinction / R. Kon // Mathematical Biosciences. — 2006. — Vol. 201, no. 1/2. — P. 172—183.

64. Kang, Y. Dynamics of a plant-herbivore model / Y. Kang, D. Armbruster, Y. Kuang // Journal of Biological Dynamics. — 2008. — Vol. 2, no. 2. — P. 89—101.

65. Kang, Y. Noise and seasonal effects on the dynamics of plant-herbivore models with monotonic plant growth functions / Y. Kang, D. Armbruster // International Journal of Biomathematics. — 2011. — Vol. 4, no. 3. — P. 255—274.

66. Raj, M. R. Dynamics in a Discrete Prey-Predator System / M. R. Raj, A. G. M. Selvam, M. Meganathan // International Journal of Engineering Research and Development. — 2013. — Vol. 6, no. 5. — P. 01—05.

67. Chaos and bifurcation of a nonlinear discrete prey-predator system / A. A. E. Elsadany [et al.] // Computational Ecology and Software. — 2012. — Vol. 2, no. 3. — P. 169—180.

68. Ren, J. L. Bifurcations and chaos in a discrete predator-prey model with Crowley-Martin functional response / J. L. Ren, L. P. Yu, S. Siegmund // Nonlinear dynamics. — 2017. — Vol. 90, no. 1. — P. 19—41.

69. Dynamics of a discrete-time stage-structured predator-prey system with Holling type II response function / G. P. Neverova [et al.] // Nonlinear dynamics. — 2019. — Vol. 9, no. 1. — P. 427—446.

70. Khan, A. Q. Bifurcations of a two-dimensional discrete-time predator-prey model / A. Q. Khan // Advances in difference equations. — 2019. — Vol. 2019. — P. 56.

71. Pal, S. Hunting Cooperation in a Discrete-Time Predator-Prey System / S. Pal, N. Pal, J. Chattopadhyay // International journal of bifurcation and chaos. — 2018. — Vol. 28, no. 7. — P. 1850083.

72. Zhao, M. Complex dynamic behaviors of a discrete-time predator-prey system / M. Zhao, C. P. Li, J. L. Wang // Journal of applied analysis and computation. — 2017. — Vol. 7, no. 1. — P. 478—500.

73. Saratchandran, P. P. Numerical exploration of the parameter plane in a discrete predator-prey model / P. P. Saratchandran, K. C. Ajithprasad, K. P. Harikrishnan // Ecological complexity. — 2015. — Vol. 21. — P. 112—119.

74. Raj, M. R. Stability in a discrete nonlinear prey-predator model with functional response / M. R. Raj, A. G. M. Selvam, R. Dhineshbabu // International Journal of Emerging Technologies in Computational and Applied Sciences. — 2014. — Vol. 7, no. 2. — P. 190—193.

75. Quinn, T. J. Quantitative Fish Dynamics / T. J. Quinn, R. B. Deriso. — Oxford : Oxford University Press, 1999.

76. Bjorkstedt, E. Ricker model / E. Bjorkstedt // Encyclopedia of Theoretical Ecology / ed. by A. Hastings, L. Gross. — University of California Press, 2012. — P. 632—636.

77. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced extinction in the Ricker model with delay and Allee effect / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Bulletin of Mathematical Biology. — 2018. — Vol. 80, no. 6. — P. 1596—1614.

78. Sakaguchi, H. Bifurcations of the coupled logistic map / H. Sakaguchi, K. Tomita // Progress of Theoretical Physics. — 1987. — Vol. 78, no. 2. — P. 305—315.

79. Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps / Y. L. Maistrenko [et al.] // Physical Review E. — 1998. — Vol. 57, no. 3. — P. 2713—2724.

80. Tanaka, G. Crisis-induced intermittency in two coupled chaotic maps: Towards understanding chaotic itinerancy / G. Tanaka, M. A. F. Sanjuán, K. Aihara // Physical Review E. — 2005. — Vol. 71, no. 1. — P. 016219.

81. Bashkirtseva, I. Chaotic transients, riddled basins, and stochastic transitions in coupled periodic logistic maps / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Chaos. — 2021. — Vol. 31, no. 5. — P. 053101.

82. Жусубалиев, Ж. Т. Бифуркации двумерного тора в кусочно-гладких динамических системах / Ж. Т. Жусубалиев, О. О. Яночкина // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2009. — Т. 17, № 6. — С. 86—98.

83. Теория бифуркаций / В. И. Арнольд [и др.] // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». — 1986. — Т. 5. — С. 5—218.

84. Гукенхеймер, Д. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Д. Гукенхеймер, Ф. Холмс. — М.—Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002.

85. Kuznetsov, Y. A. Elements of Applied Bifurcation Theory / Y. A. Kuznetsov. — Applied Mathematical Sciences, 2004.

86. Levins, R. Some demographic and genetic consequences of environmental heterogeneity for biological control / R. Levins // Bulletin of the Entomological Society of America. — 1969. — Vol. 15, no. 3. — P. 237—240.

87. Примак, Р. Основы сохранения биоразнообразия / Р. Примак. — Москва : Изд-во науч. и учебн.-методич. центра, 2002.

88. Kritzer, J. Marine metapopulations / J. Kritzer, P. Sale. — New York : Academic Press, 2006.

89. Bashkirtseva, I. Stochastic deformations of coupling-induced oscillatory regimes in a system of two logistic maps / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2020. — Vol. 411. — P. 132589.

90. Legendre, P. Spatial pattern and ecological analysis / P. Legendre, M. J. Fortin // Plant Ecology. — 1989. — Vol. 80, no. 2. — P. 107—138.

91. Opdam, P. Metapopulation theory and habitat fragmentation: a review of holarctic breeding bird studies / P. Opdam // Landscape Ecology. — 1991. — Vol. 5, no. 2. — P. 93—106.

92. Gyllenberg, M. Single-species metapopulation dynamics: a structured model / M. Gyllenberg, I. Hanski // Theoretical Population Biology. — 1992. — Vol. 42. — P. 35—61.

93. Gyllenberg, M. Does migration stabilize local population dynamics? Analysis of a discrete matapopulation model / M. Gyllenberg, G. Söderbacka, S. Ericson // Math. Biosciences. — 1993. — Vol. 118. — P. 25—49.

94. Gyllenberg, M. Ecology and evolution of symbiosis in metapopulations / M. Gyllenberg, D. Preoteasa, P. Yan // Journal of Biological Dynamics. — 2009. — Vol. 3, no. 1. — P. 39—57.

95. Hanski, I. Two general metapopulation models and the core-satellite species hypothesis / I. Hanski, M. Gyllenberg // The American Naturalist. — 1993. — Vol. 142, no. 1. — P. 17—41.

96. Udwadia, F. E. Dynamics of Coupled Nonlinear Maps and Its Application to Ecological Modeling / F. E. Udwadia, N. Raju // Applied mathematics and computation. — 1997. — Vol. 82. — P. 137—179.

97. Wysham, D. B. Sudden Shift Ecological Systems: Intermittency and Transients in the Coupled Riker Population Model / D. B. Wysham, A. Hastings // Bulletin of Mathematical Biology. — 2008. — Vol. 70. — P. 1013—1031.

98. Manica, V. Population distribution and synchronized dynamics in a metapopulation model in two geographic scales / V. Manica, J. A. L. Silva // Mathematical Biosciences. — 2014. — Vol. 250. — P. 1—9.

99. Manica, V. The Influence of Temporal Migration in the Synchronization of Populations / V. Manica, J. A. L. Silva // Trends in Applied and Computational Mathematics. — 2015. — Vol. 16, no. 1. — P. 31—40.

100. Логофет, Д. О. Способна ли миграция стабилизировать экосистему? (Математический аспект) / Д. О. Логофет // Журнал общей биологии. — 1978. — Т. 39. — С. 123—129.

101. Frisman, E. Y. Differences in densities of individuals in population with uniform range / E. Y. Frisman // Ecol. Modelling. — 1980. — No. 8. — P. 345—354.

102. Cressman, R. Migration Dynamics for the Ideal Free Distribution / R. Cressman, V. Křivan // The American Naturalist. — 2006. — Vol. 168, no. 3. — P. 384—987.

103. Кулаков, М. П. Об одной модели миграционно связанных популяций с дальнодействующими взаимодействиями / М. П. Кулаков // Региональные проблемы. — 2018. — Т. 21, № 2. — С. 52—60.

104. Кулаков, М. П. Мультистабильность в моделях динамики миграционно-связанных популяций с возрастной структурой / М. П. Кулаков, Г. П. Неверова, Е. Я. Фрисман // Нелинейная динамика. — 2014. — Т. 10, № 4. — С. 407—425.

105. Pikovski, A. Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences / A. Pikovski, M. Rosenblum, J. Kurths. — Cambridge : Cambridge University Press, 2001.

106. Synchronization: From Coupled Systems to Complex Networks / S. Boccaletti [et al.]. — Cambridge : Cambridge University Press, 2018.

107. Nicolis, G. Self-Organization in Nonequilibrium Systems / G. Nicolis, I. Prigogine. — Wiley, New York, 1977.

108. Cross, M. Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems / M. Cross, H. Greenside. — Cambridge : Cambridge University Press, 2009.

109. Kuramoto, Y. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators / Y. Kuramoto, D. Battogtokh // Nonlinear Phenom. Complex Syst. — 2002. — Vol. 5. — P. 380—385.

110. Panaggio, M. J. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators / M. J. Panaggio, D. M. Abrams // Nonlinearity. — 2015. — Vol. 28, no. 3. — R67—R87.

111. Zakharova, A. Chimera patterns in complex networks / A. Zakharova. — Springer, Berlin, 2020.

112. Greenman, J. V. The impact of environmental fluctuations on structured discrete time population models: Resonance, synchrony and threshold behaviour / J. V. Greenman, T. G. Benton // Theoretical Population Biology. — 2005. — Vol. 68, no. 4. — P. 217—235.

113. Horsthemke, W. Noise-Induced Transitions / W. Horsthemke, R. Lefever. — Springer, Berlin, 1984.

114. Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems. Tutorial and Modern Development / V. S. Anishchenko [et al.]. — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.

115. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / В. С. Анищенко [и др.]. — Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

116. Schwartz, I. B. Asymmetric noise-induced large fluctuations in coupled systems / I. B. Schwartz, K. Szwaykowska, T. W. Carr // Phys. Rev. E. — 2017. — Vol. 96. — P. 042151.

117. Forgoston, E. A Primer on Noise-Induced Transitions in Applied Dynamical Systems / E. Forgoston, R. O. Moore // SIAM Rev. — 2017. — Vol. 60, no. 4. — P. 969—1009.

118. Lévy noise induced transitions and enhanced stability in a birhythmic van der Pol system / R. Yamapi [et al.] // Eur. Phys. J. B. — 2019. — Vol. 92. — P. 152.

119. Predicting noise-induced critical transitions in bistable systems / J. Ma [et al.] // Chaos. — 2019. — Vol. 29, no. 8. — P. 081102.

120. Arnold, L. Random Dynamical Systems / L. Arnold. — Berlin : Springer-Verlag, 1998.

121. Analysing dynamical behavior of cellular networks via stochastic bifurcations / A. Zakharova [et al.] // PLoS ONE. — 2011. — Vol. 6, no. 5. — e19696.

122. Stochastic bifurcation for a tumor-immune system with symmetric Lévy noise / Y. Xu [et al.] // Physica A. — 2013. — Vol. 392, no. 20. — P. 4739—4748.

123. Bagnoli, F. Stochastic bifurcations in the nonlinear parallel Ising model / F. Bagnoli, R. Rechtman // Phys. Rev. E. — 2016. — Vol. 94. — P. 052111.

124. Herbert, C. Predictability of escape for a stochastic saddle-node bifurcation: When rare events are typical / C. Herbert, F. Bouchet // Phys. Rev. E. — 2017. — Vol. 96. — P. 030201.

125. Mendler, M. Analysis of stochastic bifurcations with phase portraits / M. Mendler, J. Falk, B. Drossel // PLoS ONE. — 2018. — Vol. 13. — e0196126.

126. Pikovsky, A. S. Coherence resonance in a noise-driven excitable system / A. S. Pikovsky, J. Kurths // Phys. Rev. Lett. — 1997. — Vol. 78, no. 5. — P. 775—778.

127. Lindner, B. Analytical approach to the stochastic FitzHugh–Nagumo system and coherence resonance / B. Lindner, L. Schimansky-Geier // Phys. Rev. E. — 1999. — Vol. 60, no. 6. — P. 7270—7276.

128. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка / В. С. Анищенко [и др.] // Успехи физических наук. — 1999. — Т. 169. — С. 7—38.

129. Stochastic Resonance: From Suprathreshold Stochastic Resonance to Stochastic Signal Quantization / M. D. McDonnell [et al.]. — Cambridge University Press, 2008.

130. Anishchenko, V. S. Diagnostics of stochastic resonance using Poincaré recurrence time distribution / V. S. Anishchenko, Y. I. Boev // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2013. — Vol. 18, no. 4. — P. 953—958.

131. Gammaitoni, L. The long run of the stochastic resonance idea / L. Gammaitoni // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2016. — Vol. 49, no. 45. — P. 451005.

132. Nicolis, C. Stochastic resonance across bifurcation cascades / C. Nicolis, G. Nicolis // Phys. Rev. E. — 2017. — Vol. 95. — P. 032219.

133. Dubkov, A. Influence of harmonic perturbation on speed of billiard particle as combination of deterministic acceleration and white noise / A. Dubkov, A. A. Krasnova, O. Chichigina // Fluctuation and Noise Letters. — 2019. — Vol. 18. — P. 1940012.

134. Ren, R. Noise and periodic signal induced stochastic resonance in a Langevin equation with random mass and frequency / R. Ren, K. Deng // Physica A. — 2019. — Vol. 523. — P. 145—155.

135. Gao, J. B. When can noise induce chaos? / J. B. Gao, S. K. Hwang, J. M. Liu // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 82, no. 6. — P. 1132—1135.

136. Yoshimoto, M. Noise-induced order in the chaos of the Belousov-Zhabotinsky reaction / M. Yoshimoto, H. Shirahama, S. Kurosawa // The Journal of Chemical Physics. — 2008. — Vol. 192, no. 1. — P. 014508.

137. Lai, Y.-C. Transient Chaos. Complex Dynamics on Finite Time Scales / Y.-C. Lai, T. Tel. — New York : Springer-Verlag, 2011.

138. Virte, M. Noise induced stabilization of chaotic free-running laser diode / M. Virte // Chaos. — 2016. — Vol. 26, no. 5. — P. 053108.

139. Faber, J. Noise-induced chaos and signal detection by the nonisochronous Hopf oscillator / J. Faber, D. Bozovic // Chaos. — 2019. — Vol. 29, no. 4. — P. 053108.

140. Effects of noise in excitable systems / B. Lindner [et al.] // Physics Reports. — 2004. — Vol. 392. — P. 321—424.

141. Chen, Z. Non-differentiability of quasi-potential and non-smooth dynamics of optimal paths in the stochastic Morris-Lecar model: Type I and II excitability / Z. Chen, J. Zhu // Nonlinear dynamics. — 2019. — Vol. 96. — P. 2293—2305.

142. Pinto, I. L. D. Oscillations and collective excitability in a model of stochastic neurons under excitatory and inhibitory coupling / I. L. D. Pinto, M. Copelli // Phys. Rev. E. — 2019. — Vol. 100. — P. 062416.

143. Noise induced state transitions, intermittency, and universality in the noisy Kuramoto-Sivashinksy equation / M. Pradas [et al.] // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Vol. 106. — P. 060602.

144. Ruseckas, J. Intermittency in relation with 1/f noise and stochastic differential equations / J. Ruseckas, B. Kaulakys // Chaos. — 2013. — Vol. 23, no. 2. — P. 023102.

145. Apolinário, G. B. Onset of intermittency in stochastic Burgers hydrodynamics / G. B. Apolinário, L. Moriconi, R. M. Pereira // Phys. Rev. E. — 2019. — Vol. 99. — P. 033104.

146. C. B. Muratov, E. V.-E. Noise-induced mixed-mode oscillations in a relaxation oscillator near the onset of a limit cycle / E. V.-E. C. B. Muratov // Chaos. — 2008. — Vol. 18, no. 1. — P. 015111.

147. Plesa, T. Noise-induced mixing and multimodality in reaction networks / T. Plesa, R. Erban, H. Othmer // European Journal of Applied Mathematics. — 2019. — Vol. 30, no. 5. — P. 887—911.

148. Anishchenko, V. S. Effect of noise-induced crisis of attractor on characteristics of Poincaré recurrence / V. S. Anishchenko, M. E. Khairulin // Technical Physics Letters. — 2011. — Vol. 37, no. 6. — P. 561—564.

149. Cisternas, J. Intermittent explosions of dissipative solitons and noise-induced crisis / J. Cisternas, O. Descalzi // Phys. Rev. E. — 2013. — Vol. 88. — P. 022903.

150. Kraut, S. Multistability, noise, and attractor hopping: The crucial role of chaotic saddles / S. Kraut, U. Feudel // Phys. Rev. E. — 2002. — Vol. 66. — P. 015207.

151. Lin, W. Using white noise to enhance synchronization of coupled chaotic systems / W. Lin, G. Chen // Chaos. — 2006. — Vol. 16. — P. 013134.

152. Sun, Y. Effects of noise on the outer synchronization of two unidirectionally coupled complex dynamical networks / Y. Sun, D. Zhao // Chaos. — 2012. — Vol. 22. — P. 023131.

153. Critical switching in globally attractive chimeras / Y. Zhang [et al.] // Phys. Rev. X. — 2012. — Vol. 10. — P. 011044.

154. Bashkirtseva, I. Stochastic transitions between in-phase and anti-phase synchronization in coupled map-based neural oscillators / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, A. N. Pisarchik // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2021. — Vol. 95. — P. 105611.

155. Multiplexing noise induces synchronization in multilayer networks / E. V. Rybalova [et al.] // Chaos, Solitons & Fractals. — 2022. — Vol. 163. — P. 112521.

156. Dubkov, A. A. Lévy flight superdiffusion: an introduction / A. A. Dubkov, B. Spagnolo, V. V. Uchaikin // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2008. — Vol. 18, no. 9. — P. 2649—2672.

157. Lévy flights versus Lévy walks in bounded domains / B. Dybiec [et al.] // Phys. Rev. E. — 2017. — Vol. 95, no. 5. — P. 052102.

158. Statistics of residence time for Lévy flights in unstable parabolic potentials / B. Dybiec [et al.] // Phys. Rev. E. — 2020. — Vol. 102, no. 4. — P. 042142.

159. Dubkov, A. A. Features of barrier crossing event for Lévy flights / A. A. Dubkov, A. A. Kharcheva // EPL (Europhysics Letters). — 2016. — Vol. 113, no. 3. — P. 30009.

160. Hastings, A. Complex interactions between dispersal and dynamics: Lessons from coupled logistic equations / A. Hastings // Ecology. — 1993. — Vol. 74, no. 5. — P. 1362—1372.

161. Aydogmus, O. Phase transitions in a logistic metapopulation model with nonlocal interactions / O. Aydogmus // Bulletin of Mathematical Biology. — 2018. — Vol. 80. — P. 228—253.

162. Metapopulation oscillations from satiation of predators / M. N. Kuperman [et al.] // Physica A: Statistical Mechanics and its Application. — 2019. — Vol. 527. — P. 121288.

163. Lloyd, A. L. The coupled logistic map: a simple model for the effects of spatial heterogeneity on population dynamics / A. L. Lloyd // Journal of Theoretical Biology. — 1995. — Vol. 173, no. 3. — P. 217—230.

164. Kendall, B. E. Spatial structure, environmental heterogeneity, and population dynamics: Analysis of the coupled logistic map / B. E. Kendall, G. A. Fox // Theoretical Population Biology. — 1998. — Vol. 54, no. 1. — P. 11—37.

165. Yakubu, A. A. Asynchronous and synchronous dispersals in spatially discrete population models / A. A. Yakubu // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2008. — Vol. 7, no. 2. — P. 284—310.

166. Ross, J. V. A stochastic metapopulation model accounting for habitat dynamics / J. V. Ross // Journal of Mathematical Biology. — 2006. — Vol. 52, no. 6. — P. 788—806.

167. Bashkirtseva, I. Structural and stochastic transformations in a system of coupled populations / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // The European Physical Journal Special Topics. — 2023. — Vol. 232. — P. 1247—1252.

168. Stochastic epidemic metapopulation models on networks: SIS dynamics and control strategies / A. L. Krause [et al.] // Journal of Theoretical Biology. — 2018. — Vol. 449. — P. 35—52.

169. Predicting extinction risks under climate change: coupling stochastic population models with dynamic bioclimatic habitat models / D. A. Keith [et al.] // Biology letters. — 2008. — Vol. 4, no. 5. — P. 560—563.

170. Constable, G. W. A. Fast-mode elimination in stochastic metapopulation models / G. W. A. Constable, A. J. McKane // Physical Review E. — 2014. — Vol. 89, no. 3. — P. 032141.

171. Lasota, A. Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics / A. Lasota, M. C. Mackey. — Berlin : Springer, 1994.

172. Inoue, J. Numerical analysis of spectra of the Frobenius-Perron operator of a noisy one-dimensional mapping: toward a theory of stochastic bifurcations / J. Inoue, S. Doi, S. Kumagai // Phys. Rev. E. — 2001. — Vol. 64. — P. 056219.

173. Bashkirtseva, I. Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, I. Tsvetkov // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis. — 2010. — Vol. 17, no. 4. — P. 501—515.

174. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced intermittency and transition to chaos in one-dimensional discrete-time systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2013. — Vol. 392, no. 2. — P. 295—306.

175. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of the attractors for the randomly forced Ricker model with delay / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics. — 2014. — Vol. 378, no. 48. — P. 3600—3606.

176. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity of the closed invariant curves for discrete-time systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physica A. — 2014. — Vol. 410. — P. 236—243.

177. Bashkirtseva, I. Approximating chaotic attractors by period-three cycles in discrete stochastic systems / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2015. — Vol. 25, no. 10. — P. 1550138.

178. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity of regular and multi-band chaotic attractors in discrete systems with parametric noise / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics. — 2017. — Vol. 381, no. 37. — P. 3203—3210.

179. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of chaotic attractors in 2D non-invertible maps / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Chaos, Solitons and Fractals. — 2019. — Vol. 126. — P. 78—84.

180. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis and noise-induced chaos in 2D logistic-type model / I. Bashkirtseva, E. Ekaterinchuk, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2016. — Vol. 26, no. 4. — P. 1650053.

181. Bashkirtseva, I. Stochastic sensitivity analysis of noise-induced order-chaos transitions in discrete-time systems with tangent and crisis bifurcations / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. — 2017. — Vol. 467. — P. 573—584.

182. Bashkirtseva, I. Preventing noise-induced extinction in discrete population models / I. Bashkirtseva // Discrete Dynamics in Nature and Society. — 2017. — Vol. 2017. — P. 1—10.

183. Ryashko, L. Sensitivity analysis of the noise-induced oscillatory multistability in Higgins model of glycolysis / L. Ryashko // Chaos. — 2018. — Vol. 28, no. 3. — P. 033602.

184. Nonlinear climate dynamics: From deterministic behaviour to stochastic excitability and chaos / D. V. Alexandrov [et al.] // Physics Reports. — 2021. — Vol. 902, no. 3. — P. 1—60.

185. Bashkirtseva, I. Analysis of noise effects in a map-based neuron model with Canard-type quasiperiodic oscillations / I. Bashkirtseva, V. Nasyrova, L. Ryashko // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2018. — Vol. 63. — P. 261—270.

186. Bashkirtseva, I. Analysis of noise-induced chaos-order transitions in Rulkov model near crisis bifurcations / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2017. — Vol. 27, no. 3. — P. 1730014.

187. Bashkirtseva, I. Noise-induced bursting and chaos in the two-dimensional Rulkov model / I. Bashkirtseva, V. Nasyrova, L. Ryashko // Chaos, Solitons and Fractals. — 2018. — Vol. 110. — P. 76—81.

188. Bashkirtseva, I. Stochastic spiking-bursting excitability and transition to chaos in a discrete-time neuron model / I. Bashkirtseva, V. Nasyrova, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2020. — Vol. 30, no. 10. — P. 2050153.

189. Bashkirtseva, I. Crises, noise, and tipping in the Hassell population model / I. Bashkirtseva // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2018. — Vol. 28, no. 3. — P. 033603.

190. Bashkirtseva, I. How environmental noise can contract and destroy a persistence zone in population models with Allee effect / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Theoretical Population Biology. — 2017. — Vol. 115. — P. 61—68.

191. Bashkirtseva, I. Combined impacts of the Allee effect, delay and stochasticity: Persistence analysis / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, B. Spagnolo // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2020. — Vol. 84. — P. 105148.

192. Bashkirtseva, I. Analysis of stochastic effects in Kaldor-type business cycle discrete model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko, A. Sysolyatina // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2016. — Vol. 36. — P. 446—456.

193. Sensitivity analysis of consumption cycles / J. Jungeilges [et al.] // Chaos. — 2018. — Vol. 28, no. 5. — P. 055905.

194. Dynamics of a minimal consumer network with bi-directional influence / E. Ekaterinchuk [et al.] // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2018. — Vol. 58. — P. 107—118.

195. Piecewise-smooth dynamical systems / M. B. Laurea [et al.]. — London: Springer, 2008.

196. Avrutin, V. A gallery of bifurcation scenarios in piecewise smooth 1d map / V. Avrutin, I. Sushko // Global Analysis of Dynamic Models in Economics and Finance. Berlin-Heidelberg: Springer. — 2012. — P. 369—395.

197. Bifurcations of chaotic attractors in one-dimensional piecewise smooth maps / V. Avrutin [et al.] // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2014. — Vol. 24, no. 8. — P. 1440012.

198. Sushko, I. Nonsmooth one-dimensional maps: some basic concepts and definitions / I. Sushko, L. Gardini, V. Avrutin // Journal of Difference Equations and Applications. — 2016. — Vol. 22, no. 12. — P. 1816—1870.

199. Dynamics of a nonlinear discrete population model with jumps / R. J. Higgins [et al.] // Applicable Analysis and Discrete Mathematics. — 2015. — Vol. 9, no. 2. — P. 245—270.

200. Bischi, G.-I. Synchronization, intermittency and critical curves in a duopoly game / G.-I. Bischi, L. Stefanini, L. Gardini // Mathematics and Computers in Simulation. — 1998. — Vol. 44, no. 6. — P. 559—585.

201. Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps / C. Mira [et al.]. — World Scientific Publishing Company, 1996.

202. Zhao, M. Dynamics of a discrete-time predator-prey system / M. Zhao, Z. Xuan, C. Li // Advances in Difference Equations. — 2016. — Vol. 2016, no. 1.

203. Coherence resonance in stimulated neuronal network / A. V. Andreev [et al.] // Chaos, Solitons & Fractals. — 2018. — Vol. 106. — P. 80—85.

204. Riddled basins / J. C. Alexander [et al.] // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 1992. — Vol. 2, no. 4. — P. 795—813.

Публикации автора по теме диссертации

205. Ryashko, L. Noise-induced switching in dynamics of oscillating populations coupled by migration / L. Ryashko, A. Belyaev, I. Bashkirtseva // Chaos. — 2023. — Vol. 33, no. 6. — P. 063143.
206. Беляев, А. В. Стохастическая чувствительность квазипериодических и хаотических аттракторов дискретной модели Лотки–Вольтерры / А. В. Беляев, Т. В. Перевалова // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2020. — Т. 55. — С. 19—32.
207. Belyaev, A. V. Regular and chaotic regimes in the system of coupled populations / A. V. Belyaev, L. B. Ryashko // AIP Conference Proceedings. — 2020. — Vol. 2313, no. 1. — P. 070023.
208. Belyaev, A. Stochastic variability of regular and chaotic dynamics in 2D metapopulation model / A. Belyaev, I. Bashkirtseva, L. Ryashko // Chaos, Solitons and Fractals. — 2021. — Vol. 151. — P. 111270.
209. Belyaev, A. Noise-induced transformations in a system of two coupled equilibrium and chaotic subpopulations / A. Belyaev, I. Bashkirtseva, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2022. — Vol. 32, no. 14. — P. 2250220.
210. Беляев, А. В. Стохастические переходы от порядка к хаосу в метапопуляционной модели с миграцией / А. В. Беляев // Компьютерные исследования и моделирование. — 2024. — Т. 16, № 4. — С. 959—973.
211. Беляев, А. В. Метод функции стохастической чувствительности в анализе кусочно-гладкой модели популяционной динамики / А. В. Беляев, Т. В. Рязанова // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2019. — Т. 53. — С. 36—47.
212. Беляев А. В. и Перевалова Т. В. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2020615597 «Стохастическая динамика в одномерной дискретной популяционной модели (Stoch_Din_1DPM)». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 26 мая 2020 г.

213. Башкирцева И. А. и Беляев А. В. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2020615597 «Детерминированная динамика модели метапопуляции Рикера». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 14 апреля 2022 г.
214. Башкирцева И. А. и Беляев А. В. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2023660713 «Стохастическая динамика модели метапопуляции Рикера». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 24 мая 2023 г.
215. Башкирцева И. А. и Беляев А. В. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ №2024661470 «Анализ стохастической чувствительности динамических режимов в системах связанных популяций». Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Зарегистрировано 17 мая 2024 г.

Приложение А

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2020615597

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020615597

Стохастическая динамика в одномерной дискретной популяционной модели (Stoch_Din_1DPM)

Правообладатель: *Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина» (RU)*

Авторы: *Беляев Александр Владимирович (RU), Перевалова Татьяна Владимировна (RU)*

Заявка № 2020613979

Дата поступления 03 апреля 2020 г.

Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ *26 мая 2020 г.*

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Приложение Б

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2022616577

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022616577

Детерминированная динамика модели метапопуляции Рикера

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина» (RU)***

Авторы: ***Беляев Александр Владимирович (RU), Башкирцева Ирина Адольфовна (RU)***

Заявка № **2022615441**

Дата поступления **31 марта 2022 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***14 апреля 2022 г.***

Руководитель Федеральной службы

по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат 68b80077e14e40f0a94edbd24145d5c7

Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**

Действителен с 2.03.2022 по 26.05.2023

Ю.С. Зубов

Приложение В

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2023660713

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2023660713

Стохастическая динамика модели метапопуляции Рикера

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина» (RU)***

Авторы: ***Башкирцева Ирина Адольфовна (RU), Беляев Александр Владимирович (RU)***

Заявка № **2023619063**

Дата поступления **11 мая 2023 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***24 мая 2023 г.***

Руководитель Федеральной службы

по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат 68b80077e14e40f0a94edbd24145d5c7

Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**

Действителен с 2.03.2022 по 26.05.2023

Ю.С. Зубов

Приложение Г

Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ №2024661470

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2024661470

Анализ стохастической чувствительности динамических режимов в системах связанных популяций

Правообладатель: ***Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина» (RU)***

Авторы: ***Башкирцева Ирина Адольфовна (RU), Беляев Александр Владимирович (RU)***

Заявка № **2024619411**

Дата поступления **02 мая 2024 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***17 мая 2024 г.***

Руководитель Федеральной службы

по интеллектуальной собственности

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат 429b6a0fe3853164baf96f83b73b4aa7

Владелец **Зубов Юрий Сергеевич**

Действителен с 10.05.2023 по 02.08.2024

Ю.С. Зубов