Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет имени
первого Президента России Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи

Благодатских Александр Иванович

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ КОНФЛИКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГРУПП УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Специальность 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург — 2024

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Удмуртский государственный университет».

Научный консультант: **Петров Николай Никандрович**,
доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты: **Парилина Елена Михайловна**,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», профессор кафедры математической теории игр и статистических решений;

Родина Людмила Ивановна,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых», профессор кафедры функционального анализа и его приложений;

Серков Дмитрий Александрович,
доктор физико-математических наук,
ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (г. Екатеринбург), ведущий научный сотрудник отдела динамических систем.

Защита состоится 18 декабря 2024 г. в 13:00 на заседании диссертационного совета УрФУ 1.2.05.22 по адресу: 620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина, 51, зал диссертационных советов, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», https://dissovet2.urfu.ru/mod/data/view.php?d=12&rid=6370.

Автореферат разослан «___» ___________ 2024 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук Косолобов Дмитрий Александрович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Математические модели задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов, рассматриваемые в рамках теории дифференциальных игр, являются **объектом исследования** диссертационной работы.

Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон, способных воздействовать на процесс с противоположными или несовпадающими целями. Такие динамические процессы, моделируемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют также дифференциальными играми.

Развитие теории дифференциальных игр стимулировалось наличием реальных прикладных задач конфликтного управления механическими системами, в том числе военного применения, экономики, экологии, биологии и некоторых других областей.

В теории дифференциальных игр двух лиц получены глубокие и содержательные результаты, основополагающий вклад в этом направлении внесли фундаментальные работы школ академика Н.Н. Красовского и академика Л.С. Понтрягина.

Естественным обобщением дифференциальных игр двух лиц являются задачи преследования-убегания с участием группы управляемых объектов, хотя бы с одной из противоборствующих сторон. Наибольшую трудность для исследований представляют задачи конфликтного взаимодействия между группами управляемых объектов. Специфика этих задач требует дальнейшего развития методов их исследования.

Аналитические и численные методы исследования математических моделей задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов являются **предметом исследования** настоящей работы.

Степень разработанности темы исследования. В 1925 году опубликована работа Г. Штейнгауза (H. Steinhaus) [A66], являющаяся одной из первых по развитой позднее теории, в ней задача преследования формулируется как дифференциальная игра преследования.

Полномасштабное развитие теории дифференциальных игр началось во второй половине прошлого века и продолжается до сих пор. Признание статуса самостоятельной теории произошло благодаря исследованиям Н.Н. Красовского, Л.С. Понтрягина, Л.А. Петросяна, Б.Н. Пшеничного, Р. Айзекса (R. Isaacs), В.Г. Флеминга (W.H. Fleming), А. Фридмана (A. Friedman). Большой вклад в теорию дифференциальных игр внесли А.А. Азамов, А.Я. Азимов, Э.Г. Альбрехт, М. Барди (M. Bardi), В.Д. Батухтин, Т. Башар (T. Basar), Ю.И. Бердышев, А. Брайсон (A. Bryson), М.С. Габриэлян, Н.Л. Григоренко, Р.В. Гамкрелидзе, П.Б. Гусятников, М.И. Гусев, В.Г. Гусейнов, В. Жимовский (W. Rzymowski), В.И. Жуковский, В.В. Захаров, М.И. Зеликин, Д. Зонневенд, Р.П. Иванов, А.Ф. Клейменов, А.В. Кряжимский, А.Б. Куржанский, А.Н. Красовский, Дж. Лейтман (G. Leitman), В.Н. Лагунов, Ю.С. Ледяев, Н.Ю. Лукоянов, А.А. Меликян, Е.Ф. Мищенко, М.С. Никольский, В.В. Остапенко, Ю.С. Осипов, А.Г. Пашков, В.С. Пацко, Н.Н. Петров, Н.Никандр. Петров, Г.К. Пожарицкий, Е.С. Половинкин, Б.Б. Рихсиев, И.С. Раппопорт, Н.Ю. Сатимов, А.И. Субботин, Н.Н. Субботина, В.Е. Третьяков, В.Н. Ушаков, В.И. Ухоботов, В. Ходун (W. Chodun), А.Г. Ченцов, Ф.Л. Черноусько, А.А. Чикрий, С.В. Чистяков, Р. Эллиот (R. Elliot), Л.П. Югай и многие другие математики.

Н.Н. Красовский и А.И. Субботин в монографии [А15] представили основные положения созданной ими теории позиционных дифференциальных игр двух лиц. Задачи конфликтного управления моделируются системой вида

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \tag{0.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$ — ресурс первого игрока (преследователя), $v \in Q$ — ресурс второго игрока (убегающего), f — непрерывная функция. Игроки используют позиционные управления.

Задача первого игрока — встреча позиции $\{t, x(t)\}$ с заданным множеством M и ее сохранение в заданном множестве N при любом допустимом противодействии второго игрока. Задача второго игрока — уклонение от встречи, указанной выше, при любом допустимом противодействии первого игрока. Совокупность этих задач составляет игру сближения-уклонения.

Решение задачи сближения состоит из построения u-стабильного моста, содержащего начальную позицию системы (0.1), и применения преследователем экстремального управления, сохраняющего позицию системы (0.1) на u-стабильном мосте вплоть до ее встречи с терминальным множеством M.

При решении задачи уклонения следует построить v-стабильный мост, содержащий начальную позицию системы (0.1), а затем убегающему применить экстремальное управление, сохраняющее позицию системы (0.1) на v-стабильном мосте, который не пересекает множество M.

Если всюду выполнено условие седловой точки для маленькой игры, то имеет место теорема об альтернативе, которая утверждает, что из любой начальной позиции системы (0.1) разрешима либо задача сближения, либо задача уклонения.

Теорема об альтернативе является центральным результатом теории позиционных дифференциальных игр, из нее следует, что предложенный позиционный способ управления принципиально неулучшаем.

Отметим, что полное решение игры сближения-уклонения обеспечивают максимальные u- и v-стабильные мосты. Вместе с тем при решении реальных задач бывает достаточно строить u- или v-стабильные мосты, которые не являются максимальными.

В работах научной школы Н.Н. Красовского большое внимание отводится численному исследованию прикладных задач. В качестве примеров можно указать работы В.С. Пацко и В.Л. Туровой [A17], а также В.Н. Ушакова, А.А. Успенского и Т.Б. Токманцева [A51].

А.И. Субботин [A48–A50] совместно с Н.Н. Субботиной [A50] предложили определять свойство стабильности с помощью дифференциальных неравенств, продемонстрирована их связь с обобщенными решениями уравнений Гамильтона-Якоби. Построенный математический аппарат эффективно используется для решения позиционных дифференциальных игр.

Л.С. Понтрягин [A38] при исследовании дифференциальных игр

$$\dot{z} = f(z, u, v) \tag{0.2}$$

предложил рассматривать их с точки зрении одного из двух игроков (либо преследователя, которому доступно управление u; либо убегающего, распоряжающегося управлением v), разрешая строить управление на основе необходимой ему информационной дискриминации противника:

«... мы связываем с дифференциальной игрой две различные задачи... в каждый момент времени t мы выбираем значение $u(t)$ этого управления, используя функции $z(s)$ и $v(s)$ на отрезке $t - \theta \leqslant s \leqslant t$, где θ — подходящим образом выбранное положительное число. Таковы привила игры преследования... в каждый момент времени t мы выбираем значение $v(t)$ этого управления, используя функции $z(s)$ и $u(s)$ на отрезке $t - \theta \leqslant s \leqslant t$. Таковы правила игры убегания...» [A36];

«... При построении управления $u(t_1)$ в момент времени t_1 мы будем использовать значение $z(t_1)$ в тот же момент времени и управление $v(t)$ на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon$, где ε — произвольно малое положительное число. В задаче преследования такая постановка вопроса вполне допустима; она возникает в случае, если преследующий объект гонится не за самим убегающим объектом, а за тем местом, где убегающий объект находился ε секунд назад. Для решения задачи в обычной постановке вопроса следует произвести предельный переход при $\varepsilon \to 0 \ldots$» [A35].

Л.С. Понтрягин, на основе своих результатов [A34] для нелинейных дифференциальных игр, создал два метода решения задачи преследования для линейного случая [A37]. Первый метод Л.С. Понтрягина является наиболее эффективным, при дискриминации убегающего возможно получение достаточных условий поимки в конкретных задачах преследования.

Л.С. Понтрягин и Е.Ф. Мищенко исследовали [A39] игру убегания при дискриминации преследователя для линейного случая, получены достаточные условия уклонения от встречи, а также оценка расстояния до терминального множества на бесконечном полуинтервале времени.

Новые методы решения задач конфликтного взаимодействия с участием группы управляемых объектов, хотя бы с одной из противоборствующих сторон, были представлены Н.Л. Григоренко, П.Б. Гусятниковым, В. Жимовским, В.И. Жуковским, Е.Ф. Мищенко, М.С. Никольским, Н.Н. Петровым, Н.Никандр. Петровым, Л.А. Петросяном, Б.Н. Пшеничным, Б.Б. Рихсиевым, Н.Ю. Сатимовым, В. Ходуном, Ф.Л. Черноусько, А.А. Чикрием и их соавторами (см. [A9], [A10], [A59], [A4], [A16], [A18], [A19], [32, A24], [A33], [A42], [A45], [A47], [A60], [A53], [A54]), а также многими другими математиками.

Одно из первых исследований задач группового преследования опубликовано Л.А. Петросяном [A32], получены условия поимки, базирующиеся на стратегии параллельного преследования.

Б.Н. Пшеничный получил [A41] необходимые и достаточные условия поимки убегающего в задаче простого группового преследования с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников. Поимка происходит в том и только том случае, когда начальная позиция убегающего лежит внутри выпуклой оболочки множества начальных позиций преследователей. Отметим, что эта работа в значительной степени стимулировала исследование задач конфликтного взаимодействия, в том числе при равных возможностях всех участников.

Ф.Л. Черноусько в работе [A52] рассматривалась задача уклонения управляемой точки, скорость которой ограничена по величине, от встречи с любым конечным числом преследующих точек, скорости которых также ограничены по величине и строго меньше скорости уклоняющейся точки. Был построен такой способ управления, который обеспечивает уклонение от всех преследователей.

Н.Л. Григоренко [A6] получены необходимые и достаточные условия уклонения от встречи одного убегающего от группы преследователей при условии, что убегающий и преследователи обладают простым движением, а множеством управлений каждого игрока является один и тот же выпуклый компакт.

Л.Г. Васильева обобщает [A5] результат Б.Н. Пшеничного [A41] на случай l-поимки.

Для случая простых движений Б.К. Хайдаров рассмотрел [A58] задачу позиционной l-поимки одного убегающего группой преследователей.

В работах Р.П. Иванова, Ю.С. Ледяева [A14], Б.Б. Рихсиева [A44] получены условия оптимальности времени преследования в задачах простого группового преследования одного убегающего.

В.Л. Зак обобщил [A11, A12] результаты Ф.Л. Черноусько [A52] на случай более общих уравнений движений участников, который предполагает динамическое превосходство убегающего над всеми преследователями.

Н.Н. Петров и К.А. Щелчков рассмотрели [A31] задачу простого группового преследования одного убегающего, являющуюся еще одной модификацией задачи Ф.Л. Черноусько [A52]. Здесь предполагается, что убегающий имеет динамическое превосходство не над всеми преследователями. Получены достаточные условия уклонения от всех преследователей на бесконечном полуинтервале времени и на конечном интервале любой длины.

Н.Ю. Сатимов, М.Ш. Маматов рассмотрели [A46] линейную задачу преследования группой преследователей группы жестко скоординированных (использующих одинаковое управление) убегающих. Получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего. Работы Н.Н. Петрова и Д.А. Вагина [A2, A23] дополняют результаты [A46].

Н.Л. Григоренко получены [A8] достаточные условия поимки двух убегающих в квазилинейных дифференциальных играх.

Н.Л. Григоренко ввел понятие многократной поимки [A7], которая происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, для конфликтно управляемых процессов им представлены достаточные (а для задачи с простыми движениями и равными возможностями необходимые и достаточные) условия многократной поимки убегающего. В самом простом случае условие многократной поимки можно представить следующим образом: исключим из игры любого преследователя, если при этом каждый раз для оставшихся преследователей будет выполнено условие поимки [A41], то в исходной игре получим выполнимость условия двукратной поимки; уберем любых двух преследователей, если условие поимки всегда выполняется, то в исходной игре получаем 3-кратную поимку и так далее.

Р.П. Иванов рассмотрел [A13] задачу простого группового преследования одного убегающего при условии, что последний не покидает пределы выпуклого компакта с непустой внутренностью. Доказано, что если число преследователей меньше размерности множества, то происходит уклонение от встречи, иначе — поимка.

Работа [A20] Н.Н. Петрова обобщает результат Р.П. Иванова на случай, когда убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью.

Н.Н. Петров и Н.Никандр. Петров, по всей видимости, первыми исследовали [A19] задачу преследования группой преследователей группы убегающих. Динамика объектов является простой, максимальные скорости всех участников по норме не превосходят единицы, целью преследователей является поимка всей группы убегающих. Получены достаточные условия уклонения от встречи, а также оценки сверху и снизу минимального числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей из любых начальных позиций.

Работа П.В. Прокоповича и А.А. Чикрия [A40] обобщает результаты работы [A19] на линейные дифференциальные игры.

Б.Н. Пшеничный и И.С. Раппопорт рассмотрели [A43] задачу группового преследования одного убегающего в дифференциальной игре, в которой закон движения каждого участника имеет вид: $\dot{z} + az = u$, $|\,u\,| \leqslant 1$, $a < 0$. Были получены необходимые и достаточные условия поимки.

Н.Н. Петров рассмотрел [A21] задачу преследования группой преследователей одного убегающего в примере Л.С. Понтрягина с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников. Были получены достаточные условия поимки.

Задача группового преследования жестко скоординированных убегающих в примере Л.С. Понтрягина при равных динамических и инерционных возможностях всех участников рассмотрена Д.А. Вагиным и Н.Н. Петровым [A3]. Получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего.

А.А. Чикрий [A54] и Н.Н. Петров [A22] получили достаточные условия многократной поимки убегающего в конфликтно управляемых процессах и в примере Л.С. Понтрягина с равными возможностями.

Н.Н. Петровым и Н.А. Соловьевой рассмотрены рекуррентные дифференциальные игры при равных возможностях участников: для примера Л.С. Понтрягина [A25, A26] и конфликтно управляемого процесса [A27] получены достаточные условия многократной поимки убегающего; для примера Л.С. Понтрягина [A28] и конфликтно управляемого процесса [A64] получены достаточные условия поимки не менее q убегающих при условии, что каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей.

Задачу о многократной поимке не менее q убегающих с равными возможностями участников при указанном выше условии рассмотрели Н. Н. Петров и А. Я. Нарманов, были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования для случая простых движений [A29], а также достаточные условия завершения преследования в задаче с дробными производными и простой матрицей [A30].

П.В. Прокопович и А.А. Чикрий рассмотрели [A55] задачу уклонения одного убегающего от группы преследователей в дифференциальной игре, в которой закон движения каждого участника имеет вид: $\ddot{z} = u$, $|\,u\,| \leqslant 1$. Были получены достаточные условия убегания.

Л.С. Чиркова получила достаточные условия уклонения одного убегающего от группы преследователей при равных динамических и инерционных возможностях всех участников при условии, что закон движения каждого участника задается дифференциальным уравнением третьего порядка [A56] или уравнением четвертого порядка [A57].

А.С. Банников рассмотрел [A1] нестационарные конфликтно управляемые процессы при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков. Были получены условия уклонения одного и нескольких убегающих от группы преследователей, а также приведены некоторые оценки количества убегающих, достаточного для уклонения хотя бы одного преследователя из любых начальных позиций.

Задачи уклонения одного убегающего, обладающего большей маневренностью, от группы преследователей в примере Л.С. Понтрягина рассматривались Н.Ю. Сатимовым и Б.Б. Рихсиевым [A47]. Были получены достаточные условия убегания.

В работах [A61–A63, A65] рассматривались различные модели задач конфликтного взаимодействия, в которых участвуют три типа игроков — преследователь, убегающий и защитник убегающего.

Целью работы является разработка новых аналитических и численных методов исследования математических моделей задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

Для достижения цели исследованы математические формализации следующих задач:

Задача 1. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов для случая простых движений при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников.

Задача 2. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов в форме нестационарных конфликтно управляемых процессов при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников.

Задача 3. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов в виде обобщенного нестационарного контрольного примера Л.С. Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников.

Задача 4. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов при большей маневренности убегающих.

Отметим, что задачи 2 и 3 являются разными обобщениями задачи 1.

Два игрока имеют одинаковые инерционные возможности, если дифференциальные уравнения, описывающие их движения, совпадают (при этом начальные позиции и ограничения на множества допустимых управлений могут различаться). Если порядок старшей производной, входящей в уравнение движения убегающего, строго меньше порядка старшей производной, входящей в уравнение движения преследователя, то это означает, что убегающий обладает большей маневренностью, чем преследователь. Два игрока имеют одинаковые динамические возможности, если у них совпадают множества допустимых управлений.

В данной работе под поимкой понимается совпадение геометрических координат преследователя и убегающего в некоторый момент. Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. Если моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадают, то говорят, что происходит нестрогая одновременная многократная поимка убегающего. Одновременная многократная поимка убегающего происходит, если совпадают наименьшие моменты поимки. Далее, если некоторые участники конфликтного взаимодействия все время используют одинаковое управление, то они называются жестко скоординированными. Наконец, мягкое убегание означает, что реализовалась ситуация, в которой у преследователя и убегающего в каждый момент времени не совпадают геометрические координаты, скорости, ускорения и так далее.

Научная новизна для перечисленных выше задач заключается в полученных аналитических решениях, при выполнении определенных условий, гарантирующих:

1. Для задач 1 и 2 одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего; суммарную одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку группы жестко скоординированных убегающих; синхронную реализацию одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности; одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего, имеющего в своем распоряжении группу защитников.

2. Для задачи 3 нестрогую одновременную многократную (многократную) поимку убегающего.

3. Для задачи 4 мягкое убегание всей группы жестко скоординированных убегающих от группы преследователей.

Методы управления (преследователями, убегающими и защитниками), которые, по сути, являются указанными выше аналитическими решениями, построены в явном виде, на их основе разработаны вычислительные схемы решения некоторых типов задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов. Вычислительные схемы реализованы в используемом для проведения вычислительных экспериментов комплексе программ моделирования конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для задачи 1 — аналитические условия разрешимости и методы управления группой преследователей, гарантирующие: одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего; суммарную одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку группы жестко скоординированных убегающих; синхронную реализацию одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности; одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего, имеющего в своем распоряжении группу защитников.

2. Для задачи 2 — аналитические условия разрешимости и методы управления группой преследователей, гарантирующие: одновременную много-

кратную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего; суммарную одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку группы жестко скоординированных убегающих; синхронную реализацию одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности; одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего, имеющего в своем распоряжении группу защитников.

3. Для задачи 3 — аналитические условия разрешимости и методы управления группой преследователей, гарантирующие нестрогую одновременную многократную (многократную) поимку убегающего.

4. Для задачи 4 — аналитические методы управления группой жестко скоординированных убегающих, гарантирующие мягкое убегание всех убегающих от группы преследователей из любых начальных позиций.

5. Вычислительные схемы решения некоторых типов задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов и комплекс программ моделирования конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

Методология и методы исследования. В математических моделях задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов используется формализация дифференциальных игр, близкая к предложенной Л.С. Понтрягиным (задачи 1, 2, 3) и Н.Н. Красовским (задача 4). В работе применяется аппарат математической теории оптимального управления, теории дифференциальных игр, теории многозначных отображений, выпуклого анализа, численных методов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Все результаты работы могут быть использованы для дальнейшего развития аналитических и численных методов исследования математических моделей задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

Степень достоверности результатов исследования. Достоверность теоретических результатов диссертационной работы подтверждается строгостью используемого математического аппарата, публикациями в рецензируемых изданиях, апробацией результатов на научных мероприятиях, а также вычислительными экспериментами, данные которых согласуются с теоретическими результатами.

Личный вклад автора. Совместно с научным консультантом осуществлял выбор перспективных направлений научных исследований, а также обсуждал постановки и получаемые решения задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов. Все выносимые на защиту результаты получены соискателем лично. Из совместных работ в диссертацию включены результаты, непосредственно принадлежащие автору.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

– Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби», посвященный 60-летию со дня рождения А.И. Субботина (Екатеринбург, 2005);

– Международная конференция «Устойчивость и процессы управления», посвященная 75-летию со дня рождения В.И. Зубова (Санкт-Петербург, 2005);

– Научная конференция-семинар «Теория управления и математическое моделирование», посвященная 50-летию Ижевского математического семинара и 30-летию кафедры «Прикладная математика и информатика» Ижевского государственного технического университета (Ижевск, 2006);

– Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная 75-летию Удмуртского государственного университета (Ижевск, 2006);

– Всероссийская научная конференция «Математика. Механика. Информатика», посвященная 30-летию Челябинского государственного университета (Челябинск, 2006);

– Научный семинар «Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений», посвященный 60-летию со дня рождения В.И. Благодатских (Москва, 2006);

– Научная конференция-семинар «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти Н.В. Азбелева (Ижевск, 2008);

– Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 2008);

– Девятая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция (Ижевск, 2008);

– Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложения», посвященная 70-летию со дня рождения В.А. Садовничего (Москва, 2009);

– Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическая теория управления и математическое моделирование», посвященная 60-летию Ижевского государственного технического университета и 90-летию со дня рождения Н.В. Азбелева (Ижевск, 2012);

– Семинар отдела Динамических систем Института математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, 2012, 2023, 2024);

– Международная молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 2013, 2015, 2017);

– Международная конференция «Динамика систем и процессы управления», посвященная 90-летию со дня рождения Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 2014);

– Второй Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби», посвященный 70-летию со дня рождения А.И. Субботина (Екатеринбург, 2015);

– Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти Н.В. Азбелева и Е.Л. Тонкова (Ижевск, 2015, 2020, 2022);

– Научный семинар кафедры Оптимального управления факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Москва, 2017);

– Международная конференция «Устойчивость, управление, дифференциальные игры», посвященная 95-летию со дня рождения Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 2019);

– Международная конференция «Системный анализ: моделирование и управление», посвященная памяти А.В. Кряжимского (Москва, 2024);

– Семинар по дифференциальным уравнениям и теории управления Удмуртского государственного университета (Ижевск, 2005–2024).

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для молодых кандидатов наук (МК-2817.2008.1) и Российским фондом фундаментальных исследований (проект 06-01-00258).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 50 работ. Основные результаты представлены в 25 статьях, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК и Аттестационным советом УрФУ [1–25], из них 21 статья проиндексирована в Scopus, Web of Science или zbMATH [1–4, 6, 7, 10, 11, 13–25]. Получено 6 свидетельств о государственной регистрации программы для ЭВМ [26–31]. Совместно с научным консультантом выпущена монография [32]. По результатам научных мероприятий издано 18 материалов [33–50].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из основных обозначений, введения, 6 глав, содержащих всего 25 параграфов, заключения и списка литературы, включающего 288 наименований. В основную часть работы включен 41 рисунок. Общий объем диссертации — 290 страниц.

КРАТКИЙ ОБЗОР ОСНОВНОЙ ЧАСТИ РАБОТЫ

В **первой главе**, включающей четыре параграфа, рассматриваются аналитические методы исследования задачи 1 (конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов для случая простых движений при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников).

Дифференциальные игры, если не оговорено специально, рассматриваются в пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$).

В **§ 1** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i\ &:\ \dot{x}_i = u_i,\ \ u_i \in U(t),\ \ x_i(t_0) = X_i^0,\ \ i \in I(n),\\ E\ &:\ \dot{y} = v,\quad\ v \in U(t),\quad y(t_0) = Y^0, \end{aligned} \tag{1}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа (порожденной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^k$) на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей; $I(q) = \{1, 2, \ldots, q\}$ для всех $q \geqslant 1$; $S(c, r)$ — замкнутый шар с центром в точке c радиуса r.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$, $q \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q\to\infty} \theta_q = \infty$).

Определение 1. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$ допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i(\theta_q),\ i \in I(n),\ y(\theta_q)\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Под допустимыми понимаются управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$, удовлетворяющие указанным ограничениям.

Определение 2. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y(\theta_q)$ и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$\begin{gathered} u_i(t) = u_i\big(t,\ \theta_q,\ x_\alpha(\theta_q),\ \alpha \in I(n),\ y(\theta_q),\ (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),\\ t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

Действия преследователей можно трактовать так: имеется центр управления, который каждому преследователю P_i, $i \in I(n)$, пошагово строит допустимое управление $u_i(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы преследователей).

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\big\}.$$

Определение 3. В игре Γ возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся

множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых
$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом убегающий E может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз.

Определение 4. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых
$$x_\alpha(\tau) = y(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 5. В игре Γ возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых
$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки не указываем и говорим, что в игре Γ возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

Предположение 1. Существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что
$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину
$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\bigr\}.$$

Для всех $i \in I(n)$ зададим функции
$$\lambda_i(v, t) = \lambda(v, X_i^0 - Y^0; U(t)) = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in U(t)\bigr\}.$$

Введем обозначения

$$\delta_0(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha(v,t), \quad \Delta_0 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s)ds.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

Условие 1. $Y^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_p^0, p \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n-b+1)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда условие* 1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ.

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Теорема 4. *Пусть выполнено предположение* 1 *и отображение* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

Отметим, что условие 1 сформулировал Н.Л. Григоренко при исследовании задач о многократной поимке убегающего [A7], кроме того, при $b = 1$, то есть при рассмотрении задачи о поимке, условие 1 совпадает с условием Б.Н. Пшеничного [A41] ($Y^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0\}$).

В **§ 2** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lll} P_i & : & \dot{x}_i = u_i, \ \ u_i \in U(t), \ \ x_i(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\ E_j & : & \dot{y}_j = v, \ \ \ v \in U(t), \ \ \ y_j(t_0) = Y_j^0, \ \ j \in I(m), \end{array} \tag{2}$$

причем $X_i^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n)$, $j \in I(m)$.

Определение 6. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y_j(\theta_q)$, $j \in I(m)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t, \ \theta_q, \ x_i(\theta_q), \ i \in I(n), \ y_j(\theta_q), \ j \in I(m)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр управления, который для всех убегающих E_j, $j \in I(m)$, пошагово строит одно и то же допустимое управление $v(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы убегающих).

Определение 7. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y_j(\theta_q)$, $j \in I(m)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ \theta_q,\ x_\alpha(\theta_q),\ \alpha \in I(n),\ y_j(\theta_q),\ j \in I(m),\ (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

О п р е д е л е н и е 8. В игре Γ возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом любой из убегающих E_j, $j \in I(m)$, может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз. Кратность поимки в игре Γ складывается из кратностей поимок каждого убегающего E_j, $j \in I(m)$ (в том числе возможен случай реализации b-кратной поимки, когда одного убегающего ловят b преследователей, а остальные убегающие избегают поимки).

О п р е д е л е н и е 9. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$, $i \in I(n)$, преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 10. В игре Γ возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$, $i \in I(n)$, преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda.$$

По функциям

$$\lambda_i(v, t; j) = \lambda(v, X_i^0 - Y_j^0; U(t)) =$$
$$= \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y_j^0)) \in U(t)\big\},\ i \in I(n),$$

зависящим от одного параметра j, определим величины, зависящие от n

параметров,

$$\delta_0(t; j_i, i \in I(n)) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v, t; j_\alpha),$$

$$\Delta_0(j_i, i \in I(n)) = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s; j_i, i \in I(n))\, ds.$$

У с л о в и е 2. Для каждого $i \in I(n)$ найдется такой номер $j_i \in I(m)$, что $\Delta_0(j_i, i \in I(n)) = \infty$.

Т е о р е м а 5. *Пусть выполнены предположение* 1 *и условие* 2. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

У с л о в и е 3. Для каждого $i \in I(n)$ найдется такой номер $j_i \in I(m)$, что $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_p^0 - Y_{j_p}^0, p \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n - b + 1)$.

Т е о р е м а 6. *Пусть выполнено предположение* 1 *и отображение* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 3 *является достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

В **§ 3** рассматривается дифференциальная игра Γ $n_1 + n_2 + \cdots + n_m + m$ лиц: $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ преследователей $P_{11}, P_{21}, \ldots, P_{n_1 1}, P_{12}, P_{22}, \ldots, P_{n_2 2}, \ldots, P_{1m}, P_{2m}, \ldots, P_{n_m m}$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{llllll} P_{ij} : & \dot{x}_{ij} = u_{ij}, & u_{ij} \in U_j(t), & x_{ij}(t_0) = X_{ij}^0, & i \in I(n_j), & j \in I(m), \\ E_j : & \dot{y}_j = v_j, & v_j \in U_j(t), & y_j(t_0) = Y_j^0, & & j \in I(m), \end{array} \tag{3}$$

причем $X_{ij}^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$.

О п р е д е л е н и е 11. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}_j$ убегающего E_j ($j \in I(m)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_{i\beta}(\theta_q)$, $y_\beta(\theta_q)$, $i \in I(n_\beta)$, $\beta \in I(m)$, допустимое управление $v_j(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v_j(t) = v_j\big(t,\ \theta_q,\ x_{i\beta}(\theta_q),\ y_\beta(\theta_q),\ i \in I(n_\beta),\ \beta \in I(m)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

О п р е д е л е н и е 12. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_{ij}$ преследователя P_{ij} ($i \in I(n_j),\ j \in I(m)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_{\alpha\beta}(\theta_q)$, $y_\beta(\theta_q)$, $\alpha \in I(n_\beta)$, $\beta \in I(m)$, и сужениям $(v_\beta(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимых управлений $v_\beta(\cdot)$ убегающих E_β, $\beta \in I(m)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_{ij}(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_{ij}(t) = u_{ij}\big(t, \theta_q, x_{\alpha\beta}(\theta_q),\ y_\beta(\theta_q), (v_\beta(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})), \alpha \in I(n_\beta), \beta \in I(m)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n_j$ и $j \in I(m)$ определим множество

$$\Omega_j(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, \ldots, i_q \in I(n_j)\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 13. В игре Γ возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ ($b_j \in I(n_j)$, $j \in I(m)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_{ij}$ преследователей P_{ij}, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программных стратегий $\mathcal{V}_j$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующих разбиению σ, найдутся момент $\tau \in [t_0, T_0]$ и множества $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $j \in I(m)$, для которых, при каждом фиксированном $j \in I(m)$, выполнено

$$x_{\alpha j}(\tau) = y_j(\tau), \quad x_{\alpha j}(s) \neq y_j(s) \quad \text{для всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda_j.$$

Неформально: рассматривается m «непересекающихся» задач (можно считать, что каждая из m групп, включающая одного убегающего и n_j преследователей, находятся очень далеко друг от друга; либо задачи рассматриваются в параллельных плоскостях и т.п.), в которых действия убегающих координируются одним центром (для достижения общей цели — уклонение от одновременной многократной поимки группы убегающих), а действия преследователей — вторым центром (цель преследователей — синхронная реализация одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности).

П р е д п о л о ж е н и е 2. Существуют непрерывные и невырожденные на $[t_0, \infty)$ квадратные матрицы $B_j(t)$ порядка k и непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции $g_j(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B_j(t)(U_j(t) + g_j(t)) = S(0,1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),\ j \in I(m).$$

Для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$ зададим функции

$$\lambda_{ij}(v,t) = \lambda(v, X_{ij}^0 - Y_j^0; U_j(t)) =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_{ij}^0 - Y_j^0)) \in U_j(t)\bigr\}.$$

Введем обозначения

$$\delta_{0j}(t) = \min_{v \in U_j(t)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v,t),$$
$$\delta_0(t) = \min_{j \in I(m)} \delta_{0j}(t), \quad \Delta_0 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s)ds.$$

Т е о р е м а 7. *Пусть выполнено предположение* 2 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

У с л о в и е 4. При каждом значении $j \in I(m)$ выполнено включение $Y_j^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_{cj}^0, c \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$.

Т е о р е м а 8. *Пусть выполнено предположение* 2. *Тогда условие* 4 *является необходимым для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Т е о р е м а 9. *Пусть выполнено предположение* 2 *и отображение* $U_j(t) = U_j = \mathrm{const}$, $j \in I(m)$. *Тогда в игре* Γ *условие* 4 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

В **§ 4** рассматривается дифференциальная игра Γ $n{+}r{+}1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, \ldots, D_r$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{llllll} P_i & : \dot{x}_i = u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, & & i \in I(n), \\ E & : \dot{y} = v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0, & & \\ D_j & : \dot{z}_j = w_j, & w_j \in U(t), & z_j(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), & & j \in I(r). \end{array} \tag{4}$$

В системе (4) начальные позиции преследователей P_i и убегающего E фиксированы и $X_i^0 \neq Y^0$ для всех $i \in I(n)$. Каждый защитник D_j, $j \in I(r)$, выбирает свою начальную позицию $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ до начала движения участников, причем $L > 0$ — такая фиксированная постоянная, что $X_i^0 \notin S(Y^0, L)$ для всех $i \in I(n)$ (защитник не может выбрать свою начальную позицию равной начальной позиции хотя одного преследователя и тем самым, как будет указано ниже, уничтожить последнего в начальный момент времени).

Определение 14. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_j(\theta_q)$, $j \in I(r)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i(\theta_q),\ i \in I(n),\ y(\theta_q),\ z_j(\theta_q),\ j \in I(r)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Определение 15. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_j(\theta_q)$, $j \in I(r)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\, \theta_q,\, x_\alpha(\theta_q),\, \alpha \in I(n),\, y(\theta_q),\, z_j(\theta_q),\, j \in I(r),\, (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Определение 16. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{W}_j$ защитника убегающего D_j ($j \in I(r)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту t_0 и начальным позициям X_i^0, $i \in I(n)$, Y^0 начальную позиции $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$; моменту θ_q, позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_\beta(\theta_q)$, $\beta \in I(r)$, сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ и сужениям $(u_i(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимых управлений $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $w_j(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$Z_j^0 = Z_j^0(t_0,\ X_i^0,\ i \in I(n),\ Y^0) \in S(Y^0, L);$$
$$w_j(t) = w_j\Big(t,\, \theta_q,\, x_i(\theta_q),\, i \in I(n),\, y(\theta_q),\, z_\beta(\theta_q),\, \beta \in I(r),\, (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})),$$

$$(u_i(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})), i \in I(n)\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

При совпадении геометрических координат $d \geqslant 1$ защитников D_j и $p \geqslant 1$ преследователей P_i погибают $\min\{d, p\} \geqslant 1$ защитников и столько же преследователей. Если совпадают координаты убегающего E и защитника D_j, то последний погибает. Пусть $T(P_i)$, $i \in I(n)$, и $T(D_j)$, $j \in I(r)$, — моменты гибели преследователя P_i и защитника D_j соответственно, если участник не погибает, то полагаем момент гибели равным ∞.

Неформально: у каждого защитника активируется механизм самоликвидации при встрече с «инородным» объектом (убегающим или преследователем), при этом преследователь ликвидируется (в случае одновременной встречи с несколькими преследователями первый из них «прикрывает» остальных), а убегающему ущерб не причиняется (или причиняется, но незначительный, например, за счет настройки механизма самоликвидации, обеспечивающей максимально возможный урон преследователю и нанесение минимального ущерба убегающему).

Рассматривается два варианта игры — все защитники убегающего D_j, $j \in I(r)$, либо сильные, либо слабые. В случае совпадения геометрических координат преследователя P_i, убегающего E и защитника D_j в некоторый момент $\theta > t_0$, то есть $x_i(\theta) = y(\theta) = z_j(\theta)$, как указано выше, $T(P_i) = T(D_j) = \theta$. Если защитник убегающего D_j сильный, то он уничтожает преследователя P_i быстрее, чем тот ловит убегающего E (поимки не происходит). В случае, когда защитник убегающего D_j слабый, преследователь P_i до момента гибели успевает поймать убегающего E (происходит поимка).

Определение 17. В игре Γ с сильными защитниками убегающего возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha), \ \tau_\alpha < T(P_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 18. В игре Γ со слабыми защитниками убегающего возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha),\ \tau_\alpha \leqslant T(P_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 19. В игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ \tau < T(P_\alpha)\ \Big[\tau \leqslant T(P_\alpha)\Big] \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 20. В игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \tau < T(P_\alpha)\Big[\tau \leqslant T(P_\alpha)\Big], x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \alpha \in \Lambda.$$

Неформально правила игры можно трактовать, например, так: имеется три центра управления (I управляет убегающим, II — группой преследователей, III — группой защитников убегающего), у I и III центров управления имеется общая цель — уклонение убегающего при содействии группы защитников (либо сильных, либо слабых) от рассматриваемых видов поимок, а у II центра управления цель противоположна — реализация группой преследователей указанных видов поимок при любых действиях убегающего и группы его защитников.

Для всех $i \in I(n)$ зададим функции

$$\lambda_i(v, t) = \lambda(v, X_i^0 - Y^0; U(t)) =$$
$$= \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in U(t)\big\}.$$

Введем обозначения

$$\delta_r(t) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b+r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v, t), \quad \Delta_r = \int_{t_0}^{\infty} \delta_r(s) ds.$$

Теорема 10. *Пусть выполнено предположение 1 и $\Delta_r = \infty$. Тогда в игре Γ с сильными защитниками убегающего возможна одновременная b-кратная поимка.*

Условие 5. $Y^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_p^0, p \in K\}$ для всех $K \in \Omega(n - b - r + 1)$.

Теорема 11. *Пусть выполнено предположение 1. Тогда условие 5* *является необходимым для осуществления b-кратной поимки в игре Γ с сильными защитниками убегающего.*

Теорема 12. *Пусть выполнено предположение* 1 *и отображение* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 5 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной b-кратной поимки в игре Γ с сильными защитниками убегающего.*

Предположение 3. Все игроки используют допустимые управления, являющиеся кусочно-постоянными функциями на $[t_0, \infty)$.

Теорема 13. *Пусть выполнены предположения* 1, 3 *и* $\Delta_r = \infty$. *Тогда в игре Γ со слабыми защитниками убегающего возможна одновременная b-кратная поимка.*

Теорема 14. *Пусть выполнены предположения* 1, 3. *Тогда условие* 5 *является необходимым для осуществления b-кратной поимки в игре Γ со слабыми защитниками убегающего.*

Теорема 15. *Пусть выполнены предположения* 1, 3 *и отображение* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 5 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной b-кратной поимки в игре Γ со слабыми защитниками убегающего.*

Вторая глава состоит из четырех параграфов, в ней представлены аналитические методы решения задачи 2 (конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов в форме нестационарных конфликтно управляемых процессов при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников).

В **§ 5** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lll} P_i & : & \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \;\; u_i \in U(t), \;\; x_i(t_0) = X_i^0, \;\; i \in I(n), \\ E & : & \dot{y} = A(t)y + v, \qquad v \in U(t), \quad y(t_0) = Y^0, \end{array} \tag{5}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k.

В остальном постановка задачи совпадает с приведенной в § 1.

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$ такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ — единичная матрица соответствующей размерности.

Для всех $i \in I(n)$ зададим функции

$$\lambda_i^1(v,t) = \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X_i^0 - Y^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\}.$$

Введем обозначения

$$\delta_1(t) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha^1(v,t), \quad \Delta_1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(s)\, ds.$$

Теорема 16. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $\Delta_1 = \infty$. *Тогда в* *игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Теорема 17. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда условие* 1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ.

Теорема 18. *Пусть выполнено предположение* 1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

В **§ 6** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lll} P_i & : & \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \;\; u_i \in U(t), \;\; x_i(t_0) = X_i^0, \;\; i \in I(n), \\ E_j & : & \dot{y}_j = A(t)y_j + v, \quad v \in U(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \;\; j \in I(m), \end{array} \tag{6}$$

причем $X_i^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n)$, $j \in I(m)$.

В остальном постановка задачи совпадает с приведенной в § 2.

По функциям

$$\lambda_i^1(v, t; j) = \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X_i^0 - Y_j^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)v - \lambda(X_i^0 - Y_j^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\}, \;\; i \in I(n),$$

зависящим от одного параметра j, определим величины, зависящие от n параметров,

$$\delta_1(t; j_i, i \in I(n)) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha^1(v, t; j_\alpha),$$

$$\Delta_1(j_i, i \in I(n)) = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(s; j_i, i \in I(n))\, ds.$$

Условие 6. Для каждого $i \in I(n)$ найдется такой номер $j_i \in I(m)$, что $\Delta_1(j_i, i \in I(n)) = \infty$.

Теорема 19. *Пусть выполнены предположение* 1 *и условие* 6. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Теорема 20. *Пусть выполнено предположение* 1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 3 *является достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

В **§ 7** рассматривается дифференциальная игра Γ $n_1 + n_2 + \cdots + n_m + m$ лиц: $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ преследователей $P_{11}, P_{21}, \ldots, P_{n_1 1}, P_{12}, P_{22}, \ldots, P_{n_2 2}, \ldots, P_{1m}, P_{2m}, \ldots, P_{n_m m}$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{ll} P_{ij} : \dot{x}_{ij} = A_j(t)x_{ij} + u_{ij}, u_{ij} \in U_j(t), \; x_{ij}(t_0) = X_{ij}^0, i \in I(n_j), & j \in I(m), \\ E_j : \dot{y}_j = A_j(t)y_j + v_j, \quad v_j \in U_j(t), \;\; y_j(t_0) = Y_j^0, & j \in I(m), \end{array} \tag{7}$$

причем $X_{ij}^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$. Здесь $A_j(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ квадратные матрицы порядка k.

В остальном постановка задачи совпадает с приведенной в § 3.

Пусть $\Phi_j(t)$, $j \in I(m)$, — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A_j(t)\varphi$ такая, что $\Phi_j(t_0) = \mathcal{I}$.

Для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$ зададим функции

$$\begin{gathered}\lambda^1_{ij}(v,t) = \lambda(\Phi_j^{-1}(t)v, X^0_{ij} - Y^0_j; \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)) = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi_j^{-1}(t)v - \lambda(X^0_{ij} - Y^0_j)) \in \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)\bigr\}.\end{gathered}$$

Введем обозначения

$$\delta_{1j}(t) = \min_{v\in U_j(t)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda^1_{\alpha j}(v,t),$$

$$\delta_1(t) = \min_{j\in I(m)} \delta_{1j}(t), \quad \Delta_1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(s)ds.$$

Теорема 21. *Пусть выполнено предположение* 2 *и* $\Delta_1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Теорема 22. *Пусть выполнено предположение* 2. *Тогда условие* 4 *является необходимым для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Теорема 23. *Пусть выполнено предположение* 2, *матрицы* $\Phi_j(t)$ *являются почти периодическими в смысле Бора и* $U_j(t) = U_j = \mathrm{const}$, $j \in I(m)$. *Тогда условие* 4 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *в игре* Γ.

В **§ 8** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+r+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, \ldots, D_r$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{llll} P_i: & \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X^0_i, \qquad\qquad i \in I(n), \\ E: & \dot{y} = A(t)y + v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0, \\ D_j: & \dot{z}_j = A(t)z_j + w_j, & w_j \in U(t), & z_j(t_0) = Z^0_j \in S(Y^0, L), \ j \in I(r). \end{array} \tag{8}$$

В остальном постановка задачи совпадает с приведенной в § 4.

Для всех $i \in I(n)$ зададим функции

$$\begin{gathered}\lambda^1_i(v,t) = \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X^0_i - Y^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)v - \lambda(X^0_i - Y^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\}.\end{gathered}$$

Введем обозначения

$$\delta^1_r(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b+r)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda^1_\alpha(v,t), \quad \Delta^1_r = \int_{t_0}^{\infty} \delta^1_r(s)ds.$$

Теорема 24. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $\Delta^1_r = \infty$. *Тогда в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Теорема 25. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда условие* 5 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Теорема 26. *Пусть выполнено предположение* 1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 5 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* $\mathfrak{b}$*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Предположение 4. Игроки используют такие допустимые управления, что все функции $\Phi^{-1}(t)u_i(t)$, $i \in I(n)$, $\Phi^{-1}(t)v(t)$, $\Phi^{-1}(t)w_j(t)$, $j \in I(r)$, являются кусочно-постоянными на $[t_0, \infty)$.

Теорема 27. *Пусть выполнены предположения* 1, 4 *и* $\Delta_r^1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего возможна одновременная* $\mathfrak{b}$*-кратная поимка.*

Теорема 28. *Пусть выполнены предположения* 1, 4. *Тогда условие* 5 *является необходимым для осуществления* $\mathfrak{b}$*-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

Теорема 29. *Пусть выполнены предположения* 1, 4, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 5 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* $\mathfrak{b}$*-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

В **третьей главе**, состоящей из двух параграфов, представлены аналитические методы решения задачи 3 (конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов в виде обобщенного нестационарного контрольного примера Л.С. Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников).

В **§ 9** и **§ 10** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{gathered} P_i : x_i^{(l)} + a_1(t)x_i^{(l-1)} + a_2(t)x_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)x_i = u_i,\ u_i \in U, \\ E : y^{(l)} + a_1(t)y^{(l-1)} + a_2(t)y^{(l-2)} + \ldots + a_l(t)y = v, \quad v \in U, \\ x_i^{(j)}(t_0) = X_i^j, \quad y^{(j)}(t_0) = Y^j,\ i \in I(n),\ j \in I^0(l-1), \end{gathered} \tag{9}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; U — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей; $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_l(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции; $I(q) = \{1, 2, \ldots, q\}$ для всех $q \geqslant 1$; $I^0(q) = \{0, 1, 2, \ldots, q\}$ для всех $q \geqslant 0$.

Определение 21. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i^{(j)}(\theta_q)$, $y^{(j)}(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $j \in I^0(l-1)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$\begin{gathered} v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i^{(j)}(\theta_q),\ y^{(j)}(\theta_q),\ i \in I(n),\ j \in I^0(l-1)\big), \\ t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots \end{gathered}$$

О п р е д е л е н и е 22. Кусочно-программной контрстратегией $\mathfrak{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha^{(j)}(\theta_q)$, $y^{(j)}(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $j \in I^0(l-1)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\, \theta_q,\, x_\alpha^{(j)}(\theta_q),\, y^{(j)}(\theta_q),\, \alpha \in I(n),\, j \in I^0(l-1),\, (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

О п р е д е л е н и е 23. В игре Γ возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 24. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 25. В игре Γ возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda.$$

В § 9 получены достаточные условия b-кратной поимки, в § 10 — нестрогой одновременной b-кратной поимки.

П р е д п о л о ж е н и е 5. Существуют постоянная невырожденная квадратная матрица B порядка k и постоянный вектор $g \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(U + g) = S(0, 1).$$

Соотношения (9), вводя замены $z_i = x_i - y$, $i \in I(n)$, перепишем в виде

$$z_i^{(l)} + a_1(t) z_i^{(l-1)} + a_2(t) z_i^{(l-2)} + \cdots + a_l(t) z_i = u_i - v,\ u_i, v \in U,$$
$$z_i^{(j)}(t_0) = Z_i^j = X_i^j - Y^j.$$

Через $\varphi_j(t,s)$ $(t \geqslant s \geqslant t_0)$ обозначим решение уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \dots + a_l(t)\omega = 0,$$

с начальными условиями

$$\omega(s) = 0,\ \dots,\ \omega^{(j-1)}(s) = 0,\ \omega^{(j)}(s) = 1,\ \omega^{(j+1)}(s) = 0,\ \dots,\ \omega^{(l-1)}(s) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t,t_0)Z_i^0 + \varphi_1(t,t_0)Z_i^1 + \varphi_2(t,t_0)Z_i^2 + \dots + \varphi_{l-1}(t,t_0)Z_i^{l-1}.$$

Предположение 6. Существуют непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции $\beta_i(t)$ и $\xi_i^1(t)$, обладающие следующими свойствами:

1) $\xi_i^1(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора;

2) $\beta_i(t) > 0$ для всех $t \geqslant t_0$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty}(\xi_i^1(t) - \beta_i(t)\xi_i(t)) = 0$.

Предположение 7. Функции $\varphi_{l-1}(t,s)$, $\beta(t) = \min\limits_{i\in I(n)} \beta_i(t)$ такие, что

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds = \infty.$$

Условие 7. Существуют моменты $\tau_1^0, \tau_2^0, \dots, \tau_n^0 \in [t_0,\infty)$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{\xi_q^1(\tau_q^0),\ q\in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Теорема 30. *Пусть выполнены предположения* 5, 6, 7 *и условие* 7. *Тогда в игре* Γ *возможна* b*-кратная поимка.*

Предположение 8. Функции $\xi_i(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора и $\varphi_{l-1}(t,s)$ такова, что

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds = \infty.$$

Условие 8. Существуют моменты $\tau_1^0, \tau_2^0, \dots, \tau_n^0 \in [t_0,\infty)$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{\xi_q(\tau_q^0),\ q\in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Теорема 31. *Пусть выполнены предположения* 5, 8 *и условие* 8. *Тогда в игре* Γ *возможна* b*-кратная поимка.*

Предположения 6, 7, 8 выполнены, в частности, если функции $a_q(t)$, $q \in I(l)$, являются постоянными, то есть $a_q(t) = a_q$ для всех $t \in [t_0,\infty)$, и все корни ρ уравнения

$$\rho^l + a_1\rho^{l-1} + a_2\rho^{l-2} + \dots + a_l\rho = 0 \tag{10}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Теорема 32. *Пусть выполнено предположение* 5, *функции* $a_q(t)$, $q \in I(l)$, *являются постоянными, все корни* ρ *уравнения* (10) *являются простыми и чисто мнимыми, выполнено условие* 8. *Тогда в игре* Γ *возможна* b*-кратная поимка.*

Условие 9. Существует момент τ_0 такой, что

$$0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{\xi_q^1(\tau_0),\ q\in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Т е о р е м а 33. *Пусть выполнены предположения* 5, 6, 7 *и условие* 9. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b-*кратная поимка.*

У с л о в и е 10. Существует момент τ_0 такой, что

$$0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{\xi_q(\tau_0),\ q \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Т е о р е м а 34. *Пусть выполнены предположения* 5, 8 *и условие* 10. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b-*кратная поимка.*

У с л о в и е 11. Начальные позиции участников таковы, что

$$0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{Z_q^0,\ q \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Т е о р е м а 35. *Пусть выполнены предположения* 5, 8 *и условие* 11. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b-*кратная поимка.*

Т е о р е м а 36. *Пусть выполнено предположение* 5, *функции* $a_q(t)$, $q \in I(l)$, *являются постоянными, все корни* ρ *уравнения* (10) *являются простыми и чисто мнимыми, выполнено условие* 10 *или условие* 11. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b-*кратная поимка.*

Четвертая глава состоит из двух параграфов, в ней представлены аналитические методы решения задачи 4 (конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов при большей маневренности убегающих).

В **§ 11** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lll} P_i \ : & x_i^{(n_i)} = f_i\left(x_i, \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(n_i-1)}, u_i, t\right), & u_i \in U_i, \\ & x_i^{(\alpha_i)}(t_0) = X_i^{\alpha_i},\ \alpha_i \in I^0(n_i-1), & i \in I(n), \\ E \ : & y^{(m)} = v, & v \in S(0,\gamma), \\ & y^{(\beta)}(t_0) = Y^{\beta},\ \beta \in I^0(m-1), & \end{array} \qquad (11)$$

причем $n_i > m \geqslant 1$ при всех $i \in I(n)$ и $X_i^{\beta} \neq Y^{\beta}$ для всех $\beta \in I^0(m-1)$, $i \in I(n)$. Здесь $x_i,\ y \in \mathbb{R}^k$, $f_i \ : \underbrace{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$, $U_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$, $U_i \neq \varnothing$, $k_i \geqslant 1$, $\gamma > 0$.

П р е д п о л о ж е н и е 9. Каждая функция f_i удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решения на любой отрезок при всех допустимых управлениях $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$.

О п р е д е л е н и е 26. Стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту t и реализовавшимся значениям $x_i^{(\alpha_i)}(s)$, $y^{(\beta)}(s)$, $s \in [t_0, t]$, $\alpha_i \in I^0(n_i - 1)$, $i \in I(n)$, $\beta \in I^0(m-1)$, допустимое управление $v(t)$, которое является кусочно-постоянной функцией на $[t_0, t]$, то есть

$$v(t) = v\Big(t,\ x_i^{(\alpha_i)}(s),\ y^{(\beta)}(s),\ s \in [t_0, t],$$
$$\alpha_i \in I^0(n_i-1),\ i \in I(n),\ \beta \in I^0(m-1)\Big), \quad t \in [t_0, \infty).$$

О п р е д е л е н и е 27. В игре Γ возможно мягкое убегание, если существует стратегия $\mathcal{V}$ убегающего E, что для любых допустимых управлений $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, выполняются неравенства

$$x_i^{(\beta)}(t) \neq y^{(\beta)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),\ \beta \in I^0(m-1),\ i \in I(n).$$

П р е д п о л о ж е н и е 10. Существует постоянная $G \geqslant 0$ такая, что каждая функция f_i удовлетворяет неравенству

$$\Big| f_i(a_0, a_1, \ldots, a_{n_i-1}, b, t) \Big| \leqslant G$$

$$\text{для всех } (a_0, a_1, \ldots, a_{n_i-1}, b, t) \in \underbrace{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty).$$

Т е о р е м а 37. *Пусть выполнены предположения* 9, 10. *Тогда в игре* Γ *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

В **§ 12** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lll} P_i \ : & x_i^{(n_i)} = f_i\left(x_i, \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(n_i-1)}, u_i, t\right), & u_i \in U_i, \\ & x_i^{(\alpha_i)}(t_0) = X_i^{\alpha_i},\ \alpha_i \in I^0(n_i - 1), & i \in I(n), \\ E_j \ : & y_j^{(m_j)} = v, & v \in S(0, \gamma), \\ & y_j^{(\beta_j)}(t_0) = Y_j^{\beta_j},\ \beta_j \in I^0(m_j - 1), & j \in I(m), \end{array} \tag{12}$$

причем $n_i > m_j \geqslant 1$ при всех $i \in I(n)$, $j \in I(m)$ и $X_i^{\beta_j} \neq Y_j^{\beta_j}$ для всех $\beta_j \in I^0(m_j - 1)$, $i \in I(n)$, $j \in I(m)$. Здесь x_i, $y_j \in \mathbb{R}^k$, $U_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$, $U_i \neq \varnothing$, $k_i \geqslant 1$, $f_i : \underbrace{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$, $\gamma > 0$.

О п р е д е л е н и е 28. Стратегией $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту t и реализовавшимся значениям $x_i^{(\alpha_i)}(s)$, $y_j^{(\beta_j)}(s)$, $s \in [t_0, t]$, $\alpha_i \in I^0(n_i - 1)$, $i \in I(n)$, $\beta_j \in I^0(m_j - 1)$, $j \in I(m)$, допустимое управление $v(t)$, которое является кусочно-постоянной функцией на $[t_0, t]$, то есть

$$v(t) = v\Big(t,\ x_i^{(\alpha_i)}(s),\ y_j^{(\beta_j)}(s),\ s \in [t_0, t],$$
$$\alpha_i \in I^0(n_i - 1),\ i \in I(n),\ \beta_j \in I^0(m_j - 1),\ j \in I(m)\Big), \quad t \in [t_0, \infty).$$

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр управления, который для всех убегающих E_j, $j \in I(m)$, выбирает одно и то же допустимое управление $v(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы убегающих).

О п р е д е л е н и е 29. В игре Γ возможно мягкое убегание, если существует стратегия $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, что для любых допустимых управлений $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, выполняются неравенства

$$x_i^{(\beta_j)}(t) \neq y_j^{(\beta_j)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),\ \beta_j \in I^0(m_j - 1),\ i \in I(n),\ j \in I(m).$$

Т е о р е м а 38. *Пусть выполнены предположения* 9, 10. *Тогда в игре* Г *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

В **пятой главе**, состоящей из шести параграфов, разработаны вычислительные схемы решения некоторых типов задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

В **§ 13**, на основе определенного в явном виде в § 1 аналитического метода управления преследователями, построена вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования (1).

В **§ 14**, на основе результатов § 5, разработана вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе (5).

В **§ 15**, на основе результатов § 2, построена вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования (2).

В **§ 16**, на основе результатов § 6, разработана вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе (6).

В **§ 17**, на основе определенного в явном виде в § 4 аналитического метода управления слабым защитником убегающего, построена вычислительная схема его действий в задаче простого группового преследования (4).

В **§ 18**, на основе результатов § 8, разработана вычислительная схема действий слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе (8).

В **шестой главе**, состоящей из семи параграфов, приведено описание используемого для проведения вычислительных экспериментов комплекса программ моделирования конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов, а также рассмотрены примеры его использования.

В **§ 19** дана общая характеристики комплекса программ, который предназначен для проведения вычислительных экспериментов со следующими типами задач конфликтного взаимодействия:

Тип 1. Одновременная многократная поимка убегающего в задаче простого группового преследования (см. § 1).

Тип 2. Одновременная многократная поимка убегающего в конфликтно управляемом процессе (см. § 5).

Тип 3. Одновременная многократная поимка группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования (см. § 2).

Тип 4. Одновременная многократная поимка группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе (см. § 6).

Тип 5. Действия слабого защитника убегающего в задаче простого группового преследования (см. § 4).

Тип 6. Действия слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе (см. § 8).

Для запуска комплекса программ выполняется файл (модуль) MAIN.PY. Из стартового окна (см. рис. 1), при нажатии соответствующей кнопки, открывается окно с описанием назначения комплекса программ (см. рис. 2).

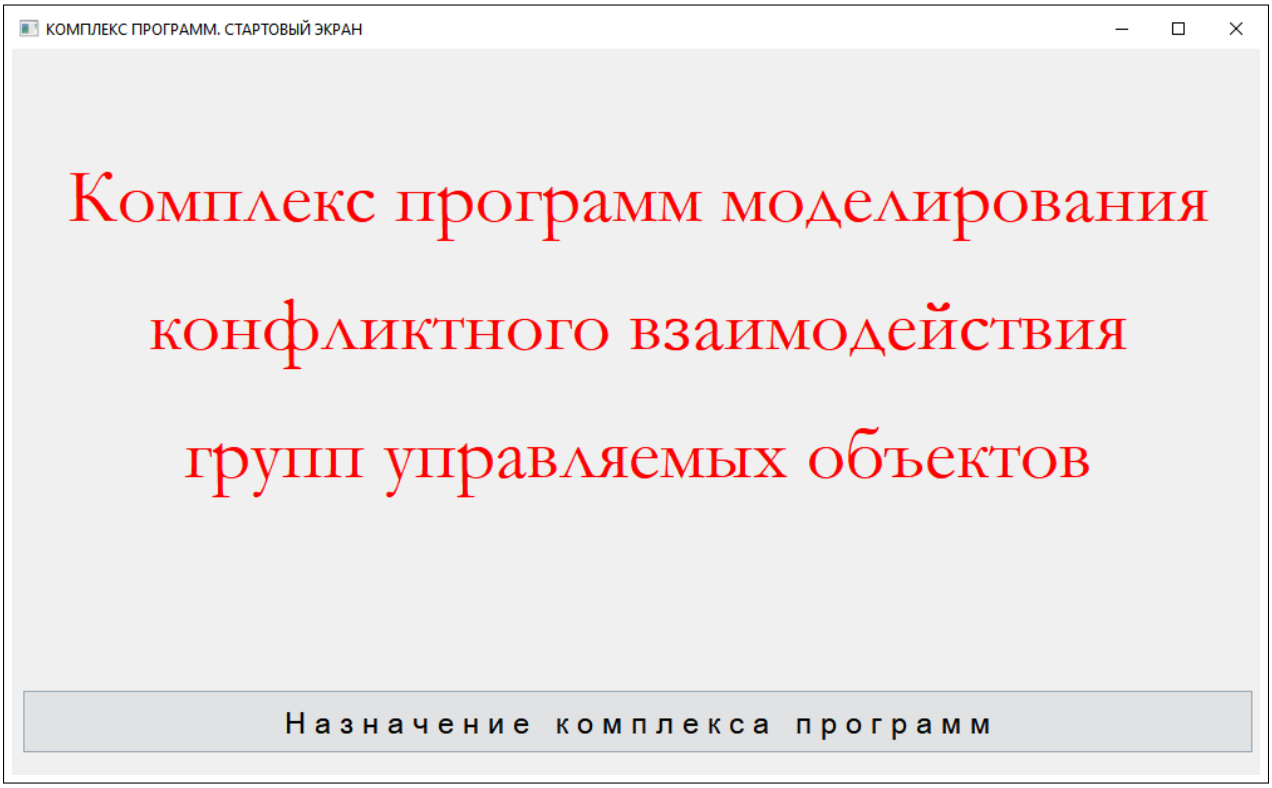

Рис. 1. Стартовый экран комплекса программ

Рис. 2. Окно с описанием назначения комплекса программ

Кнопкой «Главное окно комплекса программ» активируется указанный элемент (см. рис. 3). Элементы управления главного окна позволяют настроить параметры вычислительного эксперимента и начать моделирование конфликтного взаимодействия.

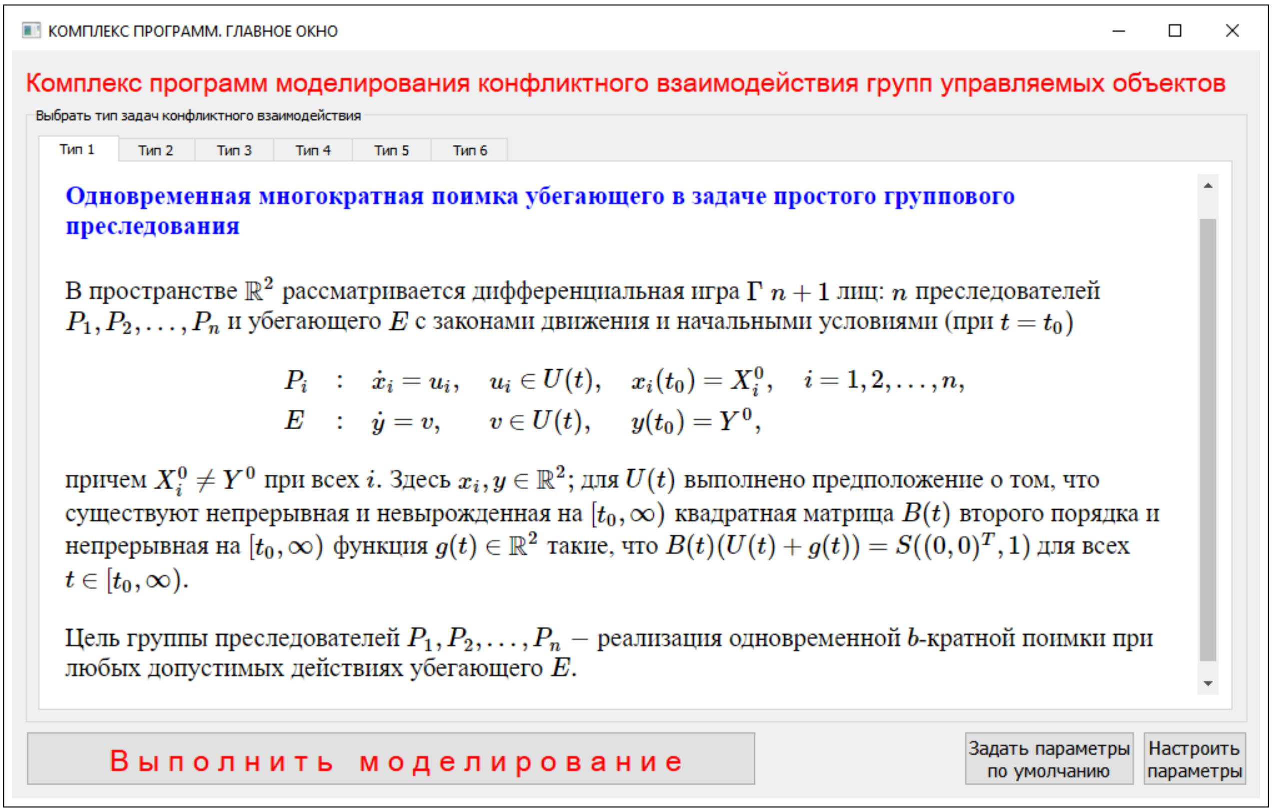

Рис. 3. Главное окно комплекса программ

Общий порядок проведения вычислительных экспериментов:

Шаг 1. Выбрать тип задач конфликтного взаимодействия.

Шаг 2. Если необходимо поменять параметры, то задать их.

Шаг 3. Выполнить моделирование.

Подробное описание проведения вычислительных экспериментов для каждого типа задач приведено в диссертации.

Здесь, в качестве примера, рассмотрим моделирование одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования (Тип 1).

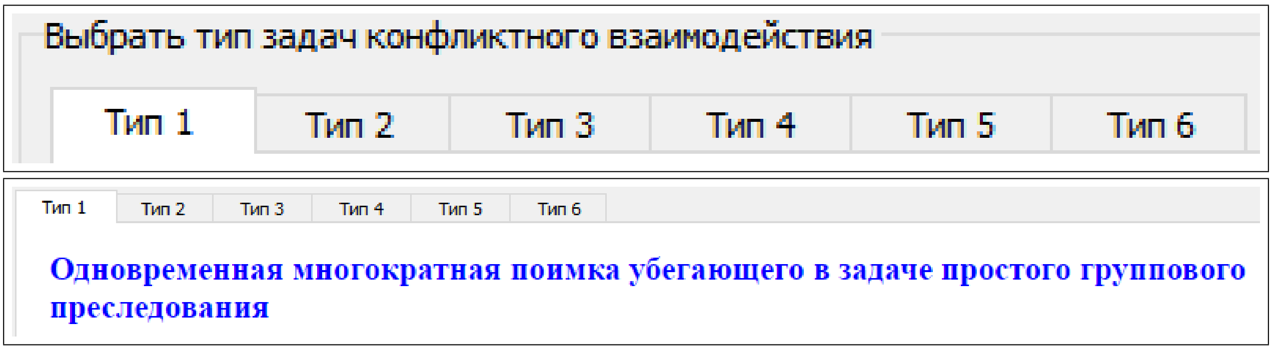

Рис. 4. Фрагменты главного окна. Выбрана вкладка «Тип 1»

Шаг 1. В области выбора типа задач конфликтного взаимодействия нажать на вкладку «Тип 1» (рекомендуется проконтролировать свой выбор с помощью приведенного ниже описания) (см. рис. 3, 4).

Шаг 2. Если параметры изменять не нужно (например, повторяется только что проведенный эксперимент), то этот шаг пропускается.

Изменение параметров производится двумя способами (см. рис. 3, 5):

1. При нажатии кнопки «Задать параметры по умолчанию» выполняется указанное действие (только для «Типа 1»; значения по умолчанию заданы для каждого типа задач конфликтного взаимодействия в отдельности).

2. По кнопке «Настроить параметры» средствами операционной системы открывается файл (модуль) с текущими параметрами для их просмотра и редактирования (см. рис. 6).

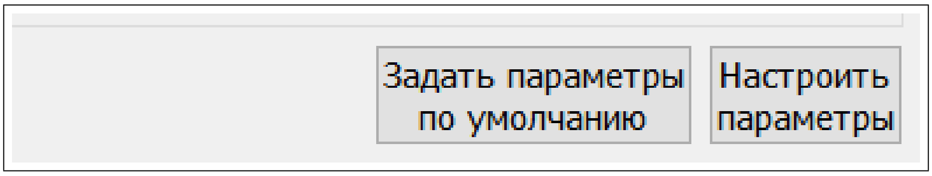

Рис. 5. Фрагмент главного окна. Кнопки изменения параметров

PARAMETERS_TYPE_CI_1.PY

```
'''
Задайте параметры конфликтного взаимодействия (для TYPE_CI = 1):
t0 - начальный момент;
b - кратность поимки;
n - количество преследователей;
Y0 - начальная позиция убегающего;
X0 - начальные позиции преследователей;
B(t) - матрица в предположении о том, что B(t)(U(t) + g(t)) = S(0,1)
g(t) - функция в предположении о том, что B(t)(U(t) + g(t)) = S(0,1)
'''
t0 = 0
b = 2
n = 1 + 2*b
Y0 = [1, 1]
X0 = [[3*math.cos((2*math.pi/n)*i) + 1, 3*math.sin((2*math.pi/n)*i) + 1]
      for i in range(n)]
def B(t):
    return [[1, 0], [0, 1]]
def g(t):
    return [0, 0]
```

Рис. 6. Фрагмент файла (модуля) с текущими параметрами

Шаг 3. Нажать кнопку «Выполнить моделирование» (см. рис. 3).

Будет открыто новое окно, предназначенное для проведения моделирования задач «Типа 1» (см. рис. 7).

В комплексе программ реализованы вычислительные схемы, разработанные в пятой главе. В частности, для задач «Типа 1» реализована приведенная в § 13 вычислительная схема расчета допустимых управлений $u_i(t)$

преследователей P_i, $i \in I(n)$, обеспечивающих одновременную b-кратную поимку убегающего E при любом допустимом управлении $v(t)$.

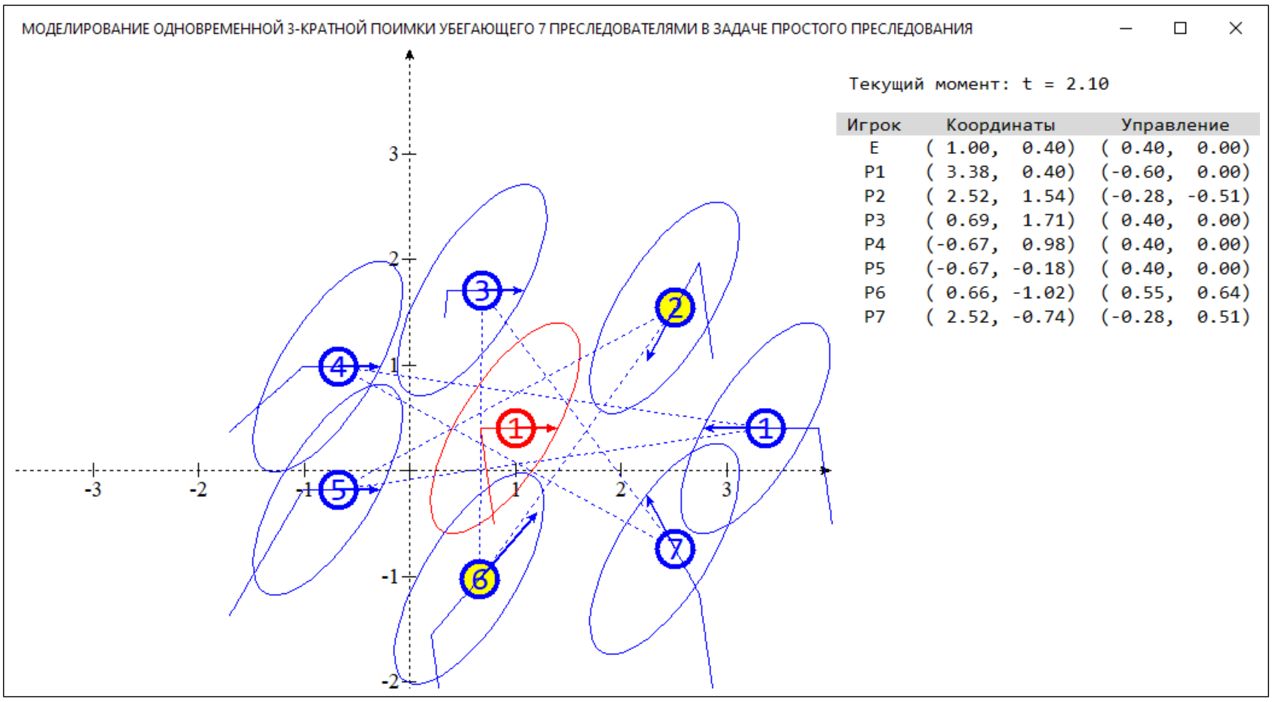

Рис. 7. Фрагмент моделирования задачи «Типа 1» с отображением всех элементов визуализации

Функциональные возможности комплекса программ для задач «Типа 1»:

задание управления $v(t)$ убегающего E (с клавиатуры или с использованием функции; эта и другие изменяемые возможности определяются в параметрах на шаге 2);

расчет управлений $u_i(t)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, и динамики всей системы конфликтного взаимодействия;

визуальное динамическое преставление позиций $y(t)$ (красная окружность с номером 1 в центре), $x_i(t)$ (синяя окружность с номером i в центре), $i \in I(n)$, и управлений $v(t)$, $u_i(t)$ (если $u_i(t) \in \operatorname{Int} U(t)$, то соответствующий круг окрашивается в желтый цвет), $i \in I(n)$, игроков;

настраиваемое («показывать» / «не показывать») отображение других элементов визуализации (окно с представлением числовой информации о текущих моменте, позициях и управлениях игроков; система координат; траектории движения игроков $y(s)$, $x_i(s)$, $i \in I(n)$, $s \in [t_0, t]$; граница множества допустимых управлений $U(t)$ с привязкой к каждому игроку, то есть $y(t) + \partial U(t)$, $x_i(t) + \partial U(t)$, $i \in I(n)$; синие пунктирные линии, позволяющие оценить выполнимость необходимого условия одновременной b-кратной поимки).

Управление процессом моделирования описано в диссертации.

После окончания моделирования осуществляется возврат к главному окну (см. рис. 3). Вычислительные эксперименты могут быть продолжены с этим же самым или другими типами задач конфликтного взаимодействия.

Проектирование и разработка комплекса программ реализованы на языке программирования Python (версия 3.9.7 64-bit), входящем в состав платформы Anaconda (версия 2021.11 64-bit). Применялись следующие инструменты: интегрированная среда разработки Spyder (версия 5.1.5); дизайнер графического интерфейса Qt Designer (версия 5.9.7). Перечень использованных библиотек: tkinter и PyQt5 (создание графических интерфейсов); math и random (вычисление значений математических функций и констант, получение псевдослучайных последовательностей чисел); subprocess, os, shutil и sys (управление процессами, взаимодействие с операционной системой и интерпретатором).

Комплекс реализован в виде отдельных программных модулей, выполняющих взаимосвязанные функции. Основные модули комплекса программ:

`MAIN` — модуль, в котором определяется тип задач конфликтного взаимодействия («Тип 1» — «`TYPE_CI = 1`», ..., «Тип 6» — «`TYPE_CI = 6`») и логика работы комплекса;

`PARAMETERS_TYPE_CI_1`, ..., `PARAMETERS_TYPE_CI_6` — модули, в которых задаются параметры задач конфликтного взаимодействия соответствующего типа («Тип 1», ..., «Тип 6»);

`MODELING_TYPE_CI_1`, ..., `MODELING_TYPE_CI_6` — модули, реализующие вычислительные схемы, рассмотренные в пятой главе;

`VISUALIZATION` — модуль, в котором определяются общие технологии и подходы к визуализации.

В комплекс заложена возможность его расширения — для исследования нового типа задач конфликтного взаимодействия необходимо добавить пару модулей (`PARAMETERS_TYPE_CI_N` и `MODELING_TYPE_CI_N`).

Весь комплекс программ расположен в одной папке Software Packages.

В **§ 20** описаны результаты работы комплекса программ при моделировании одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования (1).

В **§ 21** рассмотрены примеры моделирования одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе (5).

В **§ 22** приведены результаты моделирования одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования (2).

В **§ 23** рассмотрена работа комплекса программ при моделировании одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе (6).

В **§ 24** приведены результаты моделирования действий слабого защитника убегающего в задаче простого группового преследования (4).

В **§ 25** рассмотрены примеры моделирования действий слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе (8).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью диссертационной работы являлась разработка новых аналитических и численных методов исследования математических моделей задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

Основные результаты работы:

В главе 1 для математической формализации задачи конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов для случая простых движений при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников получены аналитические условия разрешимости и разработаны методы управления группой преследователей, гарантирующие: одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего (§ 1); суммарную одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку группы жестко скоординированных убегающих (§ 2); синхронную реализацию одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности (§ 3); одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего, имеющего в своем распоряжении группу защитников (§ 4).

В главе 2 для задачи конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов в форме нестационарных конфликтно управляемых процессов при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников получены аналитические условия разрешимости и разработаны методы управления группой преследователей, гарантирующие: одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего (§ 5); суммарную одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку группы жестко скоординированных убегающих (§ 6); синхронную реализацию одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности (§ 7); одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего, имеющего в своем распоряжении группу защитников (§ 8).

В главе 3 для задачи конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов в виде обобщенного нестационарного контрольного примера Л.С. Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников получены аналитические условия разрешимости и разработаны методы управления группой преследователей, гарантирующие: многократную поимку убегающего (§ 9); нестрогую одновременную многократную поимку убегающего (§ 10).

В главе 4 для задачи конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов при большей маневренности убегающих разработаны аналитические методы управления убегающими, гарантирующие: мягкое убегание от группы преследователей одного убегающего из любых начальных позиций (§ 11); мягкое убегание всех жестко скоординированных убегающих от группы преследователей из любых начальных позиций (§ 12).

В главе 5 для решения некоторых типов задач конфликтного взаимодействия разработаны вычислительные схемы: реализации одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования (§ 13) и конфликтно управляемом процессе (§ 14); реализации одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого преследования (§ 15) и конфликтно управляемом процессе (§ 16); действий слабого защитника убегающего в задаче простого преследования (§ 17) и конфликтно управляемом процессе (§ 18).

В главе 6 приведена общая характеристика используемого для проведения вычислительных экспериментов комплекса программ моделирования конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов (§ 19), а также рассмотрены результаты его работы при моделировании: одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования (§ 20); одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе (§ 21); одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования (§ 22); одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе (§ 23); действий слабого защитника убегающего в задаче простого группового преследования (§ 24); действий слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе (§ 25).

Основные результаты работы позволяют сделать вывод о том, что цель диссертационного исследования достигнута.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы. Результаты настоящей работы могут быть использованы для дальнейшего развития аналитических и численных методов исследования математических моделей задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов, рассматриваемых в рамках теории дифференциальных игр. Например, перспективным направлением исследований представляется разработка новых аналитических и численных методов управления, гарантирующих одновременную многократную поимку в других задачах конфликтного взаимодействия.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных ВАК РФ и Аттестационным советом УрФУ

1. Благодатских А.И. О мягком убегании группы скоординированных убегающих // Прикладная математика и механика. — 2005. — Т. 69. — Вып. 6. — С. 993—1002.

   Blagodatskikh A.I. Weak evasion of a group of coordinated evaders // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2005. — Vol. 69. — Iss. 6. — P. 891—899. (0,563 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)
2. Благодатских А.И. Групповое преследование убегающего в примере Понтрягина // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2005. — Вып. 4 (34). — С. 57—66.

   Blagodatskikh A.I. Group pursuit of evader in Pontryagin's example // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2005. — Iss. 4 (34). — P. 57—66. (0,313 п.л.) (WoS)
3. Благодатских А.И. К задаче группового преследования // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2006. — Вып. — 2 (36). — С. 3—8.

   Blagodatskikh A.I. To a problem of group pursuit // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2006. — Iss. 2 (36). — P. 3—8. (0,188 п.л.) (WoS)
4. Благодатских А.И. Об одной задаче группового преследования // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2006. — Вып. — 3 (37). — С. 11—12.

   Blagodatskikh A.I. One problem of group pursuit // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2006. — Iss. 3 (37). — P. 11—12. (0,125 п.л.) (WoS)
5. Благодатских А.И. О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2007. — № 1. — С. 17—24.

   Blagodatskikh A.I. About a problem of group pursuit in non-stationary Pontriagin's problem // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. — 2007. — № 1. — P. 17—24. (0,5 п.л.)
6. Благодатских А.И. Почти периодические конфликтно управляемые процессы со многими участниками // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 2. — С. 83—86.

   Blagodatskikh A.I. Almost periodic processes with conflict control with many participants // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2007. — Vol. 46. — Iss. 2. — P. 244—247. (0,25 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

7. Благодатских А.И. Пример Понтрягина со многими участниками // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2007. — Вып. 1. — С. 16—23.

   Blagodatskikh A.I. Pontryagin's problem with many players // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya Matematika. Informatika. Protsessy Upravleniya. — 2007. — Iss. 1. — P. 16—23. (0,5 п.л.) (zbMATH)

8. Благодатских А.И. Две нестационарные задачи преследования жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 1. — С. 47—60.

   Blagodatskikh A.I. Two non-stationary pursuit problems of a rigidly connected evaders // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2008. — Iss. 1. — P. 47—60. (0,875 п.л.)

9. Благодатских А.И. О некоторых задачах группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 2. — С. 19—20.

   Blagodatskikh A.I. About some problems of group pursuit // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2008. — Iss. 2. — P. 19—20. (0,125 п.л.)

10. Благодатских А.И. Групповое преследование в нестационарном примере Понтрягина // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44. — № 1. — С. 39—44.

    Blagodatskikh A.I. Group pursuit in Pontryagin's nonstationary example // Differential Equations. — 2008. — Vol. 44. — № 1. — P. 40—46. (0,438 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

11. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73. — Вып. 1. — С. 54—59.

    Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2009. — Vol. 73. — Iss. 1. — P. 36—40. (0,313 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

12. Благодатских А.И. Многократная поимка в примере Понтрягина // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 2. — С. 3—12.

    Blagodatskikh A.I. Multiple capture in a Pontriagin's problem // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2009. — Iss. 2. — P. 3—12. (0,625 п.л.)

13. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка убегающих // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2012. — Вып. 1 (39). — С. 13—14.

    Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture of evaders // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2012. — Iss. 1 (39). — P. 13—14. (0,125 п.л.) (WoS, zbMATH)
14. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — Вып. 3. — С. 13—18.

    Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture of evaders in a simple group pursuit problem // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2012. — Iss. 3. — P. 13—18. (0,375 п.л.) (zbMATH)
15. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикладная математика и механика. — 2013. — Т. 77. — Вып. 3. — С. 433—440.

    Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2013. — Vol. 77. — Iss. 3. — P. 314—320. (0,438 п.л.) (WoS, zbMATH)
16. Благодатских А.И. Поимка группы убегающих в конфликтно управляемом процессе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — Вып. 4. — С. 20—26.

    Blagodatskikh A.I. Capture of a group of evaders in a conflict-controlled process // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2013. — Iss. 4. — P. 20—26. (0,438 п.л.) (zbMATH)
17. Благодатских А.И. Мягкое убегание жестко скоординированных убегающих в нелинейной задаче группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2014. — Вып. 4. — С. 3—17.

    Blagodatskikh A.I. Weak evasion of a group of rigidly coordinated evaders in the nonlinear problem of group pursuit // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2014. — Iss. 4. — P. 3—17. (0,938 п.л.) (zbMATH)
18. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Групповое преследование с фазовыми ограничениями в почти периодическом примере Понтрягина // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51. — № 3. — С. 387—394.

    Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. Group pursuit with state constraints in Pontryagin's almost periodic example // Differential Equations. — 2015. — Vol. 51. — № 3. — P. 391—398. (0,5 п.л. / 0,25 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

19. Благодатских А.И. Задачи группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2015. — Вып. 2 (46). — С. 13—20.

    Blagodatskikh A.I. Problems of group pursuit with equal opportunities in a presence of defenders for an evader // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2015. — Iss. 2 (46). — P. 13—20. (0,5 п.л.) (WoS, zbMATH)
20. Благодатских А.И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2016. — Т. 26. — Вып. 1. — С. 46—57.

    Blagodatskikh A.I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2016. — Vol. 26. — Iss. 1. — P. 46—57. (0,75 п.л.) (Scopus, zbMATH)
21. Благодатских А.И. Задача простого группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего // Математическая теория игр и ее приложения. — 2014. — Т. 6. — Вып. 2. — С. 32—41.

    Blagodatskikh A.I. A simple group pursuit problem with equal opportunities and the presence of evader's defenders // Automation and Remote Control. — 2016. — Vol. 77. — № 4. — P. 716—721. (0,375 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)
22. Благодатских А.И. Уклонение жестко скоординированных убегающих при наличии фазовых ограничений // Математическая теория игр и ее приложения. — 2015. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 3—14.

    Blagodatskikh A.I. Evasion of rigidly coordinated targets under phase constraints // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78. — № 6. — P. 1151—1158. (0,5 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)
23. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // Dynamic Games and Applications. — 2019. — Vol. 9. — Iss. 3. — P. 594—613. (1,25 п.л. / 0,625 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)
24. Благодатских А.И. Синхронная реализация одновременных многократных поимок убегающих // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2023. — Т. 61. — С. 3—26.

    Blagodatskikh A.I. Synchronous implementation of simultaneous multiple captures of evaders // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2023. — Vol. 61. — P. 3—26. (1,5 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)
25. Благодатских А.И., Банников А.С. Одновременная многократная поимка при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2023. — Т. 62. — С. 10—29.

Blagodatskikh A.I., Bannikov A.S. Simultaneous multiplecapture in the presence of evader's defenders // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2023. — Vol. 62. — P. 10—29. (1,25 п.л. / 0,625 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

26. Благодатских А.И. Моделирование одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023618634. Дата регистрации: 27.04.2023.
27. Благодатских А.И. Моделирование одновременной многократной поимки жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023619171. Дата регистрации: 04.05.2023.
28. Благодатских А.И. Моделирование одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023619727. Дата регистрации: 15.05.2023.
29. Благодатских А.И. Моделирование действий защитника убегающего в задаче простого преследования // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023619892. Дата регистрации: 17.05.2023.
30. Благодатских А.И. Моделирование действий защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024615850. Дата регистрации: 13.03.2024.
31. Благодатских А.И. Моделирование одновременной многократной поимки жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024617971. Дата регистрации: 08.04.2024.

Монография

32. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. — Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, 2009. — 264 с. (15,34 п.л. / 4,602 п.л.)

33. Благодатских А.И., Петров Н.Н. О некоторых задачах группового преследования // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби: Тезисы докладов Международного семинара. — Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2005. — С. 38—39. (0,063 п.л. / 0,031 п.л.)
34. Благодатских А.И., Петров Н.Н. О некоторых задачах группового преследования // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби: Труды Международного семинара. — Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2006. — Т. 1. — С. 189—196. (0,5 п.л. / 0,25 п.л.)
35. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Пример Понтрягина со многими участниками // Устойчивость и процессы управления: Труды Международной конференции. — СПб: Изд-во Санкт-Петербургского государственного университета, 2005. — Т. 1. — С. 504—513. (0,625 п.л. / 0,313 п.л.)
36. Благодатских А.И. Об одном почти периодическом конфликтно управляемом процессе со многими участниками // Математика. Механика. Информатика: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. — Челябинск: Изд-во Челябинского государственного университета, 2006. — С. 18. (0,031 п.л.)
37. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтно управляемые процессы при взаимодействии групп управляемых объектов // Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений: Тезисы докладов научного семинара. — М.: Изд-во Московского государственного университета, 2006. — С. 12. (0,031 п.л. / 0,016 п.л.)
38. Благодатских А.И. Почти периодические конфликтно управляемые процессы со многими участниками // Дифференциальные уравнения и топология: Тезисы докладов Международной конференции. — М.: Изд-во Московского государственного университета, 2008. — С. 323—324. (0,125 п.л.)
39. Благодатских А.И. Многократная поимка в примере Понтрягина // Девятая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция: Тезисы докладов. — Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, 2008. — С. 115—116. (0,063 п.л.)
40. Благодатских А.И. О некоторых задачах группового преследования // Современные проблемы математики, механики и их приложений: Материалы Международной конференции. — М.: Изд-во Московского государственного университета, 2009. — С. 124. (0,063 п.л.)
41. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка убегающих в задачах преследования с равными возможностями участников // Современные проблемы математики: Тезисы докладов Международной (44-й

Всероссийской) молодежной школы-конференции. — Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2013. — С. 80—83. (0,125 п.л.)
42. Благодатских А.И. Групповое преследование при наличии защитников убегающего // Динамика систем и процессы управления: Тезисы докладов Международной конференции. — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, УрФУ, 2014. — С. 44—46. (0,094 п.л.)
43. Благодатских А.И. Групповое преследование при наличии защитников убегающего // Динамика систем и процессы управления: Труды Международной конференции. — Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2015. — С. 96—102. (0,438 п.л.)
44. Благодатских А.И. Мягкое убегание жестко скоординированных объектов // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби: Тезисы докладов Международного семинара. — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, УрФУ, 2015. — С. 40—42. (0,094 п.л.)
45. Благодатских А.И. Поимка защищаемой группы убегающих в конфликтно управляемом процессе // Теория управления и математическое моделирование: Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. — Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, 2015. — С. 150—152. (0,188 п.л.)
46. Благодатских А.И. К задаче о мягком убегании жестко скоординированных объектов // Современные проблемы математики и ее приложений: Труды 46-й Международной молодежной школы-конференции. — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2015. — С. 33—37. (0,156 п.л.)
47. Благодатских А.И. Об одновременной многократной поимке группы убегающих // Устойчивость, управление, дифференциальные игры: Материалы Международной конференции. — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2019. — С. 84—87. (0,125 п.л.)
48. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задачах группового преследования // Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всероссийской конференции с международным участием. — Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, 2020. — С. 154—156. (0,094 п.л.)
49. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка группы убегающих // Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всероссийской конференции с международным участием. — Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, 2022. — С. 159—163. (0,156 п.л.)
50. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задачах группового преследования // Системный анализ: моделирование и управление: Тезисы докладов Международной конференции. — М.:

Изд-во Московского государственного университета, 2024. — С. 38—40. (0,094 п.л.)

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

A1. Банников А.С. Некоторые нестационарные задачи группового преследования // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2013. — Вып. 1 (41). — С. 3—46.

A2. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Задача преследования группы жестко скоординированных убегающих // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2001. — № 5. — С. 75—79.

A3. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. — 2002. — Т. 66. — Вып. 2. — С. 234—241.

A4. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. — М.: Советское радио, 1980. — 304 с.

A5. Васильева Л.Г. Об одной дифференциальной игре убегания // Дифференциальные, бескоалиционные, кооперативные и статистические игры. — Калинин: Изд-во Калининского ун-та, 1979. — С. 26—33.

A6. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестник МГУ. Серия вычислительная математика и кибернетика. — 1983. — № 1. — С. 41—47.

A7. Григоренко Н.Л. Задача преследования несколькими объектами // Труды математического института АН СССР. — 1984. — Т. 166. — С. 61—75.

A8. Григоренко Н.Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих // ДАН СССР. — 1985. — Т. 282. — № 5. — С. 1051—1054.

A9. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 197 с.

A10. Гусятников П.Б. Теория дифференциальных игр. — М.: МФТИ, 1982. — 99 с.

A11. Зак В.Л. Задача уклонения от многих преследователей // ДАН СССР. — 1982. — Т. 265. — № 5. — С. 1051—1053.

A12. Зак В.Л. Построение стратегии уклонения от нескольких преследователей для динамических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1984. — № 4. — С. 143—147.

A13. Иванов Р.П. Простое преследование-убегание на компакте // ДАН СССР. — 1980. — Т. 254. — № 6. — С. 1318—1321.

A14. Иванов Р.П., Ледяев Ю.С. Оптимальность времени преследования в дифференциальной игре многих объектов с простым движением // Труды Математического института АН СССР. — 1981. — Т. 158. — С. 87—97.

A15. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с.

A16. Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц // Труды математического института АН СССР. — 1977. — Т. 143. — С. 105—128.

A17. Пацко В.С., Турова В.Л. Численное решение дифференциальных игр на плоскости. Препринт. — Екатеринбург. ИММ УрО РАН, 1995. — 77 с.

A18. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23. — № 4. — С. 725—726.

A19. Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19. — № 8. — С. 1366—1374.

A20. Петров Н.Н. Простое преследование при наличии фазовых ограничений // Деп. в ВИНИТИ 20 марта 1984 г. — № 1684. — 14 с.

A21. Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математика. Изв. вузов. — 1994. — № 4 (383). — С. 24—29.

A22. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61. — Вып. 5. — С. 747—754.

A23. Петров Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 12. — С. 89—95.

A24. Петров Н.Н. Теория игр. — Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1997. — 195 с.

A25. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2015. — Т. 21. — № 2. — С. 178—186.

A26. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 5. — С. 128—135.

A27. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23. — № 1. — С. 212—218.

A28. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка заданного числа убегающих в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2020. — Т. 186. — С. 108—115.

A29. Петров Н.Н., Нарманов А.Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28. — Вып. 2. — С. 193—198.
A30. Петров Н.Н., Нарманов А.Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче с дробными производными и простой матрицей // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25. — № 3. — С. 188—199.
A31. Петров Н.Н., Щелчков К.А. К задаче Черноусько // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — Вып. 4. — С. 62—67.
A32. Петросян Л.А. Дифференциальные игры на выживание со многими участниками // ДАН СССР. — 1965. — Т. 161. — № 2. — С. 285—287.
A33. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. — 232 с.
A34. Понтрягин Л.С. К теории дифференциальных игр // Успехи математических наук. — 1966. — Т. 21. — Вып. 4. — С. 219—274.
A35. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх I // ДАН СССР. — 1967. — Т. 174. — № 6. — С. 1278—1280.
A36. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // Труды математического института АН СССР. — 1971. — Т. 112. — С 30—63.
A37. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. — 1980. — Т. 112. — № 3. — С. 307—330.
A38. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. — М.: Наука, 1988. — 575 с.
A39. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. — 1971. — Т. 7. — № 3. — С. 436—445.
A40. Прокопович П.В., Чикрий А.А. Линейная задача убегания при взаимодействии групп объектов // Прикладная математика и механика. — 1994. — Т. 58. — Вып. 4. — С. 12—21.
A41. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145—146.
A42. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — Киев: Наукова думка, 1992. — 259 с.
A43. Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С. Об одной задаче группового преследования // Кибернетика. — 1979. — № 6. — С. 145—146.
A44. Рихсиев Б.Б. Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх многих лиц с простым движением // Изв. АН Узб. ССР. Серия физ.-мат. наук. — 1984. — № 4. — С. 37—39.
A45. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простым движением. — Ташкент: Изд-во Фан, 1989. — 232 с.

A46. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН Узб. ССР. — 1983. — № 4. — С. 3—6.

A47. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. — Ташкент: Изд-во Фан, 2000. — 176 с.

A48. Субботин А.И. Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // ДАН СССР. — 1980. — Т. 254. — № 2. — С. 293—297.

A49. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. — М.: Наука, 1991. — 216 с.

A50. Субботин А.И., Субботина Н.Н. Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой дифференциальной игры // ДАН СССР. — 1978. — Т. 243. — № 4. — С. 862—865.

A51. Токманцев Т.Б., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Численная аппроксимация стабильных мостов в дифференциальных играх на конечном промежутке времени // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби: Труды Международного семинара. — Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2006. — Т. 1. — С. 294—302.

A52. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. — 1976. — Т. 40. — Вып. 1. — С. 14—24.

A53. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. — М.: Наука, 1978. — 270 с.

A54. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наукова думка, 1992. — 383 с.

A55. Чикрий А.А., Прокопович П.В. Задача убегания от группы для однотипных инерционных объектов // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 6. — С. 998—1004.

A56. Чиркова Л.С. Уклонение от группы инерционных объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 3. — С. 45—53.

A57. Чиркова Л.С. Уклонение от группы инерционных объектов в игре четвертого порядка // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2013. — Вып. 2 (42). — С. 58—102.

A58. Хайдаров Б.К. Позиционная l-поимка в игре одного убегающего и нескольких преследователей // Прикладная математика и механика. — 1984. — Т. 48. — Вып. 4. — С. 574—579.

A59. Borovko P., Rzymowski W., Stachura A. Evasion from many pursuers in the simple case // J. Math. Anal. and Appl. — 1988. — V. 135. — № 1. — P. 75—80.

A60. Chodun W. Differential games of evasion with many pursuers // J. Math. Anal. and Appl. — 1989. — V. 142. — № 2. — P. 370—389.
A61. Garcia E., Casbeer D.W., Pachter M. Active target defense differential game with a fast defender // Proceedings of the American Control Conference. — 2015. — P. 3752—3757.
A62. Garcia E., Casbeer D.W., Pachter M. The complete differential game of active target defense // J. Optim. Theory Appl. — 2021. — V. 191. — P. 675—699.
A63. Kumkov S.S., Patsko V.S. Attacker-defender-target problem in the framework of space intercept // Proceedings of the 57th Israel Annual Conference on Aerospace Science. 2017.
A64. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games // Сибирские электронные математические известия. — 2022. — V. 19. — Iss. 1. — P. 371—377.
A65. Rusnak I. The lady, the bandits and the body guards — a two team dynamic game // Proceedings of the 16th IFAC World Congress. — 2005. — V. 38. — P. 934—939.
A66. Steinhaus H. Definitions for a theory of games and pursuit // Mysl Academika. — 1925. — V. 1. — № 1. — P. 13—14.