ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

БЛАГОДАТСКИХ АЛЕКСАНДР ИВАНОВИЧ

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ КОНФЛИКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГРУПП УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Специальность 1.2.2.
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор физико-математических наук, профессор
Петров Николай Никандрович

Ижевск — 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\mathbb{R}^k$ — пространство k-мерных вектор-столбцов с евклидовой нормой;

$\langle a, b\rangle$ — скалярное произведение векторов $a, b \in \mathbb{R}^k$;

$|a| = \sqrt{\langle a, a\rangle}$ — евклидова норма (длина) вектора $a \in \mathbb{R}^k$;

$S(c, r) = \{a \in \mathbb{R}^k : |a - c| \leqslant r\}$ — замкнутый шар с центром в точке c радиуса r;

$\lambda(w, \xi; W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\bigr\}$ — величина, определенная для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$;

$\lambda(w, \xi; S(0,1)) = \dfrac{\langle w, \xi\rangle + \sqrt{\langle w, \xi\rangle^2 + |\xi|^2(1 - |w|^2)}}{|\xi|^2}$ — величина, определенная для всех $w \in S(0,1)$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$;

$I(q) = \{1, 2, \ldots, q\}$ для всех $q \geqslant 1$;

$I^0(q) = \{0, 1, 2, \ldots, q\}$ для всех $q \geqslant 0$;

$I^*(q_1, q_2) = \{q_1, q_1 + 1, q_1 + 2, \ldots, q_2\}$ для всех $q_2 \geqslant q_1$;

$C_n^q = \dfrac{n!}{q!(n-q)!}$ — число сочетаний из n элементов по q;

O — нуль-матрица соответствующей размерности;

$\mathcal{I}$ — единичная матрица соответствующей размерности;

$\mathrm{Int} A$ – внутренность множества A;

$\mathrm{co} A$ – выпуклая оболочка множества A;

∂A – граница множества A;

$|A|$ – число элементов множества A;

ι — мнимая единица.

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Математические модели задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов, рассматриваемые в рамках теории дифференциальных игр, являются **объектом исследования** диссертационной работы.

Теория конфликтно управляемых процессов представляет собой интенсивно развивающийся раздел современной математики. В данной теории исследуются задачи управления динамическими процессами в условиях конфликта, который предполагает наличие двух или более сторон, способных воздействовать на процесс с противоположными или несовпадающими целями. Такие динамические процессы, моделируемые обыкновенными дифференциальными уравнениями, называют также дифференциальными играми.

Развитие теории дифференциальных игр стимулировалось наличием реальных прикладных задач конфликтного управления механическими системами, в том числе военного применения, экономики, экологии, биологии и некоторых других областей.

В теории дифференциальных игр двух лиц получены глубокие и содержательные результаты, основополагающий вклад в этом направлении внесли фундаментальные работы школ академика Н.Н. Красовского и академика Л.С. Понтрягина.

Естественным обобщением дифференциальных игр двух лиц являются задачи преследования-убегания с участием группы управляемых объектов, хотя бы с одной из противоборствующих сторон. Наибольшую трудность для исследований представляют задачи конфликтного взаимодействия между группами управляемых объектов. Специфика этих задач требует дальнейшего развития методов их исследования.

Аналитические и численные методы исследования математических моделей задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов являются **предметом исследования** настоящей работы.

Степень разработанности темы исследования. В 1925 году опубликована работа Г. Штейнгауза (H. Steinhaus) [237], являющаяся одной из первых по развитой позднее теории, в ней задача преследования формулируется как дифференциальная игра преследования.

Полномасштабное развитие теории дифференциальных игр началось во второй половине прошлого века и продолжается до сих пор. Признание статуса самостоятельной теории произошло благодаря исследованиям Н.Н. Красовского [58–61], Л.С. Понтрягина [129–139], Л.А. Петросяна [118–126], Б.Н. Пшеничного [142–151], Р. Айзекса (R. Isaacs) [7], В.Г. Флеминга (W.H. Fleming) [224–226], А. Фридмана (A. Friedman) [228]. Большой вклад в теорию дифференциальных игр внесли А.А. Азамов [3–6, 160], А.Я. Азимов, Э.Г. Альбрехт [8], М. Барди (M. Bardi), В.Д. Батухтин, Т. Башар (T. Basar), Ю.И. Бердышев, А. Брайсон (A. Bryson), М.С. Габриэлян [29], Н.Л. Григоренко [30–37], Р.В. Гамкрелидзе [139], П.Б. Гусятников [38–40], М.И. Гусев, В.Г. Гусейнов, В. Жимовский (W. Rzymowski) [221, 236], В.И. Жуковский [25, 45], В.В. Захаров, М.И. Зеликин, Д. Зонневенд, Р.П. Иванов [51–54], А.Ф. Клейменов, А.В. Кряжимский, А.Б. Куржанский [62,63], А.Н. Красовский [57], Дж. Лейтман (G. Leitman) [233], В.Н. Лагунов [65], Ю.С. Ледяев [54], Н.Ю. Лукоянов, А.А. Меликян [28, 70–72, 181], Е.Ф. Мищенко [73–75, 135–139], М.С. Никольский [75–77], В.В. Остапенко [78, 146], Ю.С. Осипов [63], А.Г. Пашков [85, 86], В.С. Пацко [82–84, 232], Н.Н. Петров [88–93], Н.Никандр. Петров [23, 24, 93–117, 234, 256, 261, 270–273, 275], Г.К. Пожарицкий, Е.С. Половинкин [49], Б.Б. Рихсиев [48, 64, 126, 152–154, 161, 162], И.С. Раппопорт [147–151, 183], Н.Ю. Сатимов [74, 75, 157–164], А.И. Субботин [29, 59, 60, 167–170], Н.Н. Субботина [170], В.Е. Третьяков, В.Н. Ушаков [171, 172, 176, 177], В.И. Ухоботов [174, 175], В. Ходун (W. Chodun) [223], А.Г. Ченцов [167, 179, 180], Ф.Л. Черноусько [181, 182], А.А. Чикрий [9, 45, 87, 127, 128, 140, 141, 149–151, 183–205, 222], С.В. Чистяков [208], Р. Эллиот (R. Elliot), Л.П. Югай [217, 218] и многие другие математики.

Н.Н. Красовский и А.И. Субботин в монографии [60] представили основные положения созданной ими теории позиционных дифференциальных игр двух лиц. Задачи конфликтного управления моделируются системой вида

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \tag{0.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in P$ — ресурс первого игрока (преследователя), $v \in Q$ — ресурс второго игрока (убегающего), f — непрерывная функция. Игроки используют позиционные управления.

Задача первого игрока — встреча позиции $\{t, x(t)\}$ с заданным множеством M и ее сохранение в заданном множестве N при любом допустимом противодействии второго игрока. Задача второго игрока — уклонение от встречи, указанной выше, при любом допустимом противодействии первого игрока. Совокупность этих задач составляет игру сближения-уклонения.

Решение задачи сближения состоит из построения u-стабильного моста, содержащего начальную позицию системы (0.1), и применения преследователем экстремального управления, сохраняющего позицию системы (0.1) на u-стабильном мосте вплоть до ее встречи с терминальным множеством M.

При решении задачи уклонения следует построить v-стабильный мост, содержащий начальную позицию системы (0.1), а затем убегающему применить экстремальное управление, сохраняющее позицию системы (0.1) на v-стабильном мосте, который не пересекает множество M.

Если всюду выполнено условие седловой точки для маленькой игры, то имеет место теорема об альтернативе, которая утверждает, что из любой начальной позиции системы (0.1) разрешима либо задача сближения, либо задача уклонения.

Теорема об альтернативе является центральным результатом теории позиционных дифференциальных игр, из нее следует, что предложенный позиционный способ управления принципиально неулучшаем.

Отметим, что полное решение игры сближения-уклонения обеспечивают максимальные u- и v-стабильные мосты. Вместе с тем при решении реальных задач бывает достаточно строить u- или v-стабильные мосты, которые не являются максимальными.

В работах научной школы Н.Н. Красовского большое внимание отводится численному исследованию прикладных задач. В качестве примеров можно указать работы В.С. Пацко и В.Л. Туровой [84], а также В.Н. Ушакова, А.А. Успенского и Т.Б. Токманцева [172].

А.И. Субботин [168–170] совместно с Н.Н. Субботиной [170] предложили определять свойство стабильности с помощью дифференциальных неравенств, продемонстрирована их связь с обобщенными решениями уравнений Гамильтона-Якоби. Построенный математический аппарат эффективно используется для решения позиционных дифференциальных игр.

Л.С. Понтрягин [129] при исследовании дифференциальных игр

$$\dot{z} = f(z, u, v) \tag{0.2}$$

предложил рассматривать их с точки зрении одного из двух игроков (либо преследователя, которому доступно управление u; либо убегающего, распоряжающегося управлением v), разрешая строить управление на основе необходимой ему информационной дискриминации противника:

«... мы связываем с дифференциальной игрой две различные задачи... в каждый момент времени t мы выбираем значение $u(t)$ этого управления, используя функции $z(s)$ и $v(s)$ на отрезке $t - \theta \leqslant s \leqslant t$, где θ — подходящим образом выбранное положительное число. Таковы привила игры преследования... в каждый момент времени t мы выбираем значение $v(t)$ этого управления, используя функции $z(s)$ и $u(s)$ на отрезке $t - \theta \leqslant s \leqslant t$. Таковы правила игры убегания...» [130];

«... При построении управления $u(t_1)$ в момент времени t_1 мы будем использовать значение $z(t_1)$ в тот же момент времени и управление $v(t)$ на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_1 + \varepsilon$, где ε — произвольно малое положительное число. В задаче преследования такая постановка вопроса вполне допустима; она возникает в случае, если преследующий объект гонится не за самим убегающим объектом, а за тем местом, где убегающий объект находился ε секунд назад. Для решения задачи в обычной постановке вопроса следует произвести предельный переход при $\varepsilon \to 0 \ldots$» [131].

Л.С. Понтрягин, на основе своих результатов [133] для нелинейных дифференциальных игр, создал два метода решения задачи преследования для линейного случая [134]. Первый метод Л.С. Понтрягина является наиболее эффективным, при дискриминации убегающего возможно получение достаточных условий поимки в конкретных задачах преследования.

Л.С. Понтрягин и Е.Ф. Мищенко исследовали [135] игру убегания при дискриминации преследователя для линейного случая, получены достаточные условия уклонения от встречи, а также оценка расстояния до терминального множества на бесконечном полуинтервале времени.

Новые методы решения задач конфликтного взаимодействия с участием группы управляемых объектов, хотя бы с одной из противоборствующих сторон, были представлены Н.Л. Григоренко, П.Б. Гусятниковым, В. Жимовским, В.И. Жуковским, Е.Ф. Мищенко, М.С. Никольским, Н.Н. Петровым, Н.Никандр. Петровым, Л.А. Петросяном, Б.Н. Пшеничным, Б.Б. Рихсиевым, Н.Ю. Сатимовым, В. Ходуном, Ф.Л. Черноусько, А.А. Чикрием и их соавторами (см. [25, 34, 40, 75, 92–94, 121, 146, 153, 162, 181, 196, 221, 223, 270]), а также многими другими математиками.

Одно из первых исследований задач группового преследования опубликовано Л.А. Петросяном [118], получены условия поимки, базирующиеся на стратегии параллельного преследования.

Б.Н. Пшеничный получил [142] необходимые и достаточные условия поимки убегающего в задаче простого группового преследования с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников. Поимка происходит в том и только том случае, когда начальная позиция убегающего лежит внутри выпуклой оболочки множества начальных позиций преследователей. Отметим, что эта работа в значительной степени стимулировала исследование задач конфликтного взаимодействия, в том числе при равных возможностях всех участников.

Ф.Л. Черноусько в работе [182] рассматривалась задача уклонения управляемой точки, скорость которой ограничена по величине, от встречи с любым конечным числом преследующих точек, скорости которых также ограничены по величине и строго меньше скорости уклоняющейся точки. Был построен такой способ управления, который обеспечивает уклонение от всех преследователей.

Н.Л. Григоренко [30] получены необходимые и достаточные условия уклонения от встречи одного убегающего от группы преследователей при условии, что убегающий и преследователи обладают простым движением, а множеством управлений каждого игрока является один и тот же выпуклый компакт.

Л.Г. Васильева обобщает [27] результат Б.Н. Пшеничного [142] на случай l-поимки.

Для случая простых движений Б.К. Хайдаров рассмотрел [209] задачу позиционной l-поимки одного убегающего группой преследователей.

В работах Р.П. Иванова, Ю.С. Ледяева [54], Б.Б. Рихсиева [152] получены условия оптимальности времени преследования в задачах простого группового преследования одного убегающего.

В.Л. Зак обобщил [46, 47] результаты Ф.Л. Черноусько [182] на случай более общих уравнений движений участников, который предполагает динамическое превосходство убегающего над всеми преследователями.

Н.Н. Петров и К.А. Щелчков рассмотрели [117] задачу простого группового преследования одного убегающего, являющуюся еще одной модификацией задачи Ф.Л. Черноусько [182]. Здесь предполагается, что убегающий имеет динамическое превосходство не над всеми преследователями. Получены достаточные условия уклонения от всех преследователей на бесконечном полуинтервале времени и на конечном интервале любой длины.

Н.Ю. Сатимов, М.Ш. Маматов рассмотрели [158] линейную задачу преследования группой преследователей группы жестко скоординированных (использующих одинаковое управление) убегающих. Получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего. Работы Н.Н. Петрова и Д.А. Вагина [23, 105] дополняют результаты [158].

Н.Л. Григоренко получены [31] достаточные условия поимки двух убегающих в квазилинейных дифференциальных играх.

Н.Л. Григоренко ввел понятие многократной поимки [32], которая происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, для конфликтно управляемых процессов им представлены достаточные (а для задачи с простыми движениями и равными возможностями необходимые и достаточные) условия многократной поимки убегающего. В самом простом случае условие многократной поимки можно представить следующим образом: исключим из игры любого преследователя, если при этом каждый раз для оставшихся преследователей будет выполнено условие поимки [142], то в исходной игре получим выполнимость условия двукратной поимки; уберем любых двух преследователей, если условие поимки всегда выполняется, то в исходной игре получаем 3-кратную поимку и так далее.

Р.П. Иванов рассмотрел [52] задачу простого группового преследования одного убегающего при условии, что последний не покидает пределы выпуклого компакта с непустой внутренностью. Доказано, что если число преследователей меньше размерности множества, то происходит уклонение от встречи, иначе — поимка.

Работа [95] Н.Н. Петрова обобщает результат Р.П. Иванова на случай, когда убегающий не покидает пределы выпуклого многогранного множества с непустой внутренностью.

Н.Н. Петров и Н.Никандр. Петров, по всей видимости, первыми исследовали [93] задачу преследования группой преследователей группы убегающих. Динамика объектов является простой, максимальные скорости всех участников по норме не превосходят единицы, целью преследователей является поимка всей группы убегающих. Получены достаточные условия уклонения от встречи, а также оценки сверху и снизу минимального числа убегающих, уклоняющихся от заданного числа преследователей из любых начальных позиций.

Работа П.В. Прокоповича и А.А. Чикрия [141] обобщает результаты работы [93] на линейные дифференциальные игры.

Б.Н. Пшеничный и И.С. Раппопорт рассмотрели [148] задачу группового преследования одного убегающего в дифференциальной игре, в которой закон движения каждого участника имеет вид: $\dot{z} + az = u$, $|\, u \,| \leqslant 1$, $a < 0$. Были получены необходимые и достаточные условия поимки.

Н.Н. Петров рассмотрел [102] задачу преследования группой преследователей одного убегающего в примере Л.С. Понтрягина с равными динамическими и инерционными возможностями всех участников. Были получены достаточные условия поимки.

Задача группового преследования жестко скоординированных убегающих в примере Л.С. Понтрягина при равных динамических и инерционных возможностях всех участников рассмотрена Д.А. Вагиным и Н.Н. Петровым [24]. Получены достаточные условия поимки хотя бы одного убегающего.

А.А. Чикрий [196] и Н.Н. Петров [104] получили достаточные условия многократной поимки убегающего в конфликтно управляемых процессах и в примере Л.С. Понтрягина с равными возможностями.

Н.Н. Петровым и Н.А. Соловьевой рассмотрены рекуррентные дифференциальные игры при равных возможностях участников: для примера Л.С. Понтрягина [111, 112] и конфликтно управляемого процесса [113] получены достаточные условия многократной поимки убегающего; для примера Л.С. Понтрягина [114] и конфликтно управляемого процесса [234] получены достаточные условия поимки не менее q убегающих при условии, что каждого убегающего должны поймать не менее чем r преследователей.

Задачу о многократной поимке не менее q убегающих с равными возможностями участников при указанном выше условии рассмотрели Н. Н. Петров и А. Я. Нарманов, были получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи преследования для случая простых движений [115], а также достаточные условия завершения преследования в задаче с дробными производными и простой матрицей [116].

П.В. Прокопович и А.А. Чикрий рассмотрели [198] задачу уклонения одного убегающего от группы преследователей в дифференциальной игре, в которой закон движения каждого участника имеет вид: $\ddot{z} = u$, $|\,u\,| \leqslant 1$. Были получены достаточные условия убегания.

Л.С. Чиркова получила достаточные условия уклонения одного убегающего от группы преследователей при равных динамических и инерционных возможностях всех участников при условии, что закон движения каждого участника задается дифференциальным уравнением третьего порядка [206] или уравнением четвертого порядка [207].

А.С. Банников рассмотрел [12] нестационарные конфликтно управляемые процессы при одинаковых динамических и инерционных возможностях всех игроков. Были получены условия уклонения одного и нескольких убегающих от группы преследователей, а также приведены некоторые оценки количества убегающих, достаточного для уклонения хотя бы одного преследователя из любых начальных позиций.

Задачи уклонения одного убегающего, обладающего большей маневренностью, от группы преследователей в примере Л.С. Понтрягина рассматривались Н.Ю. Сатимовым и Б.Б. Рихсиевым [162]. Были получены достаточные условия убегания.

В работах [229, 230, 232, 235] рассматривались различные модели задач конфликтного взаимодействия, в которых участвуют три типа игроков — преследователь, убегающий и защитник убегающего.

Целью работы является разработка новых аналитических и численных методов исследования математических моделей задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

Для достижения цели исследованы математические формализации следующих задач:

Задача 1. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов для случая простых движений при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников.

Задача 2. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов в форме нестационарных конфликтно управляемых процессов при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников.

Задача 3. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов в виде обобщенного нестационарного контрольного примера Л.С. Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников.

Задача 4. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов при большей маневренности убегающих.

Отметим, что задачи 2 и 3 являются разными обобщениями задачи 1.

Два игрока имеют одинаковые инерционные возможности, если дифференциальные уравнения, описывающие их движения, совпадают (при этом начальные позиции и ограничения на множества допустимых управлений могут различаться). Если порядок старшей производной, входящей в уравнение движения убегающего, строго меньше порядка старшей производной, входящей в уравнение движения преследователя, то это означает, что убегающий обладает большей маневренностью, чем преследователь. Два игрока имеют одинаковые динамические возможности, если у них совпадают множества допустимых управлений.

В данной работе под поимкой понимается совпадение геометрических координат преследователя и убегающего в некоторый момент. Многократная поимка происходит, если заданное количество преследователей ловят убегающего, при этом моменты поимки могут не совпадать. Если моменты поимки (не обязательно наименьшие) совпадают, то говорят, что происходит нестрогая одновременная многократная поимка убегающего. Одновременная многократная поимка убегающего происходит, если совпадают наименьшие моменты поимки. Далее, если некоторые участники конфликтного взаимодействия все время используют одинаковое управление, то они называются жестко скоординированными. Наконец, мягкое убегание означает, что реализовалась ситуация, в которой у преследователя и убегающего в каждый момент времени не совпадают геометрические координаты, скорости, ускорения и так далее.

Научная новизна для перечисленных выше задач заключается в полученных аналитических решениях, при выполнении определенных условий, гарантирующих:

1. Для задач 1 и 2 одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего; суммарную одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку группы жестко скоординированных убегающих; синхронную реализацию одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности; одновременную многократную (нестрогую одновременную мно-

гократную, многократную) поимку убегающего, имеющего в своем распоряжении группу защитников.

2. Для задачи 3 нестрогую одновременную многократную (многократную) поимку убегающего.

3. Для задачи 4 мягкое убегание всей группы жестко скоординированных убегающих от группы преследователей.

Методы управления (преследователями, убегающими и защитниками), которые, по сути, являются указанными выше аналитическими решениями, построены в явном виде, на их основе разработаны вычислительные схемы решения некоторых типов задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов. Вычислительные схемы реализованы в используемом для проведения вычислительных экспериментов комплексе программ моделирования конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

Положения, выносимые на защиту:

1. Для задачи 1 — аналитические условия разрешимости и методы управления группой преследователей, гарантирующие: одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего; суммарную одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку группы жестко скоординированных убегающих; синхронную реализацию одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности; одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего, имеющего в своем распоряжении группу защитников.

2. Для задачи 2 — аналитические условия разрешимости и методы управления группой преследователей, гарантирующие: одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего; суммарную одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку группы жестко скоординированных убегающих; синхронную реализацию одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности; одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегаю-

щего, имеющего в своем распоряжении группу защитников.

3. Для задачи 3 — аналитические условия разрешимости и методы управления группой преследователей, гарантирующие нестрогую одновременную многократную (многократную) поимку убегающего.

4. Для задачи 4 — аналитические методы управления группой жестко скоординированных убегающих, гарантирующие мягкое убегание всех убегающих от группы преследователей из любых начальных позиций.

5. Вычислительные схемы решения некоторых типов задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов и комплекс программ моделирования конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

Методология и методы исследования. В математических моделях задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов используется формализация дифференциальных игр, близкая к предложенной Л.С. Понтрягиным (задачи 1, 2, 3) и Н.Н. Красовским (задача 4). В работе применяется аппарат математической теории оптимального управления, теории дифференциальных игр, теории многозначных отображений, выпуклого анализа, численных методов.

Теоретическая и практическая значимость работы. Все результаты работы могут быть использованы для дальнейшего развития аналитических и численных методов исследования математических моделей задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

Степень достоверности результатов исследования. Достоверность теоретических результатов диссертационной работы подтверждается строгостью используемого математического аппарата, публикациями в рецензируемых изданиях, апробацией результатов на научных мероприятиях, а также вычислительными экспериментами, данные которых согласуются с теоретическими результатами.

Личный вклад автора. Совместно с научным консультантом осуществлял выбор перспективных направлений научных исследований, а также обсуждал постановки и получаемые решения задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов. Все выносимые на защиту результаты получены соискателем лично. Из совместных работ в диссертацию включены результаты, непосредственно принадлежащие автору.

Апробация результатов. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

– Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби», посвященный 60-летию со дня рождения А.И. Субботина (Екатеринбург, 2005);

– Международная конференция «Устойчивость и процессы управления», посвященная 75-летию со дня рождения В.И. Зубова (Санкт-Петербург, 2005);

– Научная конференция-семинар «Теория управления и математическое моделирование», посвященная 50-летию Ижевского математического семинара и 30-летию кафедры «Прикладная математика и информатика» Ижевского государственного технического университета (Ижевск, 2006);

– Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная 75-летию Удмуртского государственного университета (Ижевск, 2006);

– Всероссийская научная конференция «Математика. Механика. Информатика», посвященная 30-летию Челябинского государственного университета (Челябинск, 2006);

– Научный семинар «Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений», посвященный 60-летию со дня рождения В.И. Благодатских (Москва, 2006);

– Научная конференция-семинар «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти Н.В. Азбелева (Ижевск, 2008);

– Международная научная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, 2008);

– Девятая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция (Ижевск, 2008);

– Международная научная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложения», посвященная 70-летию со дня рождения В.А. Садовничего (Москва, 2009);

– Всероссийская научная конференция с международным участием «Математическая теория управления и математическое моделирование», посвященная 60-летию Ижевского государственного технического университета и 90-летию со дня рождения Н.В. Азбелева (Ижевск, 2012);

– Семинар отдела Динамических систем Института математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, 2012, 2023, 2024);

– Международная молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 2013, 2015, 2017);

– Международная конференция «Динамика систем и процессы управления», посвященная 90-летию со дня рождения Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 2014);

– Второй Международный семинар «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби», посвященный 70-летию со дня рождения А.И. Субботина (Екатеринбург, 2015);

– Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти Н.В. Азбелева и Е.Л. Тонкова (Ижевск, 2015, 2020, 2022);

– Научный семинар кафедры Оптимального управления факультета Вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Москва, 2017);

– Международная конференция «Устойчивость, управление, дифференциальные игры», посвященная 95-летию со дня рождения Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 2019);

– Международная конференция «Системный анализ: моделирование и управление», посвященная памяти А.В. Кряжимского (Москва, 2024);

– Семинар по дифференциальным уравнениям и теории управления Удмуртского государственного университета (Ижевск, 2005–2024).

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации для молодых кандидатов наук (МК-2817.2008.1) и Российским фондом фундаментальных исследований (проект 06-01-00258).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 50 работ. Основные результаты представлены в 25 статьях, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК и Аттестационным советом УрФУ [239–263], из них 21 статья проиндексирована в Scopus, Web of Science или zbMATH [239–242, 244, 245, 248, 249, 251–263]. Получено 6 свидетельств о государственной регистрации программы для ЭВМ [264–269]. Совместно с научным консультантом выпущена монография [270]. По результатам научных мероприятий издано 18 материалов [271–288].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из основных обозначений, введения, 6 глав, содержащих всего 25 параграфов, заключения и списка литературы, включающего 288 наименований. В основную часть работы включен 41 рисунок. Общий объем диссертации — 290 страниц.

Краткий обзор основной части работы

В **первой главе**, включающей четыре параграфа, рассматриваются аналитические методы исследования задачи 1 (конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов для случая простых движений при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников).

Дифференциальные игры, если не оговорено специально, рассматриваются в пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$.

В **§ 1** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i &: \ \dot{x}_i = u_i, \ \ u_i \in U(t), \ \ x_i(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\ E &: \ \dot{y} = v, \quad v \in U(t), \quad y(t_0) = Y^0, \end{aligned} \tag{1}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа (порожденной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^k$) на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$, $q \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q\to\infty} \theta_q = \infty$).

О п р е д е л е н и е 1. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$ допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t, \ \theta_q, \ x_i(\theta_q), \ i \in I(n), \ y(\theta_q)\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Под допустимыми понимаются управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$, удовлетворяющие указанным ограничениям.

О п р е д е л е н и е 2. Кусочно-программной контрстратегией $\mathfrak{U}_i$ преследователя P_i $(i \in I(n))$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y(\theta_q)$ и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ \theta_q,\ x_\alpha(\theta_q),\ \alpha \in I(n),\ y(\theta_q),\ (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Действия преследователей можно трактовать так: имеется центр управления, который каждому преследователю P_i, $i \in I(n)$, пошагово строит допустимое управление $u_i(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы преследователей).

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 3. В игре Γ возможна b-кратная поимка $(b \in I(n))$, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом убегающий E может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз.

О п р е д е л е н и е 4. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 5. В игре Γ возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки не указываем и говорим, что в игре Γ возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

Предположение 1. Существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\bigr\}.$$

Для всех $i \in I(n)$ зададим функции

$$\lambda_i(v, t) = \lambda(v, X_i^0 - Y^0; U(t)) =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in U(t)\bigr\}.$$

Введем обозначения

$$\delta_0(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha(v,t), \quad \Delta_0 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s)ds.$$

Теорема 1. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

Условие 1. $Y^0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{X_p^0, p\in K\}$ для всех множеств $K\in\Omega(n-b+1)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда условие* 1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ.

Теорема 3. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Теорема 4. *Пусть выполнено предположение* 1 *и отображение* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

Отметим, что условие 1 сформулировал Н.Л. Григоренко при исследовании задач о многократной поимке убегающего [32], кроме того, при $b = 1$, то есть при рассмотрении задачи о поимке, условие 1 совпадает с условием Б.Н. Пшеничного [142] ($Y^0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{X_1^0, X_2^0, \ldots, X_n^0\}$).

В **§ 2** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i &: \dot{x}_i = u_i, \ u_i \in U(t), \ x_i(t_0) = X_i^0, \ i \in I(n), \\ E_j &: \dot{y}_j = v, \quad v \in U(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \quad j \in I(m), \end{aligned} \tag{2}$$

причем $X_i^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n)$, $j \in I(m)$.

Определение 6. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y_j(\theta_q)$, $j \in I(m)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t, \ \theta_q, \ x_i(\theta_q), \ i\in I(n), \ y_j(\theta_q), \ j\in I(m)\big),$$
$$t\in[\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр управления, который для всех убегающих E_j, $j \in I(m)$, пошагово строит одно и то же допустимое управление $v(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы убегающих).

Определение 7. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y_j(\theta_q)$, $j \in I(m)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ \theta_q,\ x_\alpha(\theta_q),\ \alpha \in I(n),\ y_j(\theta_q),\ j \in I(m),\ (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Определение 8. В игре Γ возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом любой из убегающих E_j, $j \in I(m)$, может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз. Кратность поимки в игре Γ складывается из кратностей поимок каждого убегающего E_j, $j \in I(m)$ (в том числе возможен случай реализации b-кратной поимки, когда одного убегающего ловят b преследователей, а остальные убегающие избегают поимки).

Определение 9. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$, $i \in I(n)$, преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 10. В игре Γ возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$, $i \in I(n)$, преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda.$$

По функциям

$$\lambda_i(v, t; j) = \lambda(v, X_i^0 - Y_j^0; U(t)) =$$
$$= \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y_j^0)) \in U(t)\big\},\ i \in I(n),$$

зависящим от одного параметра j, определим величины, зависящие от n параметров,

$$\delta_0(t; j_i, i \in I(n)) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v, t; j_\alpha),$$

$$\Delta_0(j_i, i \in I(n)) = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s; j_i, i \in I(n))\, ds.$$

У с л о в и е 2. Для каждого $i \in I(n)$ найдется такой номер $j_i \in I(m)$, что $\Delta_0(j_i, i \in I(n)) = \infty$.

Т е о р е м а 5. *Пусть выполнены предположение* 1 *и условие* 2. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная b-кратная поимка.*

У с л о в и е 3. Для каждого $i \in I(n)$ найдется такой номер $j_i \in I(m)$, что $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_p^0 - Y_{j_p}^0, p \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n - b + 1)$.

Т е о р е м а 6. *Пусть выполнено предположение* 1 *и отображение* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 3 *является достаточным для осуществления одновременной b-кратной поимки в игре* Γ.

В **§ 3** рассматривается дифференциальная игра Γ $n_1+n_2+\dots+n_m+m$ лиц: $n_1+n_2+\dots+n_m$ преследователей $P_{11}, P_{21}, \dots, P_{n_1 1}, P_{12}, P_{22}, \dots, P_{n_2 2}, \dots, P_{1m}, P_{2m}, \dots, P_{n_m m}$ и m убегающих $E_1, E_2, \dots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} &P_{ij} \ : \ \dot{x}_{ij} = u_{ij}, \ \ u_{ij} \in U_j(t), \ \ x_{ij}(t_0) = X_{ij}^0, \ \ i \in I(n_j), \ \ j \in I(m), \\ &E_j \ : \ \dot{y}_j = v_j, \quad v_j \in U_j(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \qquad\qquad\qquad j \in I(m), \end{aligned} \tag{3}$$

причем $X_{ij}^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$.

О п р е д е л е н и е 11. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}_j$ убегающего E_j ($j \in I(m)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_{i\beta}(\theta_q)$, $y_\beta(\theta_q)$, $i \in I(n_\beta)$, $\beta \in I(m)$, допустимое управление $v_j(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$\begin{gathered} v_j(t) = v_j\big(t, \ \theta_q, \ x_{i\beta}(\theta_q), \ y_\beta(\theta_q), \ i \in I(n_\beta), \ \beta \in I(m)\big), \\ t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \dots \end{gathered}$$

О п р е д е л е н и е 12. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_{ij}$ преследователя P_{ij} ($i \in I(n_j), \ j \in I(m)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_{\alpha\beta}(\theta_q)$, $y_\beta(\theta_q)$, $\alpha \in I(n_\beta)$, $\beta \in I(m)$, и сужениям $(v_\beta(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимых управлений $v_\beta(\cdot)$ убегающих E_β, $\beta \in I(m)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_{ij}(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$\begin{gathered} u_{ij}(t) = u_{ij}\big(t, \theta_q, x_{\alpha\beta}(\theta_q), \ y_\beta(\theta_q), (v_\beta(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})), \alpha \in I(n_\beta), \beta \in I(m)\big), \\ t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \dots \end{gathered}$$

Для каждого $q = 1, 2, \dots, n_j$ и $j \in I(m)$ определим множество

$$\Omega_j(q) = \big\{\{i_1, i_2, \dots, i_q\} : i_1 < i_2 < \dots < i_q, \ i_1, \dots, i_q \in I(n_j)\big\}.$$

О п р е д е л е н и е 13. В игре Γ возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ ($b_j \in I(n_j)$, $j \in I(m)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_{ij}$ преследователей P_{ij}, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программных стратегий $\mathcal{V}_j$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующих разбиению σ, найдутся момент $\tau \in [t_0, T_0]$ и множества $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $j \in I(m)$, для которых, при каждом фиксированном $j \in I(m)$, выполнено

$$x_{\alpha j}(\tau) = y_j(\tau), \quad x_{\alpha j}(s) \neq y_j(s) \quad \text{для всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda_j.$$

Неформально: рассматривается m «непересекающихся» задач (можно считать, что каждая из m групп, включающая одного убегающего и n_j преследователей, находятся очень далеко друг от друга; либо задачи рассматриваются в параллельных плоскостях и т.п.), в которых действия убегающих координируются одним центром (для достижения общей цели — уклонение от одновременной многократной поимки группы убегающих), а действия преследователей — вторым центром (цель преследователей — синхронная реализация одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности).

П р е д п о л о ж е н и е 2. Существуют непрерывные и невырожденные на $[t_0, \infty)$ квадратные матрицы $B_j(t)$ порядка k и непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции $g_j(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B_j(t)(U_j(t) + g_j(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),\ j \in I(m).$$

Для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$ зададим функции

$$\lambda_{ij}(v, t) = \lambda(v, X_{ij}^0 - Y_j^0; U_j(t)) =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_{ij}^0 - Y_j^0)) \in U_j(t)\bigr\}.$$

Введем обозначения

$$\delta_{0j}(t) = \min_{v \in U_j(t)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v, t),$$
$$\delta_0(t) = \min_{j \in I(m)} \delta_{0j}(t), \quad \Delta_0 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s) ds.$$

Т е о р е м а 7. *Пусть выполнено предположение* 2 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Условие 4. При каждом значении $j \in I(m)$ выполнено включение $Y_j^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_{cj}^0, c \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$.

Теорема 8. *Пусть выполнено предположение* 2. *Тогда условие* 4 *является необходимым для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Теорема 9. *Пусть выполнено предположение* 2 *и отображение* $U_j(t) = U_j = \text{const}$, $j \in I(m)$. *Тогда в игре* Γ *условие* 4 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

В **§ 4** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+r+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, \ldots, D_r$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lllll} P_i & : \dot{x}_i = u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, & i \in I(n), \\ E & : \dot{y} = v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0, & \\ D_j & : \dot{z}_j = w_j, & w_j \in U(t), & z_j(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), & j \in I(r). \end{array} \tag{4}$$

В системе (4) начальные позиции преследователей P_i и убегающего E фиксированы и $X_i^0 \neq Y^0$ для всех $i \in I(n)$. Каждый защитник D_j, $j \in I(r)$, выбирает свою начальную позицию $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ до начала движения участников, причем $L > 0$ — такая фиксированная постоянная, что $X_i^0 \notin S(Y^0, L)$ для всех $i \in I(n)$ (защитник не может выбрать свою начальную позицию равной начальной позиции хотя одного преследователя и тем самым, как будет указано ниже, уничтожить последнего в начальный момент времени).

Определение 14. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_j(\theta_q)$, $j \in I(r)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i(\theta_q),\ i \in I(n),\ y(\theta_q),\ z_j(\theta_q),\ j \in I(r)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Определение 15. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i $(i \in I(n))$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_j(\theta_q)$, $j \in I(r)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\, \theta_q,\, x_\alpha(\theta_q),\, \alpha \in I(n),\, y(\theta_q),\, z_j(\theta_q),\, j \in I(r),\, (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Определение 16. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{W}_j$ защитника убегающего D_j $(j \in I(r))$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту t_0 и начальным позициям X_i^0, $i \in I(n)$, Y^0 начальную позиции $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$; моменту θ_q, позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_\beta(\theta_q)$, $\beta \in I(r)$, сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ и сужениям $(u_i(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимых управлений $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $w_j(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$Z_j^0 = Z_j^0(t_0,\ X_i^0,\ i \in I(n),\ Y^0) \in S(Y^0, L);$$
$$w_j(t) = w_j\Big(t,\, \theta_q,\, x_i(\theta_q),\, i \in I(n),\, y(\theta_q),\, z_\beta(\theta_q),\, \beta \in I(r),\, (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})),$$
$$(u_i(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})),\, i \in I(n)\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

При совпадении геометрических координат $d \geqslant 1$ защитников D_j и $p \geqslant 1$ преследователей P_i погибают $\min\{d, p\} \geqslant 1$ защитников и столько же преследователей. Если совпадают координаты убегающего E и защитника D_j, то последний погибает. Пусть $T(P_i)$, $i \in I(n)$, и $T(D_j)$, $j \in I(r)$, — моменты гибели преследователя P_i и защитника D_j соответственно, если участник не погибает, то полагаем момент гибели равным ∞.

Неформально: у каждого защитника активируется механизм самоликвидации при встрече с «инородным» объектом (убегающим или преследователем), при этом преследователь ликвидируется (в случае одновременной встречи с несколькими преследователями первый из них «прикрывает» остальных), а убегающему ущерб не причиняется (или причиняется, но незначительный, например, за счет настройки механизма самоликвидации, обеспечивающей максимально возможный урон преследователю и нанесение минимального ущерба убегающему).

Рассматривается два варианта игры — все защитники убегающего D_j, $j \in I(r)$, либо сильные, либо слабые. В случае совпадения геометрических координат преследователя P_i, убегающего E и защитника D_j в некоторый момент $\theta > t_0$, то есть $x_i(\theta) = y(\theta) = z_j(\theta)$, как указано выше, $T(P_i) = T(D_j) = \theta$. Если защитник убегающего D_j сильный, то он уничтожает преследователя P_i быстрее, чем тот ловит убегающего E (поимки не происходит). В случае, когда защитник убегающего D_j слабый, преследователь P_i до момента гибели успевает поймать убегающего E (происходит поимка).

Определение 17. В игре Γ с сильными защитниками убегающего возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha),\ \tau_\alpha < T(P_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 18. В игре Γ со слабыми защитниками убегающего возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha),\ \tau_\alpha \leqslant T(P_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 19. В игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ \tau < T(P_\alpha)\ \Big[\tau \leqslant T(P_\alpha)\Big] \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 20. В игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \tau < T(P_\alpha)\Big[\tau \leqslant T(P_\alpha)\Big], x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \alpha \in \Lambda.$$

Неформально правила игры можно трактовать, например, так: имеется три центра управления (I управляет убегающим, II — группой преследователей, III — группой защитников убегающего), у I и III центров управления имеется общая цель — уклонение убегающего при содействии группы защитников (либо сильных, либо слабых) от рассматриваемых видов поимок, а у II центра управления цель противоположна — реализация группой преследователей указанных видов поимок при любых действиях убегающего и группы его защитников.

Для всех $i \in I(n)$ зададим функции

$$\lambda_i(v, t) = \lambda(v, X_i^0 - Y^0; U(t)) =$$
$$= \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in U(t)\big\}.$$

Введем обозначения

$$\delta_r(t) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b+r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v,t), \quad \Delta_r = \int_{t_0}^{\infty} \delta_r(s) ds.$$

Теорема 10. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $\Delta_r = \infty$. *Тогда в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Условие 5. $Y^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_p^0, p \in K\}$ для всех $K \in \Omega(n-b-r+1)$.

Теорема 11. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда условие* 5 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Теорема 12. *Пусть выполнено предположение* 1 *и отображение* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 5 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Предположение 3. Все игроки используют допустимые управления, являющиеся кусочно-постоянными функциями на $[t_0, \infty)$.

Теорема 13. *Пусть выполнены предположения* 1, 3 *и* $\Delta_r = \infty$. *Тогда в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Теорема 14. *Пусть выполнены предположения* 1, 3. *Тогда условие* 5 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

Теорема 15. *Пусть выполнены предположения* 1, 3 *и отображение* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 5 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

Вторая глава состоит из четырех параграфов, в ней представлены аналитические методы решения задачи 2 (конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов в форме нестационарных конфликтно управляемых процессов при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников).

В **§ 5** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i \ &: \ \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \ \ u_i \in U(t), \ \ x_i(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\ E \ &: \ \dot{y} = A(t)y + v, \qquad v \in U(t), \quad y(t_0) = Y^0, \end{aligned} \tag{5}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k.

В остальном постановка задачи совпадает с приведенной в § 1.

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$ такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$.

Для всех $i \in I(n)$ зададим функции

$$\lambda_i^1(v,t) = \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X_i^0 - Y^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\}.$$

Введем обозначения

$$\delta_1(t) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha^1(v,t), \quad \Delta_1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(s)\, ds.$$

Теорема 16. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $\Delta_1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Теорема 17. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда условие* 1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ.

Теорема 18. *Пусть выполнено предположение* 1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

В **§ 6** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i \ &: \ \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \ \ u_i \in U(t), \ \ x_i(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\ E_j \ &: \ \dot{y}_j = A(t)y_j + v, \ \ \ v \in U(t), \ \ \ y_j(t_0) = Y_j^0, \ \ j \in I(m), \end{aligned} \tag{6}$$

причем $X_i^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n)$, $j \in I(m)$.

В остальном постановка задачи совпадает с приведенной в § 2.

По функциям

$$\lambda_i^1(v, t; j) = \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X_i^0 - Y_j^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)v - \lambda(X_i^0 - Y_j^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\}, \ i \in I(n),$$

зависящим от одного параметра j, определим величины, зависящие от n параметров,

$$\delta_1(t; j_i, i \in I(n)) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha^1(v, t; j_\alpha),$$

$$\Delta_1(j_i, i \in I(n)) = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(s; j_i, i \in I(n))\, ds.$$

Условие 6. Для каждого $i \in I(n)$ найдется такой номер $j_i \in I(m)$, что $\Delta_1(j_i, i \in I(n)) = \infty$.

Теорема 19. *Пусть выполнены предположение* 1 *и условие* 6. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Теорема 20. *Пусть выполнено предположение* 1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 3 *является достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

В **§ 7** рассматривается дифференциальная игра Γ $n_1 + n_2 + \dots + n_m + m$ лиц: $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ преследователей $P_{11}, P_{21}, \dots, P_{n_1 1}, P_{12}, P_{22}, \dots, P_{n_2 2}, \dots, P_{1m}, P_{2m}, \dots, P_{n_m m}$ и m убегающих $E_1, E_2, \dots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_{ij} &: \dot{x}_{ij} = A_j(t)x_{ij} + u_{ij}, u_{ij} \in U_j(t), \ x_{ij}(t_0) = X_{ij}^0, i \in I(n_j), \ j \in I(m), \\ E_j &: \dot{y}_j = A_j(t)y_j + v_j, \quad v_j \in U_j(t), \ \ y_j(t_0) = Y_j^0, \qquad\qquad j \in I(m), \end{aligned} \tag{7}$$

причем $X_{ij}^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$. Здесь $A_j(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ квадратные матрицы порядка k.

В остальном постановка задачи совпадает с приведенной в § 3.

Пусть $\Phi_j(t)$, $j \in I(m)$, — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A_j(t)\varphi$ такая, что $\Phi_j(t_0) = \mathcal{I}$.

Для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$ зададим функции

$$\lambda^1_{ij}(v,t) = \lambda(\Phi_j^{-1}(t)v, X^0_{ij} - Y^0_j; \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)) = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi_j^{-1}(t)v - \lambda(X^0_{ij} - Y^0_j)) \in \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)\bigr\}.$$

Введем обозначения

$$\delta_{1j}(t) = \min_{v \in U_j(t)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda^1_{\alpha j}(v,t), \\ \delta_1(t) = \min_{j \in I(m)} \delta_{1j}(t), \quad \Delta_1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(s)ds.$$

Теорема 21. *Пусть выполнено предположение* 2 *и* $\Delta_1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Теорема 22. *Пусть выполнено предположение* 2. *Тогда условие* 4 *является необходимым для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Теорема 23. *Пусть выполнено предположение* 2, *матрицы* $\Phi_j(t)$ *являются почти периодическими в смысле Бора и* $U_j(t) = U_j = \mathrm{const}$, $j \in I(m)$. *Тогда условие* 4 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *в игре* Γ.

В **§ 8** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+r+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, \ldots, D_r$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{llll} P_i: & \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X^0_i, \qquad i \in I(n), \\ E: & \dot{y} = A(t)y + v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0, \\ D_j: & \dot{z}_j = A(t)z_j + w_j, & w_j \in U(t), & z_j(t_0) = Z^0_j \in S(Y^0, L), \ j \in I(r). \end{array} \tag{8}$$

В остальном постановка задачи совпадает с приведенной в § 4.

Для всех $i \in I(n)$ зададим функции

$$\lambda_i^1(v,t) = \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X_i^0 - Y^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\}.$$

Введем обозначения

$$\delta_r^1(t) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b+r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha^1(v,t), \quad \Delta_r^1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_r^1(s)ds.$$

Теорема 24. *Пусть выполнено предположение* 1 *и* $\Delta_r^1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Теорема 25. *Пусть выполнено предположение* 1. *Тогда условие* 5 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Теорема 26. *Пусть выполнено предположение* 1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 5 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Предположение 4. Игроки используют такие допустимые управления, что все функции $\Phi^{-1}(t)u_i(t)$, $i \in I(n)$, $\Phi^{-1}(t)v(t)$, $\Phi^{-1}(t)w_j(t)$, $j \in I(r)$, являются кусочно-постоянными на $[t_0, \infty)$.

Теорема 27. *Пусть выполнены предположения* 1, 4 *и* $\Delta_r^1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Теорема 28. *Пусть выполнены предположения* 1, 4. *Тогда условие* 5 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

Теорема 29. *Пусть выполнены предположения* 1, 4, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 5 *является необходимым и достаточным для осуществле-*

ния одновременной b-кратной поимки в игре Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

В **третьей главе**, состоящей из двух параграфов, представлены аналитические методы решения задачи 3 (конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов в виде обобщенного нестационарного контрольного примера Л.С. Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников).

В **§ 9** и **§ 10** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{gathered}
P_i: x_i^{(l)}+a_1(t)x_i^{(l-1)}+a_2(t)x_i^{(l-2)}+\ldots+a_l(t)x_i = u_i,\ u_i \in U, \\
E: y^{(l)}+a_1(t)y^{(l-1)}+a_2(t)y^{(l-2)}+\ldots+a_l(t)y = v, \quad v \in U, \\
x_i^{(j)}(t_0) = X_i^j, \quad y^{(j)}(t_0) = Y^j,\ i \in I(n),\ j \in I^0(l-1),
\end{gathered} \tag{9}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; U — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей; $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_l(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции.

Определение 21. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i^{(j)}(\theta_q)$, $y^{(j)}(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $j \in I^0(l-1)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$\begin{gathered}
v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i^{(j)}(\theta_q),\ y^{(j)}(\theta_q),\ i \in I(n),\ j \in I^0(l-1)\big), \\
t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots
\end{gathered}$$

Определение 22. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha^{(j)}(\theta_q)$, $y^{(j)}(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $j \in I^0(l-1)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$\begin{gathered}
u_i(t) = u_i\big(t, \theta_q, x_\alpha^{(j)}(\theta_q), y^{(j)}(\theta_q), \alpha \in I(n), j \in I^0(l-1), (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big), \\
t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots
\end{gathered}$$

Определение 23. В игре Γ возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 24. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 25. В игре Γ возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \; x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \; \alpha \in \Lambda.$$

В § 9 получены достаточные условия b-кратной поимки, в § 10 — нестрогой одновременной b-кратной поимки.

Предположение 5. Существуют постоянная невырожденная квадратная матрица B порядка k и постоянный вектор $g \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(U + g) = S(0, 1).$$

Соотношения (9), вводя замены $z_i = x_i - y$, $i \in I(n)$, перепишем в виде

$$z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + a_2(t)z_i^{(l-2)} + \dots + a_l(t)z_i = u_i - v,\ u_i, v \in U,$$
$$z_i^{(j)}(t_0) = Z_i^j = X_i^j - Y^j.$$

Через $\varphi_j(t,s)$ $(t \geqslant s \geqslant t_0)$ обозначим решение уравнения

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \dots + a_l(t)\omega = 0,$$

с начальными условиями

$$\omega(s) = 0,\ \dots,\ \omega^{(j-1)}(s) = 0,\ \omega^{(j)}(s) = 1,\ \omega^{(j+1)}(s) = 0,\ \dots,\ \omega^{(l-1)}(s) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t,t_0)Z_i^0 + \varphi_1(t,t_0)Z_i^1 + \varphi_2(t,t_0)Z_i^2 + \dots + \varphi_{l-1}(t,t_0)Z_i^{l-1}.$$

Предположение 6. Существуют непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции $\beta_i(t)$ и $\xi_i^1(t)$, обладающие следующими свойствами:

1) $\xi_i^1(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора;

2) $\beta_i(t) > 0$ для всех $t \geqslant t_0$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty}(\xi_i^1(t) - \beta_i(t)\xi_i(t)) = 0$.

Предположение 7. Функции $\varphi_{l-1}(t,s)$, $\beta(t) = \min\limits_{i \in I(n)} \beta_i(t)$ такие, что

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds = \infty.$$

Условие 7. Существуют моменты $\tau_1^0, \tau_2^0, \dots, \tau_n^0 \in [t_0, \infty)$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{\xi_q^1(\tau_q^0),\ q \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Теорема 30. *Пусть выполнены предположения* 5, 6, 7 *и условие* 7. *Тогда в игре* Γ *возможна* b*-кратная поимка.*

Предположение 8. Функции $\xi_i(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора и $\varphi_{l-1}(t,s)$ такова, что

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds = \infty.$$

У с л о в и е 8. Существуют моменты $\tau_1^0, \tau_2^0, \ldots, \tau_n^0 \in [t_0, \infty)$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{\xi_q(\tau_q^0),\ q \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Т е о р е м а 31. *Пусть выполнены предположения* 5, 8 *и условие* 8. *Тогда в игре* Γ *возможна* b*-кратная поимка.*

Предположения 6, 7, 8 выполнены, в частности, если функции $a_q(t)$, $q \in I(l)$, являются постоянными, то есть $a_q(t) = a_q$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, и все корни ρ уравнения

$$\rho^l + a_1\rho^{l-1} + a_2\rho^{l-2} + \cdots + a_l\rho = 0 \tag{10}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Т е о р е м а 32. *Пусть выполнено предположение* 5, *функции* $a_q(t)$, $q \in I(l)$, *являются постоянными, все корни* ρ *уравнения* (10) *являются простыми и чисто мнимыми, выполнено условие* 8. *Тогда в игре* Γ *возможна* b*-кратная поимка.*

У с л о в и е 9. Существует момент τ_0 такой, что

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{\xi_q^1(\tau_0),\ q \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Т е о р е м а 33. *Пусть выполнены предположения* 5, 6, 7 *и условие* 9. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

У с л о в и е 10. Существует момент τ_0 такой, что

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{\xi_q(\tau_0),\ q \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Т е о р е м а 34. *Пусть выполнены предположения* 5, 8 *и условие* 10. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

У с л о в и е 11. Начальные позиции участников таковы, что

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{Z_q^0,\ q \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Т е о р е м а 35. *Пусть выполнены предположения* 5, 8 *и условие* 11. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

Т е о р е м а 36. *Пусть выполнено предположение* 5, *функции* $a_q(t)$, $q \in I(l)$, *являются постоянными, все корни* ρ *уравнения* (10) *являются простыми и чисто мнимыми, выполнено условие* 10 *или условие* 11. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

Четвертая глава состоит из двух параграфов, в ней представлены аналитические методы решения задачи 4 (конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов при большей маневренности убегающих).

В **§ 11** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i \ &: \ x_i^{(n_i)} = f_i\left(x_i, \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(n_i-1)}, u_i, t\right), && u_i \in U_i, \\ &\ \ x_i^{(\alpha_i)}(t_0) = X_i^{\alpha_i}, \ \alpha_i \in I^0(n_i - 1), && i \in I(n), \\ E \ &: \ y^{(m)} = v, && v \in S(0, \gamma), \\ &\ \ y^{(\beta)}(t_0) = Y^{\beta}, \ \beta \in I^0(m-1), \end{aligned} \tag{11}$$

причем $n_i > m \geqslant 1$ при всех $i \in I(n)$ и $X_i^{\beta} \neq Y^{\beta}$ для всех $\beta \in I^0(m-1)$, $i \in I(n)$. Здесь x_i, $y \in \mathbb{R}^k$, $f_i : \underbrace{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$, $U_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$, $U_i \neq \varnothing$, $k_i \geqslant 1$, $\gamma > 0$.

П р е д п о л о ж е н и е 9. Каждая функция f_i удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решения на любой отрезок при всех допустимых управлениях $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$.

О п р е д е л е н и е 26. Стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту t и реализовавшимся значениям $x_i^{(\alpha_i)}(s)$, $y^{(\beta)}(s)$, $s \in [t_0, t]$, $\alpha_i \in I^0(n_i - 1)$, $i \in I(n)$, $\beta \in I^0(m-1)$, допустимое управление $v(t)$, которое является кусочно-постоянной функцией на $[t_0, t]$, то есть

$$v(t) = v\Big(t, \ x_i^{(\alpha_i)}(s), \ y^{(\beta)}(s), \ s \in [t_0, t], \\ \alpha_i \in I^0(n_i - 1), \ i \in I(n), \ \beta \in I^0(m-1)\Big), \quad t \in [t_0, \infty).$$

О п р е д е л е н и е 27. В игре Γ возможно мягкое убегание, если существует стратегия $\mathcal{V}$ убегающего E, что для любых допустимых управлений $u_i(\cdot)$

преследователей P_i, $i \in I(n)$, выполняются неравенства

$$x_i^{(\beta)}(t) \neq y^{(\beta)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),\ \beta \in I^0(m-1),\ i \in I(n).$$

Предположение 10. Существует постоянная $G \geqslant 0$ такая, что каждая функция f_i удовлетворяет неравенству

$$\Big| f_i(a_0, a_1, \ldots, a_{n_i-1}, b, t) \Big| \leqslant G$$

$$\text{для всех } (a_0, a_1, \ldots, a_{n_i-1}, b, t) \in \underbrace{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty).$$

Теорема 37. *Пусть выполнены предположения* 9, 10. *Тогда в игре* Γ *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

В **§ 12** рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{llll} P_i & : & x_i^{(n_i)} = f_i\left(x_i, \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(n_i-1)}, u_i, t\right), & u_i \in U_i, \\ & & x_i^{(\alpha_i)}(t_0) = X_i^{\alpha_i},\ \alpha_i \in I^0(n_i-1), & i \in I(n), \\ E_j & : & y_j^{(m_j)} = v, & v \in S(0, \gamma), \\ & & y_j^{(\beta_j)}(t_0) = Y_j^{\beta_j},\ \beta_j \in I^0(m_j-1), & j \in I(m), \end{array} \tag{12}$$

причем $n_i > m_j \geqslant 1$ при всех $i \in I(n)$, $j \in I(m)$ и $X_i^{\beta_j} \neq Y_j^{\beta_j}$ для всех $\beta_j \in I^0(m_j-1)$, $i \in I(n)$, $j \in I(m)$. Здесь x_i, $y_j \in \mathbb{R}^k$, $U_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$, $U_i \neq \varnothing$, $k_i \geqslant 1$, $f_i : \underbrace{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$, $\gamma > 0$.

Определение 28. Стратегией $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту t и реализовавшимся значениям $x_i^{(\alpha_i)}(s)$, $y_j^{(\beta_j)}(s)$, $s \in [t_0, t]$, $\alpha_i \in I^0(n_i-1)$, $i \in I(n)$, $\beta_j \in I^0(m_j-1)$, $j \in I(m)$, допустимое управление $v(t)$, которое является кусочно-постоянной функцией на $[t_0, t]$, то есть

$$v(t) = v\Big(t,\ x_i^{(\alpha_i)}(s),\ y_j^{(\beta_j)}(s),\ s \in [t_0, t],$$
$$\alpha_i \in I^0(n_i-1),\ i \in I(n),\ \beta_j \in I^0(m_j-1),\ j \in I(m)\Big), \quad t \in [t_0, \infty).$$

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр управления, который для всех убегающих E_j, $j \in I(m)$, выбирает одно и то же допустимое управление $v(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы убегающих).

Определение 29. В игре Γ возможно мягкое убегание, если существует стратегия $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, что для любых допустимых управлений $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, выполняются неравенства

$$x_i^{(\beta_j)}(t) \neq y_j^{(\beta_j)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),\ \beta_j \in I^0(m_j - 1),\ i \in I(n),\ j \in I(m).$$

Теорема 38. *Пусть выполнены предположения* 9, 10. *Тогда в игре* Γ *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

В **пятой главе**, состоящей из шести параграфов, разработаны вычислительные схемы решения некоторых типов задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

В **§ 13**, на основе определенного в явном виде в § 1 аналитического метода управления преследователями, построена вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования (1).

В **§ 14**, на основе результатов § 5, разработана вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе (5).

В **§ 15**, на основе результатов § 2, построена вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования (2).

В **§ 16**, на основе результатов § 6, разработана вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе (6).

В **§ 17**, на основе определенного в явном виде в § 4 аналитического метода управления слабым защитником убегающего, построена вычислительная схема его действий в задаче простого группового преследования (4).

В **§ 18**, на основе результатов § 8, разработана вычислительная схема действий слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе (8).

В **шестой главе**, состоящей из семи параграфов, приведено описание используемого для проведения вычислительных экспериментов комплекса программ моделирования конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов, а также рассмотрены примеры его использования.

В комплексе программ реализованы вычислительные схемы, разработанные в пятой главе.

В **§ 19** дана общая характеристики комплекса программ: описано его назначение; приведен порядок проведение вычислительных экспериментов; рассмотрены основные технологии и подходы, использованные при его проектировании и разработке.

В **§ 20** описаны результаты работы комплекса программ при моделировании одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования (1).

В **§ 21** рассмотрены примеры моделирования одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе (5).

В **§ 22** приведены результаты моделирования одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования (2).

В **§ 23** рассмотрена работа комплекса программ при моделировании одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе (6).

В **§ 24** приведены результаты моделирования действий слабого защитника убегающего в задаче простого группового преследования (4).

В **§ 25** рассмотрены примеры моделирования действий слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе (8).

Г Л А В А 1
КОНФЛИКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ГРУПП УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ СЛУЧАЯ ПРОСТЫХ ДВИЖЕНИЙ

§ 1. Одновременная многократная поимка одного убегающего в задаче простого преследования

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i \ &: \ \dot{x}_i = u_i, \ \ u_i \in U(t), \ \ x_i(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\ E \ &: \ \dot{y} = v, \quad\ v \in U(t), \quad y(t_0) = Y^0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа (порожденной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^k$) на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (1.1).

О п р е д е л е н и е 1.1. Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$, $q \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$).

О п р е д е л е н и е 1.2. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$ допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i(\theta_q),\ i \in I(n),\ y(\theta_q)\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Определение 1.3. Кусочно-программной контрстратегией $\mathfrak{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y(\theta_q)$ и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\bigl(t,\ \theta_q,\ x_\alpha(\theta_q),\ \alpha \in I(n),\ y(\theta_q),\ (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\bigr),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Действия преследователей можно трактовать так: имеется центр управления, который каждому преследователю P_i, $i \in I(n)$, пошагово строит допустимое управление $u_i(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы преследователей).

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \bigl\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\bigr\},$$

мощность которого совпадает с числом сочетаний из n элементов по q, то есть

$$|\Omega(q)| = C_n^q.$$

Определение 1.4. В игре Γ возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом убегающий E может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз.

О п р е д е л е н и е 1.5. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 1.6. В игре Γ возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки не указываем и говорим, что в игре Γ возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

2. Решение задачи

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\bigr\}. \tag{1.2}$$

Тогда $\lambda(w, \xi; S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w - \lambda\xi| \leqslant 1$, решая которое получаем, что

$$\lambda(w,\xi;S(0,1)) = \frac{\langle w,\xi\rangle + \sqrt{\langle w,\xi\rangle^2 + |\xi|^2(1-|w|^2)}}{|\xi|^2} \tag{1.3}$$

$$\text{для всех } w\in S(0,1) \text{ и } \xi\neq 0.$$

Будем считать, что выполнено

Предположение 1.1. Существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0,\infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0,\infty)$ функция $g(t)\in\mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(t)(U(t)+g(t)) = S(0,1) \text{ для всех } t\in[t_0,\infty). \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что

$$U(t) = B^{-1}(t)S(0,1) - g(t) \text{ для всех } t\in[t_0,\infty).$$

Предположение 1.1 допускает переход от $U(t)$ к $S(0,1)$. А именно, из (1.2), (1.3), (1.4) получим, что для всех $\xi\neq 0$, $w\in U(t)$, $t\in[t_0,\infty)$

$$\begin{gathered}\lambda(w,\xi;U(t)) = \sup\bigl\{\lambda\geqslant 0 : (w-\lambda\xi)\in U(t)\bigr\}=\\ =\sup\bigl\{\lambda\geqslant 0 : (w-\lambda\xi+g(t))\in (U(t)+g(t))\bigr\}=\\ =\sup\bigl\{\lambda\geqslant 0 : B(t)(w-\lambda\xi+g(t))\in B(t)(U(t)+g(t))\bigr\}=\\ =\sup\bigl\{\lambda\geqslant 0 : (B(t)(w+g(t))-\lambda B(t)\xi)\in S(0,1)\bigr\}=\\ =\lambda(B(t)(w+g(t)),B(t)\xi;S(0,1)) =\\ =\frac{1}{|B(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B(t)(w+g(t)),B(t)\xi\rangle +\\ +\sqrt{\langle B(t)(w+g(t)),B(t)\xi\rangle^2 + |B(t)\xi|^2(1-|B(t)(w+g(t))|^2)}\ \Bigr).\end{gathered} \tag{1.5}$$

Учитывая, что $X_i^0\neq Y^0$, $i\in I(n)$, а также равенство (1.5) получим, что каждая функция

$$\begin{gathered}\lambda_i(v,t) = \lambda(v,X_i^0-Y^0;U(t)) =\\ =\sup\bigl\{\lambda\geqslant 0 : (v-\lambda(X_i^0-Y^0))\in U(t)\bigr\}\end{gathered} \tag{1.6}$$

непрерывна на множестве $U(t)\times[t_0,\infty)$. Следовательно, при любом допустимом управлении $v(t)$ получаем функции $\lambda_i(v(t),t)$ (одного аргумента t) измеримые по Лебегу на $[t_0,\infty)$.

Введем обозначения

$$\delta_0(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha(v,t), \quad \Delta_0 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s)ds. \tag{1.7}$$

Лемма 1.1. *Пусть выполнено предположение* 1.1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда функция* $\delta_0(t)$ *непрерывна и положительна на* $[t_0, \infty)$.

Доказательство. Из (1.7), (1.6), (1.5) получаем, что

$$\delta_0(t) = \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(v, X^0_\alpha - Y^0; U(t)) =$$

$$= \min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(B(t)(v+g(t)), B(t)(X^0_\alpha - Y^0); S(0,1)).$$

Используя соотношение (1.4), выполненное в силу предположения 1.1, имеем

$$\min_{v\in U(t)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(B(t)(v+g(t)), B(t)(X^0_\alpha - Y^0); S(0,1)) =$$

$$= \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(s, B(t)(X^0_\alpha - Y^0); S(0,1)).$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} \delta_0(t) = \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(s, b_\alpha(t); S(0,1)), \\ \text{где } b_i(t) = B(t)(X^0_i - Y^0) \text{ для всех } i \in I(n). \end{gathered} \tag{1.8}$$

Отметим, что все функции $b_i(t) \neq 0$ и непрерывны на $[t_0, \infty)$. Из последнего утверждения следует, что (1.8) можно преобразовать с применением (1.3), получим

$$\delta_0(t) = \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \frac{\langle s, b_\alpha(t)\rangle + \sqrt{\langle s, b_\alpha(t)\rangle^2 + |b_\alpha(t)|^2(1-|s|^2)}}{|b_\alpha(t)|^2}. \tag{1.9}$$

Из (1.9) и указанных выше свойств $b_i(t)$ следует, что функция $\delta_0(t)$ непрерывна на $[t_0, \infty)$.

Предположим теперь, что, вопреки утверждению леммы, найдется такое $t^* \in [t_0, \infty)$, что $\delta_0(t^*) = 0$. Тогда из (1.8) следует, что найдется элемент $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda \in \Omega(b)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda$, для которого $\lambda(s^*, b_\alpha(t^*); S(0,1)) = 0$. Построим множество

$$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{n-b+1}\} \in \Omega(n-b+1)$$

по следующему правилу. Выберем элемент

$$q_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, b\} \in \Omega(b) \text{ из условия } \lambda(s^*, b_{q_1}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

затем элемент

$$q_2 \in L_2 = (L_1 \bigcup \{b+1\}) \setminus \{q_1\} \in \Omega(b) \text{ такой, что } \lambda(s^*, b_{q_2}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

затем элемент

$$q_3 \in L_3 = (L_2 \bigcup \{b+2\}) \setminus \{q_2\} \in \Omega(b),$$

удовлетворяющий равенству

$$\lambda(s^*, b_{q_3}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

и так далее. На последнем шаге построим множество

$$L_{n-b+1} = (L_{n-b} \bigcup \{n\}) \setminus \{q_{n-b}\} \in \Omega(b)$$

и выберем элемент

$$q_{n-b+1} \in L_{n-b+1} \text{ по условию } \lambda(s^*, b_{q_{n-b+1}}(t^*); S(0,1)) = 0.$$

По построению для множества $Q \in \Omega(n-b+1)$ справедливо равенство

$$\min_{s \in S(0,1)} \max_{q \in Q} \lambda(s, b_q(t^*); S(0,1)) = 0,$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{b_q(t^*),\ q \in Q\} = \operatorname{Int} \operatorname{co}\{B(t^*)(X_q^0 - Y^0),\ q \in Q\}.$$

Поскольку матрица $B(t^*)$ невырожденная, то

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_q^0 - Y^0,\ q \in Q\}.$$

А так как матрица $B(t)$ невырожденная при всех $t \in [t_0, \infty)$, то

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{B(t)(X_q^0 - Y^0),\ q \in Q\} \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Таким образом, построенное выше множество $Q \in \Omega(n-b+1)$ обладает свойством

$$\min_{s \in S(0,1)} \max_{q \in Q} \lambda(s, b_q(t); S(0,1)) = 0 \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),$$

которое означает, что для любого $t \in [t_0, \infty)$ найдется элемент $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda \in \Omega(b)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda$, для которого $\lambda(s^*, b_\alpha(t); S(0,1)) = 0$. Из последнего утверждения и (1.8) следует, что $\delta_0(t) = 0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$, а это означает, что $\Delta_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\delta_0(t) > 0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$.

Лемма 1.1 доказана. □

Лемма 1.2. *Пусть выполнено предположение* 1.1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда существует конечный момент* $T > t_0$ *такой, что для любого допустимого управления* $v(t)$ *найдется такое множество* $\Lambda \in \Omega(b)$, *что*

$$\int_{t_0}^{T} \lambda_\alpha(v(s), s)ds \geqslant 1 \text{ \textit{для всех} } \alpha \in \Lambda.$$

Доказательство. Имеют место соотношения

$$\max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \int_{t_0}^{t} \lambda_\alpha(v(s), s)ds \geqslant \frac{1}{C_n^b} \sum_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \int_{t_0}^{t} \lambda_\alpha(v(s), s)ds \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{C_n^b} \sum_{\Lambda\in\Omega(b)} \int_{t_0}^{t} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha(v(s), s)ds =$$

$$= \frac{1}{C_n^b} \int_{t_0}^{t} \sum_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha(v(s), s)ds \geqslant \frac{1}{C_n^b} \int_{t_0}^{t} \delta_0(s)ds.$$

Так как $\Delta_0 = \infty$, то существует конечный момент $T > t_0$, определяемый из условия

$$\frac{1}{C_n^b} \int_{t_0}^{T} \delta_0(s)ds \geqslant 1,$$

для которого найдется множество $\Lambda \in \Omega(b)$, удовлетворяющее требуемому свойству.

Лемма 1.2 доказана. □

Пусть

$$T_0 = T_0(X_i^0, Y^0) = \min\Big\{T > t_0 : \inf_{v(\cdot)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \int_{t_0}^{T} \lambda_\alpha(v(s), s)ds \geqslant 1\Big\}, \quad (1.10)$$

где инфимум берется по всем допустимым управлениям $v(t)$.

Из леммы 1.2 следует, что $T_0 < \infty$, если выполнено предположение 1.1 и $\Delta_0 = \infty$, при этом

$$\frac{1}{C_n^b} \int_{t_0}^{T_0} \delta_0(s)ds \geqslant 1. \quad (1.11)$$

Т е о р е м а 1.1. *Пусть выполнено предположение* 1.1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При любых допустимых управлениях решение системы (1.1) имеет вид

$$x_i(t) = X_i^0 + \int_{t_0}^t u_i(s)\,ds,\ y(t) = Y^0 + \int_{t_0}^t v(s)\,ds \text{ для всех } i \in I(n),\ t \in [t_0, \infty).$$

Следовательно, для всех $i \in I(n)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$x_i(t) - y(t) = (X_i^0 - Y^0) + \int_{t_0}^t (u_i(s) - v(s))\,ds.$$

Пусть $v(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant T_0$, — произвольное допустимое управление убегающего E. Из определения (1.10) момента T_0 следует, что существует момент $\tau \in (t_0, T_0]$, являющийся корнем уравнения

$$1 - \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \int_{t_0}^t \lambda_\alpha(v(s), s) ds = 0,$$

а также множество $\Lambda_0 \in \Omega(b)$ такое, что

$$1 - \int_{t_0}^\tau \lambda_\alpha(v(s), s) ds \leqslant 0 \ \text{ для всех } \alpha \in \Lambda_0.$$

Пусть $\tau_i \in [t_0, \infty)$ — минимальное значение такое, что

$$1 - \int_{t_0}^{\tau_i} \lambda_i(v(s), s) ds = 0.$$

Отметим, что

$$\tau_\alpha \in (t_0, \tau] \subset (t_0, T_0] \text{ для всех } \alpha \in \Lambda_0.$$

Некоторая функциональная зависимость $u_i(t) = g(v(t))$, $t \in [t_0, \infty)$, в соответствии с правилами игры, реализуется преследователем P_i следующим образом: в момент $t = \theta_0 = t_0$ преследователь P_i узнает $v(t)$, $t \in [\theta_0, \theta_1)$, и вычисляет $u_i(t) = g(v(t))$, $t \in [\theta_0, \theta_1)$; в момент $t = \theta_1$ преследователь P_i получает информацию про $v(t)$, $t \in [\theta_1, \theta_2)$, и находит $u_i(t) = g(v(t))$, $t \in [\theta_1, \theta_2)$; в момент $t = \theta_2$ преследователю P_i становиться известно $v(t)$, $t \in [\theta_2, \theta_3)$, и он может определить $u_i(t) = g(v(t))$, $t \in [\theta_2, \theta_3)$, и так далее.

Задаем допустимые управления преследователей P_i следующим образом:

$$u_i(t) = \begin{cases} v(t) - \lambda_i(v(t),t)(X_i^0 - Y^0), & t \in [t_0, \min\{\tau_i, T_0\}] \\ v(t), & t > \min\{\tau_i, T_0\}. \end{cases}$$

Тогда для всех $\alpha \in \Lambda_0$

$$x_\alpha(\tau) - y(\tau) = (X_\alpha^0 - Y^0)\Big(1 - \int_{t_0}^{\tau_\alpha} \lambda_\alpha(v(s),s)ds\Big) = 0.$$

Теорема 1.1 доказана. $\square$

Для каждого единичного вектора $l \in \mathbb{R}^k$ и всех $t \in [t_0, \infty)$ определим функцию

$$\begin{gathered} v_l(t) \in \partial U(t) \text{ из условия:} \\ \langle u(t) - v_l(t), l\rangle < 0 \text{ для всех } u(t) \in U(t) \setminus \{v_l(t)\}. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Отметим, что, при выполненном предположении 1.1, функция $v_l(t)$ при каждом зафиксированном l определена однозначно и непрерывна на промежутке $[t_0, \infty)$ в силу свойств многозначного отображения $U(t)$.

Лемма 1.3. *Пусть выполнено предположение* 1.1. *Если в процессе игры* Γ *для некоторого единичного вектора* $l \in \mathbb{R}^k$, *номера* $p \in I(n)$ *и момента* $\theta_q \geqslant t_0$ *реализовалась ситуация*

$$\langle x_p(\theta_q) - y(\theta_q), l\rangle \leqslant 0, \quad x_p(\theta_q) \neq y(\theta_q),$$

то, определяя допустимое продолжение управления убегающего E *равенством*

$$v(t) = v_l(t) \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty),$$

получим выполнимость неравенств

$$\langle x_p(t) - y(t), l\rangle \leqslant 0, \quad x_p(t) \neq y(t) \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty)$$

при всех допустимых продолжениях управления $u_p(t)$, $t \in [\theta_q, \infty)$ *преследователя* P_p.

Доказательство. В силу (1.12), условий леммы и теоремы Коши

$$\langle x_p(t) - y(t), l\rangle = \langle x_p(\theta_q) - y(\theta_q), l\rangle +$$

$$+\int_{\theta_q}^{t} \langle u_p(s) - v_l(s), l\rangle\, ds \leqslant 0 \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty),$$

причем равенство возможно только в случае, если $u_p(s) = v_l(s)$ почти всюду на $[\theta_q, t]$, но в этом случае $x_p(t) \neq y(t)$, так как $x_p(\theta_q) \neq y(\theta_q)$. Если

$$\langle x_p(t) - y(t), l\rangle < 0,$$

то $x_p(t) \neq y(t)$. Следовательно, $x_p(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [\theta_q, \infty)$.

Лемма 1.3 доказана. □

Условие 1.1. $Y^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_p^0, p \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n-b+1)$.

Теорема 1.2. *Пусть выполнено предположение* 1.1. *Тогда условие* 1.1 *является необходимым для осуществления* b-*кратной поимки в игре* Γ.

Доказательство. Пусть условие 1.1 не выполнено. Тогда существует (хотя бы одно) множество $Q \in \Omega(n-b+1)$ такое, что $Y^0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_q^0, q \in Q\}$. Из теоремы отделимости следует, что существует единичный вектор $l \in \mathbb{R}^k$ такой, что $\langle h, l\rangle \leqslant 0$ для всех $h \in \operatorname{co}\{X_q^0 - Y^0, q \in Q\}$, поэтому

$$\langle X_q^0 - Y^0, l\rangle \leqslant 0 \text{ для всех } q \in Q.$$

По (1.12) определим допустимое управление убегающего E следующим образом:

$$v(t) = v_l(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

В силу леммы 1.3 при любых допустимых управлениях $u_i(t)$ преследователей P_i выполнено неравенство $x_q(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, $q \in Q$.

Оставшиеся $|I(n) \setminus Q| = n - (n - b + 1) = b - 1$ преследователей не могут осуществить b-кратную поимку.

Теорема 1.2 доказана. □

В основе построенных при доказательстве теоремы 1.1 управлений преследователей, обеспечивающих нестрогую одновременную b-кратную поимку (а следовательно и b-кратную поимку) не позже момента T_0, определенного по (1.10), лежит стратегия параллельного преследования; однако эти управления не обеспечивают совпадения b наименьших моментов поимки, то есть не решают задачу об одновременной b-кратной поимке.

Построим управления преследователей, решающих задачу об одновременной b-кратной поимке, причем вновь не позднее момента T_0, определенного по (1.10).

Т е о р е м а 1.3. *Пусть выполнено предположение* 1.1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная b-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неформально, при осуществлении одновременной b-кратной поимки группой преследователей, предпишем каждому из них действовать так: сначала сблизиться с убегающим (максимально быстро, насколько это позволяет стратегия параллельного преследования) на расстояние, зависящее от параметров игры; сопровождать убегающего (снова используя стратегию параллельного преследования — выбирать управление равное управлению убегающего) до наступления некоторого момента; осуществить одновременную b-кратную поимку в составе группы захвата.

При любых допустимых управлениях решения (1.1) имеют вид

$$x_i(t) = X_i^0 + \int_{t_0}^{t} u_i(s)\, ds,\ y(t) = Y^0 + \int_{t_0}^{t} v(s)\, ds \text{ для всех } i \in I(n),\ t \in [t_0, \infty).$$

Следовательно, для всех $i \in I(n)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$x_i(t) - y(t) = (X_i^0 - Y^0) + \int_{t_0}^{t} (u_i(s) - v(s))\, ds.$$

Допустимые управления преследователей P_i, $i \in I(n)$, будут иметь следующий вид:

$$u_i(t) = v(t) - h_i(t)\lambda_i(v(t), t)(X_i^0 - Y^0),\ t \in [t_0, \infty), \tag{1.13}$$

где функции $h_i(t) \in [0, 1]$ являются кусочно-постоянными и могут менять свое значение лишь в моменты $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$, определенные разбиением σ.

Тогда для всех $i \in I(n)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$x_i(t) - y(t) = (X_i^0 - Y^0)\Big(1 - G_i(t)\Big),\ \text{где } G_i(t) = \int_{t_0}^{t} h_i(s)\lambda_i(v(s), s) ds. \tag{1.14}$$

Таким образом, чтобы добиться одновременной b-кратной поимки, достаточно для любого разбиения σ и допустимого управления $v(t)$ определить функции $h_i(t) \in [0,1]$ так, чтобы нашлись множество $\Lambda^* \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых выполнены соотношения

$$G_\alpha(\tau) = 1, G_\alpha(t) < 1 \text{ при всех } t \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda^*. \tag{1.15}$$

Для всех $\Lambda \in \Omega(b)$, $i \in I(n)$, $a \leqslant c$, $a, c \in [t_0, \infty)$ введем обозначения

$$L(\Lambda; a, c) = \int_a^c \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v(s), s) ds, \quad L_i(a, c) = \int_a^c \lambda_i(v(s), s) ds. \tag{1.16}$$

В дальнейшем будем учитывать, что при всех $\Lambda \in \Omega(b)$, $i \in I(n)$, $a \in [t_0, \infty)$ и любых допустимых управлениях $v(t)$ функции $L(\Lambda; a, t)$ и $L_i(a, t)$ непрерывны по t на промежутке $[a, \infty)$.

Определим функции $h_i(t)$ и тем самым полностью определим управления преследователей.

Шаг 0. Момент $t = \theta_0 = t_0$. Необходимо определить $h_i(\theta_0) \in [0,1]$ для всех $i \in I(n)$.

Преследователи P_i знают разбиение σ, момент T_0 из формулы (1.10) и $v(t)$ для $t \in [\theta_0, \theta_1)$. Преследователи P_i вычисляют момент (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\begin{gathered} \tau = \min\bigl\{t \in (\theta_0, \theta_1] :\ \text{существует } \Lambda^* \in \Omega(b) \\ \text{такое, что } L(\Lambda^*; \theta_0, t) = 1\bigr\}. \end{gathered} \tag{1.17}$$

Вариант 0.1. Существует момент $\tau \in (\theta_0, \theta_1]$. Тогда

$$\begin{gathered} h_\alpha(\theta_0) = \frac{1}{L_\alpha(\theta_0, \tau)},\ \text{если } \alpha \in \Lambda^*; \\ h_\beta(\theta_0) = 0,\ \text{если } \beta \in I(n) \setminus \Lambda^*; \\ h_i(t) = h_i(\theta_0),\ t \in [\theta_0, \theta_1),\ i \in I(n). \end{gathered} \tag{1.18}$$

Здесь и далее, если (1.17) определяет несколько множеств Λ^*, то, в соответствии с лексикографическим порядком, выберем первое (минимальное) из них. Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda^*$

$$1 = L(\Lambda^*; \theta_0, \tau) = \int_{\theta_0}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s), s) ds \leqslant \int_{\theta_0}^{\tau} \lambda_\alpha(v(s), s) ds = L_\alpha(\theta_0, \tau),$$

поэтому

$$h_\alpha(\theta_0) = \frac{1}{L_\alpha(\theta_0,\tau)} \leqslant 1 \text{ для всех } \alpha \in \Lambda^*.$$

Далее, из определения (1.17) момента τ на данном шаге следует, что

$$L(\Lambda^*;\theta_0,t) < L(\Lambda^*;\theta_0,\tau) \text{ при всех } t \in [\theta_0,\tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_0,\tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$ имеем

$$L_\alpha(t,\tau) = \int_t^\tau \lambda_\alpha(v(s),s)ds \geqslant \int_t^\tau \min_{\alpha^*\in\Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s),s)ds =$$
$$= L(\Lambda^*;\theta_0,\tau) - L(\Lambda^*;\theta_0,t) > 0 \text{ и}$$
$$L_\alpha(\theta_0,t) < L_\alpha(\theta_0,t) + L_\alpha(t,\tau) = L_\alpha(\theta_0,\tau). \tag{1.19}$$

Выполнены соотношения (1.15) (происходит одновременная b-кратная поимка), поскольку из (1.14), (1.16), (1.18), (1.19) следует, что при всех $t \in [\theta_0,\tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$

$$G_\alpha(\tau) = h_\alpha(\theta_0)\int_{\theta_0}^{\tau} \lambda_\alpha(v(s),s)ds = \frac{1}{L_\alpha(\theta_0,\tau)} L_\alpha(\theta_0,\tau) = 1,$$
$$G_\alpha(t) = h_\alpha(\theta_0)\int_{\theta_0}^{t} \lambda_\alpha(v(s),s)ds = \frac{1}{L_\alpha(\theta_0,\tau)} L_\alpha(\theta_0,t) < 1.$$

Покажем теперь, используя (1.16) и (1.11), что если $T_0 \leqslant \theta_1$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

$$\max_{\Lambda\in\Omega(b)} L(\Lambda;\theta_0,T_0) \geqslant \frac{1}{C_n^b}\sum_{\Lambda\in\Omega(b)} L(\Lambda;\theta_0,T_0) = \frac{1}{C_n^b}\sum_{\Lambda\in\Omega(b)} \int_{\theta_0}^{T_0} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha(v(s),s)ds =$$
$$= \frac{1}{C_n^b}\int_{\theta_0}^{T_0} \sum_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda_\alpha(v(s),s)ds \geqslant \frac{1}{C_n^b}\int_{\theta_0}^{T_0} \delta_0(s)ds \geqslant 1.$$

Следовательно, момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_1$ существует.

Вариант 0.2. Момента $\tau \in (\theta_0,\theta_1]$ не существует (это возможно только при $\theta_1 < T_0$).

Сначала определим как близко преследователь P_i должен сближаться с убегающим E. В момент $t = t_0 = \theta_0$ (по сути до начала игры) выберем и зафиксируем произвольное значение δ^* из условия

$$0 < \delta^* \leqslant \min_{t\in[t_0,T_0]} \delta_0(t), \tag{1.20}$$

существование δ^* следует из леммы 1.1.

Понадобится еще диаметр разбиения σ дополненный точкой T_0. Напомним, что в начальный момент $t = t_0 = \theta_0$ (по сути до начала игры) преследователи уже знают разбиение σ и могут вычислить T_0 по формуле (1.10). Итак, зафиксировано разбиение σ и значение T_0. Найдем

$$q^* = \max\{q \geqslant 0 : \theta_q < T_0\}. \tag{1.21}$$

Отметим, что $T_0 \leqslant \theta_{q^*+1}$. Вычислим

$$d^* = d^*(\sigma, T_0) = \min\{\theta_1 - \theta_0, \theta_2 - \theta_1, \ldots, \theta_{q^*} - \theta_{q^*-1}, T_0 - \theta_{q^*}\} > 0. \tag{1.22}$$

В начальный момент $t = t_0 = \theta_0$ определим как близко преследователь P_i должен сближаться с убегающим E

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\sigma, T_0) = \frac{\delta^* d^*}{C_n^b} > 0. \tag{1.23}$$

Определим $h_i(t)$ для всех $i \in I(n)$ и $t \in [\theta_0, \theta_1)$ следующим образом:

$$h_i(\theta_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } L_i(\theta_0, \theta_1) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ \dfrac{1-\varepsilon^*}{L_i(\theta_0,\theta_1)}, & \text{если } L_i(\theta_0, \theta_1) > 1 - \varepsilon^*, \end{cases} \tag{1.24}$$
$$h_i(t) = h_i(\theta_0).$$

Тогда

$$G_i(\theta_1) = h_i(\theta_0)\int_{\theta_0}^{\theta_1} \lambda_i(v(s), s)ds = h_i(\theta_0)L_i(\theta_0, \theta_1) =$$
$$= \begin{cases} 1 \cdot L_i(\theta_0, \theta_1), & \text{если } L_i(\theta_0, \theta_1) \leqslant 1 - \varepsilon^* \\ \dfrac{1-\varepsilon^*}{L_i(\theta_0,\theta_1)} L_i(\theta_0, \theta_1), & \text{если } L_i(\theta_0, \theta_1) > 1 - \varepsilon^* \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} L_i(\theta_0, \theta_1), & \text{если } h_i(\theta_0) = 1 \\ 1 - \varepsilon^*, & \text{если } h_i(\theta_0) < 1. \end{cases}$$

В любом случае

$$G_i(\theta_1) \leqslant 1 - \varepsilon^* \text{ для всех } i \in I(n).$$

Шаг 1. Момент $t = \theta_1$ ($\theta_1 < T_0$). Необходимо определить $h_i(\theta_1) \in [0, 1]$ для всех $i \in I(n)$.

Преследователи P_i знают $v(t),\ t \in [\theta_1, \theta_2)$, а также на предыдущем шаге вычислили $\varepsilon^* > 0$. Преследователи P_i вычисляют момент (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\begin{gathered}\tau = \min\bigl\{t \in (\theta_1, \theta_2] : \text{ существует } \Lambda^* \in \Omega(b) \\ \text{такое, что } \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} G_{\alpha^*}(\theta_1) + L(\Lambda^*; \theta_1, t) = 1\bigr\}.\end{gathered} \tag{1.25}$$

Вариант 1.1. Существует момент $\tau \in (\theta_1, \theta_2]$. Тогда

$$\begin{gathered}h_\alpha(\theta_1) = \frac{1 - G_\alpha(\theta_1)}{L_\alpha(\theta_1, \tau)}, \text{ если } \alpha \in \Lambda^*; \\ h_\beta(\theta_1) = 0, \text{ если } \beta \in I(n) \setminus \Lambda^*; \\ h_i(t) = h_i(\theta_1),\ t \in [\theta_1, \theta_2),\ i \in I(n).\end{gathered} \tag{1.26}$$

Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda^*$

$$1 - G_\alpha(\theta_1) \leqslant 1 - \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} G_{\alpha^*}(\theta_1) = L(\Lambda^*; \theta_1, \tau) = \int_{\theta_1}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s), s)ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\theta_1}^{\tau} \lambda_\alpha(v(s), s)ds = L_\alpha(\theta_1, \tau),$$

поэтому для всех $\alpha \in \Lambda^*$

$$h_\alpha(\theta_1) = \frac{1 - G_\alpha(\theta_1)}{L_\alpha(\theta_1, \tau)} \leqslant \frac{1 - G_\alpha(\theta_1)}{1 - G_\alpha(\theta_1)} = 1.$$

Далее, из определения (1.25) момента τ на данном шаге следует, что

$$L(\Lambda^*; \theta_1, t) < L(\Lambda^*; \theta_1, \tau) \text{ при всех } t \in [\theta_1, \tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_1, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$ имеем

$$L_\alpha(t, \tau) = \int_t^{\tau} \lambda_\alpha(v(s), s)ds \geqslant \int_t^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s), s)ds =$$

$$= L(\Lambda^*; \theta_1, \tau) - L(\Lambda^*; \theta_1, t) > 0 \text{ и}$$

$$L_\alpha(\theta_1, t) < L_\alpha(\theta_1, t) + L_\alpha(t, \tau) = L_\alpha(\theta_1, \tau). \tag{1.27}$$

Выполнены соотношения (1.15) (то есть происходит одновременная b-кратная поимка), поскольку из (1.14), (1.16), (1.26), (1.27) следует, что при всех $t \in [\theta_1, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$

$$G_\alpha(\tau) = G_\alpha(\theta_1) + h_\alpha(\theta_1)\int_{\theta_1}^{\tau}\lambda_\alpha(v(s),s)ds =$$
$$= G_\alpha(\theta_1) + \frac{1 - G_\alpha(\theta_1)}{L_\alpha(\theta_1,\tau)}L_\alpha(\theta_1,\tau) = 1,$$
$$G_\alpha(t) = G_\alpha(\theta_1) + h_\alpha(\theta_1)\int_{\theta_1}^{t}\lambda_\alpha(v(s),s)ds =$$
$$= G_\alpha(\theta_1) + \frac{1 - G_\alpha(\theta_1)}{L_\alpha(\theta_1,\tau)}L_\alpha(\theta_1,t) < 1.$$

($G_i(t) \leqslant G_i(\theta_1) \leqslant 1 - \varepsilon^* < 1$ для всех $t \in [\theta_0, \theta_1]$ и $i \in I(n)$ поскольку имел место вариант 0.2.)

Покажем теперь, используя (1.16) и (1.11), что если $T_0 \leqslant \theta_2$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

Предположим сначала, что из (1.24) получили, что $h_i(\theta_0) = 1$ для всех $i \in I(n)$. Тогда

$$\max_{\Lambda\in\Omega(b)}\Big(\min_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha(\theta_1) + L(\Lambda;\theta_1,T_0)\Big)\geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{C_n^b}\sum_{\Lambda\in\Omega(b)}\Big(\min_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha(\theta_1) + L(\Lambda;\theta_1,T_0)\Big)=$$
$$= \frac{1}{C_n^b}\sum_{\Lambda\in\Omega(b)}\Big(\min_{\alpha\in\Lambda}\int_{\theta_0}^{\theta_1}\lambda_\alpha(v(s),s)ds + \int_{\theta_1}^{T_0}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(v(s),s)\Big)\geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{C_n^b}\sum_{\Lambda\in\Omega(b)}\Big(\int_{\theta_0}^{\theta_1}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(v(s),s)ds + \int_{\theta_1}^{T_0}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(v(s),s)\Big)=$$
$$= \frac{1}{C_n^b}\sum_{\Lambda\in\Omega(b)}\int_{\theta_0}^{T_0}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(v(s),s)ds = \frac{1}{C_n^b}\int_{\theta_0}^{T_0}\sum_{\Lambda\in\Omega(b)}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda_\alpha(v(s),s)ds \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{C_n^b}\int_{\theta_0}^{T_0}\delta_0(s)ds \geqslant 1.$$

Следовательно, если $h_i(\theta_0) = 1$ для всех $i \in I(n)$, то момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_2$ существует.

Предположим, что из (1.24) получили, что $h_\alpha(\theta_0) < 1$ при некоторых $\alpha \in \Lambda^*$. Тогда получим, что $G_\alpha(\theta_1) = 1 - \varepsilon^*$ и следуя (1.20), (1.22), (1.23)

$$G_\alpha(\theta_1) + L(\Lambda^*;\theta_1,T_0) \geqslant 1 - \varepsilon^* + \frac{1}{C_n^b}\int_{\theta_1}^{T_0}\delta_0(s)ds \geqslant 1 - \varepsilon^* + \frac{\delta^*}{C_n^b}(T_0 - \theta_1) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \varepsilon^* + \frac{\delta^* d^*}{C_n^b} = 1 - \frac{\delta^* d^*}{C_n^b} + \frac{\delta^* d^*}{C_n^b} = 1,$$

то есть и в указанном случае момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_2$ существует.

Вариант 1.2. Момента $\tau \in (\theta_1, \theta_2]$ не существует (это возможно только при $\theta_2 < T_0$).

Определим $h_i(t)$ для всех $i \in I(n)$ и $t \in [\theta_1, \theta_2)$ следующим образом:

$$h_i(\theta_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_i(\theta_1) + L_i(\theta_1, \theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_i(\theta_1)}{L_i(\theta_1, \theta_2)}, & \text{если } G_i(\theta_1) + L_i(\theta_1, \theta_2) > 1 - \varepsilon^*, \end{cases} \tag{1.28}$$
$$h_i(t) = h_i(\theta_1).$$

Тогда

$$G_i(\theta_2) = G_i(\theta_1) + h_i(\theta_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda_i(v(s), s) ds = G_i(\theta_1) + h_i(\theta_1) L_i(\theta_1, \theta_2) =$$

$$= \begin{cases} G_i(\theta_1) + 1 \cdot L_i(\theta_1, \theta_2), & \text{если } G_i(\theta_1) + L_i(\theta_1, \theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^* \\ G_i(\theta_1) + \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_i(\theta_1)}{L_i(\theta_1, \theta_2)} L_i(\theta_1, \theta_2), & \text{если } G_i(\theta_1) + L_i(\theta_1, \theta_2) > 1 - \varepsilon^* \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_i(\theta_1) + L_i(\theta_1, \theta_2), & \text{если } h_i(\theta_1) = 1 \\ 1 - \varepsilon^*, & \text{если } h_i(\theta_1) < 1. \end{cases}$$

В любом случае

$$G_i(\theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^* \text{ для всех } i \in I(n).$$

Шаг q ($q = 2, 3, 4, \dots$). Момент $t = \theta_q$ ($\theta_q < T_0$). Необходимо определить $h_i(\theta_q) \in [0, 1]$ для всех $i \in I(n)$.

Преследователи P_i знают $v(t),\ t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ и $\varepsilon^* > 0$. Преследователи P_i вычисляют момент (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\begin{gathered} \tau = \min\bigl\{t \in (\theta_q, \theta_{q+1}] : \text{существует } \Lambda^* \in \Omega(b) \\ \text{такое, что } \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} G_{\alpha^*}(\theta_q) + L(\Lambda^*; \theta_q, t) = 1\bigr\}. \end{gathered} \tag{1.29}$$

Вариант q.1. Существует момент $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$. Тогда

$$\begin{gathered} h_\alpha(\theta_q) = \frac{1 - G_\alpha(\theta_q)}{L_\alpha(\theta_q, \tau)},\ \text{если } \alpha \in \Lambda^*; \\ h_\beta(\theta_q) = 0,\ \text{если } \beta \in I(n) \setminus \Lambda^*; \\ h_i(t) = h_i(\theta_q),\ t \in [\theta_q, \theta_{q+1}),\ i \in I(n). \end{gathered} \tag{1.30}$$

Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda^*$

$$1 - G_\alpha(\theta_q) \leqslant 1 - \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} G_{\alpha^*}(\theta_q) = L(\Lambda^*; \theta_q, \tau) = \int_{\theta_q}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s), s) ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\theta_q}^{\tau} \lambda_\alpha(v(s), s) ds = L_\alpha(\theta_q, \tau),$$

поэтому для всех $\alpha \in \Lambda^*$

$$h_\alpha(\theta_q) = \frac{1 - G_\alpha(\theta_q)}{L_\alpha(\theta_q, \tau)} \leqslant \frac{1 - G_\alpha(\theta_q)}{1 - G_\alpha(\theta_q)} = 1.$$

Далее, из определения (1.29) момента τ на данном шаге следует, что

$$L(\Lambda^*; \theta_q, t) < L(\Lambda^*; \theta_q, \tau) \text{ при всех } t \in [\theta_q, \tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_q, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$ имеем

$$L_\alpha(t, \tau) = \int_t^{\tau} \lambda_\alpha(v(s), s) ds \geqslant \int_t^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda^*} \lambda_{\alpha^*}(v(s), s) ds =$$

$$= L(\Lambda^*; \theta_q, \tau) - L(\Lambda^*; \theta_q, t) > 0 \text{ и}$$

$$L_\alpha(\theta_q, t) < L_\alpha(\theta_q, t) + L_\alpha(t, \tau) = L_\alpha(\theta_q, \tau). \tag{1.31}$$

Выполнены соотношения (1.15) (то есть происходит одновременная b-кратная поимка), поскольку из (1.14), (1.16), (1.30), (1.31) следует, что при всех $t \in [\theta_q, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda^*$

$$G_\alpha(\tau) = G_\alpha(\theta_q) + h_\alpha(\theta_q) \int_{\theta_q}^{\tau} \lambda_\alpha(v(s), s) ds =$$

$$= G_\alpha(\theta_q) + \frac{1 - G_\alpha(\theta_q)}{L_\alpha(\theta_q, \tau)} L_\alpha(\theta_q, \tau) = 1,$$

$$G_\alpha(t) = G_\alpha(\theta_q) + h_\alpha(\theta_q) \int_{\theta_q}^{t} \lambda_\alpha(v(s), s) ds =$$

$$= G_\alpha(\theta_q) + \frac{1 - G_\alpha(\theta_q)}{L_\alpha(\theta_q, \tau)} L_\alpha(\theta_q, t) < 1.$$

($G_i(t) \leqslant G_i(\theta_q) \leqslant 1 - \varepsilon^* < 1$ для всех $t \in [\theta_0, \theta_q]$, $i \in I(n)$ поскольку имел место вариант $q - 1.2$.)

Аналогично тому как это делалось на шаге 1 доказывается следующее утверждение: если $T_0 \leqslant \theta_{q+1}$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

Вариант $q.2$. Момента $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ не существует (это возможно только при $\theta_{q+1} < T_0$).

Определим $h_i(t)$ для всех $i \in I(n)$ и $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ следующим образом:

$$h_i(\theta_q) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_i(\theta_q) + L_i(\theta_q, \theta_{q+1}) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_i(\theta_q)}{L_i(\theta_q, \theta_{q+1})}, & \text{если } G_i(\theta_q) + L_i(\theta_q, \theta_{q+1}) > 1 - \varepsilon^*, \end{cases} \tag{1.32}$$

$h_i(t) = h_i(\theta_q)$.

Тогда

$$G_i(\theta_{q+1}) = G_i(\theta_q) + h_i(\theta_q) \int_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} \lambda_i(v(s), s) ds = G_i(\theta_q) + h_i(\theta_q) L_i(\theta_q, \theta_{q+1}) =$$

$$= \begin{cases} G_i(\theta_q) + 1 \cdot L_i(\theta_q, \theta_{q+1}), \text{ если } G_i(\theta_q) + L_i(\theta_q, \theta_{q+1}) \leqslant 1 - \varepsilon^* \\ G_i(\theta_q) + \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_i(\theta_q)}{L_i(\theta_q, \theta_{q+1})} L_i(\theta_q, \theta_{q+1}), \text{ если } G_i(\theta_q) + L_i(\theta_q, \theta_{q+1}) > 1 - \varepsilon^* \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_i(\theta_q) + L_i(\theta_q, \theta_{q+1}), & \text{если } h_i(\theta_q) = 1 \\ 1 - \varepsilon^*, & \text{если } h_i(\theta_q) < 1. \end{cases}$$

В любом случае

$$G_i(\theta_{q+1}) \leqslant 1 - \varepsilon^* \text{ для всех } i \in I(n).$$

Из (1.21) следует, что не позже чем на шаге q^* произойдет одновременная b-кратная поимка.

Теорема 1.3 доказана. □

Лемма 1.4. *Пусть выполнены предположение* 1.1, *условие* 1.1, *отображение* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда* $\Delta_0 = \infty$.

Доказательство. При $U(t) = U = \text{const}$ предположение 1.1 примет вид: существуют постоянная невырожденная квадратная матрица B порядка k и постоянный вектор $g \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(U + g) = S(0, 1). \tag{1.33}$$

Из (1.33), (1.7), (1.6), (1.5), (1.4) получаем, что

$$\delta_0(t) = \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(v, X_\alpha^0 - Y^0; U) =$$

$$= \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(B(v + g), B(X_\alpha^0 - Y^0); S(0, 1)) =$$

$$= \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(B(v + g), B(X_\alpha^0 - Y^0); S(0, 1)) =$$

$$= \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(s, B(X_\alpha^0 - Y^0); S(0, 1)).$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}\delta_0(t) = \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(s, b_\alpha; S(0,1)),\\ \text{где } b_i = B(X_i^0 - Y^0) \neq 0 \text{ для всех } i \in I(n).\end{gathered} \tag{1.34}$$

Отметим, что (1.34) можно преобразовать с применением (1.3), получим

$$\delta_0(t) = \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \frac{\langle s, b_\alpha\rangle + \sqrt{\langle s, b_\alpha\rangle^2 + |b_\alpha|^2(1-|s|^2)}}{|b_\alpha|^2} \tag{1.35}$$

Из (1.35) следует, что функция постоянна $\delta_0(t) = \delta_0 = \mathrm{const}$.

Предположим, что $\delta_0 = 0$. Тогда из (1.34) следует, что найдется элемент $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda \in \Omega(b)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda$, для которого $\lambda(s^*, b_\alpha; S(0,1)) = 0$. Построим множество

$$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{n-b+1}\} \in \Omega(n-b+1)$$

по следующему правилу. Выберем элемент

$$q_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, b\} \in \Omega(b) \text{ из условия } \lambda(s^*, b_{q_1}; S(0,1)) = 0,$$

затем элемент

$$q_2 \in L_2 = (L_1 \bigcup \{b+1\}) \setminus \{q_1\} \in \Omega(b) \text{ такой, что } \lambda(s^*, b_{q_2}; S(0,1)) = 0,$$

затем элемент

$$q_3 \in L_3 = (L_2 \bigcup \{b+2\}) \setminus \{q_2\} \in \Omega(b),$$

удовлетворяющий равенству

$$\lambda(s^*, b_{q_3}; S(0,1)) = 0,$$

и так далее. На последнем шаге построим множество

$$L_{n-b+1} = (L_{n-b} \bigcup \{n\}) \setminus \{q_{n-b}\} \in \Omega(b)$$

и выберем элемент

$$q_{n-b+1} \in L_{n-b+1} \text{ по условию } \lambda(s^*, b_{q_{n-b+1}}; S(0,1)) = 0.$$

По построению для множества $Q \in \Omega(n-b+1)$ справедливо равенство

$$\min_{s\in S(0,1)} \max_{q\in Q} \lambda(s, b_q; S(0,1)) = 0,$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{b_q,\ q \in Q\} = \operatorname{Int} \operatorname{co}\{B(X_q^0 - Y^0),\ q \in Q\}.$$

Поскольку матрица B невырожденная, то

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_q^0 - Y^0,\ q \in Q\} \text{ или } Y^0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_q^0,\ q \in Q\}$$

и условие 1.1 не выполнено.

Полученное противоречие доказывает, что $\delta_0 > 0$. Из (1.7) получаем, что

$$\Delta_0 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s) = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0 = \infty.$$

Лемма 1.4 доказана. □

Т е о р е м а 1.4. *Пусть выполнено предположение* 1.1 *и отображение* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 1.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b-*кратной поимки в игре* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость выполнения условия 1.1 следует из теоремы 1.2.

Пусть выполнено условие 1.1. Из леммы 1.4 следует, что $\Delta_0 = \infty$ и возможность одновременной b-кратной поимки следует из теоремы 1.3.

Теорема 1.4 доказана. □

3. Примеры

П р и м е р 1.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{1.1}$ $2+2q$ $(q \geqslant 1)$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{1+2q}$ и убегающего E вида (1.1), где

$$U(t) = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{1+2q} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{1+2q} \end{pmatrix}, \quad i \in I(1+2q), \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположение 1.1 выполнено при $B(t) = \mathcal{I}$ и $g(t) = (0,0)^{\mathrm{T}}$. Отметим, что начальные позиции преследователей образуют правильный $(1{+}2q)$-угольник с центром в начальной позиции убегающего. Проверяя, получаем, что при $b = 1, 2, \ldots, q$ условие 1.1 имеет место, а при $b \geqslant q+1$ условие 1.1 не выполнено. Из теоремы 1.4 следует

Утверждение 1.1. *В игре* $\Gamma_{1.1}$ *возможна одновременная* q*-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

Пример 1.2. В $\mathbb{R}^3$ рассмотрим игру $\Gamma_{1.2}$ $2+3q$ $(q \geqslant 1)$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{1+3q}$ и убегающего E вида (1.1), где

$$U(t) = S\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, 1\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{1+2q} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{1+2q} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_l^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$i \in I(1+2q)$, $l \in I^*(2+2q, 1+3q)$. Предположение 1.1 выполнено при $B(t) = \mathcal{I}$ и $g(t) = (-2,-3,-4)^{\mathrm{T}}$. Отметим, что $(0,0,0)^{\mathrm{T}} \notin U(t)$. Из теоремы 1.4 следует

Утверждение 1.2. *В игре* $\Gamma_{1.2}$ *возможна одновременная* q*-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна.*

Покажем, что условие 1.1 в общем случае не является достаточным (см. теоремы 1.2, 1.4) для осуществления b-кратной поимки.

Пример 1.3. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{1.3}$ 6 лиц: преследователей P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и убегающего E вида (1.1), где $t_0 = 0$,

$$U(t) = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-t}\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} 5\cos\dfrac{2\pi i}{5} \\ 5\sin\dfrac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, \quad i \in I(5), \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что выполнены предположение 1.1 $(B(t) = e^t\mathcal{I},\ g(t) = (0,0)^{\mathrm{T}})$ и условие 1.1 при $b = 1, 2$. При всех допустимых управлениях

$$x_i(t) \in X_i^0 + S\left((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\right), \quad i \in I(5), \quad y(t) \in S\left((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\right), \quad t \in [0, \infty).$$

Поскольку $|X_i^0| = 5$, то

$$\left(X_i^0 + S\left((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\right)\right) \bigcap S\left((0,0)^{\mathrm{T}}, 1\right) = \varnothing,$$

следовательно $x_i(t) \neq y(t)$, $i \in I(5)$, $t \in [0, \infty)$ при любых допустимых управлениях игроков.

Утверждение 1.3. *В игре* $\Gamma_{1.3}$ *поимка невозможна.*

§ 2. Одновременная многократная поимка группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого преследования

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i \ &: \ \dot{x}_i = u_i, \ \ u_i \in U(t), \ \ x_i(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\ E_j \ &: \ \dot{y}_j = v, \ \ \ v \in U(t), \ \ \ y_j(t_0) = Y_j^0, \ \ j \in I(m), \end{aligned} \tag{2.1}$$

причем $X_i^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n)$, $j \in I(m)$. Здесь x_i, $y_j \in \mathbb{R}^k$; $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа (порожденной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^k$) на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (2.1).

О п р е д е л е н и е 2.1. Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$, $q \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$).

О п р е д е л е н и е 2.2. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y_j(\theta_q)$, $j \in I(m)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t, \ \theta_q, \ x_i(\theta_q), \ i \in I(n), \ y_j(\theta_q), \ j \in I(m)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр управления, который для всех убегающих E_j, $j \in I(m)$, пошагово строит одно и то же допустимое управление $v(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы убегающих).

О п р е д е л е н и е 2.3. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i $(i \in I(n))$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y_j(\theta_q)$, $j \in I(m)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ \theta_q,\ x_\alpha(\theta_q),\ \alpha \in I(n),\ y_j(\theta_q),\ j \in I(m),\ (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Действия преследователей можно трактовать так: имеется центр управления, который каждому преследователю P_i, $i \in I(n)$, пошагово строит допустимое управление $u_i(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы преследователей).

Для каждого $q = 1, 2, \dots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \dots, i_q\} : i_1 < i_2 < \dots < i_q,\ i_1, i_2, \dots, i_q \in I(n)\big\},\ |\Omega(q)| = C_n^q.$$

О п р е д е л е н и е 2.4. В игре Γ возможна b-кратная поимка $(b \in I(n))$, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом любой из убегающих E_j, $j \in I(m)$, может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз. Кратность поимки в игре Γ складывается из кратностей поимок каждого убегающего E_j, $j \in I(m)$ (в том числе возможен случай реализации b-кратной поимки, когда одного убегающего ловят b преследователей, а остальные убегающие избегают поимки).

Определение 2.5. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$, $i \in I(n)$, преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 2.6. В игре Γ возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$, $i \in I(n)$, преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки не указываем и говорим, что в игре Γ возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

2. Решение задачи

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\big\}. \tag{2.2}$$

Тогда $\lambda(w, \xi; S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w - \lambda\xi| \leqslant 1$, решая которое получаем, что

$$\lambda(w, \xi; S(0,1)) = \frac{\langle w, \xi\rangle + \sqrt{\langle w, \xi\rangle^2 + |\xi|^2(1 - |w|^2)}}{|\xi|^2} \tag{2.3}$$

для всех $w \in S(0,1)$ и $\xi \neq 0$.

Будем считать, что выполнено

Предположение 2.1. Существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0,1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty). \tag{2.4}$$

Из (2.4) следует, что

$$U(t) = B^{-1}(t)S(0,1) - g(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Предположение 2.1 допускает переход от $U(t)$ к $S(0,1)$. А именно, из (2.2), (2.3), (2.4) получим, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered}
\lambda(w, \xi; U(t)) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in U(t)\big\} = \\
= \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi + g(t)) \in (U(t) + g(t))\big\} = \\
= \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : B(t)(w - \lambda\xi + g(t)) \in B(t)(U(t) + g(t))\big\} = \\
= \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (B(t)(w + g(t)) - \lambda B(t)\xi) \in S(0,1)\big\} = \\
= \lambda(B(t)(w + g(t)), B(t)\xi; S(0,1)) = \\
= \frac{1}{|B(t)\xi|^2}\Big(\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\xi\rangle + \\
+ \sqrt{\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\xi\rangle^2 + |B(t)\xi|^2(1 - |B(t)(w + g(t))|^2)} \;\Big).
\end{gathered} \tag{2.5}$$

По функциям

$$\lambda_i(v,t;j) = \lambda(v, X_i^0 - Y_j^0; U(t)) =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y_j^0)) \in U(t)\bigr\},\ i \in I(n),$$

непрерывным на множестве $U(t) \times [t_0, \infty)$ при любом значении параметра $j \in I(m)$, определим величины, зависящие от n параметров,

$$\delta_0(t; j_i, i \in I(n)) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v, t; j_\alpha),$$

$$\Delta_0(j_i, i \in I(n)) = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s; j_i, i \in I(n))\, ds.$$

Условие 2.1. Для каждого $i \in I(n)$ найдется номер $j_i \in I(m)$, что $\Delta_0(j_i, i \in I(n)) = \infty$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнены предположение* 2.1 *и условие* 2.1. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Доказательство. В $\mathbb{R}^k$ определим вспомогательную игру Γ^* $n{+}1$ лиц: n преследователей P_{ij_i} и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lll} P_{ij_i} & : & \dot{x}^*_{ij_i} = u^*_{ij_i},\ \ u^*_{ij_i} \in U(t),\ \ x^*_{ij_i}(t_0) = X_i^0 - Y_{j_i}^0,\ \ i \in I(n), \\ E & : & \dot{y}^* = v^*, \qquad v^* \in U(t), \quad y^*(t_0) = 0. \end{array} \tag{2.6}$$

По формуле Коши для всех допустимых управлений $u^*_{ij_i}(t), v^*(t)$ и момента времени $t \geqslant t_0$

$$x^*_{ij_i}(t) = (X_i^0 - Y_{j_i}^0) + \int_{t_0}^{t} u^*_{ij_i}(s)\, ds, \quad y^*(t) = \int_{t_0}^{t} v^*(s)\, ds.$$

Пусть в игре Γ^*, определяемой системой (2.6), убегающий E использует управление, выбранное убегающими E_j в игре Γ, заданной уравнением (2.1), то есть

$$v^*(t) = v(t) \text{ для всех } t \geqslant t_0.$$

В этом случае имеет место равенство

$$y_{j_i}(t) = y^*(t) + Y_{j_i}^0. \tag{2.7}$$

Из теоремы 1.3 следует, что в игре Γ^* возможна одновременная b-кратная поимка. Пусть $u^*_{ij_i}(t)$ — допустимые управления преследователей P_{ij_i}, решающие указанную задачу, значит найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x^*_{\alpha j_\alpha}(\tau) = y^*(\tau),\ x^*_{\alpha j_\alpha}(s) \neq y^*(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \alpha \in \Lambda. \tag{2.8}$$

Зададим управление преследователей P_i в игре Γ следующим образом:

$$u_i(t) = u^*_{ij_i}(t) \text{ для всех } t \geqslant t_0.$$

Тогда

$$x_i(t) = x^*_{ij_i}(t) + Y^0_{j_i}. \tag{2.9}$$

Объединяя (2.7), (2.8), (2.9) получим, что в игре Γ

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \alpha \in \Lambda.$$

Теорема 2.1 доказана. $\square$

Условие 2.2. Для каждого $i \in I(n)$ найдется номер $j_i \in I(m)$, что $0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X^0_p - Y^0_{j_p}, p \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n - b + 1)$.

Аналогично теореме 1.4 доказывается

Теорема 2.2. *Пусть выполнено предположение* 2.1 *и отображение* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 2.2 *является достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

3. Примеры

Пример 2.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{2.1}$ 5 лиц: преследователей P_1, P_2, P_3 и убегающих E_1, E_2 вида (2.1), где $U(t) = S((-1, 2)^{\mathrm{T}}, 1)$

$$X^0_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix},\quad X^0_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix},\quad X^0_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \end{pmatrix},\quad Y^0_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \end{pmatrix},\quad Y^0_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположение 2.1 выполнено при $B(t) = \mathcal{I}$ и $g(t) = (1, -2)^{\mathrm{T}}$. Отметим, что

$$Y^0_1 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X^0_1, X^0_2, X^0_3\} \quad \text{и} \quad Y^0_2 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X^0_1, X^0_2, X^0_3\}.$$

Это означает, что если рассмотреть аналогичную игру, но только с одним убегающим или с двумя убегающими, каждый из которых имеет свое независимое управление (v_1 и v_2), то в ней поимка невозможна (см. теорему 1.4). В игре $\Gamma_{2.1}$ условие 2.2 при $b = 1$ выполнено, например,

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_1^0 - Y_1^0, X_2^0 - Y_2^0, X_3^0 - Y_1^0\} =$$

$$= \operatorname{Int} \operatorname{co} \left\{ \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ -10 \end{pmatrix} \right\}.$$

Из теоремы 2.2 следует

Утверждение 2.1. *В игре $\Gamma_{2.1}$ возможна поимка.*

Пример 2.2. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{2.2}$ $2 + 4q$ ($q \geqslant 1$) лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{1+2q}$ и убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_{1+2q}$ вида (2.1), где

$$U(t) = S\left(\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right), X_i^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Y_j^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi j}{1+2q} \\ \sin\dfrac{2\pi j}{1+2q} \end{pmatrix}, i, j \in I(1+2q).$$

Предположение 2.1 выполнено при $B(t) = 2\mathcal{I}$ и $g(t) = (-10, -20)^{\mathrm{T}}$. Условие 2.2 имеет место (достаточно выбрать $j_i = i$, см. пример 1.1).

Из теоремы 2.2 следует

Утверждение 2.2. *В игре $\Gamma_{2.2}$ возможна одновременная q-кратная поимка.*

§ 3. Синхронная реализация одновременных многократных поимок убегающих в задачах простого преследования

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n_1+n_2+\dots+n_m+m$ лиц: $n_1+n_2+\dots+n_m$ преследователей $P_{11}, P_{21}, \dots, P_{n_1 1}$, $P_{12}, P_{22}, \dots, P_{n_2 2}, \dots, P_{1m}, P_{2m}, \dots, P_{n_m m}$ и m убегающих $E_1, E_2, \dots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} &P_{ij} \ : \ \dot{x}_{ij} = u_{ij}, \ \ u_{ij} \in U_j(t), \ \ x_{ij}(t_0) = X^0_{ij}, \ \ i \in I(n_j), \ \ j \in I(m), \\ &E_j \ : \ \dot{y}_j = v_j, \quad v_j \in U_j(t), \quad y_j(t_0) = Y^0_j, \qquad\qquad\quad j \in I(m), \end{aligned} \tag{3.1}$$

причем $X^0_{ij} \neq Y^0_j$ при всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$. Здесь $x_{ij}, y_j \in \mathbb{R}^k$; $U_j(t)$ — многозначные отображения, непрерывные в метрике Хаусдорфа (порожденной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^k$) на $[t_0, \infty)$, являющиеся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклыми компактами в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (3.1).

Определение 3.1. Управления $u_{ij}(\cdot)$, $i \in I(n_j)$, $v_j(\cdot)$ из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U_j(t)$, $j \in I(m)$, будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < \dots$, $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q\to\infty} \theta_q = \infty$).

Определение 3.2. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}_j$ убегающего E_j ($j \in I(m)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_{i\beta}(\theta_q)$, $y_\beta(\theta_q)$, $i \in I(n_\beta)$, $\beta \in I(m)$, допустимое управление $v_j(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$\begin{gathered} v_j(t) = v_j\big(t, \ \theta_q, \ x_{i\beta}(\theta_q), \ y_\beta(\theta_q), \ i \in I(n_\beta), \ \beta \in I(m)\big), \\ t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \dots \end{gathered}$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

О п р е д е л е н и е 3.3. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_{ij}$ преследователя P_{ij} $(i \in I(n_j),\ j \in I(m))$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_{\alpha\beta}(\theta_q)$, $y_\beta(\theta_q)$, $\alpha \in I(n_\beta)$, $\beta \in I(m)$, и сужениям $(v_\beta(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимых управлений $v_\beta(\cdot)$ убегающих E_β, $\beta \in I(m)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_{ij}(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_{ij}(t) = u_{ij}\big(t,\, \theta_q,\, x_{\alpha\beta}(\theta_q),\ y_\beta(\theta_q),\, (v_\beta(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})),\, \alpha \in I(n_\beta),\, \beta \in I(m)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n_j$ и $j \in I(m)$ определим множество

$$\Omega_j(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, \ldots, i_q \in I(n_j)\big\}, |\Omega_j(q)| = C^q_{n_j}.$$

О п р е д е л е н и е 3.4. В игре Γ возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ $(b_j \in I(n_j)$, $j \in I(m))$, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_{ij}$ преследователей P_{ij}, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программных стратегий $\mathcal{V}_j$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующих разбиению σ, найдутся момент $\tau \in [t_0, T_0]$ и множества $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $j \in I(m)$, для которых, при каждом фиксированном $j \in I(m)$, выполнено

$$x_{\alpha j}(\tau) = y_j(\tau), \quad x_{\alpha j}(s) \neq y_j(s) \quad \text{для всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda_j.$$

Неформально: рассматривается m «непересекающихся» задач (можно считать, что каждая из m групп, включающая одного убегающего и n_j преследователей, находятся очень далеко друг от друга; либо задачи рассматриваются в параллельных плоскостях и т.п.), в которых действия убегающих координируются одним центром (для достижения общей цели — уклонение от одновременной многократной поимки группы убегающих), а действия преследователей — вторым центром (цель преследователей — синхронная реализация одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности).

2. Решение задачи

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\bigr\}. \tag{3.2}$$

Тогда $\lambda(w, \xi; S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w - \lambda\xi| \leqslant 1$, решая которое получаем, что

$$\lambda(w, \xi; S(0,1)) = \frac{\langle w, \xi\rangle + \sqrt{\langle w, \xi\rangle^2 + |\xi|^2(1 - |w|^2)}}{|\xi|^2} \quad \text{для всех } w \in S(0,1) \text{ и } \xi \neq 0. \tag{3.3}$$

Будем считать, что выполнено

Предположение 3.1. Существуют непрерывные и невырожденные на $[t_0, \infty)$ квадратные матрицы $B_j(t)$ порядка k и непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции $g_j(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B_j(t)(U_j(t) + g_j(t)) = S(0,1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),\ j \in I(m). \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что

$$U_j(t) = B_j^{-1}(t)S(0,1) - g_j(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),\ j \in I(m).$$

Предположение 3.1 при вычислениях допускает переход от $U_j(t)$ к $S(0,1)$. А именно, из (3.2), (3.3), (3.4) получим, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in U_j(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered}
\lambda(w, \xi; U_j(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in U_j(t)\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi + g_j(t)) \in (U_j(t) + g_j(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : B_j(t)(w - \lambda\xi + g_j(t)) \in B_j(t)(U_j(t) + g_j(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (B_j(t)(w + g_j(t)) - \lambda B_j(t)\xi) \in S(0,1)\bigr\} = \\
= \lambda(B_j(t)(w + g_j(t)), B_j(t)\xi; S(0,1)) = \\
= \frac{1}{|B_j(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B_j(t)(w + g_j(t)), B_j(t)\xi\rangle + \\
+ \sqrt{\langle B_j(t)(w + g_j(t)), B_j(t)\xi\rangle^2 + |B_j(t)\xi|^2(1 - |B_j(t)(w + g_j(t))|^2)}\ \Bigr).
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Учитывая, что $X_{ij}^0 \neq Y_j^0$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, а также равенство (3.5) получим, что каждая функция

$$\begin{gathered}\lambda_{ij}(v,t) = \lambda(v, X_{ij}^0 - Y_j^0; U_j(t)) = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_{ij}^0 - Y_j^0)) \in U_j(t)\bigr\}\end{gathered} \tag{3.6}$$

непрерывна на множестве $U_j(t) \times [t_0, \infty)$. Следовательно, при любом допустимом управлении $v_j(t)$ получаем функции $\lambda_{ij}(v_j(t), t)$ (одного аргумента t) измеримые по Лебегу на $[t_0, \infty)$.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}\delta_{0j}(t) = \min_{v \in U_j(t)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v,t), \\ \delta_0(t) = \min_{j \in I(m)} \delta_{0j}(t), \quad \Delta_0 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_0(s) ds.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнено предположение* 3.1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда функции* $\delta_{0j}(t)$, $j \in I(m)$, $\delta_0(t)$ *непрерывны и положительны на* $[t_0, \infty)$.

Доказательство. При каждом $j \in I(m)$ рассмотрим функцию $\delta_{0j}(t)$. Из (3.7), (3.6), (3.5) получаем, что

$$\delta_{0j}(t) = \min_{v \in U_j(t)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(v, X_{\alpha j}^0 - Y_j^0; U_j(t)) =$$

$$= \min_{v \in U_j(t)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(B_j(t)(v + g_j(t)), B_j(t)(X_{\alpha j}^0 - Y_j^0); S(0,1)).$$

Используя соотношение (3.4), выполненное в силу предположения 3.1, имеем

$$\min_{v \in U_j(t)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(B_j(t)(v + g_j(t)), B_j(t)(X_{\alpha j}^0 - Y_j^0); S(0,1)) =$$

$$= \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, B_j(t)(X_{\alpha j}^0 - Y_j^0); S(0,1)).$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}\delta_{0j}(t) = \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, \xi_{\alpha j}^0(t); S(0,1)), \\ \text{где } \xi_{ij}^0(t) = B_j(t)(X_{ij}^0 - Y_j^0) \text{ для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m).\end{gathered} \tag{3.8}$$

Отметим, что все функции $\xi_{ij}^0(t) \neq 0$ и непрерывны на $[t_0, \infty)$. Из последнего утверждения следует, что (3.8) можно преобразовать с применением (3.3), получим

$$\delta_{0j}(t) = \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \frac{\left\langle s, \xi_{\alpha j}^0(t) \right\rangle + \sqrt{\left\langle s, \xi_{\alpha j}^0(t) \right\rangle^2 + |\xi_{\alpha j}^0(t)|^2 (1 - |s|^2)}}{|\xi_{\alpha j}^0(t)|^2}.$$

Из последнего равенства и указанных выше свойств $\xi^0_{ij}(t)$ следует, что каждая функция $\delta_{0j}(t)$, $j \in I(m)$, непрерывна на $[t_0, \infty)$.

Следовательно и функция $\delta_0(t) = \min\limits_{j \in I(m)} \delta_{0j}(t)$ непрерывна на $[t_0, \infty)$.

Предположим теперь, что, вопреки утверждению леммы, найдутся такие $j \in I(m)$ и $t^* \in [t_0, \infty)$, что $\delta_{0j}(t^*) = 0$. Тогда из (3.8) следует, что существует элемент $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$ найдется элемент $\alpha \in \Lambda_j$, для которого $\lambda(s^*, \xi^0_{\alpha j}(t^*); S(0,1)) = 0$. Построим множество

$$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{n_j - b_j + 1}\} \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$$

по следующему правилу. Выберем элемент

$$q_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, b_j\} \in \Omega_j(b_j) \text{ из условия } \lambda(s^*, \xi^0_{q_1 j}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

затем такой элемент

$$q_2 \in L_2 = (L_1 \bigcup \{b_j + 1\}) \setminus \{q_1\} \in \Omega_j(b_j), \text{ что } \lambda(s^*, \xi^0_{q_2 j}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

затем элемент

$$q_3 \in L_3 = (L_2 \bigcup \{b_j + 2\}) \setminus \{q_2\} \in \Omega_j(b_j),$$

удовлетворяющий равенству

$$\lambda(s^*, \xi^0_{q_3 j}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

и так далее. На последнем шаге построим множество

$$L_{n_j - b_j + 1} = (L_{n_j - b_j} \bigcup \{n_j\}) \setminus \{q_{n_j - b_j}\} \in \Omega_j(b_j)$$

и выберем элемент

$$q_{n_j - b_j + 1} \in L_{n_j - b_j + 1} \text{ по условию } \lambda(s^*, \xi^0_{q_{n_j - b_j + 1} j}(t^*); S(0,1)) = 0.$$

По построению для множества $Q \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$ справедливо равенство

$$\min_{s \in S(0,1)} \max_{q \in Q} \lambda(s, \xi^0_{qj}(t^*); S(0,1)) = 0,$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{\xi^0_{qj}(t^*),\ q \in Q\} = \operatorname{Int} \operatorname{co}\{B_j(t^*)(X^0_{qj} - Y^0_j),\ q \in Q\}.$$

Поскольку матрица $B_j(t^*)$ невырожденная, то

$$0 \notin \operatorname{Int}\operatorname{co}\{X^0_{qj} - Y^0_j,\ q \in Q\}.$$

А так как матрица $B_j(t)$ невырожденная при всех $t \in [t_0, \infty)$, то

$$0 \notin \operatorname{Int}\operatorname{co}\{B_j(t)(X^0_{qj} - Y^0_j),\ q \in Q\} \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Таким образом, построенное выше множество $Q \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$ обладает свойством

$$\min_{s \in S(0,1)} \max_{q \in Q} \lambda(s, \xi^0_{qj}(t); S(0,1)) = 0 \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),$$

которое означает, что для любого $t \in [t_0, \infty)$ найдется элемент $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda_j$, для которого $\lambda(s^*, \xi^0_{\alpha j}(t); S(0,1)) = 0$. Из последнего утверждения и (3.8) следует, что $\delta_{0j}(t) = 0$ при всех $t \in [t_0, \infty)$. Но тогда $\delta_0(t) = \min\limits_{j \in I(m)} \delta_{0j}(t) = 0$ при всех $[t_0, \infty)$ и $\Delta_0 = 0$.

Полученное противоречие доказывает, что $\delta_{0j}(t) > 0$ при всех $j \in I(m)$ и $t \in [t_0, \infty)$. А значит и функция $\delta_0(t) = \min\limits_{j \in I(m)} \delta_{0j}(t) > 0$ при всех $[t_0, \infty)$.

Лемма 3.1 доказана. □

Лемма 3.2. *Пусть выполнено предположение* 3.1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда существует конечный момент* $T > t_0$ *такой, что для любых допустимых управлений* $v_j(t)$ *найдутся такие множества* $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, *что*

$$\int_{t_0}^{T} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)ds \geqslant 1 \textit{ для всех } \alpha \in \Lambda_j,\ j \in I(m).$$

Доказательство. Имеют место соотношения

$$\min_{j \in I(m)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \int_{t_0}^{t} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)ds \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j \in I(m)} \frac{1}{C^{b_j}_{n_j}} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \int_{t_0}^{t} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)ds \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j \in I(m)} \frac{1}{C^{b_j}_{n_j}} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \int_{t_0}^{t} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)ds =$$

$$= \min_{j \in I(m)} \frac{1}{C^{b_j}_{n_j}} \int_{t_0}^{t} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)ds \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{t_0}^{t} \delta_{0j}(s)ds \geqslant \frac{1}{\max\limits_{j\in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} \int_{t_0}^{t} \delta_0(s)ds.$$

Так как $\Delta_0 = \infty$, то существует конечный момент $T > t_0$, определяемый из условия

$$\frac{1}{\max\limits_{j\in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} \int_{t_0}^{T} \delta_0(s)ds \geqslant 1,$$

для которого найдутся множества $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $j \in I(m)$, удовлетворяющие требуемым свойствам.

Лемма 3.2 доказана. □

Пусть

$$T_0 = T_0(X_{ij}^0, Y_j^0) = \\ = \min\Big\{T > t_0 : \inf_{v_j(\cdot)} \min_{j\in I(m)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \int_{t_0}^{T} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)ds \geqslant 1\Big\}, \tag{3.9}$$

где инфимум берется по всем допустимым управлениям $v_j(t)$.

Из леммы 3.2 следует, что $T_0 < \infty$, если выполнено предположение 3.1 и $\Delta_0 = \infty$, при этом

$$\frac{1}{\max\limits_{j\in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} \int_{t_0}^{T_0} \delta_0(s)ds \geqslant 1. \tag{3.10}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнено предположение* 3.1 *и* $\Delta_0 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Доказательство. Неформально, при осуществлении одновременной многократной поимки группы убегающих группой преследователей, предпишем каждому преследователю действовать так: сначала сблизиться с убегающим (максимально быстро, насколько это позволяет стратегия параллельного преследования) на зависящее от параметров игры расстояние; сопровождать убегающего (снова используя стратегию параллельного преследования — выбирать управление равное управлению убегающего) до наступления некоторого момента; осуществить одновременную многократную поимку группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ в составе одной из m групп захвата.

При любых допустимых управлениях решения системы (3.1) при всех $t \in [t_0, \infty)$ имеют вид

$$x_{ij}(t) = X_{ij}^0 + \int_{t_0}^{t} u_{ij}(s)\, ds, \quad i \in I(n_j), \quad j \in I(m),$$

$$y_j(t) = Y_j^0 + \int_{t_0}^{t} v_j(s)\, ds, \quad j \in I(m).$$

Следовательно, при каждом $j \in I(m)$

$$x_{ij}(t) - y_j(t) = (X_{ij}^0 - Y_j^0) + \int_{t_0}^{t} (u_{ij}(s) - v_j(s))\, ds, \quad t \in [t_0, \infty), \quad i \in I(n_j).$$

Допустимые управления преследователей P_{ij}, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, будут иметь следующий вид:

$$u_{ij}(t) = v_j(t) - h_{ij}(t)\lambda_{ij}(v_j(t), t)(X_{ij}^0 - Y_j^0),\ t \in [t_0, \infty), \tag{3.11}$$

где функции $h_{ij}(t) \in [0, 1]$ являются кусочно-постоянными и могут менять свое значение лишь в моменты $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < \dots$, определенные разбиением σ.

Тогда для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered} x_{ij}(t) - y_j(t) = (X_{ij}^0 - Y_j^0)\Big(1 - G_{ij}(t)\Big),\ \text{где} \\ G_{ij}(t) = \int_{t_0}^{t} h_{ij}(s)\lambda_{ij}(v_j(s), s) ds. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Таким образом, чтобы добиться одновременной многократной поимки с кратностями $(b_1, b_2, \dots, b_m)$, достаточно для любого разбиения σ и допустимых управлений $v_j(t)$ определить функции $h_{ij}(t) \in [0, 1]$ так, чтобы нашлись множества $\Lambda_j^* \in \Omega_j(b_j)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых выполнены соотношения

$$G_{\alpha j}(\tau) = 1, G_{\alpha j}(t) < 1 \text{ при всех } t \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda_j^*,\ j \in I(m). \tag{3.13}$$

Для всех $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $i \in I(n_j)$, $a \leqslant c$, $a, c \in [t_0, \infty)$ введем обозначения

$$L_j(\Lambda_j; a, c) = \int_a^c \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds, \quad L_{ij}(a, c) = \int_a^c \lambda_{ij}(v_j(s), s) ds. \tag{3.14}$$

В дальнейшем будем учитывать, что при всех $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $a \in [t_0, \infty)$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$ и любых допустимых управлениях $v_j(t)$ функции $L_j(\Lambda_j; a, t)$ и $L_{ij}(a, t)$ непрерывны по t на промежутке $[a, \infty)$.

Определим функции $h_{ij}(t)$ и тем самым полностью определим управления преследователей.

Шаг 0. Момент $t = \theta_0 = t_0$. Необходимо определить $h_{ij}(\theta_0) \in [0, 1]$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$.

Преследователи P_{ij} знают разбиение σ, момент T_0 из формулы (3.9) и $v_j(t)$ для $t \in [\theta_0, \theta_1)$. Преследователи P_{ij} вычисляют момент (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\begin{gathered}\tau = \min\Big\{t \in (\theta_0, \theta_1] : \text{ существуют } \Lambda_j^* \in \Omega_j(b_j) \text{ такие, что} \\ L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, s) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, t) \text{ при всех } s \in [\theta_0, t) \\ \text{и } \min_{j \in I(m)} L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, t) = 1\Big\}.\end{gathered} \tag{3.15}$$

Вариант 0.1. Существует момент $\tau \in (\theta_0, \theta_1]$. Для каждого $j \in I(m)$

$$\begin{gathered}h_{\alpha j}(\theta_0) = \frac{1}{L_{\alpha j}(\theta_0, \tau)}, \text{ если } \alpha \in \Lambda_j^*; \\ h_{\beta j}(\theta_0) = 0, \text{ если } \beta \in I(n_j) \setminus \Lambda_j^*; \\ h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_0), \ t \in [\theta_0, \theta_1), \ i \in I(n_j).\end{gathered} \tag{3.16}$$

Здесь и далее, если (3.15) при некоторых $j \in I(m)$ определяет несколько множеств Λ_j^*, то, в соответствии с лексикографическим порядком, выберем первое (минимальное) из них. Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda_j^*$

$$1 \leqslant L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, \tau) = \int_{\theta_0}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s) ds \leqslant \int_{\theta_0}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds = L_{\alpha j}(\theta_0, \tau),$$

поэтому

$$h_{\alpha j}(\theta_0) = \frac{1}{L_{\alpha j}(\theta_0, \tau)} \leqslant 1 \text{ для всех } \alpha \in \Lambda_j^*.$$

Далее, из определения (3.15) момента τ на данном шаге следует, что

$$L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, t) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, \tau) \text{ при всех } t \in [\theta_0, \tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_0, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda_j^*$ имеем

$$\begin{gathered}L_{\alpha j}(t, \tau) = \int_t^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds \geqslant \int_t^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s) ds = \\ = L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, \tau) - L_j(\Lambda_j^*; \theta_0, t) > 0 \text{ и} \\ L_{\alpha j}(\theta_0, t) < L_{\alpha j}(\theta_0, t) + L_{\alpha j}(t, \tau) = L_{\alpha j}(\theta_0, \tau).\end{gathered} \tag{3.17}$$

Выполнены соотношения (3.13), поскольку из (3.12), (3.14), (3.16), (3.17) следует, что при всех $t \in [\theta_0, \tau)$, $\alpha \in \Lambda_j^*$ и $j \in I(m)$

$$G_{\alpha j}(\tau) = h_{\alpha j}(\theta_0) \int_{\theta_0}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)ds = \frac{1}{L_{\alpha j}(\theta_0, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_0, \tau) = 1,$$
$$G_{\alpha j}(t) = h_{\alpha j}(\theta_0) \int_{\theta_0}^{t} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)ds = \frac{1}{L_{\alpha j}(\theta_0, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_0, t) < 1.$$

Покажем теперь, используя (3.14), (3.7) и (3.10), что если $T_0 \leqslant \theta_1$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

$$\min_{j \in I(m)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} L_j(\Lambda_j; \theta_0, T_0) \geqslant \min_{j \in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} L_j(\Lambda_j; \theta_0, T_0) =$$
$$= \min_{j \in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \int_{\theta_0}^{T_0} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)ds =$$
$$= \min_{j \in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s)ds \geqslant$$
$$\geqslant \min_{j \in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \delta_{0j}(s)ds \geqslant \frac{1}{\max\limits_{j \in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \delta_0(s)ds \geqslant 1.$$

Следовательно, момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_1$ существует.

Вариант 0.2. Момента $\tau \in (\theta_0, \theta_1]$ не существует (это возможно только при $\theta_1 < T_0$).

Сначала определим как близко преследователь P_{ij} должен сближаться с убегающим E_j. В момент $t = t_0 = \theta_0$ (по сути до начала игры) выберем и зафиксируем произвольное значение δ^* из условия

$$0 < \delta^* \leqslant \min_{t \in [t_0, T_0]} \delta_0(t), \tag{3.18}$$

существование δ^* следует из леммы 3.1.

Понадобится еще диаметр разбиения σ дополненный точкой T_0. Напомним, что в начальный момент $t = t_0 = \theta_0$ преследователи уже знают разбиение σ и могут вычислить T_0 по формуле (3.9). Итак, зафиксировано разбиение σ и значение T_0. Найдем

$$q^* = \max\{q \geqslant 0 : \theta_q < T_0\}. \tag{3.19}$$

Отметим, что $T_0 \leqslant \theta_{q^*+1}$. Вычислим

$$d^* = d^*(\sigma, T_0) = \min\{\theta_1 - \theta_0, \theta_2 - \theta_1, \ldots, \theta_{q^*} - \theta_{q^*-1}, T_0 - \theta_{q^*}\} > 0. \quad (3.20)$$

В начальный момент $t = t_0 = \theta_0$ определим как близко преследователь P_{ij} должен сближаться с убегающим E_j

$$\varepsilon^* = \varepsilon^*(\sigma, T_0) = \frac{\delta^* d^*}{\max\limits_{j \in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} > 0. \quad (3.21)$$

Определим $h_{ij}(t)$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$ и $t \in [\theta_0, \theta_1)$ следующим образом:

$$h_{ij}(\theta_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } L_{ij}(\theta_0, \theta_1) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ \dfrac{1 - \varepsilon^*}{L_{ij}(\theta_0, \theta_1)}, & \text{если } L_{ij}(\theta_0, \theta_1) > 1 - \varepsilon^*, \end{cases} \quad (3.22)$$
$$h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_0).$$

Тогда

$$G_{ij}(\theta_1) = h_{ij}(\theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta_1} \lambda_{ij}(v_j(s), s) ds = h_{ij}(\theta_0) L_{ij}(\theta_0, \theta_1) =$$
$$= \begin{cases} 1 \cdot L_{ij}(\theta_0, \theta_1), & \text{если } L_{ij}(\theta_0, \theta_1) \leqslant 1 - \varepsilon^* \\ \dfrac{1 - \varepsilon^*}{L_{ij}(\theta_0, \theta_1)} L_{ij}(\theta_0, \theta_1), & \text{если } L_{ij}(\theta_0, \theta_1) > 1 - \varepsilon^* \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} L_{ij}(\theta_0, \theta_1), & \text{если } h_{ij}(\theta_0) = 1 \\ 1 - \varepsilon^*, & \text{если } h_{ij}(\theta_0) < 1. \end{cases}$$

В любом случае

$$G_{ij}(\theta_1) \leqslant 1 - \varepsilon^* \text{ для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m).$$

Шаг 1. Момент $t = \theta_1$ $(\theta_1 < T_0)$. Необходимо определить $h_{ij}(\theta_1) \in [0, 1]$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$.

Преследователи P_{ij} знают $v_j(t),\ t \in [\theta_1, \theta_2)$, а также на предыдущем шаге вычислили $\varepsilon^* > 0$. Преследователи P_{ij} вычисляют момент (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\begin{aligned} \tau = \min\Big\{ & t \in (\theta_1, \theta_2] :\ \text{существуют } \Lambda_j^* \in \Omega_j(b_j) \text{ такие, что} \\ & L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, s) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, t) \text{ при всех } s \in [\theta_1, t) \\ & \text{и } \min_{j \in I(m)} \Big(\min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} G_{\alpha^* j}(\theta_1) + L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, t) \Big) = 1 \Big\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Вариант 1.1. Существует момент $\tau \in (\theta_1, \theta_2]$. Для каждого $j \in I(m)$

$$\begin{gathered} h_{\alpha j}(\theta_1) = \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)}{L_{\alpha j}(\theta_1, \tau)}, \text{ если } \alpha \in \Lambda_j^*; \\ h_{\beta j}(\theta_1) = 0, \text{ если } \beta \in I(n_j) \setminus \Lambda_j^*; \\ h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_1), \ t \in [\theta_1, \theta_2), \ i \in I(n_j). \end{gathered} \tag{3.24}$$

Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda_j^*$

$$1 - G_{\alpha j}(\theta_1) \leqslant 1 - \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} G_{\alpha^* j}(\theta_1) \leqslant L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, \tau) = \int_{\theta_1}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s) ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\theta_1}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds = L_{\alpha j}(\theta_1, \tau),$$

поэтому для всех $\alpha \in \Lambda_j^*$

$$h_{\alpha j}(\theta_1) = \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)}{L_{\alpha j}(\theta_1, \tau)} \leqslant \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)}{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)} = 1.$$

Далее, из определения (3.23) момента τ на данном шаге следует, что

$$L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, t) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, \tau) \text{ при всех } t \in [\theta_1, \tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_1, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda_j^*$ имеем

$$\begin{gathered} L_{\alpha j}(t, \tau) = \int_t^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds \geqslant \int_t^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s) ds = \\ = L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, \tau) - L_j(\Lambda_j^*; \theta_1, t) > 0 \text{ и} \\ L_{\alpha j}(\theta_1, t) < L_{\alpha j}(\theta_1, t) + L_{\alpha j}(t, \tau) = L_{\alpha j}(\theta_1, \tau). \end{gathered} \tag{3.25}$$

Выполнены соотношения (3.13), поскольку из (3.12), (3.14), (3.24), (3.25) следует, что при всех $t \in [\theta_1, \tau)$, $\alpha \in \Lambda_j^*$ и $j \in I(m)$

$$\begin{gathered} G_{\alpha j}(\tau) = G_{\alpha j}(\theta_1) + h_{\alpha j}(\theta_1) \int_{\theta_1}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds = \\ = G_{\alpha j}(\theta_1) + \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)}{L_{\alpha j}(\theta_1, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_1, \tau) = 1, \\ G_{\alpha j}(t) = G_{\alpha j}(\theta_1) + h_{\alpha j}(\theta_1) \int_{\theta_1}^{t} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds = \\ = G_{\alpha j}(\theta_1) + \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_1)}{L_{\alpha j}(\theta_1, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_1, t) < 1. \end{gathered}$$

($G_{ij}(t) \leqslant G_{ij}(\theta_1) \leqslant 1-\varepsilon^* < 1$ для всех $t \in [\theta_0, \theta_1]$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$ поскольку имел место вариант 0.2.)

Покажем теперь, используя (3.14), (3.7) и (3.10), что если $T_0 \leqslant \theta_2$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

Предположим сначала, что из (3.22) получили, что $h_{ij}(\theta_0) = 1$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$. Тогда

$$\min_{j\in I(m)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \Big(\min_{\alpha\in\Lambda_j} G_{\alpha j}(\theta_1) + L_j(\Lambda_j;\theta_1,T_0)\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \Big(\min_{\alpha\in\Lambda_j} G_{\alpha j}(\theta_1) + L_j(\Lambda_j;\theta_1,T_0)\Big) =$$

$$= \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \Big(\min_{\alpha\in\Lambda_j} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)ds + \int_{\theta_1}^{T_0} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \Big(\int_{\theta_0}^{\theta_1} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)ds + \int_{\theta_1}^{T_0} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)\Big) =$$

$$= \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \int_{\theta_0}^{T_0} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)ds =$$

$$= \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \sum_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}(v_j(s),s)ds \geqslant$$

$$\geqslant \min_{j\in I(m)} \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \delta_{0j}(s)ds \geqslant \frac{1}{\max\limits_{j\in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_0}^{T_0} \delta_0(s)ds \geqslant 1.$$

Следовательно, если $h_{ij}(\theta_0) = 1$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, то момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_2$ существует.

Предположим, что из (3.22) получили, что $h_{\alpha j}(\theta_0) < 1$ при некоторых $\alpha \in \Lambda_j^*$ и $j \in I(m)$. Тогда получим, что $G_{\alpha j}(\theta_1) = 1-\varepsilon^*$ и следуя (3.18), (3.20), (3.21)

$$G_{\alpha j}(\theta_1) + L_j(\Lambda_j^*;\theta_1,T_0) \geqslant 1-\varepsilon^* + \frac{1}{C_{n_j}^{b_j}} \int_{\theta_1}^{T_0} \delta_0(s)ds \geqslant 1-\varepsilon^* + \frac{\delta^*}{C_{n_j}^{b_j}}(T_0-\theta_1) \geqslant$$

$$\geqslant 1-\varepsilon^* + \frac{\delta^* d^*}{C_{n_j}^{b_j}} = 1 - \frac{\delta^* d^*}{\max\limits_{j\in I(m)} C_{n_j}^{b_j}} + \frac{\delta^* d^*}{C_{n_j}^{b_j}} \geqslant 1,$$

то есть и в указанном случае момент $\tau \leqslant T_0 \leqslant \theta_2$ существует.

Вариант 1.2. Момента $\tau \in (\theta_1, \theta_2]$ не существует (это возможно только при $\theta_2 < T_0$).

Определим $h_{ij}(t)$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$ и $t \in [\theta_1, \theta_2)$ следующим образом:

$$h_{ij}(\theta_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_{ij}(\theta_1) + L_{ij}(\theta_1, \theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_{ij}(\theta_1)}{L_{ij}(\theta_1, \theta_2)}, & \text{если } G_{ij}(\theta_1) + L_{ij}(\theta_1, \theta_2) > 1 - \varepsilon^*, \end{cases} \tag{3.26}$$

$h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_1)$.

Тогда

$$G_{ij}(\theta_2) = G_{ij}(\theta_1) + h_{ij}(\theta_1) \int_{\theta_1}^{\theta_2} \lambda_{ij}(v_j(s), s) ds = G_{ij}(\theta_1) + h_{ij}(\theta_1) L_{ij}(\theta_1, \theta_2) =$$

$$= \begin{cases} G_{ij}(\theta_1) + 1 \cdot L_{ij}(\theta_1, \theta_2), \text{если } G_{ij}(\theta_1) + L_{ij}(\theta_1, \theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^* \\ G_{ij}(\theta_1) + \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_{ij}(\theta_1)}{L_{ij}(\theta_1, \theta_2)} L_{ij}(\theta_1, \theta_2), \text{если } G_{ij}(\theta_1) + L_{ij}(\theta_1, \theta_2) > 1 - \varepsilon^* \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_{ij}(\theta_1) + L_{ij}(\theta_1, \theta_2), & \text{если } h_{ij}(\theta_1) = 1 \\ 1 - \varepsilon^*, & \text{если } h_{ij}(\theta_1) < 1. \end{cases}$$

В любом случае

$$G_{ij}(\theta_2) \leqslant 1 - \varepsilon^* \text{ для всех } i \in I(n_j), j \in I(m).$$

Шаг q ($q = 2, 3, 4, \dots$). Момент $t = \theta_q$ ($\theta_q < T_0$). Необходимо определить $h_{ij}(\theta_q) \in [0, 1]$ для всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$.

Преследователи P_{ij} знают $v_j(t)$, $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ и $\varepsilon^* > 0$. Преследователи P_{ij} вычисляют момент (или приходят к выводу, что такого момента нет)

$$\begin{aligned} \tau = \min\Big\{ & t \in (\theta_q, \theta_{q+1}] : \text{существуют } \Lambda_j^* \in \Omega_j(b_j) \text{ такие, что} \\ & L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, s) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, t) \text{ при всех } s \in [\theta_q, t) \\ & \text{и } \min_{j \in I(m)} \Big(\min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} G_{\alpha^* j}(\theta_q) + L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, t) \Big) = 1 \Big\}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Вариант $q.1$. Существует момент $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$. Для каждого $j \in I(m)$

$$\begin{gathered} h_{\alpha j}(\theta_q) = \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)}{L_{\alpha j}(\theta_q, \tau)}, \text{ если } \alpha \in \Lambda_j^*; \\ h_{\beta j}(\theta_q) = 0, \text{ если } \beta \in I(n_j) \setminus \Lambda_j^*; \\ h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_q), \ t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \ i \in I(n_j). \end{gathered} \tag{3.28}$$

Отметим, что для всех $\alpha \in \Lambda_j^*$

$$1 - G_{\alpha j}(\theta_q) \leqslant 1 - \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} G_{\alpha^* j}(\theta_q) \leqslant L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, \tau) = \int_{\theta_q}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s) ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\theta_q}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds = L_{\alpha j}(\theta_q, \tau),$$

поэтому для всех $\alpha \in \Lambda_j^*$

$$h_{\alpha j}(\theta_q) = \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)}{L_{\alpha j}(\theta_q, \tau)} \leqslant \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)}{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)} = 1.$$

Далее, из определения (3.27) момента τ на данном шаге следует, что

$$L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, t) < L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, \tau) \text{ при всех } t \in [\theta_q, \tau).$$

С учетом этого строгого неравенства, для всех $t \in [\theta_q, \tau)$ и $\alpha \in \Lambda_j^*$ имеем

$$L_{\alpha j}(t, \tau) = \int_{t}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds \geqslant \int_{t}^{\tau} \min_{\alpha^* \in \Lambda_j^*} \lambda_{\alpha^* j}(v_j(s), s) ds =$$

$$= L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, \tau) - L_j(\Lambda_j^*; \theta_q, t) > 0 \text{ и}$$

$$L_{\alpha j}(\theta_q, t) < L_{\alpha j}(\theta_q, t) + L_{\alpha j}(t, \tau) = L_{\alpha j}(\theta_q, \tau). \tag{3.29}$$

Выполнены соотношения (3.13), поскольку из (3.12), (3.14), (3.28), (3.29) следует, что при всех $t \in [\theta_q, \tau)$, $\alpha \in \Lambda_j^*$ и $j \in I(m)$

$$G_{\alpha j}(\tau) = G_{\alpha j}(\theta_q) + h_{\alpha j}(\theta_q) \int_{\theta_q}^{\tau} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds =$$

$$= G_{\alpha j}(\theta_q) + \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)}{L_{\alpha j}(\theta_q, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_q, \tau) = 1,$$

$$G_{\alpha j}(t) = G_{\alpha j}(\theta_q) + h_{\alpha j}(\theta_q) \int_{\theta_q}^{t} \lambda_{\alpha j}(v_j(s), s) ds =$$

$$= G_{\alpha j}(\theta_q) + \frac{1 - G_{\alpha j}(\theta_q)}{L_{\alpha j}(\theta_q, \tau)} L_{\alpha j}(\theta_q, t) < 1.$$

($G_{ij}(t) \leqslant G_{ij}(\theta_q) \leqslant 1 - \varepsilon^* < 1$ для всех $t \in [\theta_0, \theta_q]$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$ поскольку имел место вариант $q - 1.2$.)

Аналогично тому как это делалось на шаге 1 доказывается следующее утверждение: если $T_0 \leqslant \theta_{q+1}$, то момент τ существует и $\tau \leqslant T_0$.

Вариант $q.2$. Момента $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ не существует (это возможно только при $\theta_{q+1} < T_0$).

Определим $h_{ij}(t)$ для всех $i \in I(n_j)$ и $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$ следующим образом:

$$h_{ij}(\theta_q) = \begin{cases} 1, & \text{если } G_{ij}(\theta_q) + L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}) \leqslant 1 - \varepsilon^*, \\ \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_{ij}(\theta_q)}{L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1})}, & \text{если } G_{ij}(\theta_q) + L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}) > 1 - \varepsilon^*, \end{cases} \tag{3.30}$$
$$h_{ij}(t) = h_{ij}(\theta_q).$$

Тогда

$$G_{ij}(\theta_{q+1}) = G_{ij}(\theta_q) + h_{ij}(\theta_q) \int_{\theta_q}^{\theta_{q+1}} \lambda_{ij}(v_j(s), s) ds =$$

$$= G_{ij}(\theta_q) + h_{ij}(\theta_q) L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}) =$$

$$= \begin{cases} G_{ij}(\theta_q) + 1 \cdot L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}), \\ \qquad\qquad \text{если } G_{ij}(\theta_q) + L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}) \leqslant 1 - \varepsilon^* \\ G_{ij}(\theta_q) + \dfrac{1 - \varepsilon^* - G_{ij}(\theta_q)}{L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1})} L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}), \\ \qquad\qquad \text{если } G_{ij}(\theta_q) + L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}) > 1 - \varepsilon^* \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} G_{ij}(\theta_q) + L_{ij}(\theta_q, \theta_{q+1}), & \text{если } h_{ij}(\theta_q) = 1 \\ 1 - \varepsilon^*, & \text{если } h_{ij}(\theta_q) < 1. \end{cases}$$

В любом случае

$$G_{ij}(\theta_{q+1}) \leqslant 1 - \varepsilon^* \text{ для всех } i \in I(n_j).$$

Из (3.19) следует, что не позже чем на шаге q^* произойдет одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Теорема 3.1 доказана. □

Для каждых $j \in I(m)$ и единичного вектора $l \in \mathbb{R}^k$ при всех $t \in [t_0, \infty)$ определим функции

$$\begin{gathered} v_{jl}(t) \in \partial U_j(t) \text{ из условия:} \\ \langle u(t) - v_{jl}(t), l \rangle < 0 \text{ для всех } u(t) \in U_j(t) \setminus \{v_{jl}(t)\}. \end{gathered} \tag{3.31}$$

Отметим, что, при выполненном предположении 3.1, функции $v_{jl}(t)$ при каждом зафиксированном l определены однозначно и непрерывны на промежутке $[t_0, \infty)$ в силу свойств многозначных отображений $U_j(t)$.

Л е м м а 3.3. *Пусть выполнено предположение* 3.1. *Если в процессе игры* Γ *для некоторого единичного вектора* $l \in \mathbb{R}^k$, *номера* $c \in I(n_j)$ *и момента* $\theta_q \geqslant t_0$ *реализовалась ситуация*

$$\langle x_{cj}(\theta_q) - y_j(\theta_q), l\rangle \leqslant 0, \quad x_{cj}(\theta_q) \neq y_j(\theta_q),$$

то, определяя допустимое продолжение управления убегающего E_j

$$v_j(t) = v_{jl}(t) \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty),$$

получим выполнимость неравенств

$$\langle x_{cj}(t) - y_j(t), l\rangle \leqslant 0, \quad x_{cj}(t) \neq y_j(t) \quad \text{для всех } t \in [\theta_q, \infty)$$

при всех допустимых продолжениях управления $u_{cj}(t)$, $t \in [\theta_q, \infty)$ *преследователя* P_{cj}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3.31), условий леммы и теоремы Коши

$$\langle x_{cj}(t) - y_j(t), l\rangle = \langle x_{cj}(\theta_q) - y_j(\theta_q), l\rangle +$$
$$+ \int_{\theta_q}^{t} \langle u_{cj}(s) - v_{jl}(s), l\rangle\, ds \leqslant 0 \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty),$$

причем равенство возможно только в случае, если $u_{cj}(s) = v_{jl}(s)$ почти всюду на $[\theta_q, t]$, но в этом случае $x_{cj}(t) \neq y_j(t)$, так как $x_{cj}(\theta_q) \neq y_j(\theta_q)$. Если

$$\langle x_{cj}(t) - y_j(t), l\rangle < 0,$$

то $x_{cj}(t) \neq y_j(t)$. Следовательно, $x_{cj}(t) \neq y_j(t)$ для всех $t \in [\theta_q, \infty)$.

Лемма 3.3 доказана. □

У с л о в и е 3.1. При каждом значении $j \in I(m)$ выполнено включение $Y_j^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_{cj}^0, c \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть выполнено предположение* 3.1. *Тогда условие* 3.1 *является необходимым для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть условие 3.1 не выполнено. Тогда при некотором $j \in I(m)$ существует (хотя бы одно) множество $Q \in \Omega(n_j - b_j + 1)$ такое, что $Y_j^0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_{cj}^0, c \in Q\}$. Из теоремы отделимости следует, что существует единичный вектор $l \in \mathbb{R}^k$ такой, что $\langle h, l\rangle \leqslant 0$ для всех $h \in \operatorname{co}\{X_{cj}^0 - Y_j^0, c \in Q\}$, поэтому

$$\langle X_{cj}^0 - Y_j^0, l\rangle \leqslant 0 \text{ для всех } c \in Q.$$

По (3.31) определим допустимое управление убегающего E_j

$$v_j(t) = v_{jl}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

В силу леммы 3.3 при любых допустимых управлениях $u_{cj}(t)$ преследователей P_{cj} выполнено неравенство $x_{cj}(t) \neq y_j(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$.

Оставшиеся $|I(n_j) \setminus Q| = n_j - (n_j - b_j + 1) = b_j - 1$ преследователей не могут осуществить b_j-кратную поимку убегающего E_j, а следовательно не осуществима и одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Теорема 3.2 доказана. □

Т е о р е м а 3.3. *Пусть выполнено предположение* 3.1 *и отображение* $U_j(t) = U_j = \text{const}$, $j \in I(m)$. *Тогда в игре* Γ *условие* 3.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость следует сразу из теоремы 3.2.

Пусть выполнено условие 3.1. Аналогично лемме 3.1 доказывается, что $\delta_0(t) = \delta_0 = \text{const} > 0$, поэтому $\Delta_0 = \infty$ и возможность одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ следует из теоремы 3.1.

Теорема 3.3 доказана. □

3. Примеры

Пример 3.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{3.1}$ 12 лиц: преследователей $P_{11}, P_{21}, P_{31}; P_{12}, P_{22}, P_{32}; P_{13}, P_{23}, P_{33}$ $(n_1 = n_2 = n_3 = 3)$ и убегающих E_1, E_2, E_3 $(m = 3)$ вида (3.1), где

$$U_1(t) = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right), \quad X_{i1}^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{3} \end{pmatrix}, i \in I(3), \quad Y_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$U_2(t) = S\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, 5\right), \quad X_{i2}^0 = \begin{pmatrix} -100 + \cos\dfrac{2\pi i}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{3} \end{pmatrix}, i \in I(3), \quad Y_2^0 = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$U_3(t) = S\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right), \quad X_{i3}^0 = \begin{pmatrix} 100 + \cos\dfrac{2\pi i}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{3} \end{pmatrix}, i \in I(3), \quad Y_3^0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположение 3.1 выполнено при $B_1(t) = \mathcal{I}$, $g_1(t) = (0,0)^{\mathrm{T}}$; $B_2(t) = \dfrac{1}{5}\mathcal{I}$, $g_2(t) = (-2,-7)^{\mathrm{T}}$; $B_3(t) = 2\mathcal{I}$, $g_3(t) = (3,-4)^{\mathrm{T}}$. Из теоремы 3.3 следует

Утверждение 3.1. *В игре $\Gamma_{3.1}$ возможна одновременная многократная поимка группы убегающих E_1, E_2, E_3 с кратностями $(1,1,1)$, причем поимка большей кратности невозможна.*

Пример 3.2. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{3.2}$ $16+2b_3$ лиц $(b_3 \geqslant 1)$: преследователей $P_{11}, \ldots, P_{51}; P_{12}, \ldots, P_{72}; P_{13}, \ldots, P_{1+2b_3,3}$ $(n_1 = 5, n_2 = 7, n_3 = 1+2b_3)$ и убегающих E_1, E_2, E_3 $(m = 3)$ вида (3.1), где

$$U_1(t) = U_2(t) = U_3(t) = S\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \frac{1}{2 + \cos t}\right),$$

$$X_{i1}^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{5} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, i \in I(5), \quad Y_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$X_{i2}^0 = \begin{pmatrix} -100 + \cos\dfrac{2\pi i}{7} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{7} \end{pmatrix}, i \in I(7), \quad Y_2^0 = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$X_{i3}^0 = \begin{pmatrix} 100 + \cos\dfrac{2\pi i}{1+2b_3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{1+2b_3} \end{pmatrix}, i \in I(1+2b_3), \quad Y_3^0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположение 3.1 выполнено при $B_j(t) = (2+\cos t)\mathcal{I}$, $g_j(t) = (-5, -5)^{\mathrm{T}}$, $j \in I(3)$. Отметим, что если выполнено условие 3.1, то $\Delta_0 = \infty$.

Отметим, что начальные позиции преследователей P_{i1}, $i \in I(5)$ образуют правильный пятиугольник с центром в начальной позиции убегающего E_1. Проверяя, получаем, что при $j = 1$ и $b_1 \leqslant 2$ условие 3.1 выполнено, а при $b_1 \geqslant 3$ не выполнено. Аналогично проверяем условие 3.1 при $j = 2, 3$.

Из теоремы 3.1 и теоремы 3.2 следует

Утверждение 3.2. *В игре* $\Gamma_{3.2}$ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих* E_1, E_2, E_3 *с кратностями* $(2, 3, b_3)$, *причем поимка большей кратности невозможна.*

§ 4. Задача простого группового преследования при наличии защитников убегающего

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+r+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, \ldots, D_r$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{llllll} P_i & : \dot{x}_i = u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, & & i \in I(n), \\ E & : \dot{y} = v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0, & & \\ D_j & : \dot{z}_j = w_j, & w_j \in U(t), & z_j(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), & & j \in I(r). \end{array} \tag{4.1}$$

Здесь $x_i, y, z_j \in \mathbb{R}^k$; $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа (порожденной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^k$) на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (4.1).

В системе (4.1) начальные позиции преследователей P_i и убегающего E фиксированы и $X_i^0 \neq Y^0$ для всех $i \in I(n)$. Каждый защитник D_j, $j \in I(r)$, выбирает свою начальную позицию $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ до начала движения участников, причем $L > 0$ — такая фиксированная постоянная, что $X_i^0 \notin S(Y^0, L)$ для всех $i \in I(n)$ (защитник не может выбрать свою начальную позицию равной начальной позиции хотя одного преследователя и тем самым, как будет указано ниже, уничтожить последнего в начальный момент времени).

Определение 4.1. Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$, $q \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$).

Определение 4.2. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_j(\theta_q)$, $j \in I(r)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i(\theta_q),\ i \in I(n),\ y(\theta_q),\ z_j(\theta_q),\ j \in I(r)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

О п р е д е л е н и е 4.3. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_j(\theta_q)$, $j \in I(r)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t, \theta_q, x_\alpha(\theta_q), \alpha \in I(n), y(\theta_q), z_j(\theta_q), j \in I(r), (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

О п р е д е л е н и е 4.4. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{W}_j$ защитника убегающего D_j ($j \in I(r)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту t_0 и начальным позициям X_i^0, $i \in I(n)$, Y^0 начальную позиции $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$; моменту θ_q, позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_\beta(\theta_q)$, $\beta \in I(r)$, сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ и сужениям $(u_i(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимых управлений $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $w_j(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$Z_j^0 = Z_j^0(t_0,\ X_i^0,\ i \in I(n),\ Y^0) \in S(Y^0, L);$$
$$w_j(t) = w_j\Big(t, \theta_q, x_i(\theta_q), i \in I(n), y(\theta_q), z_\beta(\theta_q), \beta \in I(r), (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})),$$
$$(u_i(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})), i \in I(n)\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

При совпадении геометрических координат $d \geqslant 1$ защитников D_j и $p \geqslant 1$ преследователей P_i погибают $\min\{d, p\} \geqslant 1$ защитников и столько же преследователей (для определенности считаем, что погибают игроки с наименьшими порядковыми номерами). Если совпадают координаты убегающего E

и защитника D_j, то последний погибает. Пусть $T(P_i)$, $i \in I(n)$, и $T(D_j)$, $j \in I(r)$, — моменты гибели преследователя P_i и защитника D_j соответственно, если участник не погибает, то полагаем момент гибели равным ∞.

Неформально: у каждого защитника активируется механизм самоликвидации при встрече с «инородным» объектом (убегающим или преследователем), при этом преследователь ликвидируется (в случае одновременной встречи с несколькими преследователями первый из них «прикрывает» остальных), а убегающему ущерб не причиняется (или причиняется, но незначительный, например, за счет настройки механизма самоликвидации, обеспечивающей максимально возможный урон преследователю и нанесение минимального ущерба убегающему).

Будем исследовать два варианта игры — все защитники убегающего D_j, $j \in I(r)$, либо сильные, либо слабые. В случае совпадения геометрических координат преследователя P_i, убегающего E и защитника D_j в некоторый момент $\theta > t_0$, то есть $x_i(\theta) = y(\theta) = z_j(\theta)$, как указано выше, $T(P_i) = T(D_j) = \theta$. Если защитник убегающего D_j сильный, то он уничтожает преследователя P_i быстрее, чем тот ловит убегающего E (поимки не происходит). В случае, когда защитник убегающего D_j слабый, преследователь P_i до момента гибели успевает поймать убегающего E (происходит поимка).

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\big\},\ |\Omega_j(q)| = C_n^q.$$

Определение 4.5. В игре Γ с сильными защитниками убегающего возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha),\ \tau_\alpha < T(P_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 4.6. В игре Γ со слабыми защитниками убегающего возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha),\ \tau_\alpha \leqslant T(P_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом убегающий E может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз.

О п р е д е л е н и е 4.7. В игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ \tau < T(P_\alpha)\ \Big[\tau \leqslant T(P_\alpha)\Big] \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 4.8. В игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \tau < T(P_\alpha)\Big[\tau \leqslant T(P_\alpha)\Big], x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки не указываем и говорим, что в игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

Неформально правила игры можно трактовать, например, так: имеется три центра управления (I управляет убегающим, II — группой преследователей, III — группой защитников убегающего), у I и III центров управления имеется общая цель — уклонение убегающего при содействии группы защитников (либо сильных, либо слабых) от рассматриваемых видов поимок, а у II центра управления цель противоположна — реализация группой преследователей указанных видов поимок при любых действиях убегающего и группы его защитников.

2. Решение задачи

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\bigr\}. \tag{4.2}$$

Тогда $\lambda(w, \xi; S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w - \lambda\xi| \leqslant 1$, решая которое получаем, что

$$\lambda(w, \xi; S(0,1)) = \frac{\langle w, \xi\rangle + \sqrt{\langle w, \xi\rangle^2 + |\xi|^2(1 - |w|^2)}}{|\xi|^2} \tag{4.3}$$
$$\text{для всех } w \in S(0,1) \text{ и } \xi \neq 0.$$

Будем считать, что выполнено

Предположение 4.1. Существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0,1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty). \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что

$$U(t) = B^{-1}(t)S(0,1) - g(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Предположение 4.1 допускает переход от $U(t)$ к $S(0,1)$. А именно, из (4.2), (4.3), (4.4) получим, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered}
\lambda(w, \xi; U(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in U(t)\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi + g(t)) \in (U(t) + g(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : B(t)(w - \lambda\xi + g(t)) \in B(t)(U(t) + g(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (B(t)(w + g(t)) - \lambda B(t)\xi) \in S(0,1)\bigr\} = \\
= \lambda(B(t)(w + g(t)), B(t)\xi; S(0,1)) = \\
= \frac{1}{|B(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\xi\rangle + \\
+ \sqrt{\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\xi\rangle^2 + |B(t)\xi|^2(1 - |B(t)(w + g(t))|^2)} \; \Bigr).
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Учитывая, что $X_i^0 \neq Y^0$, $i \in I(n)$, а также равенство (4.5) получим, что каждая функция

$$\begin{gathered}
\lambda_i(v, t) = \lambda(v, X_i^0 - Y^0; U(t)) = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in U(t)\bigr\}
\end{gathered} \tag{4.6}$$

непрерывна на множестве $U(t) \times [t_0, \infty)$. Значит при любом допустимом управлении $v(t)$ получаем функции $\lambda_i(v(t), t)$ (одного аргумента t) измеримые по Лебегу на $[t_0, \infty)$.

Введем обозначения

$$\delta_r(t) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b+r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha(v, t), \quad \Delta_r = \int_{t_0}^{\infty} \delta_r(s)\,ds. \tag{4.7}$$

Сначала рассмотрим игру Γ с сильными защитниками убегающего.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено предположение* 4.1 *и* $\Delta_r = \infty$. *Тогда в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При условии, что группа защитников D_j, $j \in I(r)$, не принимает участие в игре Γ, при доказательстве теоремы 1.3 построены управления преследователей P_i, $i \in I(n)$, обеспечивающие одновременную $(b+r)$-кратную поимку убегающего E.

Пусть преследователи P_i, $i \in I(n)$, используют указанные управления (не учитывают действия защитников D_j, $j \in I(r)$). Так как все защитники D_j, $j \in I(r)$, могут уничтожить не более чем r преследователей P_i, $i \in I(n)$, получаем справедливость утверждения.

Теорема 4.1 доказана. $\square$

Введем обозначения: $\Gamma_1(i,j)$, $i \in I(n)$, $j \in J(r)$, — игра, в которой участвуют только три игрока — преследователь P_i, убегающий E и сильный защитник убегающего D_j; $(a,b)^* = \{c \in \mathbb{R}^k : c = (1-\alpha)a + \alpha b,\ \alpha \in (0,1)\}$ — интервал в $\mathbb{R}^k$, соединяющий точки $a, b \in \mathbb{R}^k$.

Л е м м а 4.1. *Пусть выполнено предположение* 4.1*, в процессе игры* $\Gamma_1(i,j)$ *в момент* $\theta \geqslant t_0$ *реализовалась ситуация* $z_j(\theta) \in (x_i(\theta), y(\theta))^*$. *Тогда для всех допустимых продолжений управлений* $u_i(t)$ *и* $v(t)$, $t \in [\theta, \infty)$, *найдется такое допустимое продолжение управления* $w_j(t)$, $t \in [\theta, \infty)$, *что* $z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^*$ *для всех* $t \in [\theta, T(D_j))$, *при этом, если* $T(D_j) < \infty$, *то* $T(D_j) = T(P_i)$, $z_j(T(D_j)) = x_i(T(D_j)) = y(T(D_j))$ *и поимки не происходит.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности, будем считать, что $\theta = \theta_q \geqslant t_0$ (если это не так, то добавим точку θ в разбиение σ).

Из включения $z_j(\theta_q) \in (x_i(\theta_q), y(\theta_q))^*$ следует, что

$$z_j(\theta_q) = (1-\alpha_{ij})x_i(\theta_q) + \alpha_{ij}y(\theta_q), \text{ где } \alpha_{ij} = \frac{|x_i(\theta_q) - z_j(\theta_q)|}{|x_i(\theta_q) - y(\theta_q)|} \in (0,1).$$

Определим допустимое продолжение управления защитника D_j следующим образом:

$$w_j(t) = (1-\alpha_{ij})u_i(t) + \alpha_{ij}v(t) \text{ для всех } t \in [\theta_q, \infty).$$

Тогда

$$z_j(t) = z_j(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} w_j(s)\,ds = (1-\alpha_{ij})x_i(\theta_q) + \alpha_{ij}y(\theta_q) +$$

$$+\int_{\theta_q}^{t}\big((1-\alpha_{ij})u_i(s)+\alpha_{ij}v(s)\big)\,ds=(1-\alpha_{ij})\Big(x_i(\theta_q)+\int_{\theta_q}^{t}u_i(s)\,ds\Big)+$$

$$+\alpha_{ij}\Big(y(\theta_q)+\int_{\theta_q}^{t}v(s)\,ds\Big)=(1-\alpha_{ij})x_i(t)+\alpha_{ij}y(t)\text{ для всех } t\in[\theta_q,\infty).$$

Полученное равенство означает, что для всех $t \in [\theta_q, \infty)$

$$z_j(t)\in(x_i(t),y(t))^*\text{ при } x_i(t)\neq y(t)\text{ или } z_j(t)=x_i(t)=y(t).$$

Из последних соотношений следует справедливость утверждения леммы.

Лемма 4.1 доказана. □

Для каждого единичного вектора $l \in \mathbb{R}^k$ и всех $t \in [t_0, \infty)$ определим функцию

$$\begin{gathered}v_l(t)\in\partial U(t)\text{ из условия:}\\ \langle u(t)-v_l(t),l\rangle<0\text{ для всех } u(t)\in U(t)\setminus\{v_l(t)\}.\end{gathered}\tag{4.8}$$

Отметим, что, при выполненном предположении 4.1, функция $v_l(t)$ при каждом зафиксированном l определена однозначно и непрерывна на промежутке $[t_0, \infty)$ в силу свойств многозначного отображения $U(t)$.

Лемма 4.2. *Пусть выполнено предположение* 4.1. *Если в процессе игры* Γ *для некоторого единичного вектора* $l \in \mathbb{R}^k$, *номера* $p \in I(n)$ *и момента* $\theta \geqslant t_0$ *реализовалась ситуация*

$$\langle x_p(\theta)-y(\theta),l\rangle\leqslant 0,\quad x_p(\theta)\neq y(\theta),$$

то, определяя допустимое продолжение управления убегающего E *равенством*

$$v(t)=v_l(t)\ \textit{для всех}\ t\in[\theta,\infty),$$

получим выполнимость неравенств

$$\langle x_p(t)-y(t),l\rangle\leqslant 0,\quad x_p(t)\neq y(t)\ \textit{для всех}\ t\in[\theta,\infty)$$

при всех допустимых продолжениях управления $u_p(t)$, $t \in [\theta, \infty)$, *преследователя* P_p.

Доказательство. В силу (4.8), условий леммы и теоремы Коши

$$\langle x_p(t) - y(t), l\rangle = \langle x_p(\theta) - y(\theta), l\rangle +$$
$$+ \int_\theta^t \langle u_p(s) - v_l(s), l\rangle\, ds \leqslant 0 \text{ для всех } t \in [\theta, \infty),$$

причем равенство возможно только в случае, если $u_p(s) = v_l(s)$ почти всюду на $[\theta, t]$, но в этом случае $x_p(t) \neq y(t)$, так как $x_p(\theta) \neq y(\theta)$. Если

$$\langle x_p(t) - y(t), l\rangle < 0,$$

то $x_p(t) \neq y(t)$. Следовательно, $x_p(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [\theta, \infty)$.

Лемма 4.2 доказана. □

Условие 4.1. $Y^0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_p^0, p \in K\}$ для всех $K \in \Omega(n - b - r + 1)$.

Теорема 4.2. *Пусть выполнено предположение* 4.1. *Тогда условие* 4.1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Доказательство. Пусть условие 4.1 не выполнено. Тогда существует (хотя бы одно) множество $Q \in \Omega(n-b-r+1)$ такое, что $Y^0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_q^0, q \in Q\}$. Из теоремы отделимости следует, что существует единичный вектор $l \in \mathbb{R}^k$ такой, что $\langle h, l\rangle \leqslant 0$ для всех $h \in \operatorname{co}\{X_q^0 - Y^0, q \in Q\}$, поэтому

$$\langle X_q^0 - Y^0, l\rangle \leqslant 0 \text{ для всех } q \in Q.$$

По (4.8) определим допустимое управление убегающего E следующим образом:

$$v(t) = v_l(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

В силу леммы 4.2 при любых допустимых управлениях $u_q(t)$ преследователей P_q выполнены неравенства $\langle x_q(t) - y(t), l\rangle \leqslant 0$, $x_q(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, $q \in Q$.

Рассмотрим оставшихся $|I(n) \setminus Q| = n - (n - b - r + 1) = b + r - 1$ преследователей P_i, $i \in I(n) \setminus Q$.

Выберем попарно различные индексы $i_1, i_2, \ldots, i_r \in I(n) \setminus Q$ и определим начальные позиции $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ следующим образом:

$$Z_j^0 = Y^0 + L\frac{X_{i_j}^0 - Y^0}{|X_{i_j}^0 - Y^0|}.$$

Отметим, что $z_j(\theta_0) = z_j(t_0) = Z_j^0$, $x_{i_j}(\theta_0) = x_{i_j}(t_0) = X_{i_j}^0$, $y(\theta_0) = y(t_0) = Y^0$ и $z_j(\theta_0) \in (x_{i_j}(\theta_0), y(\theta_0))^*$.

Для каждой игры $\Gamma_1(i_j, j)$, $j \in I(r)$, выполнены условия леммы 4.1. Предпишем изначально каждому защитнику D_j использовать управления $w_j(t)$, $j \in I(r)$, построенные в лемме 4.1. Тогда $z_j(t) \in (x_{i_j}(t), y(t))^*$ для всех $t \in [\theta_0, T(D_j))$.

Возможны следующие случаи:

1. $T(D_j) = \infty$, в этом случае защитник D_j предотвратил поимку убегающего E преследователем P_{i_j}, $i_j \in I(n) \setminus Q$.

2. Сильный защитник D_j уничтожает преследователя P_{i_j} в момент $\theta > \theta_0 = t_0$, тогда $T(D_j) = T(P_{i_j}) = \theta$ и $z_j(\theta) = x_{i_j}(\theta) = y(\theta)$ (поимки не происходит), то есть и в этом случае защитник D_j предотвращает поимку убегающего E преследователем P_{i_j}, $i_j \in I(n) \setminus Q$.

3. Защитник D_j уничтожает преследователя P_q, где $q \in Q$, тогда $T(D_j) = T(P_q) = \theta$ и $z_j(\theta) = x_q(\theta)$. А поскольку $\langle x_q(\theta) - y(\theta), l\rangle \leqslant 0$, $x_q(\theta) \neq y(\theta)$, то и $\langle z_j(\theta) - y(\theta), l\rangle \leqslant 0$, $z_j(\theta) \neq y(\theta)$. Далее, $z_j(\theta) \in (x_{i_j}(\theta), y(\theta))^*$, а это означает, что $\langle x_{i_j}(\theta) - y(\theta), l\rangle \leqslant 0$, $x_{i_j}(\theta) \neq y(\theta)$. Теперь из леммы 4.2 получаем, что $x_{i_j}(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [\theta, \infty)$. Вновь защитник D_j предотвратил поимку убегающего E преследователем P_{i_j}, $i_j \in I(n) \setminus Q$.

4. Защитник D_j уничтожает преследователя P_{i_0} раньше чем тот осуществляет поимку убегающего E, где $i_0 \in I(n) \setminus Q$ и $i_0 \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, то есть защитник D_j предотвратил поимку убегающего E преследователем P_{i_0}.

5. Защитник D_j уничтожает преследователя $P_{i_{j^*}}$ раньше, чем «закрепленный» за ним изначально защитник D_{j^*}, где $j^* \in I(r) \setminus \{j\}$. Следовательно, для некоторого момента $\theta > \theta_0 = t_0$ выполнено равенство $z_j(\theta) = x_{i_{j^*}}(\theta)$ и $T(D_j) = T(P_{i_{j^*}}) = \theta$. Отметим, что, по построению управлений w_j и w_{j^*},

имеем $z_{j^*}(\theta) \in (x_{i_j}(\theta), y(\theta))^*$. Для тройки игроков: преследователя P_{i_j}, убегающего E и защитника D_{j^*} выполнены условия леммы 4.1. Предпишем теперь защитнику D_{j^*}, вместо погибшего преследователя $P_{i_{j^*}}$, контролировать преследователя P_{i_j}, то есть выбором своего управления, построенного в лемме 4.1, обеспечить выполнение включения $z_{j^*}(t) \in (x_{i_j}(t), y(t))^*$ для всех $t \in [\theta, T(D_{j^*}))$.

Таким образом, при любых действиях преследователей P_i, $i \in I(n) \setminus Q$, каждый защитник $D_j, j \in I(r)$, предотвращает встречу одного из указанных преследователей с убегающим E. Оставшиеся $(b + r - 1) - r = b - 1$ преследователей не могут осуществить b-кратную поимку.

Теорема 4.2 доказана. □

Лемма 4.3. *Пусть выполнены предположение* 4.1, *условие* 4.1, *отображение* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда* $\Delta_r = \infty$.

Доказательство. При $U(t) = U = \text{const}$ предположение 4.1 примет вид: существуют постоянная невырожденная квадратная матрица B порядка k и постоянный вектор $g \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(U + g) = S(0, 1). \tag{4.9}$$

Из (4.9), (4.7), (4.6), (4.5) получаем, что

$$\delta_r(t) = \min_{v\in U} \max_{\Lambda\in\Omega(b+r)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(v, X^0_\alpha - Y^0; U) =$$

$$= \min_{v\in U} \max_{\Lambda\in\Omega(b+r)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(B(v + g), B(X^0_\alpha - Y^0); S(0, 1)) =$$

$$= \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b+r)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(s, B(X^0_\alpha - Y^0); S(0, 1)).$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} \delta_r(t) = \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b+r)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(s, b_\alpha; S(0, 1)), \\ \text{где } b_i = B(X^0_i - Y^0) \neq 0,\ i \in I(n). \end{gathered} \tag{4.10}$$

Отметим, что (4.10) можно преобразовать с применением (4.3), получим

$$\delta_r(t) = \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b+r)} \min_{\alpha\in\Lambda} \frac{\langle s, b_\alpha\rangle + \sqrt{\langle s, b_\alpha\rangle^2 + |b_\alpha|^2(1 - |s|^2)}}{|b_\alpha|^2} \tag{4.11}$$

Из (4.11) следует, что функция постоянна $\delta_r(t) = \delta_r = \text{const}$.

Предположим, что $\delta_r = 0$. Тогда из (4.10) следует, что найдется элемент $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda \in \Omega(b+r)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda$, для которого $\lambda(s^*, b_\alpha; S(0,1)) = 0$. Построим множество

$$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{n-b-r+1}\} \in \Omega(n-b-r+1)$$

по следующему правилу. Выберем элемент

$$q_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, b+r\} \in \Omega(b+r) \text{ из условия } \lambda(s^*, b_{q_1}; S(0,1)) = 0,$$

затем такой элемент

$$q_2 \in L_2 = (L_1 \bigcup \{b+r+1\}) \setminus \{q_1\} \in \Omega(b+r), \text{ что } \lambda(s^*, b_{q_2}; S(0,1)) = 0,$$

далее элемент

$$q_3 \in L_3 = (L_2 \bigcup \{b+r+2\}) \setminus \{q_2\} \in \Omega(b) \text{ такой, что } \lambda(s^*, b_{q_3}; S(0,1)) = 0$$

и так далее. На последнем шаге построим множество

$$L_{n-b-r+1} = (L_{n-b-r} \bigcup \{n\}) \setminus \{q_{n-b-r}\} \in \Omega(b+r)$$

и выберем элемент

$$q_{n-b-r+1} \in L_{n-b-r+1} \text{ по условию } \lambda(s^*, b_{q_{n-b-r+1}}; S(0,1)) = 0.$$

По построению для множества $Q \in \Omega(n-b-r+1)$ справедливо равенство

$$\min_{s \in S(0,1)} \max_{q \in Q} \lambda(s, b_q; S(0,1)) = 0,$$

что возможно тогда и только тогда, когда

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{b_q,\ q \in Q\} = \operatorname{Int} \operatorname{co}\{B(X_q^0 - Y^0),\ q \in Q\}.$$

Поскольку матрица B невырожденная, то

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_q^0 - Y^0,\ q \in Q\} \text{ или } Y^0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{X_q^0,\ q \in Q\}$$

и условие 4.1 не выполнено.

Полученное противоречие доказывает, что $\delta_r > 0$. Из (4.7) получаем, что

$$\Delta_r = \int_{t_0}^{\infty} \delta_r(s) = \int_{t_0}^{\infty} \delta_r = \infty.$$

Лемма 4.3 доказана. $\square$

Теорема 4.3. *Пусть выполнено предположение* 4.1 *и отображение* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 4.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b-*кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Доказательство. Необходимость выполнения условия 4.1 следует из теоремы 4.2.

Пусть выполнено условие 4.1. Из леммы 4.3 следует, что $\Delta_r = \infty$ и возможность одновременной b-кратной поимки следует из теоремы 4.1.

Теорема 4.3 доказана. $\square$

Перейдем к рассмотрению игры Γ со слабыми защитниками убегающего, при этом от всех участников дополнительно потребуем, чтобы выполнялось

Предположение 4.2. Все игроки используют допустимые управления, являющиеся кусочно-постоянными функциями на $[t_0, \infty)$.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены предположения* 4.1, 4.2 *и* $\Delta_r = \infty$. *Тогда в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего возможна одновременная* b-*кратная поимка.*

Доказательство. При условии, что группа защитников D_j, $j \in I(r)$, не принимает участие в игре Γ, при доказательстве теоремы 1.3 построены управления преследователей P_i, $i \in I(n)$, обеспечивающие одновременную $(b+r)$-кратную поимку убегающего E, при этом если допустимое управление $v(t)$ является кусочно-постоянной функцией, то и допустимые управления $u_i(t)$, $i \in I(n)$, будут обладать этим свойством.

Пусть преследователи P_i, $i \in I(n)$, используют указанные управления (не учитывают действия защитников D_j, $j \in I(r)$). Так как все защитники D_j, $j \in I(r)$, могут уничтожить не более чем r преследователей P_i, $i \in I(n)$, получаем справедливость утверждения.

Теорема 4.4 доказана. $\square$

Через $\Gamma_2(i, j)$, $i \in I(n)$, $j \in J(r)$, обозначим игру, в которой участвуют только три игрока — преследователь P_i, убегающий E и слабый защитник убегающего D_j.

Л е м м а 4.4. *Пусть выполнены предположения 4.1, 4.2 в процессе игры $\Gamma_2(i,j)$ в момент $\theta \geqslant t_0$ реализовалась ситуация $z_j(\theta) \in (x_i(\theta), y(\theta))^*$. Тогда для всех допустимых продолжений управлений $u_i(t)$ и $v(t)$, $t \in [\theta, \infty)$, найдется такое допустимое продолжение управления $w_j(t)$, $t \in [\theta, \infty)$, что $z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^*$ для всех $t \in [\theta, T(D_j))$, при этом, если $T(D_j) < \infty$, то $T(D_j) = T(P_i)$, $z_j(T(D_j)) = x_i(T(D_j)) \neq y(T(D_j))$ и поимки не происходит.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности, будем считать, что $\theta = \theta_q \geqslant t_0$ (если это не так, то добавим точку θ в разбиение σ), в точках разрыва допустимые управления игроков непрерывны справа, а также все точки разрыва управлений принадлежат множеству точек разбиения σ (при наличии других точек разрыва их можно включить в σ), то есть

$$w_j(t) = w_j(\theta_p), \quad u_i(t) = u_i(\theta_p), \quad v(t) = v(\theta_p)$$

$$\text{для всех } t \in [\theta_p, \theta_{p+1}), \quad p = 0, 1, 2, \ldots$$

Из включения $z_j(\theta_q) \in (x_i(\theta_q), y(\theta_q))^*$ следует, что

$$z_j(\theta_q) = (1-\alpha_{ij})x_i(\theta_q) + \alpha_{ij}y(\theta_q), \text{ где } \alpha_{ij} = \frac{|x_i(\theta_q) - z_j(\theta_q)|}{|x_i(\theta_q) - y(\theta_q)|} \in (0,1).$$

Предположение 4.2 означает, что для всех $t \in [\theta_q, \theta_{q+1}]$ выполнены равенства

$$\begin{gathered} z_j(t) = z_j(\theta_q) + w_j(\theta_q)(t-\theta_q), \\ x_i(t) = x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(t-\theta_q), \quad y(t) = y(\theta_q) + v(\theta_q)(t-\theta_q). \end{gathered} \tag{4.12}$$

Определим $w_j(\theta_q)$, а значит и $w_j(t) = w_j(\theta_q)$, $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$. Рассмотрим два случая:

1. Для всех $t > \theta_q$ выполнено неравенство

$$x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(t-\theta_q) \neq y(\theta_q) + v(\theta_q)(t-\theta_q). \tag{4.13}$$

В этом случае

$$w_j(\theta_q) = (1-\alpha_{ij})u_i(\theta_q) + \alpha_{ij}v(\theta_q).$$

Тогда, как показано в доказательстве леммы 4.1, для всех $t \in [\theta_q, \theta_{q+1}]$

$$z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^* \text{ при } x_i(t) \neq y(t) \text{ или } z_j(t) = x_i(t) = y(t).$$

Вместе с тем неравенство $x_i(t) \neq y(t)$ для всех $t \in [\theta_q, \theta_{q+1}]$ следует из (4.12) и выполненного в данном случае неравенства (4.13), значит

$$z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^* \text{ для всех } t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

2. Существет момент $\tau > \theta_q$ такой, что

$$x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(\tau - \theta_q) = y(\theta_q) + v(\theta_q)(\tau - \theta_q).$$

Преобразуем данное равенство к виду

$$x_i(\theta_q) - y(\theta_q) = (v(\theta_q) - u_i(\theta_q))(\tau - \theta_q). \tag{4.14}$$

Полагаем

$$w_j(\theta_q) = v(\theta_q).$$

Тогда для всех $t \in [\theta_q, \theta_{q+1}] \bigcap [\theta_q, \tau)$, с учетом (4.12), получим

$$z_j(t) = z_j(\theta_q) + w_j(\theta_q)(t - \theta_q) = (1 - \alpha_{ij})x_i(\theta_q) + \alpha_{ij}y(\theta_q) + v(\theta_q)(t - \theta_q) =$$

$$= (1-\alpha_{ij})(x_i(\theta_q)-y(\theta_q))+y(\theta_q)+v(\theta_q)(t-\theta_q) = (1-\alpha_{ij})(x_i(\theta_q)-y(\theta_q))+y(t) =$$

$$= \frac{1-\alpha_{ij}}{1 - \dfrac{t-\theta_q}{\tau-\theta_q}}\Big(1 - \frac{t-\theta_q}{\tau-\theta_q}\Big)(x_i(\theta_q) - y(\theta_q)) + y(t) =$$

$$= \left(1 - \frac{\alpha_{ij} - \dfrac{t-\theta_q}{\tau-\theta_q}}{1 - \dfrac{t-\theta_q}{\tau-\theta_q}}\right)\Big(x_i(\theta_q) - y(\theta_q) - \frac{t-\theta_q}{\tau-\theta_q}(x_i(\theta_q) - y(\theta_q))\Big)+y(t).$$

Введем обозначение

$$\beta_{ij}(t) = \frac{\alpha_{ij} - \dfrac{t-\theta_q}{\tau-\theta_q}}{1 - \dfrac{t-\theta_q}{\tau-\theta_q}}.$$

Отметим, что функция $\beta_{ij}(t)$ определена и непрерывна на $[\theta_q, \tau)$, при этом

$$\beta_{ij}(\theta_q) = \alpha_{ij},\ \beta_{ij}(\theta_q + \alpha_{ij}(\tau - \theta_q)) = 0 \text{ и } \theta_q + \alpha_{ij}(\tau - \theta_q) \in (\theta_q, \tau),$$

так как $\alpha_{ij} \in (0, 1)$. Продолжим начатые выше вычисления, с использованием (4.14), получим

$$z_j(t) = (1 - \beta_{ij}(t))\Big(x_i(\theta_q) - y(\theta_q) - (t - \theta_q)(v(\theta_q) - u_i(\theta_q))\Big)+y(t) =$$

$$= (1 - \beta_{ij}(t))\Big(x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(t - \theta_q) - \big(y(\theta_q) + v(\theta_q)(t - \theta_q)\big)\Big) + y(t) =$$

$$= (1 - \beta_{ij}(t))(x_i(t) - y(t)) + y(t) = (1 - \beta_{ij}(t))x_i(t) + \beta_{ij}(t)y(t).$$

Полученное равенство и свойства функции $\beta_{ij}(t)$ означают, что возможны два случая:

2.1. Если $\theta_q + \alpha_{ij}(\tau - \theta_q) > \theta_{q+1}$, то

$$z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^* \text{ для всех } t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

2.2. Если $\theta_q + \alpha_{ij}(\tau - \theta_q) \leqslant \theta_{q+1}$, то $T(D_j) = T(P_i) = \theta_q + \alpha_{ij}(\tau - \theta_q)$ и

$$z_j(t) \in (x_i(t), y(t))^* \text{ для всех } t \in [\theta_q, T(D_j)),$$

$$z_j(T(D_j)) = x_i(T(D_j)) \neq y(T(D_j)).$$

В случае 2.2 поимки не происходит. Если имел место случай 1 или 2.1, то на отрезке $[\theta_q, \theta_{q+1}]$ поимки не происходит, а в момент θ_{q+1} снова выполнено включение

$$z_j(\theta_{q+1}) \in (x_i(\theta_{q+1}), y(\theta_{q+1}))^*,$$

позволяющее определить $w_j(\theta_{q+1})$ аналогично $w_j(\theta_q)$.

Лемма 4.4 доказана. □

Аналогично теореме 4.2 (используя лемму 4.4 вместо леммы 4.1) доказывается

Теорема 4.5. *Пусть выполнены предположения* 4.1, 4.2. *Тогда условие* 4.1 *является необходимым для осуществления b-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

Теорема 4.6. *Пусть выполнены предположения* 4.1, 4.2 *и отображение* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 4.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной b-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

Доказательство. Необходимость выполнения условия 4.1 следует из теоремы 4.5.

Пусть выполнено условие 4.1. Из леммы 4.3 следует, что $\Delta_r = \infty$ и возможность одновременной b-кратной поимки следует из теоремы 4.4.

Теорема 4.6 доказана. $\square$

3. Примеры

П р и м е р 4.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{4.1}$ $2 + 2q + r$ $(q \geqslant 1,\ r \geqslant 0)$ лиц: $1+2q$ преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{1+2q}$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, ..., D_r$ (при $r = 0$ защитников нет) вида (4.1), где

$$U(t) = S\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right), \quad X_i^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{1+2q} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{1+2q} \end{pmatrix}, \quad i \in I(1+2q), \quad Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположение 4.1 выполнено при $B(t) = 2\mathcal{I}$ и $g(t) = (1, -2)^{\mathrm{T}}$. Отметим, что начальные позиции преследователей образуют правильный $(1 + 2q)$-угольник с центром в начальной позиции убегающего. Проверяя, получаем, что при $b + r = 1, 2, \ldots, q$ условие 4.1 имеет место, а при $b + r \geqslant q + 1$ условие 4.1 не выполнено. Из теорем 4.3, 4.6, следуют

У т в е р ж д е н и е 4.1. *При $(q-r) \geqslant 1$ в игре $\Gamma_{4.1}$ с сильными защитниками убегающего возможна одновременная $(q-r)$-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна, а при $(q-r) \leqslant 0$ в игре $\Gamma_{4.1}$ с сильными защитниками убегающего поимка невозможна.*

У т в е р ж д е н и е 4.2. *Пусть выполнено предположение 4.2. Тогда при $(q-r) \geqslant 1$ в игре $\Gamma_{4.1}$ со слабыми защитниками убегающего возможна одновременная $(q-r)$-кратная поимка, причем поимка большей кратности невозможна, а при $(q-r) \leqslant 0$ в игре $\Gamma_{4.1}$ со слабыми защитниками убегающего поимка невозможна.*

Г Л А В А 2
НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНФЛИКТНО УПРАВЛЯЕМЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ГРУПП УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

§ 5. Одновременная многократная поимка убегающего в конфликтно управляемом процессе

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Г $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} &P_i \ : \ \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \ \ u_i \in U(t), \ \ x_i(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\ &E \ \ : \ \dot{y} = A(t)y + v, \qquad v \in U(t), \quad y(t_0) = Y^0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k; $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа (порожденной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^k$) на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (5.1).

О п р е д е л е н и е 5.1. Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$, $q \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$).

О п р е д е л е н и е 5.2. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$ допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t, \ \theta_q, \ x_i(\theta_q), \ i \in I(n), \ y(\theta_q)\big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Определение 5.3. Кусочно-программной контрстратегией $\mathfrak{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y(\theta_q)$ и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ \theta_q,\ x_\alpha(\theta_q),\ \alpha \in I(n),\ y(\theta_q),\ (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Действия преследователей можно трактовать так: имеется центр управления, который каждому преследователю P_i, $i \in I(n)$, пошагово строит допустимое управление $u_i(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы преследователей).

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\big\},\ |\Omega(q)| = C_n^q.$$

Определение 5.4. В игре Γ возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом убегающий E может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз.

Определение 5.5. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 5.6. В игре Γ возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки не указываем и говорим, что в игре Γ возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

2. Решение задачи

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\bigr\}. \tag{5.2}$$

Тогда $\lambda(w, \xi; S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w - \lambda\xi| \leqslant 1$, решая которое получаем, что

$$\lambda(w, \xi; S(0,1)) = \frac{\langle w, \xi\rangle + \sqrt{\langle w, \xi\rangle^2 + |\xi|^2(1 - |w|^2)}}{|\xi|^2} \tag{5.3}$$
$$\text{для всех } w \in S(0,1) \text{ и } \xi \neq 0.$$

Будем считать, что выполнено

П р е д п о л о ж е н и е 5.1. Существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0,1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty). \tag{5.4}$$

Из (5.4) следует, что

$$U(t) = B^{-1}(t)S(0,1) - g(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Предположение 5.1 допускает переход от $U(t)$ к $S(0,1)$. А именно, из (5.2), (5.3), (5.4) получим, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered}
\lambda(w, \xi; U(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in U(t)\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi + g(t)) \in (U(t) + g(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : B(t)(w - \lambda\xi + g(t)) \in B(t)(U(t) + g(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (B(t)(w + g(t)) - \lambda B(t)\xi) \in S(0,1)\bigr\} = \\
= \lambda(B(t)(w + g(t)), B(t)\xi; S(0,1)) = \\
= \frac{1}{|B(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\xi\rangle + \\
+ \sqrt{\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\xi\rangle^2 + |B(t)\xi|^2(1 - |B(t)(w + g(t))|^2)} \;\Bigr).
\end{gathered} \tag{5.5}$$

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A(t)\varphi$ такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$. Отметим, что $\Phi^{-1}(t)$ невырожденна и непрерывна на $[t_0, \infty)$, а $\Phi^{-1}(t_0) = \mathcal{I}$.

В системе (5.1) проведем неособое линейное преобразование координат

$$\begin{aligned}
&x_i^*(t) = \Phi^{-1}(t)x_i(t), && y^*(t) = \Phi^{-1}(t)y(t), \\
&u_i^*(t) = \Phi^{-1}(t)u_i(t) \in \Phi^{-1}(t)U(t), && v^*(t) = \Phi^{-1}(t)v(t).
\end{aligned} \tag{5.6}$$

В новых координатах конфликтно управляемая система (5.1) преобразуется к задаче простого группового преследования

$$\begin{aligned}
P_i &: \ \dot{x}_i^* = u_i^*, \ \ u_i^* \in V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t), \ \ x_i^*(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\
E &: \ \dot{y}^* = v^*, \ \ v^* \in V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t), \ \ y^*(t_0) = Y^0.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Действительно, $x_i^*(t_0) = \Phi^{-1}(t_0)x_i(t_0) = \mathcal{I}X_i^0 = X_i^0$. Далее, из (5.6) следует, что $x_i(t) = \Phi(t)x_i^*(t)$. Подставим это равенство в систему (5.1), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\big(\Phi(t)x_i^*(t)\big) = A(t)\big(\Phi(t)x_i^*(t)\big) + u_i, && u_i \in U(t),\\
&\dot{\Phi}(t)x_i^*(t) + \Phi(t)\dot{x}_i^*(t) = A(t)\Phi(t)x_i^*(t) + u_i, && u_i \in U(t),\\
&\Phi(t)\dot{x}_i^*(t) = \big(A(t)\Phi(t) - \dot{\Phi}(t)\big)x_i^*(t) + u_i, && u_i \in U(t).
\end{aligned}$$

Выражение в скобках в правой части равенства обращается в 0, поэтому

$$\begin{aligned}
&\Phi(t)\dot{x}_i^*(t) = u_i, && u_i \in U(t),\\
&\dot{x}_i^*(t) = \Phi^{-1}(t)u_i, && u_i \in U(t),\\
&\dot{x}_i^*(t) = u_i^*, && u_i^* \in \Phi^{-1}(t)U(t).
\end{aligned}$$

Выполнение равенств (5.7) для убегающего E проверяется аналогично.

Отметим, что в полученной (5.7) и в исходной (5.1) системах поимка означает точное совпадение координат. Кроме того, между решениями этих систем существует взаимно однозначное соответствие (5.6).

По форме системы (5.7) и (1.1) совпадают, но, чтобы воспользоваться результатами § 1, необходимо убедиться, что многозначное отображение $V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t)$ сохраняет свойства многозначного отображения $U(t)$, для этого достаточно показать, что справедлива

Лемма 5.1. *Если выполнено предположение* 5.1, *то существуют непрерывная и невырожденная на* $[t_0, \infty)$ *квадратная матрица* $B^*(t)$ *порядка* k *и непрерывная на* $[t_0, \infty)$ *функция* $g^*(t) \in \mathbb{R}^k$ *такие, что* $B^*(t)(V(t) + g^*(t)) = S(0, 1)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$.

Доказательство. В силу предположения 5.1, $B^*(t) = B(t)\Phi(t)$ является непрерывной и невырожденной на $[t_0, \infty)$ квадратной матрицей порядка k как произведение двух матриц с аналогичными свойствами, а функция $g^*(t) = \Phi^{-1}(t)g(t) \in \mathbb{R}^k$ непрерывна на $[t_0, \infty)$, поэтому

$$B^*(t)(V(t) + g^*(t)) = B(t)\Phi(t)(\Phi^{-1}(t)U(t) + \Phi^{-1}(t)g(t)) =$$

$$= B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } [t_0, \infty).$$

Лемма 5.1 доказана. $\square$

При сделанном предположении 5.1, из леммы 5.1 и (5.5) следует, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in V(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered}
\lambda(w, \xi; V(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in V(t)\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi + g^*(t)) \in (V(t) + g^*(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : B^*(t)(w - \lambda\xi + g^*(t)) \in B^*(t)(V(t) + g^*(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (B^*(t)(w + g^*(t)) - \lambda B^*(t)\xi) \in S(0,1)\bigr\} = \\
= \lambda(B^*(t)(w + g^*(t)), B^*(t)\xi; S(0,1)) = \\
= \frac{1}{|B^*(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B^*(t)(w + g^*(t)), B^*(t)\xi\rangle + \\
+ \bigl[\langle B^*(t)(w + g^*(t)), B^*(t)\xi\rangle^2 + \\
+ |B^*(t)\xi|^2(1 - |B^*(t)(w + g^*(t))|^2)\bigr]^{1/2}\Bigr).
\end{gathered}$$

В исходных координатах получим: при всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered}
\lambda(\Phi^{-1}(t)w, \xi; \Phi^{-1}(t)U(t)) = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)w - \lambda\xi) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : \Phi(t)(\Phi^{-1}(t)w - \lambda\xi) \in \Phi(t)\Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\Phi(t)\xi) \in U(t)\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\Phi(t)\xi + g(t)) \in (U(t) + g(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : B(t)(w - \lambda\Phi(t)\xi + g(t)) \in B(t)(U(t) + g(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (B(t)(w + g(t)) - \lambda B(t)\Phi(t)\xi) \in S(0,1)\bigr\} = \\
= \lambda(B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi; S(0,1)) = \\
= \frac{1}{|B(t)\Phi(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi\rangle + \\
+ \bigl[\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi\rangle^2 + \\
+ |B(t)\Phi(t)\xi|^2(1 - |B(t)(w + g(t))|^2)\bigr]^{1/2}\Bigr).
\end{gathered} \tag{5.8}$$

Из леммы 5.1 следует, что теоремы 1.2, 1.3 справедливы для системы (5.7). Перепишем их для системы (5.1) с учетом преобразования координат (5.6), а также (1.6) и (1.7). По функциям

$$\begin{gathered}
\lambda_i^1(v, t) = \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X_i^0 - Y^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\},
\end{gathered} \tag{5.9}$$

непрерывным на множестве $U(t)\times[t_0,\infty)$, определим величины

$$\delta_1(t)=\min_{v\in U(t)}\max_{\Lambda\in\Omega(b)}\min_{\alpha\in\Lambda}\lambda^1_\alpha(v,t),\quad \Delta_1=\int_{t_0}^{\infty}\delta_1(s)\,ds. \tag{5.10}$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнено предположение* 5.1 *и* $\Delta_1=\infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Условие 5.1. $Y^0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{X^0_p,p\in K\}$ для всех множеств $K\in\Omega(n-b+1)$.

Теорема 5.2. *Пусть выполнено предположение* 5.1. *Тогда условие* 5.1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ.

Условие 5.2. Любой фиксированный набор $h_i\in S(X^0_i-Y^0,2\varepsilon)$, $i\in I(n)$ обладает тем свойством, что для всех множеств $K\in\Omega(n-b+1)$ имеет место включение $0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{h_p,p\in K\}$

Лемма 5.2. *Пусть выполнено условие* 5.1. *Тогда существует* $\varepsilon>0$, *при котором выполнено условие* 5.2.

Доказательство. Выберем произвольное $K\in\Omega(n-b-1)$. Множество $\operatorname{co}\{X^0_p-Y^0,p\in K\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в точках $X^0_q-Y^0$, где $q\in Q\subset K$. Из условия 5.1 следует, что

$$0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{X^0_p-Y^0,p\in K\}=\operatorname{Int}\operatorname{co}\{X^0_q-Y^0,q\in Q\}.$$

Так как множество $\operatorname{Int}\operatorname{co}\{X^0_q-Y^0,q\in Q\}$ является открытым, то найдется число $\varepsilon(K)>0$ такое, что

$$0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{h_q,q\in Q\}\ \text{для каждого набора}\ h_q\in S(X^0_q-Y^0,2\varepsilon).$$

Так как $\operatorname{Int}\operatorname{co}\{h_q,q\in Q\}\subset\operatorname{Int}\operatorname{co}\{h_p,p\in K\}$, то $0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{h_p,p\in K\}$.

Пусть

$$\varepsilon=\min\{\varepsilon(K),K\in\Omega(n-b-1)\}>0.$$

Лемма 5.2 доказана. □

В данной работе выражение «функция (определенная на $[t_0,\infty)$) является почти периодической в смысле Бора» означает, что ее можно доопределить при всех $t<t_0$ так, чтобы полученная функция стала почти периодической по Бору [42].

Л е м м а 5.3. *Пусть выполнены предположение* 5.1 *и условие* 5.1, $U(t) = U = \mathrm{const}$, *а матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора. Тогда* $\Delta_1 = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $U(t) = U = \mathrm{const}$ предположение 5.1 примет вид: существуют постоянная невырожденная квадратная матрица B порядка k и постоянный вектор $g \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(U + g) = S(0, 1). \tag{5.11}$$

Из (5.10), (5.9), (5.8), (5.11) получаем, что

$$\begin{aligned} \delta_1(t) &= \min_{v\in U} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X_\alpha^0 - Y^0; \Phi^{-1}(t)U) = \\ &= \min_{v\in U} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(B(v+g), B\Phi(t)(X_\alpha^0 - Y^0); S(0,1)) = \\ &= \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} \lambda(s, B\Phi(t)(X_\alpha^0 - Y^0); S(0,1)). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Выполнены все условия леммы 5.2. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$, при котором выполнено условие 5.2. Введем обозначения

$$H = \left\{t \geqslant t_0 : \Phi(t)(X_i^0 - Y^0) \in S(X_i^0 - Y^0, 2\varepsilon) \text{ для всех } i \in I(n)\right\},$$
$$\mu(G) \text{ — мера Лебега множества } G \subset \mathbb{R}^1,$$
$$\mathrm{dist}(G_1, G_2) = \inf_{g_1\in G_1,\ g_2\in G_2} |g_1 - g_2| \text{ для множеств } G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^k.$$

Функции $\Phi(t)(X_i^0 - Y^0)$ являются почти периодическими в смысле Бора. Откуда, с учетом равенства

$$\Phi(t_0)(X_i^0 - Y^0) = \mathcal{I}(X_i^0 - Y^0) = (X_i^0 - Y^0),$$

следует существование числа $C > 0$ такого, что для каждого $j = 1, 2, \ldots$ найдется момент $t_j \in [t_0 + C(j-1), t_0 + Cj)$, обладающий свойством

$$\Phi(t_j)(X_i^0 - Y^0) \in S(X_i^0 - Y^0, \varepsilon) \text{ для всех } i \in I(n).$$

Для всех $j = 1, 2, \ldots$ определим

$$H_j = \left\{t \in [t_j, t_{j+1}) : \Phi(t)(X_i^0 - Y^0) \in S(X_i^0 - Y^0, 2\varepsilon) \text{ для всех } i \in I(n)\right\}.$$

Так как почти периодические функции в смысле Бора являются и равномерно непрерывными, то имеет место следующее утверждение:

$$\text{если } \theta_2 > \theta_1 \geqslant t_0 \text{ и } |\Phi(\theta_2)(X_i^0 - Y^0) - \Phi(\theta_1)(X_i^0 - Y^0)| \geqslant \varepsilon,$$

$$\text{то } \theta_2 \geqslant \theta_1 + L \text{ для всех } i \in I(n), \text{ где } L = L(\varepsilon) > 0.$$

Из данного утверждения и того, что

$$\operatorname{dist}\bigl(\partial S(X_i^0 - Y^0, \varepsilon), \partial S(X_i^0 - Y^0, 2\varepsilon)\bigr) = \varepsilon,$$

$$\Phi(t_j)(X_i^0 - Y^0) \in S(X_i^0 - Y^0, \varepsilon) \text{ для всех } i \in I(n),$$

следует включение

$$[t_j, t_j + L] \subset H_j \text{ для всех } j = 1, 2, \dots$$

а это означает, что

$$\mu(H) \geq \mu\Bigl(\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j\Bigr) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} L = \infty.$$

Теперь докажем, что для всех

$$d = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in D = S(X_1^0 - Y^0, 2\varepsilon) \times S(X_2^0 - Y^0, 2\varepsilon) \times \dots \times S(X_n^0 - Y^0, 2\varepsilon)$$

имеет место неравенство

$$\rho(d) = \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(s, Bh_\alpha; S(0,1)) > 0.$$

Предположим противное: найдется $d^* = (h_1^*, h_2^*, \dots, h_n^*) \in D$ такой, что

$$\rho(d^*) = \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(s, Bh_\alpha^*; S(0,1)) = 0.$$

Значит, найдется $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda \in \Omega(b)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda$, для которого $\lambda(s^*, Bh_\alpha^*; S(0,1)) = 0$. Построим множество

$$K_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-b+1}\}$$

по следующему правилу. Элемент $\alpha_1 \in \Lambda_1 = \{1, 2, \dots, b\} \in \Omega(b)$ выберем из условия $\lambda(s^*, Bh_{\alpha_1}^*; S(0,1)) = 0$. Пусть $\Lambda_2 = (\Lambda_1 \bigcup \{b+1\}) \setminus \{\alpha_1\}$. Отметим, что $\Lambda_2 \in \Omega(b)$. Выбираем $\alpha_2 \in \Lambda_2$ из условия $\lambda(s^*, Bh_{\alpha_2}^*; S(0,1)) = 0$.

Теперь определим множество $\Lambda_3 = (\Lambda_2 \bigcup \{b+2\}) \setminus \{\alpha_2\}$ и элемент $\alpha_3 \in \Lambda_3$ из условия $\lambda(s^*, Bh^*_{\alpha_3}; S(0,1)) = 0$. Далее действуем аналогично. На последнем шаге построим множество $\Lambda_{n-b+1} = (\Lambda_{n-b} \bigcup \{n\}) \setminus \{\alpha_{n-b}\}$ и выберем элемент $\alpha_{n-b+1} \in \Lambda_{n-b+1}$ из условия $\lambda(s^*, Bh^*_{\alpha_{n-b+1}}; S(0,1)) = 0$. По построению множества $K_0 \in \Omega(n-b+1)$

$$\min_{s \in S(0,1)} \max_{\alpha \in K_0} \lambda(s, Bh^*_\alpha; S(0,1)) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $0 \notin \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{Bh^*_k,\ k \in K_0\}$. Матрица B невырожденная, поэтому $0 \notin \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{h^*_k,\ k \in K_0\}$ и условие 5.2 не выполнено. Полученное противоречие доказывает, что $\rho(d) > 0$.

Из непрерывности функции λ получим, что

$$\lim_{d^* \to d} \rho(d^*) = \lim_{d^* \to d} \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(s, Bh^*_\alpha; S(0,1)) =$$

$$= \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(s, Bh_\alpha; S(0,1)) = \rho(d).$$

Следовательно, функция ρ является непрерывной, учитывая еще, что множество D компакт и $\rho(d) > 0$, получим

$$r = \min_{d \in D} \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(s, Bh_\alpha; S(0,1)) = \min_{d \in D} \rho(d) > 0.$$

Таким образом, величина

$$\delta_H = \min_{t \in H} \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(s, B\Phi(t)(X^0_\alpha - Y^0); S(0,1)) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{d \in D} \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda(s, Bh_\alpha; S(0,1)) = r > 0.$$

Из (5.10) и (5.12) получаем, что

$$\Delta_1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(\tau) d\tau \geqslant \int_H \delta_1(\tau) d\tau \geqslant \int_H \delta_H d\tau = \delta_H \int_H d\tau = \infty,$$

так как $\delta_H > 0$ и $\mu(H) = \infty$.

Лемма 5.3 доказана. □

Теорема 5.3. *Пусть выполнено предположение* 5.1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 5.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость выполнения условия 5.1 следует из теоремы 5.2. Из леммы 5.3 получаем, что если имеет место условие 5.1, то $\Delta_1 = \infty$, и достаточность следует из теоремы 5.1.

Теорема 5.3 доказана. $\square$

Отметим, что матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора, в частности, когда матрица $A(t) = O$ или $A(t) = A = \mathrm{const}$, а все ее собственные числа являются простыми и чисто мнимыми.

3. Примеры

П р и м е р 5.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{5.1}$ $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (5.1), где

$$U(t) = \left\{ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{(e_1-5)^2}{4} + \frac{(e_2-6)^2}{9} \leqslant 1 \right\},\ A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда предположение 5.1 выполнено при

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \text{ и } g(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}, \text{ а } \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ e^{1-\cos t}\sin t & e^{1-\cos t} \end{pmatrix}$$

является почти периодической в смысле Бора. Из теоремы 5.3 следует

У т в е р ж д е н и е 5.1. *В игре* $\Gamma_{5.1}$ *возможна одновременная* b*-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие* 5.1.

П р и м е р 5.2. В $\mathbb{R}^{2k}$ $(k \geqslant 1)$ рассмотрим игру $\Gamma_{5.2}$ $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (5.1), где

$$U(t) = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \right),\quad A(t) = A = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & 0 \end{pmatrix},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_k$ — некоторые отличные от нуля и не совпадающие друг с другом по абсолютной величине числа. Корни характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda^2 + a_1^2)(\lambda^2 + a_2^2)\ldots(\lambda^2 + a_k^2) = 0$$

равны $\pm a_1\iota, \ \pm a_2\iota, \ldots, \pm a_k\iota$ и матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора. Предположение 5.1 выполнено при $B(t) = 2\mathcal{I}$ и $g(t) = (0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$. Из теоремы 5.3 следует

Утверждение 5.2. *В игре* $\Gamma_{5.2}$ *возможна одновременная* b*-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие* 5.1.

Пример 5.3. В $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассмотрим игру $\Gamma_{5.3}$ $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (5.1), где

$$A(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\mathcal{I}, \quad U(t) = S\left((0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, a(t)\right),$$

$a(t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция такая, что $a(t_0) = 1$ и $a(t) > 0$ для всех $[t_0, \infty)$. Тогда предположение 5.1 выполнено $(B(t) = a^{-1}(t)\mathcal{I}, \ g(t) = (0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}})$ и

$$\Phi(t) = a(t)\mathcal{I}, \quad \Phi^{-1}(t) = a^{-1}(t)\mathcal{I}, \quad V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t) = S\left((0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}, 1\right).$$

Отметим, что если выполнено условие 5.1, то $\Delta_1 = \infty$, при этом $\Phi(t)$ не всегда является почти периодической в смысле Бора (например, при $a(t) = 1 + (t - t_0)^2$). Из теорем 5.1, 5.2 следует

Утверждение 5.3. *В игре* $\Gamma_{5.3}$ *возможна одновременная* b*-кратная поимка тогда и только тогда, когда выполнено условие* 5.1.

§ 6. Одновременная многократная поимка группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \dots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \dots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i &: \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \;\; u_i \in U(t), \;\; x_i(t_0) = X_i^0, \;\; i \in I(n), \\ E_j &: \dot{y}_j = A(t)y_j + v, \;\;\; v \in U(t), \;\;\; y_j(t_0) = Y_j^0, \;\; j \in I(m), \end{aligned} \tag{6.1}$$

причем $X_i^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n)$, $j \in I(m)$, $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k; $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа (порожденной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^k$) на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (6.1).

О п р е д е л е н и е 6.1. Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < \dots$, $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$).

О п р е д е л е н и е 6.2. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y_j(\theta_q)$, $j \in I(m)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t, \; \theta_q, \; x_i(\theta_q), \; i \in I(n), \; y_j(\theta_q), \; j \in I(m)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр управления, который для всех убегающих E_j, $j \in I(m)$, пошагово строит одно и то же допустимое управление $v(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы убегающих).

Определение 6.3. Кусочно-программной контрстратегией $\mathfrak{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y_j(\theta_q)$, $j \in I(m)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\ \theta_q,\ x_\alpha(\theta_q),\ \alpha \in I(n),\ y_j(\theta_q),\ j \in I(m),\ (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Действия преследователей можно трактовать так: имеется центр управления, который каждому преследователю P_i, $i \in I(n)$, пошагово строит допустимое управление $u_i(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы преследователей).

Для каждого $q = 1, 2, \dots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \dots, i_q\} : i_1 < i_2 < \dots < i_q,\ i_1, i_2, \dots, i_q \in I(n)\big\},\ |\Omega(q)| = C_n^q.$$

Определение 6.4. В игре Γ возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y_{j_\alpha}(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом любой из убегающих E_j, $j \in I(m)$, может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз. Кратность поимки в игре Γ складывается из кратностей поимок каждого убегающего E_j, $j \in I(m)$ (в том числе возможен случай реализации b-кратной поимки, когда одного убегающего ловят b преследователей, а остальные убегающие избегают поимки).

О п р е д е л е н и е 6.5. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$, $i \in I(n)$, преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 6.6. В игре Γ возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$, $i \in I(n)$, преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$, номера $j_\alpha \in I(m)$, $\alpha \in \Lambda$, и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau), \; x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \; \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки не указываем и говорим, что в игре Γ возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

2. Решение задачи

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\bigr\}.$$

Тогда $\lambda(w, \xi; S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w - \lambda\xi| \leqslant 1$, решая которое получаем, что

$$\lambda(w, \xi; S(0,1)) = \frac{\langle w, \xi\rangle + \sqrt{\langle w, \xi\rangle^2 + |\xi|^2(1 - |w|^2)}}{|\xi|^2}$$
$$\text{для всех } w \in S(0,1) \text{ и } \xi \neq 0.$$

Будем считать, что выполнено

Предположение 6.1. Существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0,1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Предположение 6.1 позволяет повторить рассуждения, проведенные в § 5 после предположения 5.1 вплоть до равенств (5.8), из которых следует, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{aligned}
&\lambda(\Phi^{-1}(t)w, \xi; \Phi^{-1}(t)U(t)) = \\
&= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)w - \lambda\xi) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\} = \\
&= \lambda(B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi; S(0,1)) = \\
&= \frac{1}{|B(t)\Phi(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi\rangle + \\
&+ \bigl[\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi\rangle^2 + \\
&+ |B(t)\Phi(t)\xi|^2(1 - |B(t)(w + g(t))|^2)\bigr]^{1/2}\Bigr).
\end{aligned}$$

По функциям

$$\begin{aligned}
&\lambda_i^1(v, t; j) = \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X_i^0 - Y_j^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) = \\
&= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)v - \lambda(X_i^0 - Y_j^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\}, \ i \in I(n),
\end{aligned}$$

непрерывным на множестве $U(t) \times [t_0, \infty)$ при любом значении параметра $j \in I(m)$, определим величины, зависящие от n параметров,

$$\delta_1(t; j_i, i \in I(n)) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda^1_\alpha(v, t; j_\alpha),$$

$$\Delta_1(j_i, i \in I(n)) = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(s; j_i, i \in I(n))\, ds.$$

Условие 6.1. Для каждого $i \in I(n)$ найдется номер $j_i \in I(m)$, что $\Delta_1(j_i, i \in I(n)) = \infty$.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены предположение* 6.1 *и условие* 6.1. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Доказательство. В $\mathbb{R}^k$ определим вспомогательную игру Γ^* $n+1$ лиц: n преследователей P_{ij_i} и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{lll} P_{ij_i}: & \dot{x}^*_{ij_i} = A(t)x^*_{ij_i} + u^*_{ij_i}, & u^*_{ij_i} \in U(t),\ x^*_{ij_i}(t_0) = X^0_i - Y^0_{j_i},\ i \in I(n), \\ E: & \dot{y}^* = A(t)y^* + v^*, & v^* \in U(t),\ y^*(t_0) = 0. \end{array} \tag{6.2}$$

По формуле Коши для всех $t \geqslant t_0$ имеем

$$x^*_{ij_i}(t) = \Phi(t)(X^0_i - Y^0_{j_i}) + \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) u^*_{ij_i}(s)\, ds,$$

$$y^*(t) = \Phi(t) \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) v^*(s)\, ds.$$

Пусть в игре Γ^*, определяемой системой (6.2), убегающий E использует управление, выбранное убегающими E_j в игре Γ, заданной (6.1), то есть

$$v^*(t) = v(t) \text{ для всех } t \geqslant t_0.$$

В этом случае имеет место равенство

$$y_{j_i}(t) = y^*(t) + \Phi(t) Y^0_{j_i}. \tag{6.3}$$

Из теоремы 5.1 следует, что в игре Γ^* возможна одновременная b-кратная поимка. Пусть $u^*_{ij_i}(t)$ — допустимые управления преследователей P_{ij_i}, решающие указанную задачу, значит найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x^*_{\alpha j_\alpha}(\tau) = y^*(\tau),\ x^*_{\alpha j_\alpha}(s) \neq y^*(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \alpha \in \Lambda. \tag{6.4}$$

Зададим управление преследователей P_i в игре Γ следующим образом:

$$u_i(t) = u^*_{ij_i}(t) \text{ для всех } t \geqslant t_0.$$

Тогда

$$x_i(t) = x^*_{ij_i}(t) + \Phi(t)Y^0_{j_i}. \tag{6.5}$$

Объединяя $(6.3), (6.4), (6.5)$, получим, что в игре Γ

$$x_\alpha(\tau) = y_{j_\alpha}(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y_{j_\alpha}(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \alpha \in \Lambda.$$

Теорема 6.1 доказана. □

У с л о в и е 6.2. Для каждого $i \in I(n)$ найдется номер $j_i \in I(m)$, что $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{X^0_p - Y^0_{j_p}, p \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega(n - b + 1)$.

Аналогично теореме 5.3 доказывается

Т е о р е м а 6.2. *Пусть выполнено предположение* 6.1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \text{const}$. *Тогда условие* 6.2 *является достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ.

3. Примеры

П р и м е р 6.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{6.1}$ $2 + 4q$ $(q \geqslant 1)$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{1+2q}$ и убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_{1+2q}$ вида (6.1), где $U(t) = S\big((2,3)^{\mathrm{T}}, 1/3\big)$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \cos t \sin t & -\cos t \\ 2\cos t - \cos^3 t & -\cos t \sin t \end{pmatrix},\ X^0_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ Y^0_j = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi j}{1+2q} \\ \sin\dfrac{2\pi j}{1+2q} \end{pmatrix},$$

$i, j \in I(1+2q)$. Тогда $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix}$ является почти периодической в смысле Бора. Проверяя, получаем, что при $b = 1, 2, \ldots, q$ условие 6.2 имеет место (достаточно выбрать $j_i = i$, см. пример 1.1). Предположение 6.1 выполнено при $B(t) = 3\mathcal{I}$ и $g(t) = (-2, -3)^{\mathrm{T}}$. Из теоремы 6.2 следует

У т в е р ж д е н и е 6.1. *В игре* $\Gamma_{6.1}$ *возможна одновременная* q*-кратная поимка.*

§ 7. Синхронная реализация одновременных многократных поимок убегающих в конфликтно управляемых процессах

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n_1+n_2+\dots+n_m+m$ лиц: $n_1+n_2+\dots+n_m$ преследователей $P_{11}, P_{21}, \dots, P_{n_1 1}$, $P_{12}, P_{22}, \dots, P_{n_2 2}, \dots, P_{1m}, P_{2m}, \dots, P_{n_m m}$ и m убегающих $E_1, E_2, \dots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} &P_{ij}\colon \dot{x}_{ij} = A_j(t)x_{ij} + u_{ij}, u_{ij} \in U_j(t),\ x_{ij}(t_0) = X^0_{ij}, i \in I(n_j),\ j \in I(m), \\ &E_j : \dot{y}_j = A_j(t)y_j + v_j, \quad v_j \in U_j(t),\ y_j(t_0) = Y^0_j, \qquad\qquad j \in I(m), \end{aligned} \tag{7.1}$$

причем $X^0_{ij} \neq Y^0_j$ при всех $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$. Здесь x_{ij}, $y_j \in \mathbb{R}^k$; $A_j(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ квадратные матрицы порядка k; $U_j(t)$ — многозначные отображения, непрерывные в метрике Хаусдорфа (порожденной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^k$) на $[t_0, \infty)$, являющиеся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклыми компактами в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (7.1).

Определение 7.1. Управления $u_{ij}(\cdot)$, $i \in I(n_j)$, $v_j(\cdot)$ из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U_j(t)$, $j \in I(m)$, будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < \dots$, $q \in \{0, 1, 2, \dots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q\to\infty} \theta_q = \infty$).

Определение 7.2. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}_j$ убегающего E_j $(j \in I(m))$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_{i\beta}(\theta_q)$, $y_\beta(\theta_q)$, $i \in I(n_\beta)$, $\beta \in I(m)$, допустимое управление $v_j(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v_j(t) = v_j\big(t,\ \theta_q,\ x_{i\beta}(\theta_q),\ y_\beta(\theta_q),\ i \in I(n_\beta),\ \beta \in I(m)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \dots$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

О п р е д е л е н и е 7.3. Кусочно-программной контрстратегией $\mathfrak{U}_{ij}$ преследователя P_{ij} $(i \in I(n_j),\ j \in I(m))$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_{\alpha\beta}(\theta_q),\ y_\beta(\theta_q),\ \alpha \in I(n_\beta),\ \beta \in I(m)$, и сужениям $(v_\beta(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимых управлений $v_\beta(\cdot)$ убегающих E_β, $\beta \in I(m)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_{ij}(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_{ij}(t) = u_{ij}\big(t,\, \theta_q,\, x_{\alpha\beta}(\theta_q),\ y_\beta(\theta_q),\, (v_\beta(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})),\, \alpha \in I(n_\beta),\, \beta \in I(m)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n_j$ и $j \in I(m)$ определим множество

$$\Omega_j(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, \ldots, i_q \in I(n_j)\big\}, |\Omega_j(q)| = C^q_{n_j}.$$

О п р е д е л е н и е 7.4. В игре Γ возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ $(b_j \in I(n_j),\ j \in I(m))$, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_{ij}$ преследователей P_{ij}, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программных стратегий $\mathcal{V}_j$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, соответствующих разбиению σ, найдутся момент $\tau \in [t_0, T_0]$ и множества $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$, $j \in I(m)$, для которых, при каждом фиксированном $j \in I(m)$, выполнено

$$x_{\alpha j}(\tau) = y_j(\tau), \quad x_{\alpha j}(s) \neq y_j(s) \quad \text{для всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda_j.$$

Неформально: рассматривается m «непересекающихся» задач (можно считать, что каждая из m групп, включающая одного убегающего и n_j преследователей, находятся очень далеко друг от друга; либо задачи рассматриваются в параллельных плоскостях и т.п.), в которых действия убегающих координируются одним центром (для достижения общей цели — уклонение от одновременной многократной поимки группы убегающих), а действия преследователей — вторым центром (цель преследователей — синхронная реализация одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности).

2. Решение задачи

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w,\xi;W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w-\lambda\xi) \in W\bigr\}. \tag{7.2}$$

Тогда $\lambda(w,\xi;S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w-\lambda\xi| \leqslant 1$, решая которое получаем, что

$$\lambda(w,\xi;S(0,1)) = \frac{\langle w,\xi\rangle + \sqrt{\langle w,\xi\rangle^2 + |\xi|^2(1-|w|^2)}}{|\xi|^2} \quad \text{для всех } w \in S(0,1) \text{ и } \xi \neq 0. \tag{7.3}$$

Будем считать, что выполнено

П р е д п о л о ж е н и е 7.1. Существуют непрерывные и невырожденные на $[t_0,\infty)$ квадратные матрицы $B_j(t)$ порядка k и непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции $g_j(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B_j(t)(U_j(t)+g_j(t)) = S(0,1) \text{ для всех } t \in [t_0,\infty),\ j \in I(m). \tag{7.4}$$

Из (7.4) следует, что

$$U_j(t) = B_j^{-1}(t)S(0,1) - g_j(t) \text{ для всех } t \in [t_0,\infty),\ j \in I(m).$$

Предположение 7.1 при вычислениях допускает переход от $U_j(t)$ к $S(0,1)$. А именно, из (7.2), (7.3), (7.4) получим, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in U_j(t)$, $t \in [t_0,\infty)$

$$\begin{gathered}
\lambda(w,\xi;U_j(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w-\lambda\xi) \in U_j(t)\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w-\lambda\xi+g_j(t)) \in (U_j(t)+g_j(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : B_j(t)(w-\lambda\xi+g_j(t)) \in B_j(t)(U_j(t)+g_j(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (B_j(t)(w+g_j(t)) - \lambda B_j(t)\xi) \in S(0,1)\bigr\} = \\
= \lambda(B_j(t)(w+g_j(t)), B_j(t)\xi; S(0,1)) = \\
= \frac{1}{|B_j(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B_j(t)(w+g_j(t)), B_j(t)\xi\rangle + \\
+\sqrt{\langle B_j(t)(w+g_j(t)), B_j(t)\xi\rangle^2 + |B_j(t)\xi|^2(1-|B_j(t)(w+g_j(t))|^2)}\ \Bigr).
\end{gathered} \tag{7.5}$$

Пусть $\Phi_j(t)$, $j \in I(m)$, — фундаментальная матрица системы $\dot{\varphi} = A_j(t)\varphi$ такая, что $\Phi_j(t_0) = \mathcal{I}$. Отметим, что $\Phi_j^{-1}(t)$ невырожденна и непрерывна на $[t_0, \infty)$, а $\Phi_j^{-1}(t_0) = \mathcal{I}$.

В системе (7.1) проведем неособые линейные преобразования координат

$$\begin{aligned} &x_{ij}^*(t) = \Phi_j^{-1}(t)x_{ij}(t), && y_j^*(t) = \Phi_j^{-1}(t)y_j(t), \\ &u_{ij}^*(t) = \Phi_j^{-1}(t)u_{ij}(t) \in \Phi_j^{-1}(t)U_j(t), && v_j^*(t) = \Phi_j^{-1}(t)v_j(t). \end{aligned} \tag{7.6}$$

В новых координатах конфликтно управляемая система (7.1) преобразуется к задаче простого группового преследования

$$\begin{aligned} P_{ij} &: \ \dot{x}_{ij}^* = u_{ij}^*, \ \ u_{ij}^* \in V_j(t) = \Phi_j^{-1}(t)U_j(t), \ \ x_{ij}^*(t_0) = X_{ij}^0, \ \ i \in I(n_j), \\ E_j &: \ \dot{y}_j^* = v_j^*, \quad v_j^* \in V_j(t) = \Phi_j^{-1}(t)U_j(t), \quad y_j^*(t_0) = Y_j^0, \quad j \in I(m). \end{aligned} \tag{7.7}$$

Отметим, что в полученной (7.7) и в исходной (7.1) системах поимка означает точное совпадение координат. Кроме того, между решениями этих систем существует взаимно однозначное соответствие (7.6).

По форме системы (7.7) и (3.1) совпадают, но, чтобы воспользоваться результатами § 3, необходимо убедиться, что многозначное отображение $V_j(t) = \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)$ сохраняет свойства многозначного отображения $U_j(t)$, для этого достаточно показать, что справедлива

Лемма 7.1. *Если выполнено предположение* 7.1, *то существуют непрерывные и невырожденные на* $[t_0, \infty)$ *квадратные матрицы* $B_j^*(t)$ *порядка* k *и непрерывные на* $[t_0, \infty)$ *функции* $g_j^*(t) \in \mathbb{R}^k$ *такие, что* $B_j^*(t)(V_j(t) + g_j^*(t)) = S(0, 1)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$, $j \in I(m)$.

Доказательство. В силу предположения 7.1, $B_j^*(t) = B_j(t)\Phi_j(t)$ являются непрерывными и невырожденными на $[t_0, \infty)$ квадратными матрицами порядка k как произведение двух матриц с аналогичными свойствами, а функции $g_j^*(t) = \Phi_j^{-1}(t)g_j(t) \in \mathbb{R}^k$ непрерывны на $[t_0, \infty)$, поэтому

$$B_j^*(t)(V_j(t) + g_j^*(t)) = B_j(t)\Phi_j(t)(\Phi_j^{-1}(t)U_j(t) + \Phi_j^{-1}(t)g_j(t)) =$$

$$= B_j(t)(U_j(t) + g_j(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } [t_0, \infty), \ j \in I(m).$$

Лемма 7.1 доказана. □

При сделанном предположении 7.1, из леммы 7.1 и (7.5) следует, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in V_j(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered}\lambda(w,\xi;V_j(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w-\lambda\xi) \in V_j(t)\bigr\}= \\ = \lambda(B_j^*(t)(w+g_j^*(t)), B_j^*(t)\xi; S(0,1)) = \\ = \frac{1}{|B_j^*(t)\xi|^2}\Bigl(\bigl\langle B_j^*(t)(w+g_j^*(t)), B_j^*(t)\xi\bigr\rangle + \\ +\sqrt{\bigl\langle B_j^*(t)(w+g_j^*(t)), B_j^*(t)\xi\bigr\rangle^2 + |B_j^*(t)\xi|^2(1-|B_j^*(t)(w+g_j^*(t))|^2)} \Bigr).\end{gathered}$$

В исходных координатах получим: при всех $\xi \neq 0$, $w \in U_j(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\begin{gathered}\lambda(\Phi_j^{-1}(t)w,\xi;\Phi_j^{-1}(t)U_j(t)) = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi_j^{-1}(t)w - \lambda\xi) \in \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)\bigr\}= \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\Phi_j(t)\xi) \in U_j(t)\bigr\}= \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : B_j(t)(w-\lambda\Phi_j(t)\xi + g_j(t)) \in B_j(t)(U_j(t)+g_j(t))\bigr\}= \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (B_j(t)(w+g_j(t)) - \lambda B_j(t)\Phi_j(t)\xi) \in S(0,1)\bigr\}= \\ = \lambda(B_j(t)(w+g_j(t)), B_j(t)\Phi_j(t)\xi; S(0,1)) = \\ = \frac{1}{|B_j(t)\Phi_j(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B_j(t)(w+g_j(t)), B_j(t)\Phi_j(t)\xi\rangle + \\ +\bigl[\langle B_j(t)(w+g_j(t)), B_j(t)\Phi_j(t)\xi\rangle^2 + \\ +|B_j(t)\Phi_j(t)\xi|^2(1-|B_j(t)(w+g_j(t))|^2)\bigr]^{1/2}\Bigr).\end{gathered} \tag{7.8}$$

Из леммы 7.1 следует, что теоремы 3.1, 3.2, справедливы для системы (7.7). Перепишем их для системы (7.1) с учетом преобразования координат (7.6), а также (3.6) и (3.7). По функциям

$$\begin{gathered}\lambda_{ij}^1(v,t) = \lambda(\Phi_j^{-1}(t)v, X_{ij}^0 - Y_j^0; \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)) = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi_j^{-1}(t)v - \lambda(X_{ij}^0 - Y_j^0)) \in \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)\bigr\},\end{gathered} \tag{7.9}$$

непрерывным на множестве $U_j(t) \times [t_0, \infty)$, $j \in I(m)$, определим величины

$$\begin{gathered}\delta_{1j}(t) = \min_{v\in U_j(t)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda_{\alpha j}^1(v,t), \\ \delta_1(t) = \min_{j\in I(m)} \delta_{1j}(t), \quad \Delta_1 = \int_{t_0}^{\infty}\delta_1(s)ds.\end{gathered} \tag{7.10}$$

Т е о р е м а 7.1. *Пусть выполнено предположение* 7.1 *и* $\Delta_1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Условие 7.1. При каждом значении $j \in I(m)$ выполнено включение $Y_j^0 \in \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{X_{cj}^0, c \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$.

Теорема 7.2. *Пусть выполнено предположение* 7.1. *Тогда условие* 7.1 *является необходимым для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

Условие 7.2. Любой фиксированный набор $h_{ij} \in S(X_{ij}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon)$, $i \in I(n_j)$, $j \in I(m)$, обладает тем свойством, что при каждом значении $j \in I(m)$ выполнено включение $0 \in \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{h_{cj}, c \in K\}$ для всех множеств $K \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$.

Лемма 7.2. Пусть выполнено условие 7.1. Тогда существует $\varepsilon > 0$, при котором выполнено условие 7.2.

Доказательство. Выберем любые $j \in I(m)$ и $K \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)$. Множество $\mathrm{co}\{X_{cj}^0 - Y_j^0, c \in K\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в точках $X_{qj}^0 - Y_j^0$, где $q \in Q \subset K$. Из условия 7.1 следует, что

$$0 \in \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{X_{cj}^0 - Y_j^0, c \in K\} = \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{X_{qj}^0 - Y_j^0, q \in Q\}.$$

Так как множество $\mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{X_{qj}^0 - Y_j^0, q \in Q\}$ является открытым, то найдется такое число $\varepsilon_j(K) > 0$, что

$$0 \in \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{h_{qj}, q \in Q\} \text{ для каждого набора } h_{qj} \in S(X_{qj}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon).$$

Так как $\mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{h_{qj}, q \in Q\} \subset \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{h_{cj}, c \in K\}$, то $0 \in \mathrm{Int}\,\mathrm{co}\{h_{cj}, c \in K\}$.

Пусть

$$\varepsilon = \min_{j \in I(m)} \min_{K \in \Omega_j(n_j - b_j + 1)} \{\varepsilon_j(K)\} > 0.$$

Лемма 7.2 доказана. □

Лемма 7.3. Пусть выполнены предположение 7.1 и условие 7.1, $U_j(t) = U_j = \mathrm{const}$, а матрицы $\Phi_j(t)$, $j \in I(m)$, являются почти периодическими в смысле Бора. Тогда $\Delta_1 = \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $U_j(t) = U_j = \text{const}$ предположение 7.1 примет вид: существуют постоянные невырожденные квадратные матрицы B_j порядка k и постоянные векторы $g_j \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B_j(U_j + g_j) = S(0,1) \text{ для всех } j \in I(m). \tag{7.11}$$

Из (7.10), (7.9), (7.8), (7.11) получаем, что

$$\begin{aligned} \delta_{1j}(t) &= \min_{v\in U_j(t)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda(\Phi_j^{-1}(t)v, X^0_{\alpha j} - Y^0_j; \Phi_j^{-1}(t)U_j(t)) = \\ &= \min_{v\in U_j(t)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda(B_j(v+g_j), B_j\Phi_j(t)(X^0_{\alpha j} - Y^0_j); S(0,1)) = \\ &= \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda(s, B_j\Phi_j(t)(X^0_{\alpha j} - Y^0_j); S(0,1)). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Выполнены все условия леммы 7.2. Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$, при котором выполнено условие 7.2. Введем обозначения

$$H = \big\{t \geqslant t_0 : \Phi_j(t)(X^0_{ij} - Y^0_j) \in S(X^0_{ij} - Y^0_j, 2\varepsilon)$$
$$\text{для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m)\big\},$$
$$\mu(G) \text{ — мера Лебега множества } G \subset \mathbb{R}^1,$$
$$\operatorname{dist}(G_1, G_2) = \inf_{g_1\in G_1,\ g_2\in G_2} |g_1 - g_2| \text{ для множеств } G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^k.$$

Функции $\Phi_j(t)(X^0_{ij} - Y^0_j)$ являются почти периодическими в смысле Бора. Откуда, с учетом равенства

$$\Phi_j(t_0)(X^0_{ij} - Y^0_j) = \mathcal{I}(X^0_{ij} - Y^0_j) = (X^0_{ij} - Y^0_j),$$

следует существование числа $C > 0$ такого, что для каждого $q = 1, 2, \ldots$ найдется момент $t_q \in [t_0 + C(q-1), t_0 + Cq)$, обладающий свойством

$$\Phi_j(t_q)(X^0_{ij} - Y^0_j) \in S(X^0_{ij} - Y^0_j, \varepsilon) \text{ для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m).$$

Для всех $q = 1, 2, \ldots$ определим

$$H_q = \big\{t \in [t_q, t_{q+1}) : \Phi_j(t)(X^0_{ij} - Y^0_j) \in S(X^0_{ij} - Y^0_j, 2\varepsilon)$$
$$\text{для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m)\big\}.$$

Так как почти периодические функции в смысле Бора являются и равномерно непрерывными, то имеет место следующее утверждение:

$$\text{если } \theta_2 > \theta_1 \geqslant t_0 \text{ и } |\Phi_j(\theta_2)(X^0_{ij} - Y^0_j) - \Phi_j(\theta_1)(X^0_{ij} - Y^0_j)| \geqslant \varepsilon,$$

$$\text{то } \theta_2 \geqslant \theta_1 + L \text{ для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m),\ \text{где } L = L(\varepsilon) > 0.$$

Из данного утверждения и того, что

$$\operatorname{dist}\big(\partial S(X_{ij}^0 - Y_j^0, \varepsilon), \partial S(X_{ij}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon)\big) = \varepsilon,$$

$$\Phi_j(t_q)(X_{ij}^0 - Y_j^0) \in S(X_{ij}^0 - Y_j^0, \varepsilon) \text{ для всех } i \in I(n_j),\ j \in I(m),$$

следует включение

$$[t_q, t_q + L] \subset H_q \text{ для всех } q = 1, 2, \ldots$$

а это означает, что

$$\mu(H) \geq \mu\Big(\bigcup_{q=1}^{\infty} H_q\Big) \geqslant \sum_{q=1}^{\infty} L = \infty.$$

Теперь докажем, что для всех

$$d_j = (h_{1j}, h_{2j}, \ldots, h_{n_j j}) \in$$

$$\in D_j = S(X_{1j}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon) \times S(X_{2j}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon) \times \cdots \times S(X_{n_j j}^0 - Y_j^0, 2\varepsilon)$$

имеет место неравенство

$$\rho_j(d_j) = \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, B_j h_{\alpha j}; S(0,1)) > 0.$$

Предположим противное: найдется $d_j^* = (h_{1j}^*, h_{2j}^*, \ldots, h_{n_j j}^*) \in D_j$ такой, что

$$\rho_j(d_j^*) = \min_{s \in S(0,1)} \max_{\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)} \min_{\alpha \in \Lambda_j} \lambda(s, B_j h_{\alpha j}^*; S(0,1)) = 0.$$

Значит, найдется $s^* \in S(0,1)$ такой, что в любом множестве $\Lambda_j \in \Omega_j(b_j)$ существует элемент $\alpha \in \Lambda_j$, для которого $\lambda(s^*, B_j h_{\alpha j}^*; S(0,1)) = 0$. Построим множество

$$K_0 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_j - b_j + 1}\}$$

по следующему правилу. Элемент $\alpha_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, b_j\} \in \Omega_j(b_j)$ выберем из условия $\lambda(s^*, B_j h_{\alpha_1 j}^*; S(0,1)) = 0$. Пусть $L_2 = (L_1 \bigcup \{b_j + 1\}) \setminus \{\alpha_1\}$. Отметим, что $L_2 \in \Omega_j(b_j)$. Выбираем $\alpha_2 \in L_2$ из условия $\lambda(s^*, B_j h_{\alpha_2 j}^*; S(0,1)) = 0$. Теперь определим множество $L_3 = (L_2 \bigcup \{b + 2\}) \setminus \{\alpha_2\}$ и элемент $\alpha_3 \in L_3$ из условия $\lambda(s^*, B_j h_{\alpha_3 j}^*; S(0,1)) = 0$. Далее действуем аналогично. На последнем шаге построим $L_{n_j - b_j + 1} = (L_{n_j - b_j} \bigcup \{n_j\}) \setminus \{\alpha_{n_j - b_j}\}$ и выберем элемент

$\alpha_{n_j-b_j+1} \in L_{n_j-b_j+1}$ из условия $\lambda(s^*, B_j h^*_{\alpha_{n_j-b_j+1}j}; S(0,1)) = 0$. По построению множества $K_0 \in \Omega(n_j - b_j + 1)$

$$\min_{s\in S(0,1)} \max_{\alpha\in K_0} \lambda(s, B_j h^*_{\alpha j}; S(0,1)) = 0.$$

Из последнего равенства следует, что $0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{B_j h^*_{qj},\ q \in K_0\}$. Матрица B_j невырожденная, поэтому $0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{h^*_{qj},\ q \in K_0\}$ и условие 7.2 не выполнено. Полученное противоречие доказывает, что $\rho_j(d_j) > 0$.

Из непрерывности функции λ получим, что

$$\lim_{d^*_j\to d_j} \rho_j(d^*_j) = \lim_{d^*\to d} \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda(s, B_j h^*_{\alpha j}; S(0,1)) =$$

$$= \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda(s, B_j h_{\alpha j}; S(0,1)) = \rho_j(d_j).$$

Следовательно, функция ρ_j является непрерывной, учитывая еще, что множество D_j компакт и $\rho_j(d_j) > 0$, получим

$$r_j = \min_{d_j\in D_j} \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda(s, B_j h_{\alpha j}; S(0,1)) = \min_{d_j\in D_j} \rho_j(d_j) > 0.$$

Таким образом, величина

$$\delta_{Hj} = \min_{t\in H} \delta_{1j}(t) = \min_{t\in H} \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda(s, B_j \Phi_j(t)(X^0_{\alpha j} - Y^0_j); S(0,1)) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{d_j\in D_j} \min_{s\in S(0,1)} \max_{\Lambda_j\in\Omega_j(b_j)} \min_{\alpha\in\Lambda_j} \lambda(s, B_j h_{\alpha j}; S(0,1)) = r_j > 0.$$

Из (7.10) и (7.12) получаем, что

$$\Delta_1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_1(\tau)d\tau \geqslant \int_H \delta_1(\tau)d\tau = \int_H \min_{j\in I(m)} \delta_{1j}(\tau)d\tau \geqslant \min_{j\in I(m)} \delta_{Hj} \int_H d\tau = \infty,$$

так как $\min\limits_{j\in I(m)} \delta_{Hj} > 0$ и $\mu(H) = \infty$.

Лемма 7.3 доказана. $\square$

Теорема 7.3. *Пусть выполнено предположение* 7.1, *матрицы* $\Phi_j(t)$ *являются почти периодическими в смысле Бора и* $U_j(t) = U_j = \text{const}$, $j \in I(m)$. *Тогда условие* 7.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной многократной поимки группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *в игре* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость выполнения условия 7.1 следует из теоремы 7.2. Из леммы 7.3 получаем, что что если имеет место условие 7.1, то $\Delta_1 = \infty$, и достаточность следует из теоремы 7.1.

Теорема 7.3 доказана. □

Отметим, что матрица $\Phi_j(t)$ является почти периодической в смысле Бора, в частности, когда матрица $A_j(t) = O$ или $A_j(t) = A_j = \mathrm{const}$, а все ее собственные числа являются простыми и чисто мнимыми.

3. Примеры

П р и м е р 7.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{7.1}$ 12 лиц: преследователей $P_{11}, P_{21}, P_{31}; P_{12}, P_{22}, P_{32}; P_{13}, P_{23}, P_{33}$ $(n_1 = n_2 = n_3 = 3)$ и убегающих E_1, E_2, E_3 $(m = 3)$ вида (7.1), где

$$A_1(t) = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A_1 - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda^2 + 16) = 0,$$

$$U_1(t) = S\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, 1\right), \quad X_{i1}^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{3} \end{pmatrix}, i \in I(3), \quad Y_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2(t) = A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A_2 - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda^2 + 100) = 0,$$

$$U_2(t) = S\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, 5\right), \quad X_{i2}^0 = \begin{pmatrix} -100 + \cos\dfrac{2\pi i}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{3} \end{pmatrix}, i \in I(3), \quad Y_2^0 = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3(t) = A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -64 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A_3 - \lambda\mathcal{I}) = (\lambda^2 + 64) = 0,$$

$$U_3(t) = S\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\right), \quad X_{i3}^0 = \begin{pmatrix} 100 + \cos\dfrac{2\pi i}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{3} \end{pmatrix}, i \in I(3), \quad Y_3^0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположение 7.1 выполнено при $B_1(t) = \mathcal{I}$, $g_1(t) = (0, 0)^{\mathrm{T}}$; $B_2(t) = \dfrac{1}{5}\mathcal{I}$, $g_2(t) = (-2, -7)^{\mathrm{T}}$; $B_3(t) = 2\mathcal{I}$, $g_3(t) = (3, -4)^{\mathrm{T}}$. Собственные числа матрицы A_1 равны $\pm 4\iota$, A_2 — $\pm 10\iota$, A_3 — $\pm 8\iota$ и матрицы $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора. Из теоремы 7.3 следует

У т в е р ж д е н и е 7.1. *В игре $\Gamma_{7.1}$ возможна одновременная многократная поимка группы убегающих E_1, E_2, E_3 с кратностями $(1,1,1)$, причем поимка большей кратности невозможна.*

П р и м е р 7.2. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{7.2}$ $16+2b_3$ лиц $(b_3 \geqslant 1)$: преследователей $P_{11}, \ldots, P_{51}; P_{12}, \ldots, P_{72}; P_{13}, \ldots, P_{1+2b_3,3}$ $(n_1 = 5, n_2 = 7, n_3 = 1+2b_3)$ и убегающих E_1, E_2, E_3 $(m = 3)$ вида (7.1), где

$$U_1(t) = U_2(t) = U_3(t) = S((0,0)^{\mathrm{T}}, 1),$$

$$A_1(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad \Phi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ e^{1-\cos t}\sin t & e^{1-\cos t} \end{pmatrix},$$

$$X_{i1}^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{5} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, i \in I(5), \quad Y_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t\sin t & -\cos t \\ 2\cos t - \cos^3 t & -\cos t\sin t \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix},$$

$$X_{i2}^0 = \begin{pmatrix} -100 + \cos\dfrac{2\pi i}{7} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{7} \end{pmatrix}, i \in I(7), \quad Y_2^0 = \begin{pmatrix} -100 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_3(t) = \begin{pmatrix} \pi\cos(\pi t) & 0 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \Phi_3(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin(\pi t)} & 0 \\ 0 & e^{\cos t - 1} \end{pmatrix},$$

$$X_{i3}^0 = \begin{pmatrix} 100 + \cos\dfrac{2\pi i}{1+2b_3} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{1+2b_3} \end{pmatrix}, i \in I(1+2b_3), \quad Y_3^0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположение 7.1 выполнено при $B_j(t) = \mathcal{I}$, $g_j(t) = (0,0)^{\mathrm{T}}$, $j \in I(3)$. Матрицы $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\Phi_3(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора.

Отметим, что начальные позиции преследователей P_{i1}, $i \in I(5)$, образуют правильный пятиугольник с центром в начальной позиции убегающего E_1. Проверяя, получаем, что при $j = 1$ и $b_1 \leqslant 2$ условие 7.1 выполнено, а при $b_1 \geqslant 3$ не выполнено. Аналогично проверяем условие 7.1 при $j = 2, 3$. Из теоремы 7.3 следует

Утверждение 7.2. *В игре* $\Gamma_{7.2}$ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих* E_1, E_2, E_3 *с кратностями* $(2, 3, b_3)$, *причем поимка большей кратности невозможна.*

Пример 7.3. В $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассмотрим игру $\Gamma_{7.3}$ $n_1 + n_2 + \dots + n_m + m$ лиц: $n_1 + n_2 + \dots + n_m$ преследователей $P_{11}, P_{21}, \dots, P_{n_1 1}, P_{12}, P_{22}, \dots, P_{n_2 2}, \dots, P_{1m}, P_{2m}, \dots, P_{n_m m}$ и m убегающих $E_1, E_2, \dots, E_m$ вида (7.1), где

$$A_j(t) = \frac{\dot{a}_j(t)}{a_j(t)} \mathcal{I}, \quad U_j(t) = S\left((0, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}, a_j(t)\right), \quad j \in I(m),$$

$a_j(t)$, $j \in I(m)$, — произвольная непрерывно дифференцируемая функция такая, что $a_j(t_0) = 1$ и $a_j(t) > 0$ для всех $[t_0, \infty)$. Тогда предположение 7.1 выполнено $(B_j(t) = a_j^{-1}(t)\mathcal{I},\ g_j(t) = (0, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}})$ и

$$\Phi_j(t) = a_j(t)\mathcal{I}, \ \ \Phi_j^{-1}(t) = a_j^{-1}(t)\mathcal{I}, \ \ V_j(t) = \Phi_j^{-1}(t) U_j(t) = S\left((0, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}, 1\right).$$

Отметим, что если выполнено условие 7.1, то $\Delta_1 = \infty$, при этом $\Phi_j(t)$ не всегда является почти периодической в смысле Бора (например, при $a_j(t) = 1 + (t - t_0)^2$). Из теорем 7.1, 7.2 следует

Утверждение 7.3. *В игре* $\Gamma_{7.3}$ *возможна одновременная многократная поимка группы убегающих с кратностями* $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие* 7.1.

§ 8. Групповое преследование в конфликтно управляемом процессе при наличии защитников убегающего

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассматривается дифференциальная игра Γ $n+r+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, \ldots, D_r$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$
\begin{array}{llll}
P_i: & \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, \qquad i \in I(n), \\
E: & \dot{y} = A(t)y + v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0, \\
D_j: & \dot{z}_j = A(t)z_j + w_j, & w_j \in U(t), & z_j(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), \ \ j \in I(r).
\end{array} \tag{8.1}
$$

Здесь, $x_i, y, z_j \in \mathbb{R}^k$; $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица порядка k; $U(t)$ — многозначное отображение, непрерывное в метрике Хаусдорфа (порожденной евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^k$) на $[t_0, \infty)$, являющееся при каждом $t \in [t_0, \infty)$ строго выпуклым компактом в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (8.1).

В системе (8.1) начальные позиции преследователей P_i и убегающего E фиксированы и $X_i^0 \neq Y^0$ для всех $i \in I(n)$. Каждый защитник D_j, $j \in I(r)$, выбирает свою начальную позицию $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ до начала движения участников, причем $L > 0$ — такая фиксированная постоянная, что $X_i^0 \notin S(Y^0, L)$ для всех $i \in I(n)$ (защитник не может выбрать свою начальную позицию равной начальной позиции хотя одного преследователя и тем самым, как будет указано ниже, уничтожить последнего в начальный момент времени).

О п р е д е л е н и е 8.1. Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из $U(t)$ будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$, $q \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$).

О п р е д е л е н и е 8.2. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_j(\theta_q)$, $j \in I(r)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i(\theta_q),\ i \in I(n),\ y(\theta_q),\ z_j(\theta_q),\ j \in I(r)\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

О п р е д е л е н и е 8.3. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_j(\theta_q)$, $j \in I(r)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\, \theta_q,\, x_\alpha(\theta_q),\, \alpha \in I(n),\, y(\theta_q),\, z_j(\theta_q),\, j \in I(r),\, (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

О п р е д е л е н и е 8.4. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{W}_j$ защитника убегающего D_j ($j \in I(r)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту t_0 и начальным позициям X_i^0, $i \in I(n)$, Y^0 начальную позиции $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$; моменту θ_q, позициям $x_i(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $y(\theta_q)$, $z_\beta(\theta_q)$, $\beta \in I(r)$, сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ и сужениям $(u_i(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимых управлений $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $w_j(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$Z_j^0 = Z_j^0(t_0,\ X_i^0,\ i \in I(n),\ Y^0) \in S(Y^0, L);$$
$$w_j(t) = w_j\Big(t,\, \theta_q,\, x_i(\theta_q),\, i \in I(n),\, y(\theta_q),\, z_\beta(\theta_q),\, \beta \in I(r),\, (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})),$$
$$(u_i(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1})),\, i \in I(n)\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

При совпадении геометрических координат $d \geqslant 1$ защитников D_j и $p \geqslant 1$ преследователей P_i погибают $\min\{d, p\} \geqslant 1$ защитников и столько же преследователей (для определенности считаем, что погибают игроки с наименьшими порядковыми номерами). Если совпадают координаты убегающего E и защитника D_j, то последний погибает. Пусть $T(P_i)$, $i \in I(n)$, и $T(D_j)$, $j \in I(r)$, — моменты гибели преследователя P_i и защитника D_j соответственно, если участник не погибает, то полагаем момент гибели равным ∞.

Неформально: у каждого защитника активируется механизм самоликвидации при встрече с «инородным» объектом (убегающим или преследователем), при этом преследователь ликвидируется (в случае одновременной встречи с несколькими преследователями первый из них «прикрывает» остальных), а убегающему ущерб не причиняется (или причиняется, но незначительный, например, за счет настройки механизма самоликвидации, обеспечивающей максимально возможный урон преследователю и нанесение минимального ущерба убегающему).

Будем исследовать два варианта игры — все защитники убегающего D_j, $j \in I(r)$, либо сильные, либо слабые. В случае совпадения геометрических координат преследователя P_i, убегающего E и защитника D_j в некоторый момент $\theta > t_0$, то есть $x_i(\theta) = y(\theta) = z_j(\theta)$, как указано выше, $T(P_i) = T(D_j) = \theta$. Если защитник убегающего D_j сильный, то он уничтожает преследователя P_i быстрее, чем тот ловит убегающего E (поимки не происходит). В случае, когда защитник убегающего D_j слабый, преследователь P_i до момента гибели успевает поймать убегающего E (происходит поимка).

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\big\},\ |\Omega_j(q)| = C_n^q.$$

Определение 8.5. В игре Γ с сильными защитниками убегающего возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathfrak{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha),\ \tau_\alpha < T(P_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 8.6. В игре Γ со слабыми защитниками убегающего возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha),\ \tau_\alpha \leqslant T(P_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом убегающий E может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз.

Определение 8.7. В игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ \tau < T(P_\alpha)\ \Big[\tau \leqslant T(P_\alpha)\Big] \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Определение 8.8. В игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любых кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, кусочно-программных контрстратегий $\mathcal{W}_j$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, соответствующих разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau), \tau < T(P_\alpha) \Big[\tau \leqslant T(P_\alpha)\Big], x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau), \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ вышеприведенные определения поимок совпадают (в этом случае кратность поимки не указываем и говорим, что в игре Γ с сильными [со слабыми] защитниками убегающего возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

Неформально правила игры можно трактовать, например, так: имеется три центра управления (I управляет убегающим, II — группой преследователей, III — группой защитников убегающего), у I и III центров управления имеется общая цель — уклонение убегающего при содействии группы защитников (либо сильных, либо слабых) от рассматриваемых видов поимок, а у II центра управления цель противоположна — реализация группой преследователей указанных видов поимок при любых действиях убегающего и группы его защитников.

2. Решение задачи

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w, \xi; W) = \sup\big\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\big\}. \tag{8.2}$$

Тогда $\lambda(w, \xi; S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w - \lambda\xi| \leqslant 1$, решая которое получаем, что

$$\lambda(w,\xi;S(0,1)) = \frac{\langle w,\xi\rangle + \sqrt{\langle w,\xi\rangle^2 + |\xi|^2(1-|w|^2)}}{|\xi|^2} \quad \text{для всех } w\in S(0,1) \text{ и } \xi\neq 0. \tag{8.3}$$

Будем считать, что выполнено

Предположение 8.1. Существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0,\infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и непрерывная на $[t_0,\infty)$ функция $g(t)\in\mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(t)(U(t)+g(t)) = S(0,1) \text{ для всех } t\in[t_0,\infty). \tag{8.4}$$

Из (8.4) следует, что

$$U(t) = B^{-1}(t)S(0,1) - g(t) \text{ для всех } t\in[t_0,\infty).$$

Предположение 8.1 допускает переход от $U(t)$ к $S(0,1)$. А именно, из (8.2), (8.3), (8.4) получим, что для всех $\xi\neq 0$, $w\in U(t)$, $t\in[t_0,\infty)$

$$\begin{gathered}
\lambda(w,\xi;U(t)) = \sup\bigl\{\lambda\geqslant 0 : (w-\lambda\xi)\in U(t)\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda\geqslant 0 : (w-\lambda\xi+g(t))\in (U(t)+g(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda\geqslant 0 : B(t)(w-\lambda\xi+g(t))\in B(t)(U(t)+g(t))\bigr\} = \\
= \sup\bigl\{\lambda\geqslant 0 : (B(t)(w+g(t))-\lambda B(t)\xi\in S(0,1)\bigr\} = \\
= \lambda(B(t)(w+g(t)), B(t)\xi; S(0,1)) = \\
= \frac{1}{|B(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B(t)(w+g(t)), B(t)\xi\rangle + \\
+\sqrt{\langle B(t)(w+g(t)), B(t)\xi\rangle^2 + |B(t)\xi|^2(1-|B(t)(w+g(t))|^2)} \Bigr).
\end{gathered} \tag{8.5}$$

Пусть $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot\varphi = A(t)\varphi$ такая, что $\Phi(t_0)=\mathcal{I}$. Отметим, что $\Phi^{-1}(t)$ невырожденна и непрерывна на $[t_0,\infty)$, а $\Phi^{-1}(t_0)=\mathcal{I}$.

В системе (8.1) проведем неособые линейные преобразования координат

$$\begin{aligned}
&x_i^*(t) = \Phi^{-1}(t)x_i(t),\ \ y^*(t) = \Phi^{-1}(t)y(t),\ \ z_j^*(t) = \Phi^{-1}(t)z_j(t),\\
&u_i^*(t) = \Phi^{-1}(t)u_i(t),\ \ v^*(t) = \Phi^{-1}(t)v(t),\ \ w_j^*(t) = \Phi^{-1}(t)w_j(t).
\end{aligned} \tag{8.6}$$

В новых координатах конфликтно управляемая система (8.1) преобразуется к задаче простого группового преследования

$$
\begin{aligned}
&P_i: \dot{x}_i^* = u_i^*, u_i^* \in V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t), x_i^*(t_0) = X_i^0, && i \in I(n),\\
&E\ : \dot{y}^* = v^*, v^* \in V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t), y^*(t_0) = Y^0, && \\
&D_j: \dot{z}_j^* = w_j^*, w_j^* \in V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t), z_j^*(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), j \in I(r). &&
\end{aligned} \tag{8.7}
$$

Отметим, что в полученной (8.7) и в исходной (8.1) системах поимка означает точное совпадение координат. Кроме того, между решениями этих систем существует взаимно однозначное соответствие (8.6).

По форме системы (8.7) и (4.1) совпадают, но, чтобы воспользоваться результатами § 4, необходимо убедиться, что многозначное отображение $V(t) = \Phi^{-1}(t)U(t)$ сохраняет свойства многозначного отображения $U(t)$, для этого достаточно показать, что справедлива

Л е м м а 8.1. *Если выполнено предположение* 8.1, *то существуют непрерывная и невырожденная на* $[t_0, \infty)$ *квадратная матрица* $B^*(t)$ *порядка* k *и непрерывная на* $[t_0, \infty)$ *функция* $g^*(t) \in \mathbb{R}^k$ *такие, что* $B^*(t)(V(t) + g^*(t)) = S(0, 1)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предположения 8.1, $B^*(t) = B(t)\Phi(t)$ является непрерывной и невырожденной на $[t_0, \infty)$ квадратной матрицей порядка k как произведение двух матриц с аналогичными свойствами, а функция $g^*(t) = \Phi^{-1}(t)g(t) \in \mathbb{R}^k$ непрерывна на $[t_0, \infty)$, поэтому

$$
B^*(t)(V(t) + g^*(t)) = B(t)\Phi(t)(\Phi^{-1}(t)U(t) + \Phi^{-1}(t)g(t)) =
$$
$$
= B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).
$$

Лемма 8.1 доказана. □

При сделанном предположении 8.1, из леммы 8.1 и (8.5) следует, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in V(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$
\lambda(w, \xi; V(t)) = \sup\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in V(t)\} =
$$
$$
= \lambda(B^*(t)(w + g^*(t)), B^*(t)\xi; S(0, 1)) =
$$
$$
= \frac{1}{|B^*(t)\xi|^2}\Big(\langle B^*(t)(w + g^*(t)), B^*(t)\xi\rangle +
$$
$$
+\sqrt{\langle B^*(t)(w + g^*(t)), B^*(t)\xi\rangle^2 + |B^*(t)\xi|^2(1 - |B^*(t)(w + g^*(t))|^2)}\ \Big).
$$

В исходных координатах получим: при всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$, $t \in [t_0, \infty)$

$$\lambda(\Phi^{-1}(t)w, \xi; \Phi^{-1}(t)U(t)) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)w - \lambda\xi) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\} =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\Phi(t)\xi) \in U(t)\bigr\} =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : B(t)(w - \lambda\Phi(t)\xi + g(t)) \in B(t)(U(t) + g(t))\bigr\} =$$
$$= \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (B(t)(w + g(t)) - \lambda B(t)\Phi(t)\xi) \in S(0,1)\bigr\} =$$
$$= \lambda(B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi; S(0,1)) =$$
$$= \frac{1}{|B(t)\Phi(t)\xi|^2}\Bigl(\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi\rangle +$$
$$+\sqrt{\langle B(t)(w + g(t)), B(t)\Phi(t)\xi\rangle^2 + |B(t)\Phi(t)\xi|^2(1 - |B(t)(w + g(t))|^2)}\ \Bigr).$$

Из леммы 8.1 следует, что теоремы 4.1, 4.2, 4.4, 4.5, справедливы для системы (8.7). Перепишем их для системы (8.1) с учетом преобразования координат (8.6), а также (4.6) и (4.7). По функциям

$$\begin{gathered} \lambda_i^1(v,t) = \lambda(\Phi^{-1}(t)v, X_i^0 - Y^0; \Phi^{-1}(t)U(t)) = \\ = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (\Phi^{-1}(t)v - \lambda(X_i^0 - Y^0)) \in \Phi^{-1}(t)U(t)\bigr\}, \end{gathered} \tag{8.8}$$

непрерывным на множестве $U_j(t) \times [t_0, \infty)$, $j \in I(m)$, определим величины

$$\delta_r^1(t) = \min_{v \in U(t)} \max_{\Lambda \in \Omega(b+r)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda_\alpha^1(v,t), \quad \Delta_r^1 = \int_{t_0}^{\infty} \delta_r^1(s)ds. \tag{8.9}$$

Вместо предположения 4.2 потребуем, чтобы выполнялось

П р е д п о л о ж е н и е 8.2. Игроки используют такие допустимые управления, что все функции $\Phi^{-1}(t)u_i(t)$, $i \in I(n)$, $\Phi^{-1}(t)v(t)$, $\Phi^{-1}(t)w_j(t)$, $j \in I(r)$, являются кусочно-постоянными на $[t_0, \infty)$.

Т е о р е м а 8.1. *Пусть выполнено предположение* 8.1 *и* $\Delta_r^1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

У с л о в и е 8.1. $Y^0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{X_p^0, p \in K\}$ для всех $K \in \Omega(n - b - r + 1)$.

Т е о р е м а 8.2. *Пусть выполнено предположение* 8.1. *Тогда условие* 8.1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Т е о р е м а 8.3. *Пусть выполнены предположения* 8.1, 8.2 *и* $\Delta_r^1 = \infty$. *Тогда в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего возможна одновременная* b*-кратная поимка.*

Т е о р е м а 8.4. *Пусть выполнены предположения* 8.1, 8.2. *Тогда условие* 4.1 *является необходимым для осуществления* b*-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

В данной работе выражение «функция (определенная на $[t_0, \infty)$) является почти периодической в смысле Бора» означает, что ее можно доопределить при всех $t < t_0$ так, чтобы полученная функция стала почти периодической по Бору [42].

Аналогично лемме 5.3 доказывается

Л е м м а 8.2. *Пусть выполнены предположение* 8.1 *и условие* 8.1, $U(t) = U = \mathrm{const}$, *а матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора. Тогда* $\Delta_r^1 = \infty$.

Т е о р е м а 8.5. *Пусть выполнено предположение* 8.1, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 8.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ *с сильными защитниками убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость выполнения условия 8.1 следует из теоремы 8.2. Из леммы 8.2 следует, что $\Delta_r^1 = \infty$ и достаточность следует из теоремы 8.1.

Теорема 8.5 доказана. $\square$

Т е о р е м а 8.6. *Пусть выполнены предположения* 8.1, 8.2, *матрица* $\Phi(t)$ *является почти периодической в смысле Бора и* $U(t) = U = \mathrm{const}$. *Тогда условие* 8.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной* b*-кратной поимки в игре* Γ *со слабыми защитниками убегающего.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость выполнения условия 8.1 следует из теоремы 8.4. Из леммы 8.2 следует, что $\Delta_r^1 = \infty$ и достаточность следует из теоремы 8.3.

Теорема 8.6 доказана. $\square$

Отметим, что матрица $\Phi(t)$ является почти периодической в смысле Бора, в частности, когда матрица $A(t) = O$ или $A(t) = A = \text{const}$, а все ее собственные числа являются простыми и чисто мнимыми.

3. Примеры

П р и м е р 8.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{8.1}$ $n + r + 1$ $(n \geqslant 1,\ r \geqslant 0)$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, ..., D_r$ (при $r = 0$ защитников нет) вида (8.1), где

$$U(t) = \left\{ \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \frac{(e_1 - 3)^2}{2} + \frac{(e_2 + 5)^2}{4} \leqslant 1 \right\},\ A(t) = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда предположение 8.1 выполнено при

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ и } g(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ а } \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{1-\cos t} & 0 \\ e^{1-\cos t} \sin t & e^{1-\cos t} \end{pmatrix}$$

является почти периодической в смысле Бора. Из теорем 8.5, 8.6 следуют

У т в е р ж д е н и е 8.1. *Условие* 8.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной b-кратной поимки в игре $\Gamma_{8.1}$ с сильными защитниками убегающего.*

У т в е р ж д е н и е 8.2. *Пусть выполнено предположение* 8.2. *Тогда условие* 8.1 *является необходимым и достаточным для осуществления одновременной b-кратной поимки в игре $\Gamma_{8.1}$ со слабыми защитниками убегающего.*

Г Л А В А 3
ОБОБЩЕННЫЙ НЕСТАЦИОНАРНЫЙ КОНТРОЛЬНЫЙ ПРИМЕР Л.С. ПОНТРЯГИНА СО МНОГИМИ УЧАСТНИКАМИ

§ 9. Многократная поимка убегающего в примере Л.С. Понтрягина

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Г $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$
\begin{gathered}
P_i : x_i^{(l)} + a_1(t) x_i^{(l-1)} + a_2(t) x_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t) x_i = u_i,\ u_i \in U,\ i \in I(n), \\
E : y^{(l)} + a_1(t) y^{(l-1)} + a_2(t) y^{(l-2)} + \ldots + a_l(t) y = v, \quad v \in U, \\
x_i^{(j)}(t_0) = X_i^j, \quad y^{(j)}(t_0) = Y^j,\ i \in I(n),\ j \in I^0(l-1),
\end{gathered}
\tag{9.1}
$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; U — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей; $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_l(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (9.1)

О п р е д е л е н и е 9.1. Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из U будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$, $q \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$).

О п р е д е л е н и е 9.2. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i^{(j)}(\theta_q)$, $y^{(j)}(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $j \in I^0(l-1)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$
\begin{gathered}
v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i^{(j)}(\theta_q),\ y^{(j)}(\theta_q),\ i \in I(n),\ j \in I^0(l-1)\big), \\
t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots
\end{gathered}
$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

Определение 9.3. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i ($i \in I(n)$), соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha^{(j)}(\theta_q)$, $y^{(j)}(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $j \in I^0(l-1)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\bigl(t,\, \theta_q,\, x_\alpha^{(j)}(\theta_q),\, y^{(j)}(\theta_q),\, \alpha \in I(n),\, j \in I^0(l-1),\, (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\bigr),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Действия преследователей можно трактовать так: имеется центр управления, который каждому преследователю P_i, $i \in I(n)$, пошагово строит допустимое управление $u_i(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы преследователей).

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \bigl\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\bigr\},\ |\Omega(q)| = C_n^q.$$

Определение 9.4. В игре Γ возможна b-кратная поимка ($b \in I(n)$), если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и моменты $\tau_\alpha \in [t_0, T_0]$, $\alpha \in \Lambda$, для которых

$$x_\alpha(\tau_\alpha) = y(\tau_\alpha) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может осуществить поимку не более одного раза, при этом убегающий E может либо уклониться от встречи, либо его могут поймать, в том числе и несколько раз.

2. Решение задачи

Для всех $w \in W$, $\xi \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, где W — произвольный компакт в $\mathbb{R}^k$, определим величину

$$\lambda(w,\xi;W) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in W\bigr\}. \tag{9.2}$$

Тогда $\lambda(w,\xi;S(0,1))$ — максимальный корень неравенства $|w - \lambda\xi| \leqslant 1$, решая которое получаем, что

$$\lambda(w,\xi;S(0,1)) = \frac{\langle w,\xi\rangle + \sqrt{\langle w,\xi\rangle^2 + |\xi|^2(1-|w|^2)}}{|\xi|^2} \tag{9.3}$$
$$\text{для всех } w \in S(0,1) \text{ и } \xi \neq 0.$$

Будем считать, что выполнено

Предположение 9.1. Существуют постоянная невырожденная квадратная матрица B порядка k и постоянный вектор $g \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(U+g) = S(0,1). \tag{9.4}$$

Из (9.4) следует, что

$$U = B^{-1}S(0,1) - g.$$

Предположение 9.1 допускает переход от U к $S(0,1)$. А именно, из (9.2), (9.3), (9.4) получим, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$

$$\begin{gathered}\lambda(w,\xi;U) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w-\lambda\xi) \in U\bigr\} = \\ = \lambda(B(w+g), B\xi; S(0,1)) = \\ = \frac{\langle B(w+g), B\xi\rangle + \sqrt{\langle B(w+g),B\xi\rangle^2 + |B\xi|^2(1-|B(w+g)|^2)}}{|B\xi|^2}.\end{gathered} \tag{9.5}$$

Соотношения (9.1), вводя замены $z_i = x_i - y$, $i \in I(n)$, перепишем в виде

$$\begin{gathered}z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + a_2(t)z_i^{(l-2)} + \dots + a_l(t)z_i = u_i - v,\ \ u_i, v \in U, \\ z_i^{(j)}(t_0) = Z_i^j = X_i^j - Y^j.\end{gathered} \tag{9.6}$$

Через $\varphi_j(t,s)$ $(t \geqslant s \geqslant t_0)$ обозначим решение уравнения с начальными условиями

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \dots + a_l(t)\omega = 0,$$

$$\omega(s)=0,\ \ldots,\ \omega^{(j-1)}(s)=0,\ \omega^{(j)}(s)=1,\ \omega^{(j+1)}(s)=0,\ \ldots,\ \omega^{(l-1)}(s)=0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t)=\varphi_0(t,t_0)Z_i^0+\varphi_1(t,t_0)Z_i^1+\varphi_2(t,t_0)Z_i^2+\cdots+\varphi_{l-1}(t,t_0)Z_i^{l-1}.$$

Предположение 9.2. Существуют непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции $\beta_i(t)$ и $\xi_i^1(t)$, обладающие следующими свойствами:

1) $\xi_i^1(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора;

2) $\beta_i(t)>0$ для всех $t\geqslant t_0$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty}(\xi_i^1(t)-\beta_i(t)\xi_i(t))=0$.

Предположение 9.3. Функции $\varphi_{l-1}(t,s)$, $\beta(t)=\min\limits_{i\in I(n)}\beta_i(t)$ такие, что

$$\lim_{t\to\infty}\beta(t)\int_{t_0}^{t}|\varphi_{l-1}(t,s)|\,ds=\infty.$$

Условие 9.1. Существуют моменты $\tau_1^0,\tau_2^0,\ldots,\tau_n^0\in[t_0,\infty)$ такие, что

$$0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{\xi_q^1(\tau_q^0),\ q\in K\}\ \text{для всех множеств}\ K\in\Omega(n-b-1).$$

Лемма 9.1. *Пусть выполнены предположение* 9.2 *и условие* 9.1. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_1>0$ *и* $\Delta_1>0$, *для которых справедливы утверждения*:

1) *для всех* $K\in\Omega(n-b-1)$ *и* $h_i\in S(\xi_i^1(\tau_i^0),\varepsilon_1)$ *выполнено включение* $0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{h_q,\ q\in K\}$;

2) *для всех* $t\geqslant t_0$ *найдутся моменты* $\tau_i\in[t,t+\Delta_1)$ *такие, что* $\beta_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i)\in S(\xi_i^1(\tau_i^0),\varepsilon_1)$.

Доказательство. Выберем произвольное множество $K\in\Omega(n-b-1)$. Множество $\operatorname{co}\{\xi_q^1(\tau_q^0),\ q\in K\}$ является выпуклым многогранником с вершинами в точках $\xi_p^1(\tau_p^0)$, где $p\in P\subset K$. Из условия 9.1 следует, что $0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{\xi_p^1(\tau_p^0),\ p\in P\}$. Так как множество $\operatorname{Int}\operatorname{co}\{\xi_p^1(\tau_p^0),\ p\in P\}$ является открытым, то найдется число $\varepsilon_1>0$ такое, что $0\in\operatorname{Int}\operatorname{co}\{h_p,\ p\in P\}$ для любых $h_p\in S(\xi_p^1(\tau_p^0),\varepsilon_1)$. Из последнего включения, учитывая, что $\operatorname{Int}\operatorname{co}\{h_p,\ p\in P\}\subset\operatorname{Int}\operatorname{co}\{h_q,\ q\in K\}$, следует справедливость первого утверждения.

Функции $\xi_i^1(t)$ почти периодические по Бору, поэтому найдется $T(\varepsilon_1) > 0$, для которого выполнено следующее утверждение: для всех $t \geqslant t_0$ существуют такие $\tau_i^1 \in [t, t+T(\varepsilon_1))$, что $\xi_i^1(\tau_i^1) \in S(\xi_i^1(\tau_i^0), \varepsilon_1/2)$. Из приведенного утверждения и третьего пункта предположения 9.2 следует, что при некотором $\Delta_1 = \Delta_1(\varepsilon_1) > 0$ второе утверждение леммы выполняется.

Лемма 9.1 доказана. $\square$

Зафиксируем любые значения $\varepsilon_1 > 0$ и $\Delta_1 > 0$ так, чтобы имели место утверждения леммы 9.1.

Определим функции $\psi,\ \lambda^1,\ Q_i$ равенствами

$$\psi(t,s) = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad \varphi_{l-1}(t,s) \geqslant 0, \\ -1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\lambda^1(v,\psi,h) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda\psi h) \in U\bigr\} = \lambda(v, \psi h; U),$$

$$Q_i(t,h) = \beta_i(t) \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \lambda^1(v(s), \psi(t,s), h)\, ds.$$

Введем обозначения

$$d = (h_1, h_2, \ldots, h_n), \quad d^* = (h_1^*, h_2^*, \ldots, h_n^*),$$

$$D_1 = S(\xi_1^1(\tau_1^0), \varepsilon_1) \times S(\xi_2^1(\tau_2^0), \varepsilon_1) \times \cdots \times D(\xi_n^1(\tau_n^0), \varepsilon_1),$$

$$\delta_1 = \min_{d \in D_1} \min_{\psi \in \{1,-1\}} \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda^1(v, \psi, h_\alpha).$$

Л е м м а 9.2. *Пусть выполнены предположения* 9.1, 9.2 *и условие* 9.1. *Тогда* $\delta_1 > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем любой набор $d \in D_1$. Пусть

$$\delta_1^+(d) = \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda^1(v, +1, h_\alpha),$$

$$\delta_1^-(d) = \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda^1(v, -1, h_\alpha).$$

Имеет место первое утверждение леммы 9.1, поэтому

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{h_q,\ q \in K\} \quad \bigl(0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{-h_q,\ q \in K\}\bigr)$$

$$\text{для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Предположим, что

$$\delta_{+1}(d) = 0 \quad \bigl(\delta_{-1}(d) = 0\bigr).$$

Тогда найдется $w \in U$ такой, что в любом множестве $\Lambda \in \Omega(b)$ существует элемент $p \in \Lambda$, для которого

$$\lambda^1(w, +1, h_p) = 0 \quad \bigl(\lambda^1(w, -1, h_p) = 0\bigr).$$

Построим множество $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_{n-b+1}\} \in \Omega(n-b+1)$ по следующему правилу. Выберем $q_1 \in L_1 = \{1, 2, \ldots, b\} \in \Omega(b)$ из условия

$$\lambda^1(w, +1, h_{q_1}) = 0 \quad \bigl(\lambda^1(w, -1, h_{q_1}) = 0\bigr),$$

затем $q_2 \in L_2 = (L_1 \bigcup \{b+1\}) \setminus \{q_1\} \in \Omega(b)$ такой, что

$$\lambda^1(w, +1, h_{q_2}) = 0 \quad \bigl(\lambda^1(w, -1, h_{q_2}) = 0\bigr)$$

и так далее. В конце определим $L_{n-b+1} = (L_{n-b} \bigcup \{n\}) \setminus \{q_{n-b}\} \in \Omega(b)$ и выберем элемент $q_{n-b+1} \in L_{n-b+1}$ по условию

$$\lambda^1(w, +1, h_{q_{n-b+1}}) = 0 \quad \bigl(\lambda^1(w, -1, h_{q_{n-b+1}}) = 0\bigr).$$

По построению множество $Q \in \Omega(n-b+1)$ такое, что

$$\min_{v \in U} \max_{q \in Q} \lambda^1(v, +1, h_q) = 0 \quad \bigl(\min_{v \in U} \max_{q \in Q} \lambda^1(v, -1, h_q) = 0\bigr),$$

откуда следует, что

$$0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{h_q,\ q \in Q\} \quad \bigl(0 \notin \operatorname{Int} \operatorname{co}\{-h_q,\ q \in Q\}\bigr).$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\delta_1^+(d) > 0 \quad \bigl(\delta_1^-(d) > 0\bigr).$$

Из (9.5) и определения функции λ^1 следует ее непрерывность на каждом из множеств $U \times \{\pm 1\} \times S(\xi_i^1(\tau_i^0), \varepsilon_1)$, откуда вытекают равенства

$$\lim_{d^* \to d} \delta_1^{\pm}(d^*) = \lim_{d^* \to d} \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda^1(v, \pm 1, h_\alpha^*) =$$

$$= \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda^1(v, \pm 1, h_\alpha) = \delta_1^{\pm}(d),$$

где $d^* \in D_1$, следовательно, функции $\delta_1^{\pm}$ являются непрерывными на D_1. Учитывая еще, что множество D_1 — компакт, получаем, что

$$\delta_1 = \min_{d \in D_1} \bigl\{ \delta_1^+(d), \delta_1^-(d) \bigr\} > 0.$$

Лемма 9.2 доказана. $\square$

Лемма 9.3. *Пусть выполнены предположения* 9.1, 9.2, 9.3 *и условие* 9.1. *Тогда существует такой момент $T > t_0$, что для каждых допустимого управления $v(t)$ и $d \in D_1$ найдется такое множество $\Lambda \in \Omega(b)$, что $Q_\alpha(T, h_\alpha) \geqslant 1$ для всех $\alpha \in \Lambda$.*

Доказательство. Имеют место неравенства

$$\max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} Q_\alpha(t, h_\alpha) = \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \beta_\alpha(t) \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \lambda^1(v(s), \psi(t,s), h_\alpha)\, ds \geqslant$$

$$\geqslant \beta(t) \frac{1}{C_n^b} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \sum_{\Lambda \in \Omega(b)} \Bigl(\min_{\alpha \in \Lambda} \lambda^1(v(s), \psi(t,s), h_\alpha) \Bigr) ds \geqslant$$

$$\geqslant \beta(t) \frac{\delta_1}{C_n^b} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds.$$

Таким образом, в силу предположения 9.3, для момента T такого, что

$$\beta(T) \frac{\delta_1}{C_n^b} \int_{t_0}^{T} |\varphi_{l-1}(T,s)|\, ds \geqslant 1,$$

и некоторого $\Lambda \in \Omega(b)$ выполнены неравенства $Q_\alpha(T, h_\alpha) \geqslant 1$ для всех $\alpha \in \Lambda$.

Лемма 9.3 доказана. $\square$

Пусть

$$T_1 = \min\{ t \geqslant t_0 : \inf_{v(\cdot)} \min_{d \in D_1} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} Q_\alpha(t, h_\alpha) \geqslant 1 \}.$$

Из леммы 9.3 следует, что $T_1 < \infty$.

Теорема 9.1. *Пусть выполнены предположения* 9.1, 9.2, 9.3 *и условие* 9.1. *Тогда в игре Γ возможна b-кратная поимка.*

Доказательство. По формуле Коши для всех $t \geqslant t_0$ решение задачи (9.6) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t,s)(u_i(s) - v(s))\, ds.$$

Пусть $v(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant T_0 = T_1 + \Delta_1$ — произвольное допустимое управление убегающего E и $t_i \geqslant t_0$ — наименьший корень функции

$$F_i(t) = 1 - \beta_i(\tau_i) \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(\tau_i, s)| \lambda^1(v(s), \psi(\tau_i, s), \beta_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i))\, ds,$$

где $\tau_i \in [T_1, T_0) = [T_1, T_1 + \Delta_1)$ выбраны так, чтобы выполнялось второе утверждение леммы 9.1, то есть $\beta_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i) \in S(\xi_i^1(\tau_i^0), \varepsilon_1)$. В силу определения момента T_1 имеем

$$\min_{\Lambda \in \Omega(b)} \max_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha(T_1) = 1 - \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} Q_\alpha(T_1, \beta_\alpha(\tau_\alpha)\xi_\alpha(\tau_\alpha)) \leqslant 0,$$

значит найдется множество $\Lambda_0 \in \Omega(b)$ такое, что $t_\alpha \leqslant T_1 \leqslant \tau_\alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda_0$.

Зададим допустимые управления преследователей P_i, $i \in I(n)$ следующим образом:

$$u_i(t) = \begin{cases} v(t) - \lambda^1(v(t), \psi(\tau_i, t), \beta_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i))\psi(\tau_i, t)\beta_i(\tau_i)\xi_i(\tau_i), \ t \in [t_0, t_i^*], \\ v(t), \ t \in (t_i^*, T_0], \ \text{где } t_i^* = \min\{t_i, \tau_i\}. \end{cases}$$

Тогда

$$z_\alpha(\tau_\alpha) = \xi_\alpha(\tau_\alpha)\left(1 - \beta_\alpha(\tau_\alpha) \int_{t_0}^{t_\alpha} |\varphi_{l-1}(\tau_\alpha, s)| \lambda^1(v(s), \psi(\tau_\alpha, s), \beta_\alpha(\tau_\alpha)\xi_\alpha(\tau_\alpha)) ds\right) = \\ = \xi_\alpha(\tau_\alpha) F_\alpha(t_\alpha) = 0$$

для всех $\alpha \in \Lambda_0$.

Теорема 9.1 доказана. □

Предположение 9.4. Функции $\xi_i(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора и $\varphi_{l-1}(t, s)$ такова, что

$$\lim_{t \to \infty} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)|\, ds = \infty.$$

Условие 9.2. Существуют моменты $\tau_1^0, \tau_2^0, \ldots, \tau_n^0 \in [t_0, \infty)$ такие, что

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{\xi_q(\tau_q^0), \ q \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n - b - 1).$$

Теорема 9.2. *Пусть выполнены предположения 9.1, 9.4 и условие 9.2. Тогда в игре Γ возможна b-кратная поимка.*

Доказательство. Полагая $\beta_i(t) = 1$, $\xi_i^1(t) = \xi_i(t)$, получаем выполнимость всех условий теоремы 9.1.

Теорема 9.2 доказана. □

Предположения 9.2, 9.3, 9.4 выполнены, в частности, если функции $a_q(t)$, $q \in I(l)$, являются постоянными, то есть $a_q(t) = a_q$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, и все корни ρ уравнения

$$\rho^l + a_1\rho^{l-1} + a_2\rho^{l-2} + \cdots + a_l\rho = 0 \tag{9.7}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Теорема 9.3. *Пусть выполнено предположение* 9.1, *функции* $a_q(t)$, $q \in I(l)$, *являются постоянными, все корни* ρ *уравнения* (9.7) *являются простыми и чисто мнимыми, выполнено условие* 9.2. *Тогда в игре* Γ *возможна* b*-кратная поимка.*

3. Примеры

Пример 9.1. В $\mathbb{R}^2$ рассмотрим игру $\Gamma_{9.1}$ 6 лиц: преследователей P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 и убегающего E вида (9.1), где соотношения (9.6) имеют вид

$$\ddot{z}_i + z_i = u_i - v,\ u_i, v \in U = S((0,0)^{\mathrm{T}}, 1),$$

$$t_0 = 0, \quad Z^0 = Z_i^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z^1 = Z_i^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i \in I(5).$$

Предположение 9.1 выполнено при $B = \mathcal{I}$ и $g = (0,0)^{\mathrm{T}}$. Корни уравнения (9.7), имеющего вид $\rho^2 + 1 = 0$, равны $\pm\imath$ и предположения 9.2, 9.3, 9.4 выполнены. Здесь

$$\varphi_0(t,0) = \cos t, \quad \varphi_1(t,0) = \sin t, \quad \xi_i(t) = Z^0\cos t + Z^1 \sin t.$$

Условие 9.2 выполнено, например, выберем $\tau_i^0 = \dfrac{2\pi i}{5}$, тогда точки

$$\xi_i(\tau_i^0) = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi i}{5} \\ \sin\dfrac{2\pi i}{5} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 5$$

образуют правильный пятиугольник с центром в начале координат. Проверяя, получаем, что условие 9.2 выполнено при $b = 2$. Из теоремы 9.3 следует

Утверждение 9.1. *В игре* $\Gamma_{9.1}$ *возможна двукратная поимка.*

§ 10. Нестрогая одновременная многократная поимка убегающего в примере Л.С. Понтрягина

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$
\begin{gathered}
P_i : x_i^{(l)} + a_1(t) x_i^{(l-1)} + a_2(t) x_i^{(l-2)} + \ldots + a_l(t) x_i = u_i,\ u_i \in U,\ i \in I(n), \\
E : y^{(l)} + a_1(t) y^{(l-1)} + a_2(t) y^{(l-2)} + \ldots + a_l(t) y = v, \quad v \in U, \\
x_i^{(j)}(t_0) = X_i^j, \quad y^{(j)}(t_0) = Y^j,\ i \in I(n),\ j \in I^0(l-1),
\end{gathered}
\tag{10.1}
$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^k$; U — строго выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с гладкой границей; $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_l(t)$ — непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (10.1)

О п р е д е л е н и е 10.1. Управления из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$ со значениями из U будем называть допустимыми.

Пусть σ — некоторое разбиение — $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$, $q \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, — промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения (либо точек в разбиении конечное число, либо $\lim\limits_{q \to \infty} \theta_q = \infty$).

О п р е д е л е н и е 10.2. Кусочно-программной стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q и позициям $x_i^{(j)}(\theta_q)$, $y^{(j)}(\theta_q)$, $i \in I(n)$, $j \in I^0(l-1)$, допустимое управление $v(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$
\begin{gathered}
v(t) = v\big(t,\ \theta_q,\ x_i^{(j)}(\theta_q),\ y^{(j)}(\theta_q),\ i \in I(n),\ j \in I^0(l-1)\big), \\
t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots
\end{gathered}
$$

Здесь и далее, если момент θ_{q+1} не определен (θ_q — последняя точка разбиения σ), то считаем $\theta_{q+1} = \infty$.

О п р е д е л е н и е 10.3. Кусочно-программной контрстратегией $\mathcal{U}_i$ преследователя P_i $(i \in I(n))$, соответствующей разбиению σ, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту θ_q, позициям $x_\alpha^{(j)}(\theta_q)$, $y^{(j)}(\theta_q)$, $\alpha \in I(n)$, $j \in I^0(l-1)$, и сужению $(v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))$ допустимого управления $v(\cdot)$ убегающего E на интервал $[\theta_q, \theta_{q+1})$ допустимое управление $u_i(t)$, определенное для $t \in [\theta_q, \theta_{q+1})$, то есть

$$u_i(t) = u_i\big(t,\, \theta_q,\, x_\alpha^{(j)}(\theta_q),\, y^{(j)}(\theta_q),\, \alpha \in I(n),\, j \in I^0(l-1),\, (v(\cdot) \mid [\theta_q, \theta_{q+1}))\big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}), \quad q = 0, 1, 2, \ldots$$

Действия преследователей можно трактовать так: имеется центр управления, который каждому преследователю P_i, $i \in I(n)$, пошагово строит допустимое управление $u_i(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы преследователей).

Для каждого $q = 1, 2, \ldots, n$ определим множество

$$\Omega(q) = \big\{\{i_1, i_2, \ldots, i_q\} : i_1 < i_2 < \cdots < i_q,\ i_1, i_2, \ldots, i_q \in I(n)\big\},\ |\Omega(q)| = C_n^q.$$

О п р е д е л е н и е 10.4. В игре Γ возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau) \text{ при всех } \alpha \in \Lambda.$$

О п р е д е л е н и е 10.5. В игре Γ возможна одновременная b-кратная поимка, если существует конечный момент T_0 такой, что для любого разбиения σ существуют кусочно-программные контрстратегии $\mathcal{U}_i$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, соответствующие разбиению σ, что для любой кусочно-программной стратегии $\mathcal{V}$ убегающего E, соответствующей разбиению σ, найдутся множество $\Lambda \in \Omega(b)$ и момент $\tau \in [t_0, T_0]$, для которых

$$x_\alpha(\tau) = y(\tau),\ x_\alpha(s) \neq y(s) \text{ при всех } s \in [t_0, \tau),\ \alpha \in \Lambda.$$

Отметим, что при $b = 1$ определения 9.4, 10.4 и 10.5 совпадают (в этом случае кратность поимки не указываем и говорим, что в игре Γ возможна *поимка*). При $b \geqslant 2$ возможность b-кратной поимки является необходимым условием осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, которая, в свою очередь, необходима для реализации одновременной b-кратной поимки; наоборот — реализация одновременной b-кратной поимки достаточна для осуществления нестрогой одновременной b-кратной поимки, а последняя сразу влечет b-кратную поимку.

2. Решение задачи

Будем считать, что выполнено

П р е д п о л о ж е н и е 10.1. Существуют постоянная невырожденная квадратная матрица B порядка k и постоянный вектор $g \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(U + g) = S(0, 1). \tag{10.2}$$

Предположение 10.1 допускает переход от U к $S(0, 1)$. А именно, аналогично выводу (9.5) можно показать, что для всех $\xi \neq 0$, $w \in U(t)$

$$\begin{gathered}\lambda(w, \xi; U) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (w - \lambda\xi) \in U\bigr\} = \\ = \lambda(B(w + g), B\xi; S(0, 1)) = \\ = \frac{\langle B(w + g), B\xi\rangle + \sqrt{\langle B(w + g), B\xi\rangle^2 + |B\xi|^2(1 - |B(w + g)|^2)}}{|B\xi|^2}.\end{gathered} \tag{10.3}$$

Соотношения (10.1), вводя замены $z_i = x_i - y$, $i \in I(n)$, перепишем в виде

$$\begin{gathered}z_i^{(l)} + a_1(t)z_i^{(l-1)} + a_2(t)z_i^{(l-2)} + \dots + a_l(t)z_i = u_i - v,\ u_i, v \in U, \\ z_i^{(j)}(t_0) = Z_i^j = X_i^j - Y^j.\end{gathered} \tag{10.4}$$

Через $\varphi_j(t, s)$ $(t \geqslant s \geqslant t_0)$ обозначим решение уравнения с начальными условиями

$$\omega^{(l)} + a_1(t)\omega^{(l-1)} + a_2(t)\omega^{(l-2)} + \dots + a_l(t)\omega = 0,$$

$$\omega(s) = 0,\ \dots,\ \omega^{(j-1)}(s) = 0,\ \omega^{(j)}(s) = 1,\ \omega^{(j+1)}(s) = 0,\ \dots,\ \omega^{(l-1)}(s) = 0.$$

Пусть далее

$$\xi_i(t) = \varphi_0(t, t_0)Z_i^0 + \varphi_1(t, t_0)Z_i^1 + \varphi_2(t, t_0)Z_i^2 + \dots + \varphi_{l-1}(t, t_0)Z_i^{l-1}.$$

П р е д п о л о ж е н и е 10.2. Существуют непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции $\beta_i(t)$ и $\xi_i^1(t)$, обладающие следующими свойствами:

1) $\xi_i^1(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора;

2) $\beta_i(t) > 0$ для всех $t \geqslant t_0$;

3) $\lim\limits_{t\to\infty}(\xi_i^1(t) - \beta_i(t)\xi_i(t)) = 0$.

П р е д п о л о ж е н и е 10.3. Функции $\varphi_{l-1}(t,s)$, $\beta(t) = \min\limits_{i\in I(n)} \beta_i(t)$ такие, что

$$\lim_{t\to\infty} \beta(t) \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)|\, ds = \infty.$$

У с л о в и е 10.1. Существует момент τ_0 такой, что

$$0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{\xi_q^1(\tau_0),\ q \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Л е м м а 10.1. *Пусть выполнены предположение* 10.2 *и условие* 10.1. *Тогда существуют такие числа* $\varepsilon_2 > 0$ *и* $\Delta_2 > 0$, *для которых справедливы утверждения*:

1) *для всех* $K \in \Omega(n-b-1)$ *и* $h_i \in S(\xi_i^1(\tau_0), \varepsilon_2)$ *выполнено включение* $0 \in \operatorname{Int}\operatorname{co}\{h_q,\ q \in K\}$;

2) *для всех* $t \geqslant t_0$ *найдется момент* $\tau \in [t, t+\Delta_2)$ *такой, что* $\beta_i(\tau)\xi_i(\tau) \in S(\xi_i^1(\tau_0), \varepsilon_2)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 9.1.

Зафиксируем любые значения $\varepsilon_2 > 0$ и $\Delta_2 > 0$ так, чтобы имели место утверждения леммы 10.1.

Определим функции $\psi,\ \lambda^1,\ Q_i$ равенствами

$$\psi(t,s) = \begin{cases} +1, & \text{если} \quad \varphi_{l-1}(t,s) \geqslant 0, \\ -1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\lambda^1(v,\psi,h) = \sup\bigl\{\lambda \geqslant 0 : (v - \lambda\psi h) \in U\bigr\} = \lambda(v, \psi h; U),$$

$$Q_i(t,h) = \beta_i(t) \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t,s)| \lambda^1(v(s), \psi(t,s), h)\, ds.$$

Введем обозначения

$$d = (h_1, h_2, \ldots, h_n), \quad d^* = (h_1^*, h_2^*, \ldots, h_n^*),$$

$$D_2 = S(\xi_1^1(\tau_0), \varepsilon_2) \times S(\xi_2^1(\tau_0), \varepsilon_2) \times \cdots \times D(\xi_n^1(\tau_0), \varepsilon_2),$$

$$\delta_2 = \min_{d \in D_2} \min_{\psi \in \{1,-1\}} \min_{v \in U} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} \lambda^1(v, \psi, h_\alpha).$$

Лемма 10.2. *Пусть выполнены предположения* 10.1, 10.2 *и условие* 10.1. *Тогда* $\delta_2 > 0$.

Доказательство леммы 10.2 проводится аналогично доказательству леммы 9.2.

Лемма 10.3. *Пусть выполнены предположения* 10.1, 10.2, 10.3 *и условие* 10.1. *Тогда существует такой момент* $T > t_0$, *что для каждых допустимого управления* $v(t)$ *и* $d \in D_2$ *найдется такое множество* $\Lambda \in \Omega(b)$, *что* $Q_\alpha(T, h_\alpha) \geqslant 1$ *для всех* $\alpha \in \Lambda$.

Доказательство леммы 10.3 проводится аналогично доказательству леммы 9.3.

Пусть

$$T_2 = \min\{t \geqslant t_0 : \inf_{v(\cdot)} \min_{d \in D_2} \max_{\Lambda \in \Omega(b)} \min_{\alpha \in \Lambda} Q_\alpha(t, h_\alpha) \geqslant 1\}.$$

Из леммы 10.3 следует, что $T_2 < \infty$.

Теорема 10.1. *Пусть выполнены предположения* 10.1, 10.2, 10.3 *и условие* 10.1. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

Доказательство. По формуле Коши для всех $t \geqslant t_0$ решение задачи (10.4) при любых допустимых управлениях имеет вид

$$z_i(t) = \xi_i(t) + \int_{t_0}^{t} \varphi_{l-1}(t,s)(u_i(s) - v(s))\, ds.$$

Пусть $v(\tau)$, $t_0 \leqslant \tau \leqslant T_0 = T_2 + \Delta_2$ — произвольное допустимое управление убегающего E и $t_i \geqslant t_0$ — наименьший корень функции

$$F_i(t) = 1 - \beta_i(\tau) \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(\tau,s)| \lambda(v(s), \psi(\tau,s), \beta_i(\tau)\xi_i(\tau))\, ds,$$

где $\tau \in [T_2, T_0) = [T_2, T_2 + \Delta_2)$ выбран так, чтобы выполнялось второе утверждение леммы 10.1, то есть $\beta_i(\tau)\xi_i(\tau) \in S(\xi_i^1(\tau_0), \varepsilon_2)$. В силу определения момента T_2 имеем

$$\min_{\Lambda\in\Omega(b)} \max_{\alpha\in\Lambda} F_\alpha(T_2) = 1 - \max_{\Lambda\in\Omega(b)} \min_{\alpha\in\Lambda} Q_\alpha(\theta_1, \beta_\alpha(\tau)\xi_\alpha(\tau)) \leqslant 0,$$

значит найдется множество $\Lambda_0 \in \Omega(b)$, что $t_\alpha \leqslant T_2 \leqslant \tau$ для всех $\alpha \in \Lambda_0$.

Зададим допустимые управления преследователей P_i, $i \in I(n)$ следующим образом:

$$u_i(t) = \begin{cases} v(t) - \lambda(v(t), \psi(\tau, t), \beta_i(\tau)\xi_i(\tau))\psi(\tau, t)\beta_i(\tau)\xi_i(\tau), \ t \in [t_0, t_i^*], \\ v(t), \ t \in (t_i^*, T_0], \ \text{где } t_i^* = \min\{t_i, \tau\}. \end{cases}$$

Тогда

$$z_\alpha(\tau) = \xi_\alpha(\tau)\left(1 - \beta_\alpha(\tau) \int_{t_0}^{t_\alpha} |\varphi_{l-1}(\tau, s)| \lambda(v(s), \psi(\tau, s), \beta_\alpha(\tau)\xi_\alpha(\tau))\, ds\right) =$$
$$= \xi_\alpha(\tau)F_\alpha(t_\alpha) = 0$$

для всех $\alpha \in \Lambda_0$.

Теорема 10.1 доказана. □

П р е д п о л о ж е н и е 10.4. Функции $\xi_i(t)$ являются почти периодическими в смысле Бора и $\varphi_{l-1}(t, s)$ такова, что

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} |\varphi_{l-1}(t, s)|\, ds = \infty.$$

У с л о в и е 10.2. Существует момент τ_0 такой, что

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{\xi_q(\tau_0), \ q \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n - b - 1).$$

Т е о р е м а 10.2. *Пусть выполнены предположения* 10.1, 10.4 *и условие* 10.2. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная b-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $\beta_i(t) = 1$, $\xi_i^1(t) = \xi_i(t)$, получаем выполнимость всех условий теоремы 10.1.

Теорема 10.2 доказана. □

У с л о в и е 10.3. Начальные позиции участников таковы, что

$$0 \in \operatorname{Int} \operatorname{co}\{Z_q^0,\ q \in K\} \text{ для всех множеств } K \in \Omega(n-b-1).$$

Т е о р е м а 10.3. *Пусть выполнены предположения* 10.1, 10.4 *и условие* 10.3. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\tau_0 = t_0$, тогда $\xi_i(\tau_0) = \xi_i(t_0) = Z_i^0$ и условие 10.2 выполнено. Применим теорему 10.2.

Теорема 10.3 доказана. □

Предположения 10.2, 10.3, 10.4 выполнены, в частности, если функции $a_q(t)$, $q \in I(l)$, являются постоянными, то есть $a_q(t) = a_q$ для всех $t \in [t_0, \infty)$, и все корни ρ уравнения

$$\rho^l + a_1\rho^{l-1} + a_2\rho^{l-2} + \cdots + a_l\rho = 0 \tag{10.5}$$

являются простыми и чисто мнимыми.

Т е о р е м а 10.4. *Пусть выполнено предположение* 10.1, *функции* $a_q(t)$, $q \in I(l)$, *являются постоянными, все корни* ρ *уравнения* (10.5) *являются простыми и чисто мнимыми, выполнено условие* 10.2 *или условие* 10.3. *Тогда в игре* Γ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

3. Примеры

Отметим, что в игре $\Gamma_{9.1}$ (см. пример 9.1) условие 10.2, а следовательно и полученные здесь достаточные условия нестрогой одновременной b-кратной поимки, не выполнены уже при $b = 1$, так как при любых $\beta_i(t) > 0$

$$\operatorname{Int} \operatorname{co}\{\beta_i(t)\xi_i(t),\ i \in I(5)\} = \varnothing \text{ для всех } t \in [0, \infty).$$

П р и м е р 10.1. В $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассмотрим игру $\Gamma_{10.1}$ $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (10.1), где соотношения (10.4) имеют вид

$$z_i^{(6)} + 14z_i^{(4)} + 49\ddot{z}_i + 36z_i = u_i - v,\ u_i, v \in U = S((0,0)^{\mathrm{T}}, 1).$$

Предположение 10.1 выполнено при $B = \mathcal{I}$ и $g = (0,0)^{\mathrm{T}}$. Корни уравнения (10.5), имеющего вид $\rho^6 + 14\rho^4 + 49\rho^2 + 36 = 0$, равны $\pm\iota$, $\pm 2\iota$, $\pm 3\iota$ и предположения 10.2, 10.3, 10.4 выполнены. Из теоремы 10.4 следует

Утверждение 10.1. *Если выполнено условие* 10.2 *или условие* 10.3, *то в игре* $\Gamma_{10.1}$ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

Пример 10.2. В $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассмотрим игру $\Gamma_{10.2}$ $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (10.1), где соотношения (10.4) имеют вид

$$\dot{z}_i + \frac{\sin t}{2+\cos t} z_i = u_i - v, \ u_i, v \in U = S((0,0)^{\mathrm{T}}, 1).$$

Предположение 10.1 выполнено при $B = \mathcal{I}$ и $g = (0,0)^{\mathrm{T}}$. Функции

$$\varphi_0(t,s) = \frac{2+\cos t}{2+\cos s}, \quad \xi_i(t) = \frac{2+\cos t}{2+\cos t_0} Z_i^0$$

и предположения 10.2, 10.3, 10.4 выполнены. Из теоремы 10.3 следует

Утверждение 10.2. *Если выполнено условие* 10.3, *то в игре* $\Gamma_{10.2}$ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

Пример 10.3. В $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассмотрим игру $\Gamma_{10.3}$ $n+1$ лиц: преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E вида (10.1), где соотношения (10.4) имеют вид

$$\dot{z}_i + \left(\frac{1}{t} + \frac{\sin t}{2+\cos t}\right) z_i = u_i - v, \ u_i, v \in U = S((0,0)^{\mathrm{T}}, 1), \quad t_0 > 0.$$

Предположение 10.1 выполнено при $B = \mathcal{I}$ и $g = (0,0)^{\mathrm{T}}$. Функции

$$\varphi_0(t,s) = \frac{s(2+\cos t)}{t(2+\cos s)}, \quad \xi_i(t) = \frac{t_0(2+\cos t)}{t(2+\cos t_0)} Z_i^0,$$

$$\beta(t) = \beta_i(t) = t, \quad \xi_i^1(t) = \frac{t_0}{2+\cos t_0}(2+\cos t) Z_i^0$$

и предположения 10.2, 10.3 выполнены. Отметим, что предположение 10.4 не выполнено. В условии 10.1 возьмем $\tau_0 = t_0$, тогда $\xi_i^1(\tau_0) = \xi_i^1(t_0) = t_0 Z_i^0$. Из теоремы 10.1 следует

Утверждение 10.3. *Если выполнено условие* 10.3, *то в игре* $\Gamma_{10.3}$ *возможна нестрогая одновременная* b*-кратная поимка.*

Г Л А В А 4
МЯГКОЕ УБЕГАНИЕ БОЛЕЕ МАНЕВРЕННЫХ ЖЕСТКО СКООРДИНИРОВАННЫХ УБЕГАЮЩИХ ОТ ГРУППЫ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ

§ 11. Мягкое убегание от группы преследователей одного убегающего

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Г $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i \ &: \ x_i^{(n_i)} = f_i\left(x_i, \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(n_i-1)}, u_i, t\right), \quad && u_i \in U_i, \\ &\ \ x_i^{(\alpha_i)}(t_0) = X_i^{\alpha_i}, \ \alpha_i \in I^0(n_i - 1), && i \in I(n), \\ E \ &: \ y^{(m)} = v, && v \in S(0, \gamma), \\ &\ \ y^{(\beta)}(t_0) = Y^\beta, \ \beta \in I^0(m-1), \end{aligned} \tag{11.1}$$

причем $n_i > m \geqslant 1$ при всех $i \in I(n)$ и $X_i^\beta \neq Y^\beta$ для всех $\beta \in I^0(m-1)$, $i \in I(n)$. Здесь x_i, $y \in \mathbb{R}^k$, $f_i : \underbrace{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$, $U_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$, $U_i \neq \varnothing$, $k_i \geqslant 1$, $\gamma > 0$.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (11.1).

О п р е д е л е н и е 11.1. Управления $u_i(\cdot)$ и $v(\cdot)$ из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$, удовлетворяющие указанным в (11.1) ограничениям будем называть допустимыми.

Будем считать, что выполнено

П р е д п о л о ж е н и е 11.1. Каждая функция f_i удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решения на любой отрезок при всех допустимых управлениях $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$.

О п р е д е л е н и е 11.2. Стратегией $\mathcal{V}$ убегающего E будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту t и реализовавшимся значениям $x_i^{(\alpha_i)}(s)$, $y^{(\beta)}(s)$, $s \in [t_0, t]$, $\alpha_i \in I^0(n_i - 1)$, $i \in I(n)$, $\beta \in I^0(m-1)$, допустимое управление $v(t)$, которое является кусочно-постоянной функцией на $[t_0, t]$, то есть

$$v(t) = v\Big(t,\ x_i^{(\alpha_i)}(s),\ y^{(\beta)}(s),\ s \in [t_0, t],$$
$$\alpha_i \in I^0(n_i - 1),\ i \in I(n),\ \beta \in I^0(m-1)\Big), \quad t \in [t_0, \infty).$$

О п р е д е л е н и е 11.3. В игре Γ возможно мягкое убегание, если существует стратегия $\mathcal{V}$ убегающего E, что для любых допустимых управлений $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, выполняются неравенства

$$x_i^{(\beta)}(t) \neq y^{(\beta)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty),\ \beta \in I^0(m-1),\ i \in I(n).$$

2. Решение задачи

Дополнительно потребуем, чтобы имело место

П р е д п о л о ж е н и е 11.2. Существует постоянная $G \geqslant 0$ такая, что каждая функция f_i удовлетворяет неравенству

$$\Big| f_i(a_0, a_1, \ldots, a_{n_i - 1}, b, t) \Big| \leqslant G$$

$$\text{для всех } (a_0, a_1, \ldots, a_{n_i-1}, b, t) \in \underbrace{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty).$$

Построим кусочно-постоянное допустимое управление $v(t)$, обеспечивающее мягкое убегание из любых начальных позиций.

Без ограничения общности считаем, что в предположении 11.2 постоянная $G = 1$ (указанное требование при $G > 1$ достигается заменой переменных $x_i^*(t) = x_i(t)G^{-1}$, $y^*(t) = y(t)G^{-1}$).

Фиксируем произвольный единичный вектор $e \in \mathbb{R}^k$.

Из возможности мягкого убегания для $k = 2$, то есть на плоскости, следует возможность мягкого убегания и при $k > 2$. Действительно, если $k > 2$, тогда выберем плоскость Π, включающую в себя вектор $Y^0 + e$, такую, что $\Pi(X_i^\beta) \neq \Pi(Y^\beta)$, $\beta \in I^0(m-1)$, где под $\Pi(z)$ понимается проекция точки $z \in \mathbb{R}^k$ на плоскость Π. Такая плоскость найдется в силу конечности числа преследователей n. Затем в плоскости Π выбираем единичный вектор $e_\perp$, перпендикулярный e против часовой стрелки. По $e, e_\perp$ как по орт-векторам получаем декартову систему координат, в которой и решаем задачу. Если задача мягкого убегания от проекций разрешима, то тем самым разрешима и исходная задача.

Далее в этой части считаем, что

$$k = 2,\ c = 1, 2 \text{ и } z_c \text{ — } c\text{-ая координата вектора } z \in \mathbb{R}^2.$$

Пусть

$$l_c(t) = \Big|L_c(t)\Big|, \text{ где } L_c(t) = \Big\{\alpha \in I(n) : x^{(m-1)}_{c\alpha}(t) < y^{(m-1)}_c(t)\Big\},$$

$$q_c(t) = \Big|Q_c(t)\Big|, \text{ где } Q_c(t) = \Big\{\alpha \in I(n) : x^{(m-1)}_{c\alpha}(t) = y^{(m-1)}_c(t)\Big\}.$$

Зафиксируем положительные константы $\delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2$ так, чтобы

$$\delta_c - \frac{\rho_c}{4} > 0; \quad \sqrt{\Big(\delta_1 + 2\rho_1 n + \frac{\rho_1}{4}\Big)^2 + \Big(\delta_2 + 2\rho_2 n + \frac{\rho_2}{4}\Big)^2} \leqslant \gamma \tag{11.2}$$

(например: $\delta_c = \dfrac{3\rho_c}{4} > 0, \rho_c = \dfrac{\gamma}{\sqrt{2}(2n+1)} > 0$, тогда $\delta_c - \dfrac{\rho_c}{4} = \dfrac{\rho_c}{2} > 0$; $\delta_c + 2\rho_c n + \dfrac{\rho_c}{4} = (2n+1)\rho_c$ и квадратный корень в выражении (11.2) будет равен $\sqrt{2}(2n+1)\dfrac{\gamma}{\sqrt{2}(2n+1)} = \gamma \leqslant \gamma$).

Лемма 11.1. *Для любых $\rho > 0$, σ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q \in \mathbb{R}^1$, $q \geqslant 1$*

$$\max_{\omega\in\Omega} \min\big\{|\omega - \xi_1|, \ldots, |\omega - \xi_q|\big\} \geqslant \rho, \text{ где } \Omega = \big\{\sigma + 2\rho b, b \in I^0(q)\big\}.$$

Доказательство. Выберем любое $b \in I^0(q)$. Предположим, что найдется номер $r \in I(q)$ такой, что $|(\sigma+2\rho b)-\xi_r| < \rho$. Для всех $\omega \in \Omega \backslash \{\sigma+2\rho b\}$, выполнено неравенство $|(\sigma + 2\rho b) - \omega| \geqslant 2\rho$, откуда $|\omega - \xi_r| > \rho$.

Пусть лемма неверна, значит выполнено следующее условие: существуют такие $\rho > 0$, σ, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_q \in \mathbb{R}^1$, что

$$\max_{\omega\in\Omega} \min\big\{|\omega - \xi_1|, \ldots, |\omega - \xi_q|\big\} < \rho,$$

откуда следует, что для каждого $b \in I^0(q)$ найдется номер $r \in I(q)$ такой, что $|(\sigma+2\rho b)-\xi_r| < \rho$. Выше показано, что одному такому r может соответствовать не более одного b. При этом b принимает $q + 1 = |I^0(q)|$ значение,

r — ровно $q = |I(q)|$, поэтому существует по крайней мере одно такое значение $b^* \in I^0(q)$, что $|(\sigma + 2\rho b^*) - \xi_r| \geqslant \rho$ для всех $r \in I(q)$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Лемма 11.1 доказана. $\square$

Для каждого момента $t \in [t_0, \infty)$ определим множество

$$\Omega_c(t) = \big\{\delta_c + 2\rho_c l_c(t) + 2\rho_c b,\ b \in I^0(q_c(t))\big\}$$

и величину $\omega_c(t) \in \Omega_c(t)$ следующим образом: $\omega_c(t) = \delta_c + 2\rho_c l_c(t)$, если $q_c(t) = 0$; при $q_c(t) \geqslant 1$ значение $\omega_c(t)$ определяется из условия

$$\min_{\alpha \in Q_c(t)} \Big\{\Big|\omega_c(t) - x_{c\alpha}^{(m)}(t)\Big|\Big\} = \max_{\omega \in \Omega_c(t)} \min_{\alpha \in Q_c(t)} \Big\{\Big|\omega - x_{c\alpha}^{(m)}(t)\Big|\Big\} \geqslant \rho_c. \tag{11.3}$$

Неравенство в (11.3) следует из леммы 11.1. Для определенности: если существует несколько значений $\omega_c(t)$, то возьмем максимальное из них. Таким образом, для всех $t \in [t_0, \infty)$ величина $\omega_c(t)$ определена однозначно и

$$\omega_c(t) \in \Omega_c^* = \big\{\delta_c + 2\rho_c b,\ b \in I^0(n)\big\}. \tag{11.4}$$

Лемма 11.2. *Пусть выполнены предположения* 11.1 *и* 11.2. *Тогда для всех* $t \in [t_0, \infty)$, $T > 0$, $r \in I^0(m-1)$ *справедливы следующие утверждения*:

1) *область достижимости* $x_i^{(r)}$ *в момент* $t + T$ *включена в множество*

$$S\left(\sum_{k=0}^{n_i - r - 1} \frac{x_i^{(r+k)}(t) T^k}{k!}, \frac{T^{n_i - r}}{(n_i - r)!}\right);$$

2) *область достижимости* $x_{ci}^{(r)}$ *в момент* $t + T$ *включена в отрезок*

$$\left[\sum_{k=0}^{n_i - r - 1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t) T^k}{k!} - \frac{T^{n_i - r}}{(n_i - r)!}, \sum_{k=0}^{n_i - r - 1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t) T^k}{k!} + \frac{T^{n_i - r}}{(n_i - r)!}\right];$$

3) *если* $v_c(\tau) = v_c(t)$ *для всех* $\tau \in [t, t + T]$, *то*

$$y_c^{(r)}(t + T) = \sum_{k=0}^{m - r - 1} \frac{y_c^{(r+k)}(t) T^k}{k!} + v_c(t) \frac{T^{m - r}}{(m - r)!}.$$

Доказательство. Из системы (11.1) и предположения 11.2 получаем, что для почти всех $s \in [t, t + T]$

$$\Big|x_i^{(n_i)}(s)\Big| = \Big|f_i(x_i^{(\alpha_i)}(s), \alpha_i \in I^0(n_i - 1), u_i(s), s)\Big| \leqslant G = 1.$$

Интегрированием этого неравенства на интервале $[t, t+T]$ доказываются утверждения 1 и 2. Утверждение 3 проверяется непосредственным интегрированием на интервале $[t, t+T]$ уравнения движения убегающего (11.1) при указанном условии на его управление.

Лемма 11.2 доказана. $\square$

Для каждого $t \in [t_0, \infty)$ определим функции $T_{ci}^r(t) \geqslant 0$, $r \in I^0(m-1)$, как время, в течение которого не могут совпасть c-ые координаты $x_i^{(r)}(t)$ и $y^{(r)}(t)$, то есть

$$x_{ci}^{(r)}(s) \neq y_c^{(r)}(s) \text{ для всех } s \in [t, t+T_{ci}^r(t)),$$

при условии, что E использует управление $v_c(\tau) = v_c(t)$ для всех $\tau \in [t, \infty)$.

Возможны три случая:

1) $y_c^{(r)}(t) < x_{ci}^{(r)}(t)$; из (11.1) и леммы 11.2 получим, что $T_{ci}^r(t)$ есть наименьшее положительное (относительно T) решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{m-r-1} \frac{y_c^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + v_c(t)\frac{T^{m-r}}{(m-r)!} = \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} - \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}\ ;$$

2) $y_c^{(r)}(t) = x_{ci}^{(r)}(t)$; положим $T_{ci}^r(t) = 0$;

3) $y_c^{(r)}(t) > x_{ci}^{(r)}(t)$; тогда $T_{ci}^r(t)$ есть наименьшее положительное решение уравнения

$$\sum_{k=0}^{m-r-1} \frac{y_c^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + v_c(t)\frac{T^{m-r}}{(m-r)!} = \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}.$$

Таким образом, для всех $t \in [t_0, \infty)$ и $r \in I^0(m-1)$ значение $T_{ci}^r(t)$ определяется как минимальный неотрицательный (относительно T) корень многочлена

$$\begin{gathered} 0 = -\operatorname{sign}\left(y_c^{(r)}(t) - x_{ci}^{(r)}(t)\right)\frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!} - \sum_{k=m-r+1}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(t)T^k}{k!} + \\ + \left(v_c(t) - x_{ci}^{(m)}(t)\right)\frac{T^{m-r}}{(m-r)!} + \sum_{k=1}^{m-r-1} \frac{\left(y_c^{(r+k)}(t) - x_{ci}^{(r+k)}(t)\right)T^k}{k!} + \\ + \left(y_c^{(r)}(t) - x_{ci}^{(r)}(t)\right), \end{gathered} \tag{11.5}$$

который существует, так как уравнение (11.5) представимо в виде

$$T^{n_i-r} + a_1 T^{n_i-r-1} + \dots + a_{n_i-r-1}T = a_{n_i-r}, \text{ где } a_{n_i-r} \geqslant 0.$$

Для каждого $r \in I^0(m-1)$ определим функции

$$K^r_{ci}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \ y^{(r)}_c(t) < x^{(r)}_{ci}(t) \text{ и для } T = T^r_{ci}(t) \\ & \text{выполнено неравенство} \\ & \displaystyle\sum_{k=0}^{m-r-1} \frac{y^{(r+k)}_c(t) T^k}{k!} + \Big(v_c(t) + \frac{\rho_c}{8} \Big) \frac{T^{m-r}}{(m-r)!} \geqslant \\ & \displaystyle\geqslant \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x^{(r+k)}_{ci}(t) T^k}{k!} + \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}, \\ -1, & \text{если } \ y^{(r)}_c(t) > x^{(r)}_{ci}(t) \text{ и для } T = T^r_{ci}(t) \\ & \text{выполнено неравенство} \\ & \displaystyle\sum_{k=0}^{m-r-1} \frac{y^{(r+k)}_c(t) T^k}{k!} + \Big(v_c(t) - \frac{\rho_c}{8} \Big) \frac{T^{m-r}}{(m-r)!} \leqslant \\ & \displaystyle\leqslant \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x^{(r+k)}_{ci}(t) T^k}{k!} - \frac{T^{n_i-r}}{(n_i-r)!}, \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases} \tag{11.6}$$

Л е м м а 11.3. *Пусть выполнены предположения* 11.1, 11.2 *и убегающий E использует произвольное постоянное управление. Тогда для любого допустимого управления $u_i(t)$ преследователя P_i и $r \in I^0(m-1)$ справедливы следующие утверждения*:

1) *если для $t > t_0$ и некоторого $\sigma > 0$*

$$y^{(r)}_c(\tau) < x^{(r)}_{ci}(\tau) \ \Big\{ y^{(r)}_c(\tau) > x^{(r)}_{ci}(\tau) \Big\} \ \textit{для всех } \tau \in [t-\sigma, t), \quad y^{(r)}_c(t) = x^{(r)}_{ci}(t),$$
$$y^{(r)}_d(\tau) \neq x^{(r)}_{di}(\tau) \ \textit{для всех } \tau \in [t-\sigma, t], \ \textit{где } d \in \{1,2\} \backslash \{c\},$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что

$$K^r_{ci}(\tau) = 1 \ \Big\{ K^r_{ci}(\tau) = -1 \Big\} \ \textit{и } T^r_{di}(\tau) > T^r_{ci}(\tau) \ \textit{для всех } \tau \in [t-\varepsilon, t);$$

2) *если для $t > t_0$ и некоторого $\sigma > 0$*

$$y^{(r)}_1(\tau) \neq x^{(r)}_{1i}(\tau), \ y^{(r)}_2(\tau) \neq x^{(r)}_{2i}(\tau) \ \textit{для всех } \tau \in [t-\sigma, t), \quad y^{(r)}(t) = x^{(r)}_i(t),$$

то найдется $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что

$$K^r_{1i}(\tau) \neq 0 \ \textit{и} \ \ T^r_{2i}(\tau) \geqslant T^r_{1i}(\tau) > 0 \ \textit{для всех } \tau \in [t-\varepsilon, t) \quad \textit{или}$$

$$K^r_{2i}(\tau) \neq 0 \ \textit{и } T^r_{1i}(\tau) \geqslant T^r_{2i}(\tau) > 0 \ \textit{для всех } \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Доказательство. Из (11.5) и условий леммы следует непрерывность функций $T^r_{1i}(\tau)$, $T^r_{2i}(\tau)$ для всех $\tau \in [t_0, \infty)$.

1. Пусть

$$y_c^{(r)}(\tau) < x_{ci}^{(r)}(\tau),\ \tau \in [t-\sigma, t), \quad y_d^{(r)}(\tau) \neq x_{di}^{(r)}(\tau),\ \tau \in [t-\sigma, t],$$
$$y_c^{(r)}(t) = x_{ci}^{(r)}(t), \quad y_d^{(r)}(t) \neq x_{di}^{(r)}(t).$$

В этом случае

$$T^r_{ci}(t) = 0, \quad T^r_{di}(t) > 0.$$

Учитывая непрерывность, получаем, что существует $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что

$$T^r_{di}(\tau) > T^r_{ci}(\tau), \quad \frac{\rho_c}{8} \geqslant 2\frac{(m-r)!}{(n_i-r)!}(T^r_{ci}(\tau))^{n_i-m}, \quad \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Из (11.6) следует, что $K^r_{ci}(\tau) = 1$, $\tau \in [t-\varepsilon, t)$, если

$$\sum_{k=0}^{m-r-1} \frac{y_c^{(r+k)}(\tau)(T^r_{ci}(\tau))^k}{k!} + \left(v_c(\tau) + \frac{\rho_c}{8}\right)\frac{(T^r_{ci}(\tau))^{m-r}}{(m-r)!} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(\tau)(T^r_{ci}(\tau))^k}{k!} + \frac{(T^r_{ci}(\tau))^{n_i-r}}{(n_i-r)!},$$

что эквивалентно неравенству

$$\left[\left(\sum_{k=0}^{m-r-1} \frac{y_c^{(r+k)}(\tau)(T^r_{ci}(\tau))^k}{k!} + v_c(\tau)\frac{(T^r_{ci}(\tau))^{m-r}}{(m-r)!}\right) -\right.$$

$$\left. -\left(\sum_{k=0}^{n_i-r-1} \frac{x_{ci}^{(r+k)}(\tau)(T^r_{ci}(\tau))^k}{k!} - \frac{(T^r_{ci}(\tau))^{n_i-r}}{(n_i-r)!}\right)\right] +$$

$$+\left[\left(\frac{\rho_c}{8} - 2\frac{(m-r)!}{(n_i-r)!}(T^r_{ci}(\tau))^{n_i-m}\right)\frac{(T^r_{ci}(\tau))^{m-r}}{(m-r)!}\right] \geqslant 0,$$

которое выполнено, так как первое слагаемое равно 0 по определению функции $T^r_{ci}(\tau)$, а второе неотрицательно по выбору ε.

Второй случай рассматривается аналогично. Утверждение 1 доказано.

2. Имеем

$$T^r_{1i}(\tau) > 0,\ T^r_{2i}(\tau) > 0,\ \tau \in [t-\sigma, t), \quad T^r_{1i}(t) = T^r_{2i}(t) = 0.$$

Учитывая непрерывность, получаем, что существует $\varepsilon \in (0, \sigma]$ такое, что для всех $\tau \in [t-\varepsilon, t)$

$$\left(\frac{\rho_c}{16}\frac{(n_i - r)!}{(m-r)!}\right)^{\dfrac{1}{n_i - m}} \geqslant T^r_{2i}(\tau) \geqslant T^r_{1i}(\tau) > 0 \text{ или}$$

$$\left(\frac{\rho_c}{16}\frac{(n_i - r)!}{(m-r)!}\right)^{\dfrac{1}{n_i - m}} \geqslant T^r_{1i}(\tau) \geqslant T^r_{2i}(\tau) > 0.$$

Аналогично утверждению 1 для таких ε доказывается, что

$$K^r_{1i}(\tau) \neq 0 \text{ или } K^r_{2i}(\tau) \neq 0, \quad \tau \in [t-\varepsilon, t).$$

Утверждение 2 доказано.

Лемма 11.3 доказана. $\square$

Для всех $t \in [t_0, \infty)$ и $r \in I^0(m-1)$ определим функции

$$J^r_{ci}(t) = \min\Big\{T^p_{d\alpha}(t),\ (d, \alpha, p) \in \{1,2\} \times I(n) \times I^0(m-1) \text{ и } (d,\alpha,p) \neq (c,i,r)\Big\}.$$

Иначе говоря, $J^r_{ci}(t) \geqslant 0$ при каждом $t \in [t_0, \infty)$ есть минимальное из всех определенных выше значений $T^p_{d\alpha}(t)$, $(d,\alpha,p) \in \{1,2\} \times I(n) \times I^0(m-1)$, за исключением только одного $T^r_{ci}(t)$, то есть минимум выбирается из $2nm-1$ чисел.

Для всех $t \in [t_0, \infty)$ и $r \in I^0(m-1)$ определим функции

$$B^r_{1i}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } K^r_{1i}(t) \neq 0,\ J^r_{1i}(t) \geqslant T^r_{1i}(t), \\ & B^p_{1\alpha}(t) = B^p_{2\alpha}(t) = 0 \\ & \text{для всех } \alpha \in I(n) \text{ и } p = r+1, r+2, \ldots, m-1, \\ & B^r_{11}(t) = B^r_{12}(t) = \cdots = B^r_{1i-1}(t) = 0, \\ 0 & \text{— в остальных случаях,} \end{cases} \tag{11.7}$$

$$B^r_{2i}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } K^r_{2i}(t) \neq 0,\ J^r_{2i}(t) \geqslant T^r_{2i}(t), \\ & B^p_{1\alpha}(t) = B^p_{2\alpha}(t) = B^r_{1\alpha}(t) = 0 \\ & \text{для всех } \alpha \in I(n) \text{ и } p = r+1, r+2, \ldots, m-1, \\ & B^r_{21}(t) = B^r_{22}(t) = \cdots = B^r_{2i-1}(t) = 0, \\ 0 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases} \tag{11.8}$$

Из (11.7), (11.8) следует, что в каждый момент $t \in [t_0, \infty)$ из $2nm$ функций B^r_{ci} не более чем одна обращается в 1. Вычисление функций B^r_{ci} можно проводить в следующем порядке:

$$\begin{array}{llllllll}
B^{m-1}_{11}, & B^{m-1}_{12}, & \ldots, & B^{m-1}_{1n}, & B^{m-1}_{21}, & B^{m-1}_{22}, & \ldots, & B^{m-1}_{2n}, \\
B^{m-2}_{11}, & B^{m-2}_{12}, & \ldots, & B^{m-2}_{1n}, & B^{m-2}_{21}, & B^{m-2}_{22}, & \ldots, & B^{m-2}_{2n}, \quad \ldots, \\
B^{0}_{11}, & B^{0}_{12}, & \ldots, & B^{0}_{1n}, & B^{0}_{21}, & B^{0}_{22}, & \ldots, & B^{0}_{2n}.
\end{array}$$

Так дойдем до функции, равной 1 или до B^0_{2n}. Если использовать эту схему, то из (11.7), (11.8) следует, что для каждой функций B^r_{ci} достаточно проверять условия $K^r_{ci}(t) \neq 0,\ J^r_{ci}(t) \geqslant T^r_{ci}(t)$ (если они выполняются, то $B^r_{ci}(t) = 1$, иначе $B^r_{ci}(t) = 0$).

Определяем управление $v(t)$ убегающего E следующим образом:

$$v_c(t) = \begin{cases} \omega_c(\tau^c_{2b}), & t \in [\tau^c_{2b}, \tau^c_{2b+1}), \text{ где} \\ & \tau^c_{2b+1} \geqslant \tau^c_{2b} \text{ — момент, когда впервые} \\ & \text{найдутся } \alpha \in I(n),\ r \in I^0(m-1): \\ & \ B^r_{c\alpha}(\tau^c_{2b+1}) = 1 \text{ и } v_d(\tau^c_{2b+1}) \in \Omega^*_d, \\ \omega_c(\tau^c_{2b+1}) + & \\ +K^r_{c\alpha}(\tau^c_{2b+1})\dfrac{\rho_c}{4}, & t \in [\tau^c_{2b+1}, \tau^c_{2b+2}), \text{ где} \\ & \tau^c_{2b+2} > \tau^c_{2b+1} \text{ — момент, когда впервые} \\ & \text{найдется } \beta \in I(n): \\ & y^{(r)}_c(\tau^c_{2b+2}) = x^{(r)}_{c\beta}(\tau^c_{2b+2}). \end{cases} \tag{11.9}$$

Здесь $\tau^c_0 = t_0,\ d \in \{1,2\}\backslash\{c\},\ b = 0, 1, 2, \ldots$; для определенности: если найдется несколько значений $\alpha \in I(n)$, удовлетворяющих указанному свойству, то возьмем минимальное из них.

Для доказательства нижеследующих утверждений определим числовую последовательность t^c_b следующим образом: $t^c_0 = t_0$; если $\tau^c_{2a+1} > t^c_{b-1}$ — момент, когда впервые в (11.9) $r = m-1$, тогда $t^c_b = \tau^c_{2a+2}$ $(b = 1, 2, \ldots)$.

Далее считаем, что управление $v(t)$ и последовательности $\{\tau^c_b\}^{b_c}_{b=0}$ определены согласно (11.9), при этом либо $b_c < \infty$, либо $b_c = \infty$, а последовательности $\{t^c_b\}^{b^*_c}_{b=0} \subset \{\tau^c_b\}^{b_c}_{b=0}$ определены как описано выше, при этом либо $b^*_c < \infty$, либо $b^*_c = \infty$.

Обозначим через $\div$ операцию деления нацело.

Лемма 11.4. *Пусть выполнены предположения* 11.1, 11.2. *Тогда для любых допустимых управлений* $u_i(t)$ *преследователей* P_i *выполнены следующие утверждения*:

1) *если* $b_1 \geqslant 2$ *и* $b_2 \geqslant 2$, *то*

$$\{\tau^1_{2b}\}^{b_1 \div 2}_{b=1} \bigcap \{\tau^2_{2b}\}^{b_2 \div 2}_{b=1} = \varnothing;$$

2) *если* $b_c \geqslant 2$, *то*

$$y^{(r)}_c(t) \neq x^{(r)}_{ci}(t) \text{ для всех } r \in I^0(m-1) \text{ и } t \in \bigcup_{b=0}^{b_c \div 2 - 1} (\tau^c_{2b}, \tau^c_{2b+2});$$

3) $v_c(\tau) \in \left[\delta_c - \dfrac{\rho_c}{4}, \delta_c + 2\rho_c n + \dfrac{\rho_c}{4}\right]$ *для всех* $\tau \in \{\tau^c_b\}^{b_c}_{b=0}$;

4) *если* $b_c = \infty$, *то и* $b^*_c = \infty$;

5) $v_c(t^c_b) - \dfrac{\rho_c}{4} \leqslant v_c(t) \leqslant v_c(t^c_b) + \dfrac{\rho_c}{4}$ *для всех* $t \in [t^c_b, t^c_{b+1})$.

Доказательство. 1. Из формулы (11.9) следует, что $\tau^1_{2p+1} \neq \tau^2_{2q+1}$ для всех $p, q \geqslant 0$, при которых $\tau^1_{2p+1}, \tau^2_{2q+1}$ определены, поскольку выше было отмечено, что при каждом $t \geqslant t_0$ из $2nm$ функций B^r_{ci} не более чем одна обращается в 1.

Пусть наступил момент τ^1_{2p+1}, тогда из (11.9), (11.7), (11.6), (11.4) получим, что

$$v_1(t) = v_1(\tau^1_{2p+1}) + K^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1})\frac{\rho_1}{4} \notin \Omega^1_*, \quad t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}).$$

Отсюда и из сказанного выше следует, что

$$\tau^2_{2q+1} \notin [\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}), \quad v_2(t) = v_2(\tau^1_{2p+1}), \quad t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}).$$

Объединяем

$$\left\{\begin{aligned} & v_1(t) = v_1(\tau^1_{2p+1}) + K^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1})\frac{\rho_1}{4}, \\ & v_2(t) = v_2(\tau^1_{2p+1}), \end{aligned}\right. \quad t \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+2}),$$

и получаем систему

$$\left\{\begin{aligned} & \tau^1_{2p+2} \in (\tau^1_{2p+1}, \tau^1_{2p+1} + T^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1})), \\ & J^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1}) \geqslant T^r_{1\alpha}(\tau^1_{2p+1}), \end{aligned}\right.$$

из которой следует, что

$$y_2^{(r)}(t) \neq x_{2i}^{(r)}(t) \text{ для всех } r \in I^0(m-1),\ t \in [\tau_{2p+1}^1, \tau_{2p+2}^1] \text{ и } \tau_{2q}^2 \notin [\tau_{2p+1}^1, \tau_{2p+2}^1].$$

Пусть наступил момент времени τ_{2q+1}^2; аналогично получим, что

$$y_1^{(r)}(t) \neq x_{1i}^{(r)}(t) \text{ для всех } r \in I^0(m-1),\ t \in [\tau_{2q+1}^2, \tau_{2q+2}^2] \text{ и } \tau_{2p}^1 \notin [\tau_{2q+1}^2, \tau_{2q+2}^2].$$

Утверждение 1 доказано.

2. Докажем, что для всех $r \in I^0(m-1)$ и любого $p \in \{0, 1, \ldots, b_1 \div 2 - 1\}$

$$y_1^{(r)}(t) \neq x_{1i}^{(r)}(t) \text{ для всех } t \in (\tau_{2p}^1, \tau_{2p+2}^1).$$

Из леммы 11.3 следует, что

$$y_1^{(r)}(t) \neq x_{1i}^{(r)}(t),\ t \in (\tau_{2p}^1, \min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2q+1}^2\}).$$

Если $\min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2q+1}^2\} = \tau_{2p+1}^1$, тогда утверждение доказано.

Пусть $\min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2q+1}^2\} = \tau_{2q+1}^2$. В доказательстве утверждения 1 данной леммы показано, что в этом случае

$$y_1^{(r)}(t) \neq x_{1i}^{(r)}(t), \quad t \in [\tau_{2q+1}^2, \tau_{2(q+1)}^2].$$

Теперь, снова применяя лемму 11.3, получаем, что

$$y_1^{(r)}(t) \neq x_{1i}^{(r)}(t), \quad t \in (\tau_{2(q+1)}^2, \min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2(q+1)+1}^2\}).$$

Продолжая далее, получим, что для некоторого l значение

$$\min\{\tau_{2p+1}^1, \tau_{2(q+l)+1}^2\} = \tau_{2p+1}^1.$$

Аналогично доказывается, что

$$y_2^{(r)}(t) \neq x_{2i}^{(r)}(t) \text{ для всех } t \in (\tau_{2q}^2, \tau_{2q+2}^2).$$

Утверждение 2 доказано.

3. Из (11.4) и (11.9) получим, что $v_c(\tau_{2b}^c) \in \Omega_c^* \subset [\delta_c, \delta_c + 2\rho_c n]$ и

$$v_c(\tau_{2b+1}^c) = v_c(\tau_{2b}^c) \pm \rho_c/4 \in [\delta_c - \rho_c/4, \delta_c + 2\rho_c n + \rho_c/4].$$

Утверждение 3 доказано.

4. Если $m=1$, то $\{t_b^c\}_{b=0}^{b_c^*} = \{\tau_{2b}^c\}_{b=0}^{\infty}$, откуда $b_c^* = \infty$.

Пусть $m = 2$. Предположим, что утверждение не выполнено, то есть $b_c = \infty$ и $b_c^* < \infty$. Следовательно, найдется номер p такой, что при любом $b \geqslant p$ для всех i выполнено равенство $B_{ci}^1(\tau_{2b+1}^c) = 0$ и для некоторого $\alpha \in I(n)$ имеет место равенство $B_{c\alpha}^0(\tau_{2b+1}^c) = 0$. Из утверждения 2 этой леммы следует, без потери общности, что найдется $a \in I^0(n)$ такое, что для всех $t \geqslant \tau_{2(p+1)}^c$ выполнены неравенства

$$\dot{x}_{c1}(t),\ \dot{x}_{c2}(t), \ldots, \dot{x}_{ca}(t) < \dot{y}_c(t) < \dot{x}_{ca+1}(t), \dot{x}_{ca+2}(t), \ldots, \dot{x}_{cn}(t).$$

Из последнего следует существование номера q такого, что для всех $t \geqslant \tau_{2(p+q)}^c$ имеют место неравенства

$$x_{c1}(t),\ x_{c2}(t), \ldots, x_{ck}(t) < y_c(t) < x_{ca+1}(t), x_{ca+2}(t), \ldots, x_{cn}(t).$$

Объединяя два неравенства для $t \geqslant \tau_{2(p+q)}^c$, получим, что $b_c < \infty$. Получили противоречие.

Случай $m \geqslant 3$ рассматривается аналогично. Утверждение 4 доказано.

5. Пусть $t_b^c = \tau_{2p}^c \leqslant \tau_{2p+1}^c < \tau_{2(p+1)}^c \leqslant \tau_{2(p+1)+1}^c < \cdots < \tau_{2(p+q)}^c = t_{b+1}^c$, тогда, применяя утверждение 2 этой леммы и (11.9), получим, что

$$v_c(t_b^c) = v_c(\tau_{2p}^c), \quad v_c(\tau_{2p+1}^c) = v_c(t_b^c) \pm \rho_c/4, \quad v_c(\tau_{2(p+1)}^c) = v_c(t_b^c), \quad \ldots,$$

$$v_c(\tau_{2(p+q-1)}^c) = v_c(t_b^c), \quad v_c(\tau_{2(p+q-1)+1}^c) = v_c(t_b^c) \pm \rho_c/4.$$

Из последнего следует справедливость утверждения 5.

Лемма 11.4 доказана. $\square$

Докажем, что формула (11.9) определяет $v(t)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$. Для этого достаточно показать, что имеет место следующая

Лемма 11.5. *Пусть выполнены предположения* 11.1, 11.2. *Тогда для любого набора допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i либо значение b_c конечно, либо $\lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^c = \infty$.*

Доказательство. Рассмотрим случай $c = 1$. Для каждого набора допустимых управлений $u_i(t)$ возможен один из следующих двух случаев.

I. Алгоритм (11.9) применяется конечное число раз, поэтому значение b_1 конечно.

II. Алгоритм (11.9) применяется бесконечное число раз. Требуется доказать, что полученная по этой формуле последовательность $\{\tau_b^1\}_{b=0}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^1 = \infty$. Предположим противное, то есть существует набор допустимых управлений $u_i^*(t)$ такой, что

$$\lim_{b\to\infty} \tau_b^1 = \tau^* < \infty.$$

II.1. Рассмотрим числа $x_{1i}^{(m-1)}(\tau^*)$. Пусть они принимают $r \in I(n)$ различных значений

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_r.$$

Не теряя общности, считаем, что

$$x_{1s}^{(m-1)}(\tau^*) = \xi_a,\ s \in S_a = \{s_{a-1}+1, s_{a-1}+2, \dots, s_a\},$$

$$a = 1, 2, \dots, r\ (s_0 = 0, s_r = n).$$

Для каждого $\varepsilon \in [0, \tau^*]$ определим множества

$$H_a(\varepsilon) = \bigcup_{s\in S_a} \Big\{ z \in \mathbb{R}^1 : z = x_{1s}^{(m-1)}(t),\ t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*] \Big\},\ a = 1, 2, \dots, r.$$

Пусть $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^1$, обозначим

$$\operatorname{dist}(G_1, G_2) = \inf_{g_1\in G_1,\ g_2\in G_2} |g_1 - g_2|,$$

$$h(\varepsilon) = \min\Big\{ \operatorname{dist}\big(H_a(\varepsilon), H_{a+1}(\varepsilon)\big),\ a = 1, 2, \dots, r-1 \Big\},$$

$$H(\varepsilon) = h(\varepsilon) - 2(\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4)\varepsilon,\ \varepsilon \in [0, \tau^*].$$

В силу непрерывности функции H и условия $h(0) > 0$ получаем, что существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $H(\varepsilon) > 0$ для всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_1]$. Отсюда

$$\frac{h(\varepsilon)}{\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4} > 2\varepsilon \text{ для всех } \varepsilon \in [0, \varepsilon_1]. \tag{11.10}$$

II.2. Если $|S_a| = 1$, тогда полагаем $\varepsilon_2^a = \infty$.

Пусть $|S_a| \geqslant 2$ и $\alpha, \beta \in S_a$. Рассмотрим значения

$$x_{1\alpha}^{(m-1)}, x_{1\beta}^{(m-1)}, x_{1\alpha}^{(m)}, x_{1\beta}^{(m)}.$$

Отметим, что
$$x_{1\alpha}^{(m-1)}(\tau^*) = x_{1\beta}^{(m-1)}(\tau^*) = \xi_a. \tag{11.11}$$

Разберем всевозможные случаи их взаимного расположения:

1) $x_{1\alpha}^{(m)}(\tau^*) > x_{1\beta}^{(m)}(\tau^*)$; в силу непрерывности этих функций существует такое $\varepsilon > 0$, что
$$x_{1\alpha}^{(m)}(t) > x_{1\beta}^{(m)}(t), \quad t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*];$$
кроме того, из (11.11) следует
$$x_{1\alpha}^{(m-1)}(t) < x_{1\beta}^{(m-1)}(t), \quad t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*);$$

2) $x_{1\alpha}^{(m)}(\tau^*) < x_{1\beta}^{(m)}(\tau^*)$; аналогично случаю 1 существует такое $\varepsilon > 0$, что
$$x_{1\alpha}^{(m)}(t) < x_{1\beta}^{(m)}(t), \quad x_{1\alpha}^{(m-1)}(t) > x_{1\beta}^{(m-1)}(t), \quad t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*);$$

3) $x_{1\alpha}^{(m)}(\tau^*) = x_{1\beta}^{(m)}(\tau^*)$; этот случай имеет несколько вариантов; существует такое $\varepsilon > 0$, что:

3.1) $x_{1\alpha}^{(m)}(t) = x_{1\beta}^{(m)}(t)$, $t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*]$, тогда и
$$x_{1\alpha}^{(m-1)}(t) = x_{1\beta}^{(m-1)}(t), \quad t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*];$$

3.2) $x_{1\alpha}^{(m)}(t) > x_{1\beta}^{(m)}(t)$, $t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*)$, тогда, подобно случаю 1,
$$x_{1\alpha}^{(m-1)}(t) < x_{1\beta}^{(m-1)}(t), \quad t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*);$$

3.3) $x_{1\alpha}^{(m)}(t) < x_{1\beta}^{(m)}(t)$, $t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*)$, тогда, подобно случаю 2,
$$x_{1\alpha}^{(m-1)}(t) > x_{1\beta}^{(m-1)}(t), \quad t \in [\tau^* - \varepsilon, \tau^*).$$

Теперь, перебирая все значения $x_{1s}^{(m-1)}$, $x_{1s}^{(m)}$, $s \in S_a$ попарно, как $x_{1\alpha}^{(m-1)}$, $x_{1\beta}^{(m-1)}$, $x_{1\alpha}^{(m)}$, $x_{1\beta}^{(m)}$, получим, что существует $\varepsilon_2^a > 0$ такое, что расположение $x_{1s}^{(m-1)}, x_{1s}^{(m)}$, $s \in S_a$ друг относительно друга не изменяется на $[\tau^* - \varepsilon_2^a, \tau^*)$. Последнее, без потери общности, означает, что
$$\begin{array}{c} x_{1s_{a-1}+1}^{(m-1)}(t) \leqq x_{1s_{a-1}+2}^{(m-1)}(t) \leqq \cdots \leqq x_{1s_a}^{(m-1)}(t), \\ x_{1s_{a-1}+1}^{(m)}(t) \geqq x_{1s_{a-1}+2}^{(m)}(t) \geqq \cdots \geqq x_{1s_a}^{(m)}(t), \end{array} \quad t \in [\tau^* - \varepsilon_2^a, \tau^*). \tag{11.12}$$
В (11.12) «$\leqq$» и «$\geqq$» означают, что на всем промежутке $[\tau^* - \varepsilon_2^a, \tau^*)$, в первой строке формулы, знак либо «$<$», либо «$=$», а во второй строке знак «$>$» соответствует знаку «$<$» первой строки, знак «$=$» соответствует знаку «$=$».

Выбираем $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_2^1, \varepsilon_2^2, \dots, \varepsilon_2^r\} > 0$.

II.3. Из непрерывности $x_{1i}^{(m)}(t)$ следует существование $\varepsilon_3^i > 0$ такого, что

$$\left| x_{1i}^{(m)}(\tau^* - \varepsilon') - x_{1i}^{(m)}(\tau^* - \varepsilon'') \right| < \rho_1/4 \quad \text{для всех } \ \varepsilon', \varepsilon'' \in [0, \varepsilon_3^i). \qquad (11.13)$$

Возьмем $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_3^1, \varepsilon_3^2, \dots, \varepsilon_3^n\} > 0$.

II.4. Определим

$$\varepsilon^* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} > 0. \qquad (11.14)$$

Из предположения, что $\lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^1 = \tau^*$, следует, что вплоть до момента $\tau^* - \varepsilon^* < \tau^*$ управление $v_1(t)$ определено и существует номер p такой, что $t_p^1, t_{p+1}^1, t_{p+2}^1, \dots \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$, где согласно лемме 11.4 имеет место включение $\{t_b^1\}_{b=0}^\infty \subset \{\tau_b^1\}_{b=0}^\infty$.

Рассмотрим игру Γ начиная с момента $\tau^* - \varepsilon^*$ и докажем, что найдется номер q такой, что $t_{(p+q)}^1 > \tau^*$. Тем самым получим противоречие с предположением о конечном значении $\lim\limits_{b\to\infty} \tau_b^1$. Таким образом, лемма будет доказана полностью.

Итак, момент $t_p^1 \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$. Необходимо включение $y_1^{(m-1)}(t_p^1) \in H_a(\varepsilon^*)$ при некотором значении $a \in \{1, 2, \dots, r\}$. Напомним, что

$$x_{1s}^{(m-1)}(t) \in H_a(\varepsilon^*), \quad t \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*], \quad s \in S_a.$$

Существует хотя бы одно $\alpha \in S_a$ такое, что $y_1^{(m-1)}(t_p^1) = x_{1\alpha}^{(m-1)}(t_p^1)$.

Из (11.3) следует, что возможны два случая.

1. $v_1(t_p^1) \geqslant x_{1\alpha}^{(m)}(t_p^1) + \rho_1$ (α — это один или несколько последовательных индексов из S_a). Из леммы 11.4 следует, что

$$v_1(t_p^1) - \rho_1/4 \leqslant v_1(t) \leqslant v_1(t_p^1) + \rho_1/4, \ t \in [t_p^1, t_{p+1}^1).$$

Отсюда, учитывая (11.13), (11.14), получаем

$$v_1(t) > x_{1\alpha}^{(m)}(t) + \rho_1/2 \text{ для всех } t \in [t_p^1, t_{p+1}^1). \qquad (11.15)$$

В силу (11.12) в момент t_{p+1}^1 должно выполниться одно из двух условий:

а) $y_1^{(m-1)}(t_{p+1}^1) = x_{1\alpha}^{(m-1)}(t_{p+1}^1)$; этот случай невозможен в силу (11.15);

б) $y_1^{(m-1)}(t_{p+1}^1) = x_{1\beta}^{(m-1)}(t_{p+1}^1)$, $\beta > \alpha$ (β — один или несколько последовательных индексов из S_a). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \left| x_{1\beta}^{(m)}(t_{p+1}^1) - x_{1\beta}^{(m)}(t) \right| < \rho_1/4, \\ v_1(t) - \rho_1/2 > x_{1\alpha}^{(m)}(t) > x_{1\beta}^{(m)}(t), \end{cases} \quad t \in [t_p, t_{p+1}), \tag{11.16}$$

в которой справедливость первого неравенства следует из (11.13) и (11.14), а второй цепочки неравенств — из (11.15) и (11.12). Из (11.16) получим, что

$$v_1(t) > x_{1\beta}^{(m)}(t_{p+1}^1) + \rho_1/4, \quad t \in [t_p, t_{p+1}).$$

Поэтому $v_1(t_{p+1}^1)$ по (11.9) будет определено так, что

$$v_1(t_{p+1}^1) \geqslant x_{1\beta}^{(m)}(t_{p+1}^1) + \rho_1.$$

Продолжая далее, получим, что существует момент t_{p+l}^1 такой, что

$$y_1^{(m-1)}(t_{p+l}^1) = x_{1s_a}^{(m-1)}(t_{p+l}^1), \quad v_1(t_{p+l}^1) \geqslant x_{1s_a}^{(m)}(t_{p+l}^1) + \rho_1. \tag{11.17}$$

Из (11.17) получаем, что

$$x_{1s}^{(m-1)}(t) < y_1^{(m-1)}(t), \quad t \in (t_{p+l}^1, \tau^*], \quad s \in S_a.$$

Значит, чтобы $t_{p+l+1}^1 \in [\tau^* - \varepsilon^*, \tau^*)$, необходимо выполнение равенства

$$y_1^{(m-1)}(t_{p+l+1}^1) = x_{1\eta}^{(m-1)}(t_{p+l+1}^1), \ \ \eta \in I \backslash S_a,$$

а это означает, что $y_1^{(m-1)}$ из множества $H_a(\varepsilon^*)$ должен попасть в множество $H_{a+1}(\varepsilon^*)$. Из (11.10) следует, что на это потребуется времени, даже при максимальном v_1, которое по лемме 11.4 равно $\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4$, больше чем $2\varepsilon^*$, откуда $t_{p+l+1}^1 - t_{p+l}^1 > 2\varepsilon^*$. Итак, существует номер $q = l+1 : t_{p+q}^1 > \tau^*$.

2. $v_1(t_p^1) \leqslant x_{1\alpha}^{(m)}(t_p^1) - \rho_1$ (α — это один или несколько последовательных индексов из S_a).

Аналогично доказывается существование $q : t_{p+q}^1 > \tau^*$.

Случай $c = 2$ рассматривается аналогично.

Лемма 11.5 доказана. $\square$

Из лемм 11.4 и 11.5 следует, что определенные по формуле (11.9) функции v_c таковы, что

$$v_c(t) \in \left[\delta_c - \frac{\rho_c}{4}, \delta_c + 2\rho_c n + \frac{\rho_c}{4}\right] \text{ для всех } t \in [t_0, \infty). \tag{11.18}$$

Таким образом, полностью определена стратегия убегающего E: в каждый момент времени $t \in [t_0, \infty)$ по алгоритму (11.9) определяет компоненты $v_1(t)$ и $v_2(t)$, тем самым полностью задает свое управление $v(t)$.

Теорема 11.1. *Пусть выполнены предположения* 11.1, 11.2. *Тогда в игре* Γ *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

Доказательство. Докажем, что стратегия убегающего, определяемая (11.9), является стратегией мягкого убегания.

1. Управление $v(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, принадлежит классу кусочно-постоянных функций и меняет значение в моменты $\tau \in \{\tau_b^1\}_{b=0}^{b_1} \bigcup \{\tau_b^2\}_{b=0}^{b_2}$. В силу (11.18), (11.2) выполнено

$$|v(t)| \leqslant \sqrt{(\delta_1 + 2\rho_1 n + \rho_1/4)^2 + (\delta_2 + 2\rho_2 n + \rho_2/4)^2} \leqslant \gamma,$$

то есть

$$v(t) \in S(0, \gamma).$$

2. Выполнение условия $x_i^{(r)}(t) \neq y^{(r)}(t)$ для всех $r \in I^0(m-1)$ и $t \geqslant t_0$ следует из лемм 11.4 и 11.5.

Теорема 11.1 доказана. $\square$

3. Примеры

Пример 11.1. В $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассмотрим игру $\Gamma_{11.1}$ 101 лица: 100 преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ и убегающего E вида (11.1)

$$\begin{aligned}
P_i \ &: \ x_i^{(8)} = u_i, \ |u_i| \leqslant 10, \\
&\quad x_i(t_0) = X_i^0, \ \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \ldots, \ x_i^{(7)}(t_0) = X_i^7, \ i \in I(50), \\
P_i \ &: \ x_i^{(6)} = u_i, \ |u_i| \leqslant 10, \\
&\quad x_i(t_0) = X_i^0, \ \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \ldots, \ x_i^{(5)}(t_0) = X_i^5, \ i \in I^*(51, 100), \\
E \ &: \ y^{(5)} = v, \ |v| \leqslant 1, \\
&\quad y(t_0) = Y^0, \ \dot{y}(t_0) = Y^1, \ldots, \ y^{(4)}(t_0) = Y^4,
\end{aligned}$$

причем $Y^0 \neq X_i^0, Y^1 \neq X_i^1, Y^2 \neq X_i^2, Y^3 \neq X_i^3, Y^4 \neq X_i^4$ для всех $i \in I(100)$.

Предположения 11.1, 11.2 выполнены. Из теоремы 11.1 следует

У т в е р ж д е н и е 11.1. *В игре* $\Gamma_{11.1}$ *возможно мягкое убегание* (*то есть* $y(t) \neq x_i(t)$, $\dot{y}(t) \neq \dot{x}_i(t)$, $\ddot{y}(t) \neq \ddot{x}_i(t)$, $y^{(3)}(t) \neq x_i^{(3)}(t)$, $y^{(4)}(t) \neq x_i^{(4)}(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$, $i \in I(100)$).

Через $\widehat{\cos}(a)$ для всех $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k$ обозначим функцию

$$\widehat{\cos}(a) = (\cos(a_1), \cos(a_2), \ldots, \cos(a_k))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k.$$

П р и м е р 11.2. В $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассмотрим игру $\Gamma_{11.2}$ 51 лица: 50 преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{50}$ и убегающего E вида (11.1)

$$P_i\colon \quad x_i^{(3)} = 10\,(\widehat{\cos}(x_i) + \widehat{\cos}(\dot{x}_i) + \widehat{\cos}(\ddot{x}_i))\sin(u_i), \quad u_i \in \mathbb{R}^1,$$
$$x_i(t_0) = X_i^0, \quad \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \quad \ddot{x}_i(t_0) = X_i^2, \quad i \in I(50),$$
$$E\colon \quad \ddot{y} = v, \quad |v| \leqslant 1, \quad y(t_0) = Y^0, \quad \dot{y}(t_0) = Y^1,$$
$$\text{причем } Y^0 \neq X_i^0,\ Y^1 \neq X_i^1 \text{ для всех } i \in I(50).$$

Предположения 11.1, 11.2 выполнены. Из теоремы 11.1 следует

У т в е р ж д е н и е 11.2. *В игре* $\Gamma_{11.2}$ *возможно мягкое убегание* (*то есть* $y(t) \neq x_i(t)$, $\dot{y}(t) \neq \dot{x}_i(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$, $i \in I(50)$).

§ 12. Мягкое убегание всех жестко скоординированных убегающих от группы преследователей

1. Постановка задачи

В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i \ &: \ x_i^{(n_i)} = f_i\left(x_i, \dot{x}_i, \ldots, x_i^{(n_i-1)}, u_i, t\right), \quad && u_i \in U_i, \\ & \ \ x_i^{(\alpha_i)}(t_0) = X_i^{\alpha_i}, \ \alpha_i \in I^0(n_i - 1), && i \in I(n), \\ E_j \ &: \ y_j^{(m_j)} = v, && v \in S(0, \gamma), \\ & \ \ y_j^{(\beta_j)}(t_0) = Y_j^{\beta_j}, \ \beta_j \in I^0(m_j - 1), && j \in I(m), \end{aligned} \tag{12.1}$$

причем $n_i > m_j \geqslant 1$ при всех $i \in I(n)$, $j \in I(m)$ и $X_i^{\beta_j} \neq Y_j^{\beta_j}$ для всех $\beta_j \in I^0(m_j - 1)$, $i \in I(n)$, $j \in I(m)$. Здесь x_i, $y_j \in \mathbb{R}^k$, $U_i \subset \mathbb{R}^{k_i}$, $U_i \neq \varnothing$, $k_i \geqslant 1$, $f_i : \underbrace{\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}} \times U_i \times [t_0, \infty) \to \mathbb{R}^k$, $\gamma > 0$.

Все участники знают правила игры, включая сведения о системе (12.1).

Определение 12.1. Управления $u_i(\cdot)$ и $v(\cdot)$ из класса измеримых по Лебегу функций на $[t_0, \infty)$, удовлетворяющие указанным в (12.1) ограничениям будем называть допустимыми.

Будем считать, что выполнено

Предположение 12.1. Каждая функция f_i удовлетворяет условиям существования, единственности и продолжимости решения на любой отрезок при всех допустимых управлениях $u_i(\cdot)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$.

Определение 12.2. Стратегией $\mathcal{V}$ убегающих E_j, $j \in I(m)$, будем называть отображение, ставящее в соответствие моменту t и реализовавшимся значениям $x_i^{(\alpha_i)}(s)$, $y_j^{(\beta_j)}(s)$, $s \in [t_0, t]$, $\alpha_i \in I^0(n_i - 1)$, $i \in I(n)$, $\beta_j \in I^0(m_j - 1)$, $j \in I(m)$, допустимое управление $v(t)$, которое является кусочно-постоянной функцией на $[t_0, t]$, то есть

$$\begin{gathered} v(t) = v\Big(t, \ x_i^{(\alpha_i)}(s), \ y_j^{(\beta_j)}(s), \ s \in [t_0, t], \\ \alpha_i \in I^0(n_i - 1), \ i \in I(n), \ \beta_j \in I^0(m_j - 1), \ j \in I(m)\Big), \quad t \in [t_0, \infty). \end{gathered}$$

Действия убегающих можно трактовать следующим образом: имеется центр управления, который для всех убегающих $E_j,\ j\in I(m)$, выбирает одно и то же допустимое управление $v(\cdot)$, руководствуясь при этом некоторой целью (общей для группы убегающих).

О п р е д е л е н и е 12.3. В игре Γ возможно мягкое убегание, если существует стратегия $\mathcal{V}$ убегающих $E_j,\ j\in I(m)$, что для любых допустимых управлений $u_i(\cdot)$ преследователей $P_i,\ i\in I(n)$, выполняются неравенства

$$x_i^{(\beta_j)}(t)\neq y_j^{(\beta_j)}(t) \text{ для всех } t\in[t_0,\infty),\ \beta_j\in I^0(m_j-1),\ i\in I(n),\ j\in I(m).$$

2. Решение задачи

Дополнительно потребуем, чтобы имело место

П р е д п о л о ж е н и е 12.2. Существует постоянная $G\geqslant 0$ такая, что каждая функция f_i удовлетворяет неравенству

$$\Big|f_i(a_0,a_1,\ldots,a_{n_i-1},b,t)\Big|\leqslant G$$

$$\text{для всех } (a_0,a_1,\ldots,a_{n_i-1},b,t)\in\underbrace{\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^k\times\cdots\times\mathbb{R}^k}_{n_i \text{ раз}}\times U_i\times[t_0,\infty).$$

На основе стратегии мягкого убегания одного убегающего из любых начальных позиций построим стратегию мягкого убегания для группы жестко скоординированных убегающих из любых начальных позиций.

Т е о р е м а 12.1. *Пусть выполнены предположения* 12.1, 12.2. *Тогда в игре* Γ *возможно мягкое убегание из любых начальных позиций.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$\begin{gathered} l=\max\{m_1,m_2,\ldots,m_m\},\quad l_j=l-m_j,\\ w_j(t)=Y_j^0+Y_j^1(t-t_0)+Y_j^2\frac{(t-t_0)^2}{2}+\cdots+Y_j^{m_j-1}\frac{(t-t_0)^{m_j-1}}{(m_j-1)!}. \end{gathered}\tag{12.2}$$

Отметим, что для всех $\beta_j\in I^0(m_j-1)$

$$\begin{gathered} w_j^{(\beta_j)}(t)=Y_j^{\beta_j}+Y_j^{\beta_j+1}(t-t_0)+Y_j^{\beta_j+2}\frac{(t-t_0)^2}{2}+\cdots+\\ +Y_j^{m_j-1}\frac{(t-t_0)^{m_j-\beta_j-1}}{(m_j-\beta_j-1)!},\quad w_j^{(\beta_j)}(t_0)=Y_j^{\beta_j}, \end{gathered}\tag{12.3}$$

а производные порядка $m_j, m_j+1, m_j+2, \dots$ тождественно равны 0.

В $\mathbb{R}^k$ определим вспомогательную игру Γ^* $(nm+1)$ лиц: nm преследователей P_{ij} и убегающего E с законами движения и начальными условиями

$$
\begin{gathered}
P_{ij}\colon \quad \xi_{ij}^{(l_j+n_i)} = f_i\left(\xi_{ij}^{(l_j+\alpha_i)} + w_j^{(\alpha_i)}, \alpha_i \in I^0(n_i-1), u_i, t\right), \quad u_i \in U_i,\\
\xi_{ij}(t_0) = \Xi_{ij}^0 \neq 0, \dot{\xi}_{ij}(t_0) = \Xi_{ij}^1 \neq 0, \dots, \xi_{ij}^{(l_j-1)}(t_0) = \Xi_{ij}^{l_j-1} \neq 0,\\
\xi_{ij}^{(l_j)}(t_0) = X_i^0 - Y_j^0, \xi_{ij}^{(l_j+1)}(t_0) = X_i^1 - Y_j^1, \dots,\\
\xi_{ij}^{(l_j+m_j-1)}(t_0) = X_i^{m_j-1} - Y_j^{m_j-1},\\
\xi_{ij}^{(l_j+m_j)}(t_0) = X_i^{m_j}, \xi_{ij}^{(l_j+m_j+1)}(t_0) = X_i^{m_j+1}, \dots,\\
\xi_{ij}^{(l_j+n_i-1)}(t_0) = X_i^{n_i-1},\ i \in I(n),\ j \in I(m),\\
E\colon \qquad \eta^{(l)} = \vartheta, \quad \vartheta \in S(0,\gamma),\\
\eta(t_0) = \dot{\eta}(t_0) = \dots = \eta^{(l-1)}(t_0) = 0.
\end{gathered} \tag{12.4}
$$

В игре Γ^* в каждый момент $t \in [t_0, \infty)$ предпишем преследователям P_{ij} использовать одно и то же управление, выбранное преследователем P_i в игре Γ, то есть допустимое управление $u_i(t)$ преследователя P_i в игре Γ, описываемой системой (12.1), и допустимое управление $u_i(t)$ преследователей P_{ij} в игре Γ^*, описываемой системой (12.4), полностью совпадают.

Покажем, что имеют место равенства

$$
x_i^{(\beta_j)}(t) = \xi_{ij}^{(l_j+\beta_j)}(t) + w_j^{(\beta_j)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty) \text{ и } \beta_j \in I^0(m_j-1), \tag{12.5}
$$

где $x_i(t)$ — траектория преследователя P_i, реализовавшаяся в игре Γ под воздействием допустимого управления $u_i(t)$.

Действительно, рассмотрим функцию

$$
x_i(t) = \xi_{ij}^{(l_j)}(t) + w_j(t)
$$

(независимость от j доказана ниже, поэтому в левой части равенства этот индекс не указываем). Тогда, следуя (12.2), (12.3) и (12.4), получим, что

$$
x_i^{(\beta_j)}(t) = \xi_{ij}^{(l_j+\beta_j)}(t) + w_j^{(\beta_j)}(t), \quad \beta_j \in I^0(m_j-1),
$$

откуда

$$
x_i^{(\beta_j)}(t_0) = X_i^{\beta_j} - Y_j^{\beta_j} + Y_j^{\beta_j} = X_i^{\beta_j}, \quad \beta_j \in I^0(m_j-1),
$$

далее,

$$x_i^{(m_j)}(t) = \xi_{ij}^{(l_j+m_j)}(t),\ x_i^{(m_j+1)}(t) = \xi_{ij}^{(l_j+m_j+1)}(t), \ldots,\ x_i^{(n_i-1)}(t) = \xi_{ij}^{(l_j+n_i-1)}(t),$$

значит,

$$x_i^{(m_j)}(t_0) = X_i^{m_j},\ x_i^{(m_j+1)}(t) = X_i^{m_j+1}, \ldots,\ x_i^{(n_i-1)}(t) = X_i^{n_i-1},$$

наконец,

$$x_i^{(n_i)} = \xi_{ij}^{(l_j+n_i)} = f_i\left(\xi_{ij}^{(l_j+\alpha_i)} + w_j^{(\alpha_i)}, \alpha_i \in I^0(n_i-1), u_i, t\right) =$$
$$= f_i\left(x_i^{(\alpha_i)}, \alpha_i \in I^0(n_i-1), u_i, t\right).$$

Проведенные вычисления доказывают, что пара $(x_i(t), u_i(t))$ действительно описывает решение системы (12.1) для преследователя P_i в игре Γ и имеют место равенства (12.5).

Далее, для каждого допустимого управления $\vartheta(t)$ убегающего E в игре Γ^* непосредственным интегрированием системы (12.4) получим

$$\begin{gathered}\eta^{(l_j+\beta_j)}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{m_j-\beta_j-1}}{(m_j-\beta_j-1)!}\vartheta(s)\,ds \\ \text{для всех } t \in [t_0, \infty) \text{ и } \beta_j \in I^0(m_j-1).\end{gathered} \tag{12.6}$$

Пусть $\vartheta(t)$ — допустимое управление, обеспечивающее мягкое убегание в игре Γ^*, выбранное убегающим E, откуда

$$\xi_{ij}^{(l_j+\beta_j)}(t) \neq \eta^{(l_j+\beta_j)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty) \text{ и } \beta_j \in I^0(m_j-1). \tag{12.7}$$

Определяем допустимое управление $v(t)$ убегающих E_j в игре Γ следующим образом:

$$v(t) = \vartheta(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Тогда, интегрируя систему (12.1) с учетом последнего равенства и (12.6), получим

$$y_j^{(\beta_j)}(t) = \eta^{(l_j+\beta_j)}(t) + w_j^{(\beta_j)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty) \text{ и } \beta_j \in I^0(m_j-1). \tag{12.8}$$

Объединяя (12.5), (12.7), (12.8), получим, что в игре Γ

$$x_i^{(\beta_j)}(t) \neq y_j^{(\beta_j)}(t) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty) \text{ и } \beta_j \in I^0(m_j-1),$$

что и означает мягкое убегание всей группы жестко скоординированных убегающих. Из построения управления $v(t)$ и теоремы 11.1 следует справедливость данной теоремы.

Теорема 12.1 доказана. $\square$

Пусть в системе (12.1) ограничение на управление $v(t)$ убегающих E_j имеет вид $v \in V$, где V — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^k$ с непустой внутренностью. Тогда в игре Γ возможно мягкое убегание из любых начальных позиций при выполненных предположениях 12.1, 12.2.

Покажем, как при этом нужно изменить управление $v(t)$ для случая одного убегающего ($m = 1$): если $0 \in \operatorname{Int} V \neq \varnothing$, то найдется такое число $\gamma > 0$, что $S(0, \gamma) \subset V$ и, не увеличивая возможности убегающих, достаточно решить задачу с ограничением из (11.1); если $0 \notin \operatorname{Int} V \neq \varnothing$, то найдутся такие $z \in \mathbb{R}^k$ и $\gamma > 0$, что $S(z, \gamma) \subset V$. Пусть вектор $e = z/|z|$ (ранее выбирался произвольно) и положительные константы $\delta_1, \delta_2, \rho_1, \rho_2$ выбираются из условия (вместо (11.2))

$$\delta_1 - \frac{\rho_1}{4} > 0, \quad \delta_2 - \frac{\rho_2}{4} > 0 \quad \text{и}$$

$$\left[\delta_1 - \frac{\rho_1}{4}, \delta_1 + 2\rho_1 n + \frac{\rho_1}{4}\right] \times \left[\delta_2 - \frac{\rho_2}{4}, \delta_2 + 2\rho_2 n + \frac{\rho_2}{4}\right] \subset S(z, \gamma).$$

Это включение обеспечит выполнение условия $v(t) \in V$ для всех $t \in [t_0, \infty)$ (см. (11.18)), в остальном решение задачи о мягком убегании совпадает с приведенным в теореме 11.1.

3. Примеры

Пример 12.1. В $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассмотрим игру $\Gamma_{12.1}$ 102 лиц: 100 преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ и 2 убегающих E_1, E_2 вида (12.1)

$$\begin{aligned}
P_i \ &: \ x_i^{(8)} = u_i, \ |u_i| \leqslant 10, \\
&\quad x_i(t_0) = X_i^0, \ \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \ldots, \ x_i^{(7)}(t_0) = X_i^7, \ i \in I(50), \\
P_i \ &: \ x_i^{(6)} = u_i, \ |u_i| \leqslant 10, \\
&\quad x_i(t_0) = X_i^0, \ \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \ldots, \ x_i^{(5)}(t_0) = X_i^5, \ i \in I^*(51, 100), \\
E_1 \ &: \ y_1^{(5)} = v, \ |v| \leqslant 1, \\
&\quad y_1(t_0) = Y_1^0, \ \dot{y}_1(t_0) = Y_1^1, \ldots, \ y_1^{(4)}(t_0) = Y_1^4,
\end{aligned}$$

$$E_2 \ : \ \ddot{y}_2 = v, \ |v| \leqslant 1,$$
$$y_2(t_0) = Y_2^0, \ \dot{y}_2(t_0) = Y_2^1,$$

причем $Y_1^0 \neq X_i^0$, $Y_1^1 \neq X_i^1$, $Y_1^2 \neq X_i^2$, $Y_1^3 \neq X_i^3$, $Y_1^4 \neq X_i^4$, $Y_2^0 \neq X_i^0$, $Y_2^1 \neq X_i^1$ для всех $i \in I(100)$.

Предположения 12.1, 12.2 выполнены. Из теоремы 12.1 следует

Утверждение 12.1. *В игре* $\Gamma_{12.1}$ *возможно мягкое убегание* (*то есть* $y_1(t) \neq x_i(t)$, $\dot{y}_1(t) \neq \dot{x}_i(t)$, $\ddot{y}_1(t) \neq \ddot{x}_i(t)$, $y_1^{(3)}(t) \neq x_i^{(3)}(t)$, $y_1^{(4)}(t) \neq x_i^{(4)}(t)$ *и* $y_2(t) \neq x_i(t)$, $\dot{y}_2(t) \neq \dot{x}_i(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$, $i \in I(100)$).

Через $\widehat{\sin}(a)$ для всех $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k$ обозначим функцию

$$\widehat{\sin}(a) = (\sin(a_1), \sin(a_2), \ldots, \sin(a_k))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k.$$

Пример 12.2. В $\mathbb{R}^k$ ($k \geqslant 2$) рассмотрим игру $\Gamma_{12.2}$ 100 лиц: 50 преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_{50}$ и 50 убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_{50}$ вида (12.1)

$$P_i\colon \quad x_i^{(3)} = 10\left(\widehat{\sin}(x_i) + \widehat{\sin}(\dot{x}_i) + \widehat{\sin}(\ddot{x}_i)\right)\cos(u_i), \quad u_i \in \mathbb{R}^1,$$
$$x_i(t_0) = X_i^0, \quad \dot{x}_i(t_0) = X_i^1, \quad \ddot{x}_i(t_0) = X_i^2, \quad i \in I(50),$$
$$E_j\colon \quad \ddot{y}_j = v, \quad |v| \leqslant 1, \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \quad \dot{y}_j(t_0) = Y_j^1, \quad j \in I(50),$$
$$\text{причем } Y_j^0 \neq X_i^0, \ Y_j^1 \neq X_i^1 \text{ для всех } i \in I(50), j \in I(50).$$

Предположения 12.1, 12.2 выполнены. Из теоремы 12.1 следует

Утверждение 12.2. *В игре* $\Gamma_{12.2}$ *возможно мягкое убегание* (*то есть* $y_j(t) \neq x_i(t)$, $\dot{y}_j(t) \neq \dot{x}_i(t)$ *для всех* $t \in [t_0, \infty)$, $i \in I(50)$, $j \in I(50)$).

Г Л А В А 5
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ТИПОВ ЗАДАЧ КОНФЛИКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

§ 13. Схема реализации одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования

Вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования (1.1) разработана на основе результатов § 1.

Шаг 0. Задать входные параметры:

k — размерность пространства, $k \geqslant 2$;

n — количество преследователей, $n \geqslant 1$;

t_0 — начальный момент игры, $t_0 \in \mathbb{R}^1$;

$B(t)$ и $g(t)$ — параметры, задающие множество допустимых управлений игроков $(B^{-1}(t)S(0,1) - g(t))$, $B(t)$ — непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица и $g(t) \in \mathbb{R}^k$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция;

X_i^0 — начальные позиции преследователей, $X_i^0 \in \mathbb{R}^k$, $i \in I(n)$;

Y^0 — начальная позиция убегающего, $Y^0 \in \mathbb{R}^k$;

разбиение промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения, $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < \dots$;

b — кратность поимки, $b \geqslant 1$.

Шаг 1. Вычислить:

$$y(\theta_0) = Y^0;$$

$$\text{для } i \in I(n): \quad x_i(\theta_0) = X_i^0; \quad \xi_i^0 = X_i^0 - Y^0; \quad b_i^* = 0.$$

Шаг 2. Для $q = 0, 1, 2, \dots$ выполнить шаги 2.1–2.8:

Шаг 2.1. Задать управление убегающего на интервале времени $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$v(t), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.2. Определить позиции убегающего на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$y(t) = y(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} v(s)ds, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3. Для $i \in I(n)$ выполнить шаги 2.3.1–2.3.3:

Шаг 2.3.1. Задать функцию на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$\lambda_i(v(t), t) = \frac{1}{|B(t)\xi_i^0|^2}\Big(\big\langle B(t)(v(t) + g(t)), B(t)\xi_i^0 \big\rangle +$$
$$+\sqrt{\langle B(t)(v(t) + g(t)), B(t)\xi_i^0\rangle^2 + |B(t)\xi_i^0|^2(1 - |B(t)(v(t) + g(t))|^2)}\ \Big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3.2. Задать функцию на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$L_i(\theta_q, t) = \int_{\theta_q}^{t} \lambda_i(v(s), s)ds, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3.3. Вычислить:

$$\rho_i(\theta_q) = \frac{|x_i(\theta_q) - y(\theta_q)|}{|\xi_i^0|}.$$

Шаг 2.4. Найти момент или установить, что его нет:

$$\tau = \min\big\{t \in (\theta_q, \theta_{q+1}] : \text{существуют } \Lambda \in \Omega(b) \text{ и } \varepsilon > 0$$
$$\text{такие, что } L_\alpha(\theta_q, t^*) < L_\alpha(\theta_q, t) \text{ и } L_\alpha(\theta_q, t) \geqslant \rho_\alpha(\theta_q)$$
$$\text{для всех } t^* \in [t - \varepsilon, t) \text{ и } \alpha^* \in \Lambda\big\}.$$

Шаг 2.5. Если момент $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ существует, то для $i \in I(n)$ вычислить:

$$h_i(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{\rho_i(\theta_q)}{L_i(\theta_q, \tau)}, & \text{если } L_i(\theta_q, \tau) > \rho_i(\theta_q) \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.6. Если момента $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ не существует, то выполнить шаги 2.6.1–2.6.3:

Шаг 2.6.1. Для $i \in I(n)$ вычислить:

$$T_i(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{\rho_i(\theta_q)(\theta_{q+1} - \theta_q)}{L_i(\theta_q, \theta_{q+1})}, & \text{если } L_i(\theta_q, \theta_{q+1}) > 0 \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.6.2. Вычислить:

$$T(\theta_q) = \min_{\Lambda \in \Omega(b)} \max_{\alpha \in \Lambda} T_\alpha(\theta_q).$$

Шаг 2.6.3. Для $i \in I(n)$ вычислить:

$$h_i(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{T_i(\theta_q)}{T(\theta_q)}, & \text{если } T(\theta_q) > T_i(\theta_q) \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.7. Для $i \in I(n)$ выполнить шаги 2.7.1–2.7.3:

Шаг 2.7.1. Задать управление преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$u_i(t) = v(t) - h_i(\theta_q)\lambda_i(v(t), t)\xi_i^0, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.7.2. Определить позиции преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$x_i(t) = x_i(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} u_i(s)ds, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.7.3. Если $b_i^* = 0$ и $\min\limits_{t \in [\theta_q, \theta_{q+1}]} |x_i(t) - y(t)| = 0$, то $b_i^* = 1$.

Шаг 2.8. Если $b \leqslant b^* = (b_1^* + b_2^* + \cdots + b_n^*)$, то завершить работу (произошла одновременная b^*-кратная поимка), иначе продолжить вычисления.

§ 14. Схема реализации одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе

Вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе (5.1) разработана на основе результатов § 5.

Шаг 0. Задать входные параметры:

k — размерность пространства, $k \geqslant 2$;

n — количество преследователей, $n \geqslant 1$;

t_0 — начальный момент игры, $t_0 \in \mathbb{R}^1$;

$\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$;

$B(t)$ и $g(t)$ — параметры, задающие множество допустимых управлений игроков $(B^{-1}(t)S(0,1) - g(t))$, $B(t)$ — непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица и $g(t) \in \mathbb{R}^k$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция;

X_i^0 — начальные позиции преследователей, $X_i^0 \in \mathbb{R}^k$, $i \in I(n)$;

Y^0 — начальная позиция убегающего, $Y^0 \in \mathbb{R}^k$;

разбиение промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения, $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < \dots$;

b — кратность поимки, $b \geqslant 1$.

Шаг 1. Вычислить:

$$y(\theta_0) = Y^0;$$

$$\text{для } i \in I(n): \quad x_i(\theta_0) = X_i^0; \quad \xi_i^0 = X_i^0 - Y^0; \quad b_i^* = 0.$$

Шаг 2. Для $q = 0, 1, 2, \dots$ выполнить шаги 2.1–2.8:

Шаг 2.1. Задать управление убегающего на интервале времени $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$v(t), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.2. Определить позиции убегающего на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$y(t) = \Phi(t)\Big(\Phi^{-1}(\theta_q)y(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} \Phi^{-1}(s)v(s)ds\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3. Для $i \in I(n)$ выполнить шаги 2.3.1–2.3.3:

Шаг 2.3.1. Задать функцию на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$\lambda_i^1(v(t),t) = \frac{1}{|B(t)\Phi(t)\xi_i^0|^2}\Big(\big\langle B(t)(v(t)+g(t)), B(t)\Phi(t)\xi_i^0\big\rangle +$$

$$+\Big[\big\langle B(t)(v(t)+g(t)), B(t)\Phi(t)\xi_i^0\big\rangle^2 +$$

$$+|B(t)\Phi(t)\xi_i^0|^2(1-|B(t)(v(t)+g(t))|^2)\Big]^{1/2}\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3.2. Задать функцию на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$L_i(\theta_q, t) = \int_{\theta_q}^{t} \lambda_i^1(v(s), s)ds, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3.3. Вычислить:

$$\rho_i(\theta_q) = \frac{|\Phi^{-1}(\theta_q)(x_i(\theta_q) - y(\theta_q))|}{|\xi_i^0|}.$$

Шаг 2.4. Найти момент или установить, что его нет:

$$\tau = \min\big\{t \in (\theta_q, \theta_{q+1}] : \text{существуют } \Lambda \in \Omega(b) \text{ и } \varepsilon > 0$$
$$\text{такие, что } L_\alpha(\theta_q, t^*) < L_\alpha(\theta_q, t) \text{ и } L_\alpha(\theta_q, t) \geqslant \rho_\alpha(\theta_q)$$
$$\text{для всех } t^* \in [t-\varepsilon, t) \text{ и } \alpha^* \in \Lambda\big\}.$$

Шаг 2.5. Если момент $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ существует, то для $i \in I(n)$ вычислить:

$$h_i(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{\rho_i(\theta_q)}{L_i(\theta_q, \tau)}, & \text{если } L_i(\theta_q, \tau) > \rho_i(\theta_q) \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.6. Если момента $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ не существует, то выполнить шаги 2.6.1–2.6.3:

Шаг 2.6.1. Для $i \in I(n)$ вычислить:

$$T_i(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{\rho_i(\theta_q)(\theta_{q+1} - \theta_q)}{L_i(\theta_q, \theta_{q+1})}, & \text{если } L_i(\theta_q, \theta_{q+1}) > 0 \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.6.2. Вычислить:

$$T(\theta_q) = \min_{\Lambda \in \Omega(b)} \max_{\alpha \in \Lambda} T_\alpha(\theta_q).$$

Шаг 2.6.3. Для $i \in I(n)$ вычислить:

$$h_i(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{T_i(\theta_q)}{T(\theta_q)}, & \text{если } T(\theta_q) > T_i(\theta_q) \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.7. Для $i \in I(n)$ выполнить шаги 2.7.1–2.7.3:

Шаг 2.7.1. Задать управление преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$u_i(t) = v(t) - h_i(\theta_q)\lambda_i^1(v(t), t)\Phi(t)\xi_i^0, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.7.2. Определить позиции преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$x_i(t) = \Phi(t)\Big(\Phi^{-1}(\theta_q)x_i(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} \Phi^{-1}(s)u_i(s)ds\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.7.3. Если $b_i^* = 0$ и $\min\limits_{t \in [\theta_q, \theta_{q+1}]} |x_i(t) - y(t)| = 0$, то $b_i^* = 1$.

Шаг 2.8. Если $b \leqslant b^* = (b_1^* + b_2^* + \cdots + b_n^*)$, то завершить работу (произошла одновременная b^*-кратная поимка), иначе продолжить вычисления.

§ 15. Схема реализации одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого преследования

Вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования (2.1) разработана на основе результатов § 2.

Шаг 0. Задать входные параметры:

k — размерность пространства, $k \geqslant 2$;

n — количество преследователей, $n \geqslant 1$;

m — количество убегающих, $m \geqslant 1$;

t_0 — начальный момент игры, $t_0 \in \mathbb{R}^1$;

$B(t)$ и $g(t)$ — параметры, задающие множество допустимых управлений игроков $(B^{-1}(t)S(0,1) - g(t))$, $B(t)$ — непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица и $g(t) \in \mathbb{R}^k$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция;

X_i^0 — начальные позиции преследователей, $X_i^0 \in \mathbb{R}^k$, $i \in I(n)$;

Y_j^0 — начальные позиции убегающих, $Y_j^0 \in \mathbb{R}^k$, $j \in I(m)$;

j_i — номер убегающего для i-го преследователя, $j_i \in I(m)$, $i \in I(n)$;

разбиение промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения, $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_q < \ldots$;

b — кратность поимки, $b \geqslant 1$.

Шаг 1. Вычислить:

$$\text{для } j \in I(m): \quad y_j(\theta_0) = Y_j^0;$$

$$\text{для } i \in I(n): \quad x_i(\theta_0) = X_i^0; \quad \xi_{ij_i}^0 = X_i^0 - Y_{j_i}^0; \quad b_i^* = 0.$$

Шаг 2. Для $q = 0, 1, 2, \ldots$ выполнить шаги 2.1–2.8:

Шаг 2.1. Задать управление убегающих на интервале времени $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$v(t), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.2. Определить позиции убегающих на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$\text{для } j \in I(m): \quad y_j(t) = y_j(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} v(s)ds, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3. Для $i \in I(n)$ выполнить шаги 2.3.1–2.3.3:

Шаг 2.3.1. Задать функцию на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$\lambda_i(v(t), t; j_i) = \frac{1}{|B(t)\xi^0_{ij_i}|^2}\Big(\big\langle B(t)(v(t) + g(t)), B(t)\xi^0_{ij_i}\big\rangle +$$
$$+\sqrt{\big\langle B(t)(v(t) + g(t)), B(t)\xi^0_{ij_i}\big\rangle^2 + |B(t)\xi^0_{ij_i}|^2(1 - |B(t)(v(t) + g(t))|^2)}\ \Big),$$
$$t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3.2. Задать функцию на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$L_{ij_i}(\theta_q, t) = \int_{\theta_q}^{t} \lambda_i(v(s), s; j_i)ds, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3.3. Вычислить:

$$\rho_{ij_i}(\theta_q) = \frac{|x_i(\theta_q) - y_j(\theta_q)|}{|\xi^0_{ij_i}|}.$$

Шаг 2.4. Найти момент или установить, что его нет:

$$\tau = \min\big\{t \in (\theta_q, \theta_{q+1}] : \text{существуют } \Lambda \in \Omega(b) \text{ и } \varepsilon > 0$$
$$\text{такие, что } L_{\alpha j_\alpha}(\theta_q, t^*) < L_{\alpha j_\alpha}(\theta_q, t) \text{ и } L_{\alpha j_\alpha}(\theta_q, t) \geqslant \rho_{\alpha j_\alpha}(\theta_q)$$
$$\text{для всех } t^* \in [t - \varepsilon, t) \text{ и } \alpha^* \in \Lambda\big\}.$$

Шаг 2.5. Если момент $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ существует, то для $i \in I(n)$ вычислить:

$$h_{ij_i}(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{\rho_{ij_i}(\theta_q)}{L_{ij_i}(\theta_q, \tau)}, & \text{если } L_{ij_i}(\theta_q, \tau) > \rho_{ij_i}(\theta_q) \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.6. Если момента $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ не существует, то выполнить шаги 2.6.1–2.6.3:

Шаг 2.6.1. Для $i \in I(n)$ вычислить:

$$T_{ij_i}(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{\rho_{ij_i}(\theta_q)(\theta_{q+1} - \theta_q)}{L_{ij_i}(\theta_q, \theta_{q+1})}, & \text{если } L_{ij_i}(\theta_q, \theta_{q+1}) > 0 \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.6.2. Вычислить:

$$T(\theta_q) = \min_{\Lambda \in \Omega(b)} \max_{\alpha \in \Lambda} T_{\alpha j_\alpha}(\theta_q).$$

Шаг 2.6.3. Для $i \in I(n)$ вычислить:

$$h_{ij_i}(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{T_{ij_i}(\theta_q)}{T(\theta_q)}, & \text{если } T(\theta_q) > T_{ij_i}(\theta_q) \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.7. Для $i \in I(n)$ выполнить шаги 2.7.1–2.7.3:

Шаг 2.7.1. Задать управление преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$u_i(t) = v(t) - h_{ij_i}(\theta_q)\lambda_i(v(t), t; j_i)\xi^0_{ij_i}, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.7.2. Определить позиции преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$x_i(t) = x_i(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} u_i(s)ds, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.7.3. Если $b_i^* = 0$ и $\min\limits_{t \in [\theta_q, \theta_{q+1}]} |x_i(t) - y_{j_i}(t)| = 0$, то $b_i^* = 1$.

Шаг 2.8. Если $b \leqslant b^* = (b_1^* + b_2^* + \cdots + b_n^*)$, то завершить работу (произошла одновременная b^*-кратная поимка), иначе продолжить вычисления.

§ 16. Схема реализации одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе

Вычислительная схема реализации одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе (6.1) разработана на основе результатов § 6.

Шаг 0. Задать входные параметры:

k — размерность пространства, $k \geqslant 2$;

n — количество преследователей, $n \geqslant 1$;

m — количество убегающих, $m \geqslant 1$;

t_0 — начальный момент игры, $t_0 \in \mathbb{R}^1$;

$\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$;

$B(t)$ и $g(t)$ — параметры, задающие множество допустимых управлений игроков $(B^{-1}(t)S(0,1) - g(t))$, $B(t)$ — непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица и $g(t) \in \mathbb{R}^k$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция;

X_i^0 — начальные позиции преследователей, $X_i^0 \in \mathbb{R}^k$, $i \in I(n)$;

Y_j^0 — начальные позиции убегающих, $Y_j^0 \in \mathbb{R}^k$, $j \in I(m)$;

j_i — номер убегающего для i-го преследователя, $j_i \in I(m)$, $i \in I(n)$;

разбиение промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения, $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < \dots$;

b — кратность поимки, $b \geqslant 1$.

Шаг 1. Вычислить:

$$\text{для } j \in I(m): \quad y_j(\theta_0) = Y_j^0;$$

$$\text{для } i \in I(n): \quad x_i(\theta_0) = X_i^0; \quad \xi_{ij_i}^0 = X_i^0 - Y_{j_i}^0; \quad b_i^* = 0.$$

Шаг 2. Для $q = 0, 1, 2, \dots$ выполнить шаги 2.1–2.8:

Шаг 2.1. Задать управление убегающих на интервале времени $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$v(t), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.2. Определить позиции убегающих на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$\text{для } j \in I(m): \ \ y_j(t) = \Phi(t)\Big(\Phi^{-1}(\theta_q) y_j(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} \Phi^{-1}(s) v(s) ds\Big), \ \ t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3. Для $i \in I(n)$ выполнить шаги 2.3.1–2.3.3:

Шаг 2.3.1. Задать функцию на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$\lambda_i^1(v(t), t; j_i) = \frac{1}{|B(t)\Phi(t)\xi_{ij_i}^0|^2}\Big(\big\langle B(t)(v(t)+g(t)), B(t)\Phi(t)\xi_{ij_i}^0\big\rangle +$$
$$+\Big[\big\langle B(t)(v(t)+g(t)), B(t)\Phi(t)\xi_{ij_i}^0\big\rangle^2 +$$
$$+|B(t)\Phi(t)\xi_{ij_i}^0|^2(1 - |B(t)(v(t)+g(t))|^2)\Big]^{1/2}\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3.2. Задать функцию на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$L_{ij_i}(\theta_q, t) = \int_{\theta_q}^{t} \lambda_i^1(v(s), s; j_i)ds, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3.3. Вычислить:

$$\rho_{ij_i}(\theta_q) = \frac{|\Phi^{-1}(\theta_q)(x_{ij_i}(\theta_q) - y_{j_i}(\theta_q))|}{|\xi_{ij_i}^0|}.$$

Шаг 2.4. Найти момент или установить, что его нет:

$$\tau = \min\big\{t \in (\theta_q, \theta_{q+1}] : \text{существуют } \Lambda \in \Omega(b) \text{ и } \varepsilon > 0$$
$$\text{такие, что } L_{\alpha j_\alpha}(\theta_q, t^*) < L_{\alpha j_\alpha}(\theta_q, t) \text{ и } L_{\alpha j_\alpha}(\theta_q, t) \geqslant \rho_{\alpha j_\alpha}(\theta_q)$$
$$\text{для всех } t^* \in [t-\varepsilon, t) \text{ и } \alpha^* \in \Lambda\big\}.$$

Шаг 2.5. Если момент $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ существует, то для $i \in I(n)$ вычислить:

$$h_{ij_i}(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{\rho_{ij_i}(\theta_q)}{L_{ij_i}(\theta_q, \tau)}, & \text{если } L_{ij_i}(\theta_q, \tau) > \rho_{ij_i}(\theta_q) \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.6. Если момента $\tau \in (\theta_q, \theta_{q+1}]$ не существует, то выполнить шаги 2.6.1–2.6.3:

Шаг 2.6.1. Для $i \in I(n)$ вычислить:

$$T_{ij_i}(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{\rho_{ij_i}(\theta_q)(\theta_{q+1} - \theta_q)}{L_{ij_i}(\theta_q, \theta_{q+1})}, & \text{если } L_{ij_i}(\theta_q, \theta_{q+1}) > 0 \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.6.2. Вычислить:

$$T(\theta_q) = \min_{\Lambda \in \Omega(b)} \max_{\alpha \in \Lambda} T_{\alpha j_\alpha}(\theta_q).$$

Шаг 2.6.3. Для $i \in I(n)$ вычислить:

$$h_{ij_i}(\theta_q) = \begin{cases} \dfrac{T_{ij_i}(\theta_q)}{T(\theta_q)}, & \text{если } T(\theta_q) > T_{ij_i}(\theta_q) \\ 1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Шаг 2.7. Для $i \in I(n)$ выполнить шаги 2.7.1–2.7.3:

Шаг 2.7.1. Задать управление преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$u_i(t) = v(t) - h_{ij_i}(\theta_q)\lambda_i^1(v(t), t; j_i)\Phi(t)\xi_{ij_i}^0, \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.7.2. Определить позиции преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$x_i(t) = \Phi(t)\Big(\Phi^{-1}(\theta_q)x_i(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} \Phi^{-1}(s)u_i(s)ds\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.7.3. Если $b_i^* = 0$ и $\min\limits_{t \in [\theta_q, \theta_{q+1}]} |x_i(t) - y_{j_i}(t)| = 0$, то $b_i^* = 1$.

Шаг 2.8. Если $b \leqslant b^* = (b_1^* + b_2^* + \cdots + b_n^*)$, то завершить работу (произошла одновременная b^*-кратная поимка), иначе продолжить вычисления.

§ 17. Схема действий слабого защитника убегающего в задаче простого преследования

Вычислительная схема действий слабого защитника убегающего в задаче простого преследования (4.1), в которой участвуют три игрока — преследователь P_i, убегающий E и слабый защитник убегающего D_j, разработана на основе результатов § 4.

Шаг 0. Задать входные параметры:

k — размерность пространства, $k \geqslant 2$;

t_0 — начальный момент игры, $t_0 \in \mathbb{R}^1$;

$B(t)$ и $g(t)$ — параметры, задающие множество допустимых управлений игроков $(B^{-1}(t)S(0,1) - g(t))$, $B(t)$ — непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица и $g(t) \in \mathbb{R}^k$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция;

i — номер участвующего в игре преследователя, $i \geqslant 1$;

X_i^0 — начальная позиция преследователя, $X_i^0 \in \mathbb{R}^k$;

Y^0 — начальная позиция убегающего, $Y^0 \in \mathbb{R}^k$;

j — номер участвующего в игре защитника, $j \geqslant 1$;

L — постоянная, определяющая возможный выбор начальной позиции защитника $(Z_j^0 \in S(Y^0, L))$, $0 < L < |X_i^0 - Y^0|$;

разбиение промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения, $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < \dots$;

Шаг 1. Вычислить:

$$Z_j^0 = Y^0 + L\frac{X_i^0 - Y^0}{|X_i^0 - Y^0|};$$

$$x_i(\theta_0) = X_i^0, \quad y(\theta_0) = Y^0, \quad z_j(\theta_0) = Z_j^0.$$

Шаг 2. Для $q = 0, 1, 2, \dots$ выполнить шаги 2.1–2.9:

Шаг 2.1. Задать управление преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$u_i(t) = u_i(\theta_q), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.2. Определить позиции преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$x_i(t) = x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(t - \theta_q), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3. Задать управление убегающего на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$v(t) = v(\theta_q), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.4. Определить позиции убегающего на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$y(t) = y(\theta_q) + v(\theta_q)(t - \theta_q), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.5. Вычислить:

$$\alpha_{ij} = \frac{|x_i(\theta_q) - z_j(\theta_q)|}{|x_i(\theta_q) - y(\theta_q)|}.$$

Шаг 2.6. Если существует такой момент $\tau > \theta_q$, что

$$x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(\tau - \theta_q) = y(\theta_q) + v(\theta_q)(\tau - \theta_q),$$

то вычислить:

$$w_j(\theta_q) = v(\theta_q);$$

в противном случае вычислить:

$$w_j(\theta_q) = (1 - \alpha_{ij})u_i(\theta_q) + \alpha_{ij}v(\theta_q).$$

Шаг 2.7. Задать управление защитника на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$w_j(t) = w_j(\theta_q), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.8. Определить позиции защитника на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$z_j(t) = z_j(\theta_q) + w_j(\theta_q)(t - \theta_q), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.9. Если $\min\limits_{t \in [\theta_q, \theta_{q+1}]} |x_i(t) - z_j(t)| = 0$, то завершить работу (защитник уничтожил преследователя), иначе продолжить вычисления.

§ 18. Схема действий слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе

Вычислительная схема действий слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе (8.1), в котором участвуют три игрока — преследователь P_i, убегающий E и слабый защитник убегающего D_j, разработана на основе результатов § 8.

Шаг 0. Задать входные параметры:

k — размерность пространства, $k \geqslant 2$;

t_0 — начальный момент игры, $t_0 \in \mathbb{R}^1$;

$\Phi(t)$ — фундаментальная матрица системы такая, что $\Phi(t_0) = \mathcal{I}$;

$B(t)$ и $g(t)$ — параметры, задающие множество допустимых управлений игроков $(B^{-1}(t)S(0,1) - g(t))$, $B(t)$ — непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица и $g(t) \in \mathbb{R}^k$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция;

i — номер участвующего в игре преследователя, $i \geqslant 1$;

X_i^0 — начальная позиция преследователя, $X_i^0 \in \mathbb{R}^k$;

Y^0 — начальная позиция убегающего, $Y^0 \in \mathbb{R}^k$;

j — номер участвующего в игре защитника, $j \geqslant 1$;

L — постоянная, определяющая возможный выбор начальной позиции защитника ($Z_j^0 \in S(Y^0, L)$), $0 < L < |X_i^0 - Y^0|$;

разбиение промежутка $[t_0, \infty)$, не имеющее конечных точек сгущения, $t_0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_q < \dots$;

Шаг 1. Вычислить:

$$Z_j^0 = Y^0 + L\frac{X_i^0 - Y^0}{|X_i^0 - Y^0|};$$

$$x_i(\theta_0) = X_i^0, \quad y(\theta_0) = Y^0, \quad z_j(\theta_0) = Z_j^0.$$

Шаг 2. Для $q = 0, 1, 2, \dots$ выполнить шаги 2.1–2.9:

Шаг 2.1. Задать управление преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$u_i(t) = \Phi(t)u_i(\theta_q), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.2. Определить позиции преследователя на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$x_i(t) = \Phi(t)\Big(\Phi^{-1}(\theta_q)x_i(\theta_q) + \int_{\theta_q}^{t} \Phi^{-1}(s)u_i(s)ds\Big) =$$

$$= \Phi(t)\Big(\Phi^{-1}(\theta_q)x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(t-\theta_q)\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.3. Задать управление убегающего на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$v(t) = \Phi(t)v(\theta_q), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.4. Определить позиции убегающего на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$y(t) = \Phi(t)\Big(\Phi^{-1}(\theta_q)y(\theta_q) + v(\theta_q)(t-\theta_q)\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.5. Вычислить:

$$\alpha_{ij} = \frac{|x_i(\theta_q) - z_j(\theta_q)|}{|x_i(\theta_q) - y(\theta_q)|}.$$

Шаг 2.6. Если существует такой момент $\tau > \theta_q$, что

$$\Phi^{-1}(\theta_q)x_i(\theta_q) + u_i(\theta_q)(\tau-\theta_q) = \Phi^{-1}(\theta_q)y(\theta_q) + v(\theta_q)(\tau-\theta_q),$$

то вычислить:

$$w_j(\theta_q) = v(\theta_q);$$

в противном случае вычислить:

$$w_j(\theta_q) = (1-\alpha_{ij})u_i(\theta_q) + \alpha_{ij}v(\theta_q).$$

Шаг 2.7. Задать управление защитника на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$w_j(t) = \Phi(t)w_j(\theta_q), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.8. Определить позиции защитника на интервале $[\theta_q, \theta_{q+1}]$:

$$z_j(t) = \Phi(t)\Big(\Phi^{-1}(\theta_q)z_j(\theta_q) + w_j(\theta_q)(t-\theta_q)\Big), \quad t \in [\theta_q, \theta_{q+1}].$$

Шаг 2.9. Если $\min\limits_{t\in[\theta_q,\theta_{q+1}]} |x_i(t) - z_j(t)| = 0$, то завершить работу (защитник уничтожил преследователя), иначе продолжить вычисления.

Г Л А В А 6
КОМПЛЕКС ПРОГРАММ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОНФЛИКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГРУПП УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

§ 19. Общая характеристика комплекса программ

1. Назначение комплекса программ

Комплекс программ моделирования конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов (далее — комплекс программ) предназначен для проведения вычислительных экспериментов со следующими типами задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов:

Тип 1. Одновременная многократная поимка убегающего в задаче простого группового преследования (см. § 1).

Тип 2. Одновременная многократная поимка убегающего в конфликтно управляемом процессе (см. § 5).

Тип 3. Одновременная многократная поимка группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования (см. § 2).

Тип 4. Одновременная многократная поимка группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе (см. § 6).

Тип 5. Действия слабого защитника убегающего в задаче простого группового преследования (см. § 4).

Тип 6. Действия слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе (см. § 8).

Запуск работы комплекса программ осуществляется из среды разработки Spyder — выполняется файл (модуль) MAIN.PY (подробности об использованных технологиях и подходах приведены ниже). Стартовый экран представлен на рис. 19.1 (при его закрытии работа комплекса завершится). Нажатие кнопки «Назначение комплекса программ» открывает окно с описанием назначения комплекса программ, см. рис. 19.2 (закрытие этого окна вернет комплекс к стартовому экрану, см. рис. 19.1). При нажатии кнопки «Главное окно комплекса программ» активируется указанный элемент, см. рис. 19.3

(его закрытие возвращает комплекс к описанию назначения, см. рис. 19.2). Элементы управления главного окна позволяют настроить параметры вычислительного эксперимента и начать моделирование конфликта.

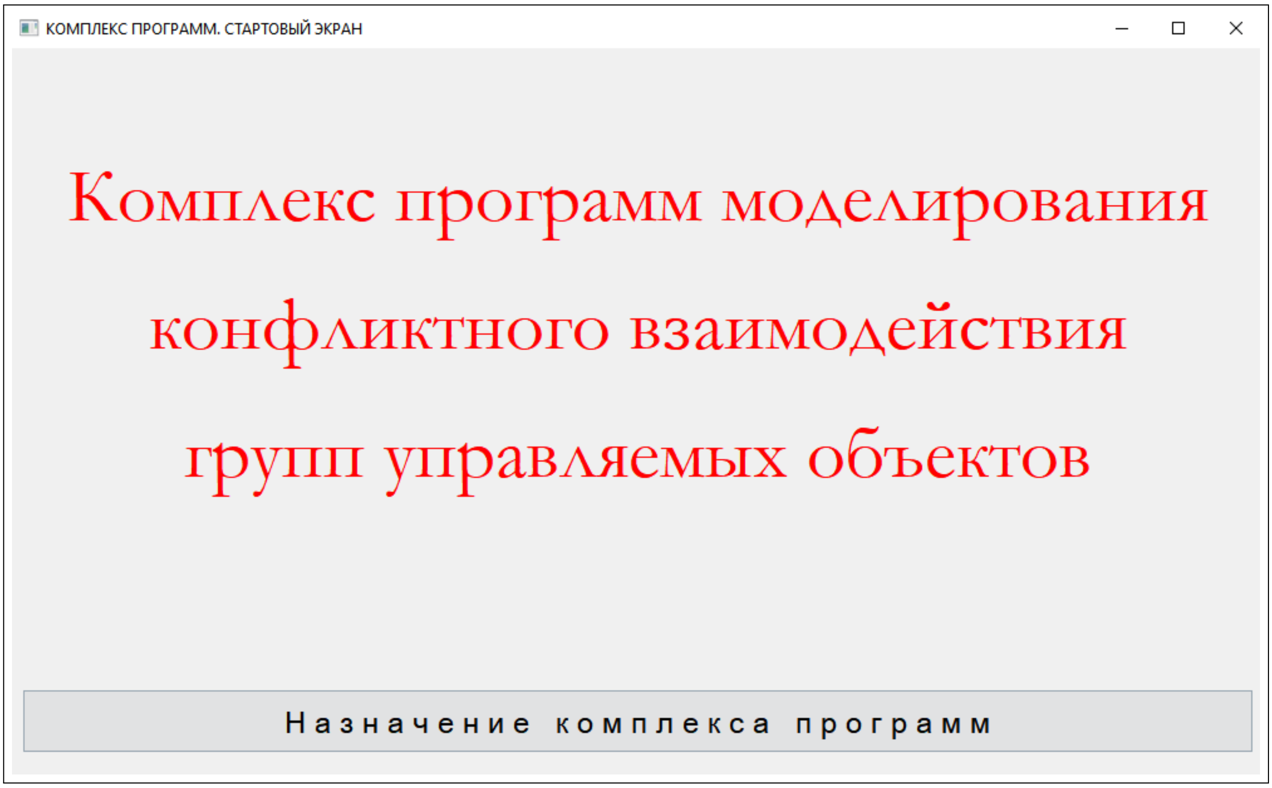


Рис. 19.1. Стартовый экран комплекса программ

Рис. 19.2. Окно с описанием назначения комплекса программ

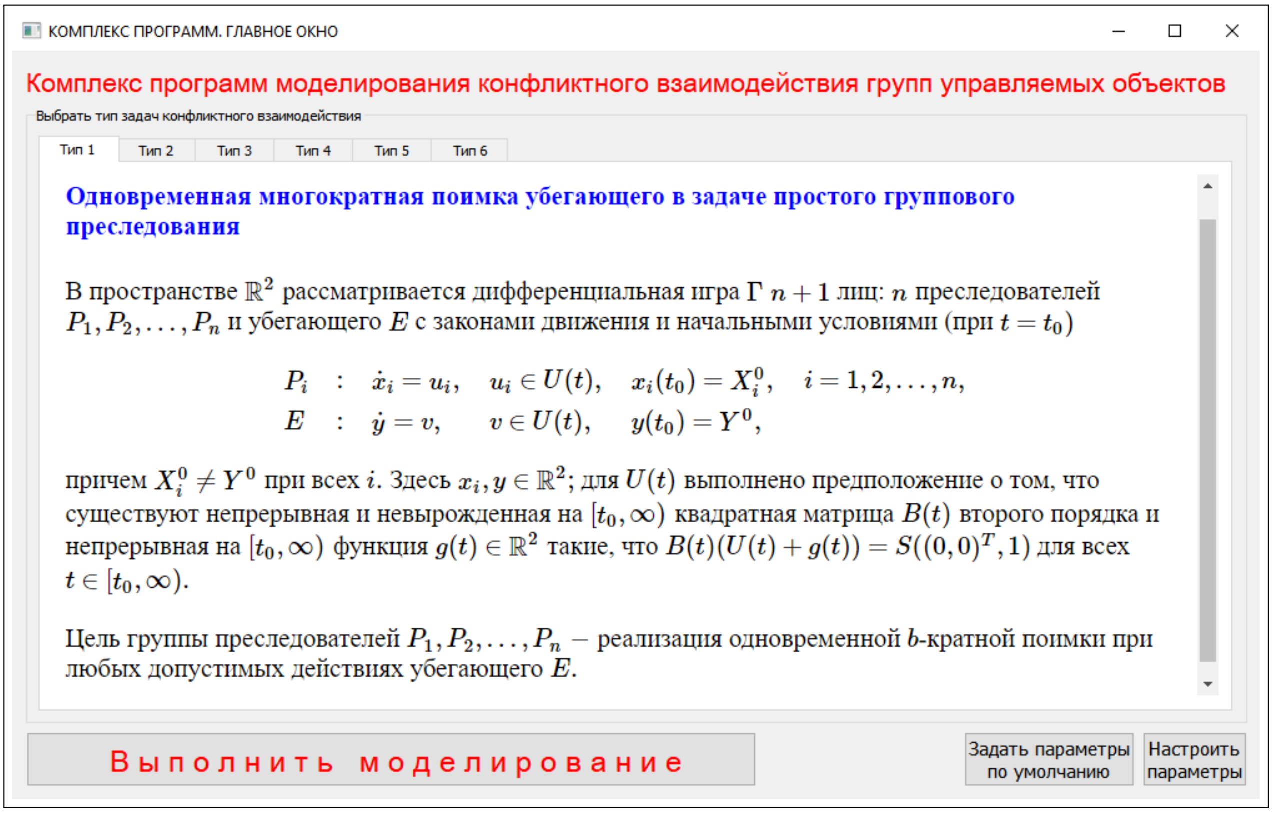


Рис. 19.3. Главное окно комплекса программ

2. Порядок проведение вычислительных экспериментов

Общий порядок проведения вычислительных экспериментов (при активном состоянии главного окна комплекса программ, см. рис. 19.3):

Шаг 1. Выбрать тип задач конфликтного взаимодействия.

Шаг 2. Если необходимо поменять параметры, то задать их.

Шаг 3. Выполнить моделирование.

Рассмотрим подробнее проведение вычислительных экспериментов для каждого типа задач конфликтного взаимодействия.

2.1. Моделирование одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования (Тип 1)

Шаг 1. В области выбора типа задач конфликтного взаимодействия нажать на вкладку «Тип 1» (рекомендуется проконтролировать свой выбор с помощью приведенного ниже описания), см. рис. 19.4.

Дальнейшая работа комплекса программ проводится согласно сделанному выбору типа задач конфликтного взаимодействия — «Тип 1».

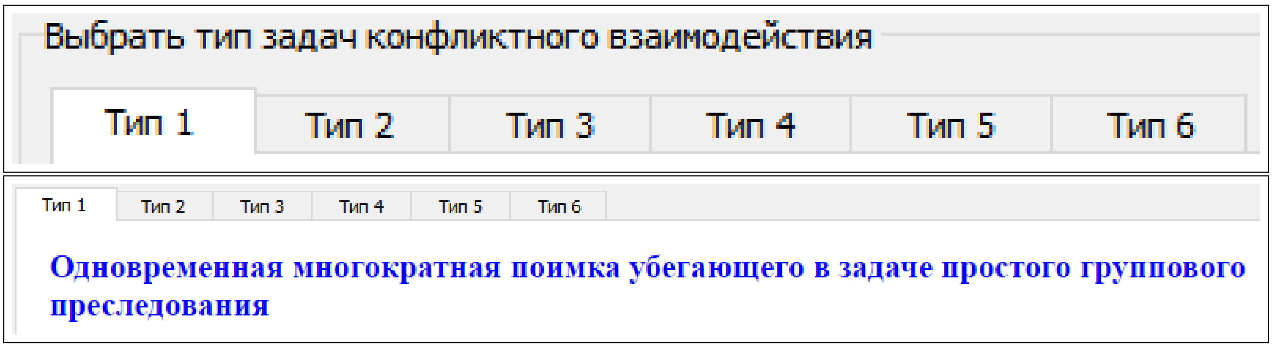


Рис. 19.4. Фрагменты главного окна. Выбрана вкладка «Тип 1»

Шаг 2. Если параметры изменять не нужно (например, повторяется только что проведенный эксперимент), то этот шаг пропускается.

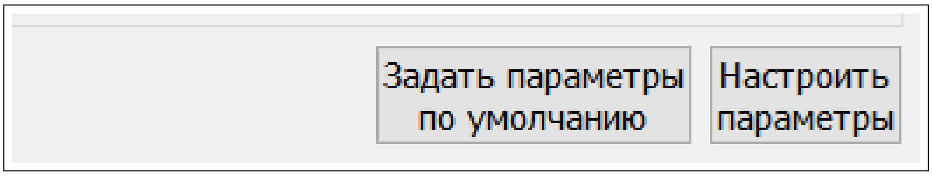
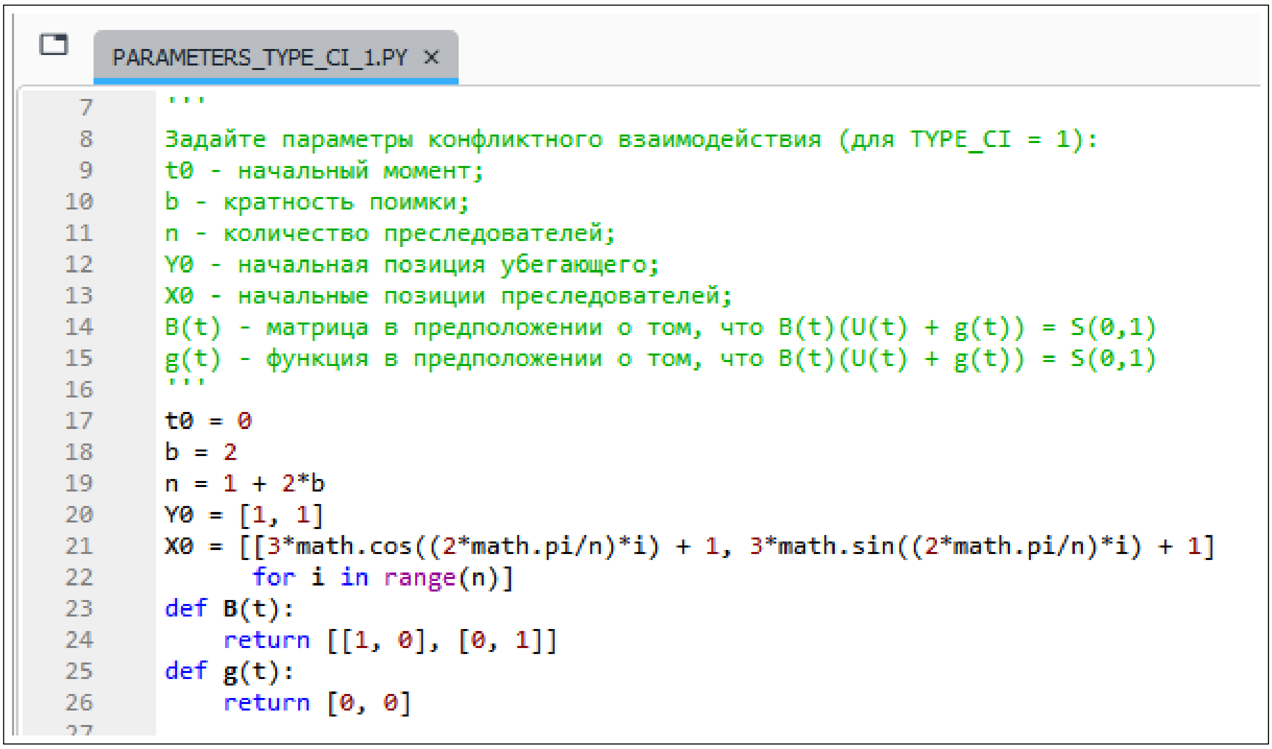


Рис. 19.5. Фрагмент главного окна. Кнопки изменения параметров




```
'''
Задайте параметры конфликтного взаимодействия (для TYPE_CI = 1):
t0 - начальный момент;
b - кратность поимки;
n - количество преследователей;
Y0 - начальная позиция убегающего;
X0 - начальные позиции преследователей;
B(t) - матрица в предположении о том, что B(t)(U(t) + g(t)) = S(0,1)
g(t) - функция в предположении о том, что B(t)(U(t) + g(t)) = S(0,1)
'''
t0 = 0
b = 2
n = 1 + 2*b
Y0 = [1, 1]
X0 = [[3*math.cos((2*math.pi/n)*i) + 1, 3*math.sin((2*math.pi/n)*i) + 1]
      for i in range(n)]
def B(t):
    return [[1, 0], [0, 1]]
def g(t):
    return [0, 0]
```

Рис. 19.6. Фрагмент файла (модуля) с текущими параметрами

Изменение параметров производится двумя способами (см. рис. 19.5):

1. При нажатии кнопки «Задать параметры по умолчанию» выполняется указанное действие (только для «Типа 1»; значения по умолчанию заданы для каждого типа задач конфликтного взаимодействия в отдельности).

2. По кнопке «Настроить параметры» средствами операционной системы открывается файл (модуль) с текущими параметрами для их просмотра и редактирования (параметры заданы для каждого типа задач в отдельности; значение каждого параметра снабжено комментарием; можно использовать среду разработки Spyder, см. рис. 19.6).

Шаг 3. Нажать кнопку «Выполнить моделирование» (см. рис. 19.7).

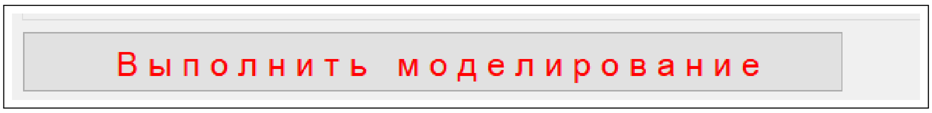


Рис. 19.7. Фрагмент главного окна. Кнопка «Выполнить моделирование»

Будет открыто новое окно, предназначенное для проведения моделирования задач «Типа 1», см. рис. 19.8.

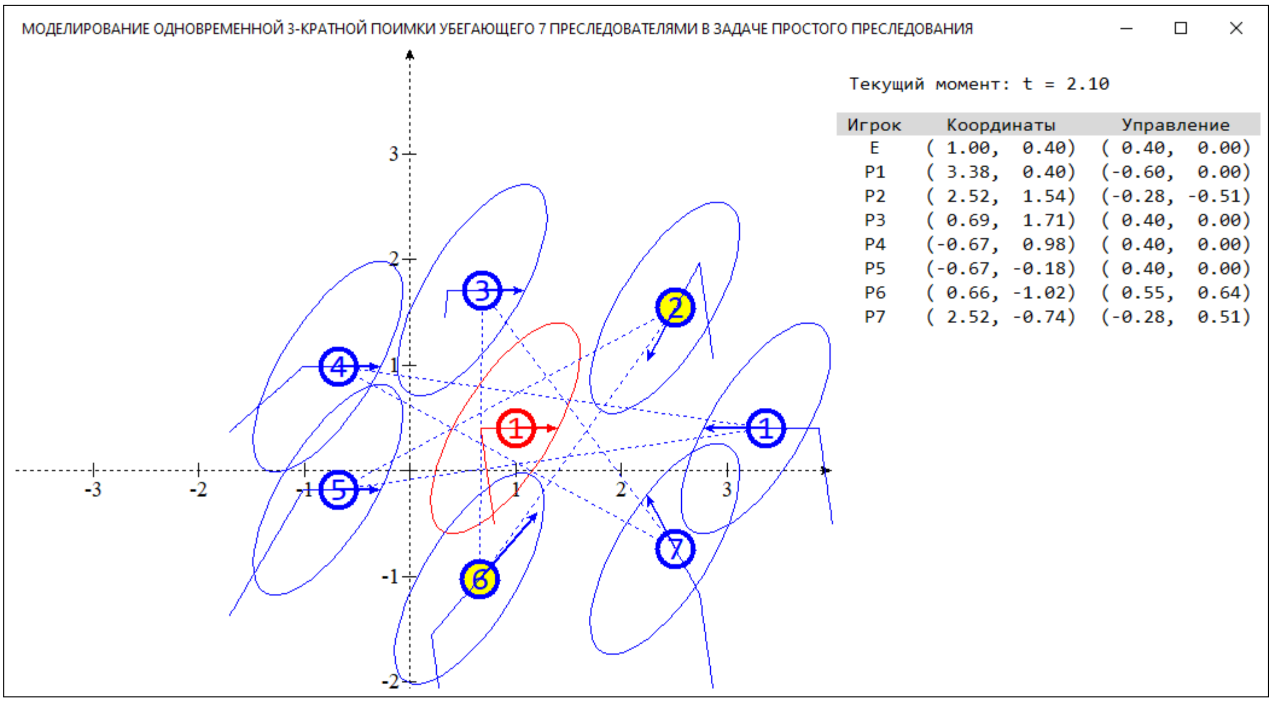


Рис. 19.8. Фрагмент моделирования задачи «Типа 1» с отображением всех элементов визуализации

Результаты моделирования конкретных задач «Типа 1» приводятся в § 20.

В комплексе программ для задач «Типа 1» реализована приведенная в § 13 вычислительная схема расчета допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, обеспечивающих одновременную b-кратную поимку убегающего E при любом допустимом управлении $v(t)$.

Функциональные возможности комплекса программ для задач «Типа 1»:

задание управления $v(t)$ убегающего E (с клавиатуры или с использованием функции; эта и другие изменяемые возможности определяются в параметрах на шаге 2);

расчет управлений $u_i(t)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, и динамики всей системы конфликтного взаимодействия;

визуальное динамическое преставление позиций $y(t)$ (красная окружность с номером 1 в центре), $x_i(t)$ (синяя окружность с номером i в центре), $i \in I(n)$, и управлений $v(t)$, $u_i(t)$ (если $u_i(t) \in \operatorname{Int} U(t)$, то соответствующий круг окрашивается в желтый цвет), $i \in I(n)$, игроков;

настраиваемое («показывать»/«не показывать») отображение других элементов визуализации (окно с представлением числовой информации о текущих моменте, позициях и управлениях игроков; система координат; траектории движения игроков $y(s)$, $x_i(s)$, $i \in I(n)$, $s \in [t_0, t]$; граница множества допустимых управлений $U(t)$ с привязкой к каждому игроку, то есть $y(t) + \partial U(t)$, $x_i(t) + \partial U(t)$, $i \in I(n)$; синие пунктирные линии, позволяющие оценить выполнимость необходимого условия одновременной b-кратной поимки).

Управление процессом моделирования для задач «Типа 1»:

Клавиша `KEYCODE=32` (пробел, `Space`) — «старт»/«пауза» вычислений;

Клавиши `KEYCODE=37;100` (стрелка влево, `LeftArrow` или `Numpad=4`) — задать $v(t) = B^{-1}(t)(-1, 0)^{\mathrm{T}} - g(t)$ (если пользователю разрешено задавать управление $v(t)$ убегающего E с клавиатуры);

Клавиши `KEYCODE=38;104` (стрелка вверх, `UpArrow` или `Numpad=8`) — задать $v(t) = B^{-1}(t)(0, 1)^{\mathrm{T}} - g(t)$;

Клавиши `KEYCODE=39;102` (стрелка вправо, `RightArrow` или `Numpad=6`) — задать $v(t) = B^{-1}(t)(1, 0)^{\mathrm{T}} - g(t)$;

Клавиши `KEYCODE=40;98` (стрелка вниз, `DownArrow` или `Numpad=2`) — задать $v(t) = B^{-1}(t)(0, -1)^{\mathrm{T}} - g(t)$;

Клавиша `KEYCODE=97` (`Numpad=1`) —
задать $v(t) = B^{-1}(t)(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^{\mathrm{T}} - g(t)$;

Клавиша `KEYCODE=99` (`Numpad=3`) —
задать $v(t) = B^{-1}(t)(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^{\mathrm{T}} - g(t)$;

Клавиша `KEYCODE=101` (`Numpad=5`) — задать $v(t) = -g(t)$;

Клавиша `KEYCODE=103` (`Numpad=7`) —
задать $v(t) = B^{-1}(t)(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^{\mathrm{T}} - g(t)$;

Клавиша `KEYCODE=105` (`Numpad=9`) —
задать $v(t) = B^{-1}(t)(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^{\mathrm{T}} - g(t)$.

После окончания моделирования вновь активируется главное окно комплекса программ, см. рис. 19.3.

2.2. Моделирование одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе (Тип 2)

Шаг 1. В области выбора типа задач конфликтного взаимодействия нажать на вкладку «Тип 2» (рекомендуется проконтролировать свой выбор с помощью приведенного ниже описания), см. рис. 19.9.

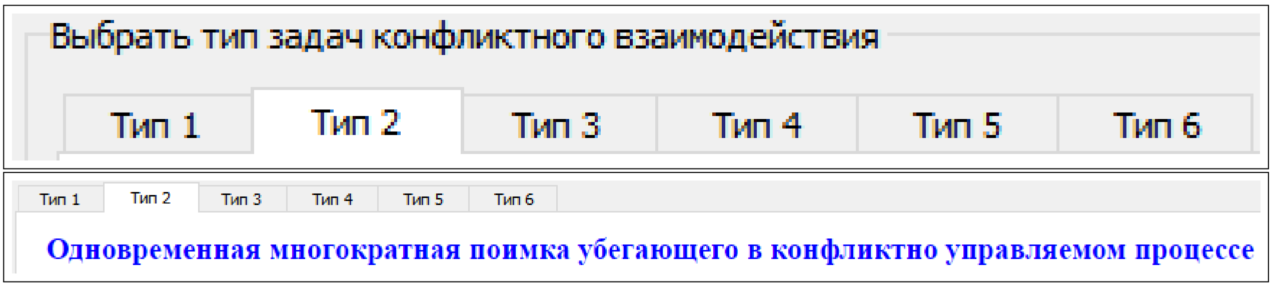


Рис. 19.9. Фрагменты главного окна. Выбрана вкладка «Тип 2»

Дальнейшая работа комплекса программ проводится согласно сделанному выбору типа задач конфликтного взаимодействия — «Тип 2».

Шаг 2. Если параметры изменять не нужно, то этот шаг пропускается.

Изменение параметров производится двумя способами (см. рис. 19.5):

1. При нажатии кнопки «Задать параметры по умолчанию» выполняется указанное действие.

2. По кнопке «Настроить параметры» средствами операционной системы открывается файл (модуль) с текущими параметрами для их просмотра и редактирования.

Шаг 3. Нажать кнопку «Выполнить моделирование» (см. рис. 19.7).

Будет открыто новое окно, предназначенное для проведения моделирования задач «Типа 2», см. рис. 19.10.

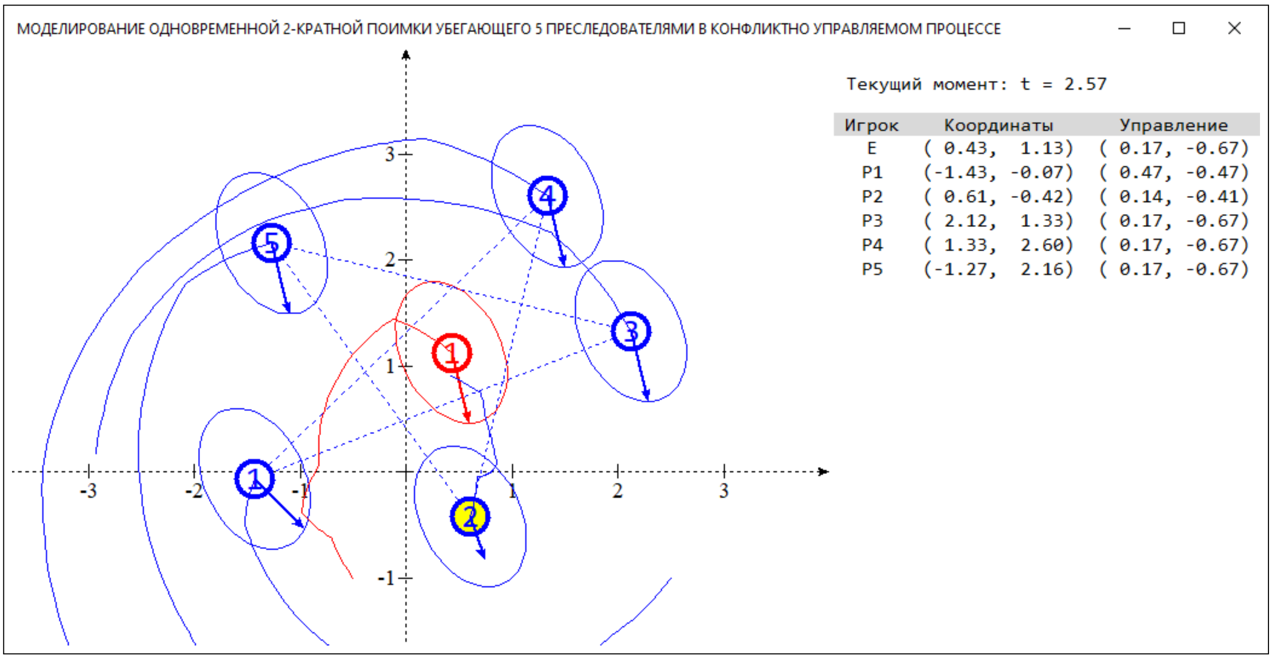


Рис. 19.10. Фрагмент моделирования задачи «Типа 2» с отображением всех элементов визуализации

Результаты моделирования конкретных задач «Типа 2» приводятся в § 21.

В комплексе программ для задач «Типа 2» реализована приведенная в § 14 вычислительная схема расчета допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, обеспечивающих одновременную b-кратную поимку убегающего E при любом допустимом управлении $v(t)$.

Функциональные возможности комплекса программ для задач «Типа 2» совпадают с приведенными выше возможностями для задач «Типа 1».

Управление процессом моделирования для задач «Типа 2» и «Типа 1» аналогичны.

После окончания моделирования вновь активируется главное окно комплекса программ, см. рис. 19.3.

2.3. Моделирование одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования (Тип 3)

Шаг 1. В области выбора типа задач конфликтного взаимодействия нажать на вкладку «Тип 3» (рекомендуется проконтролировать свой выбор с помощью приведенного ниже описания), см. рис. 19.11.

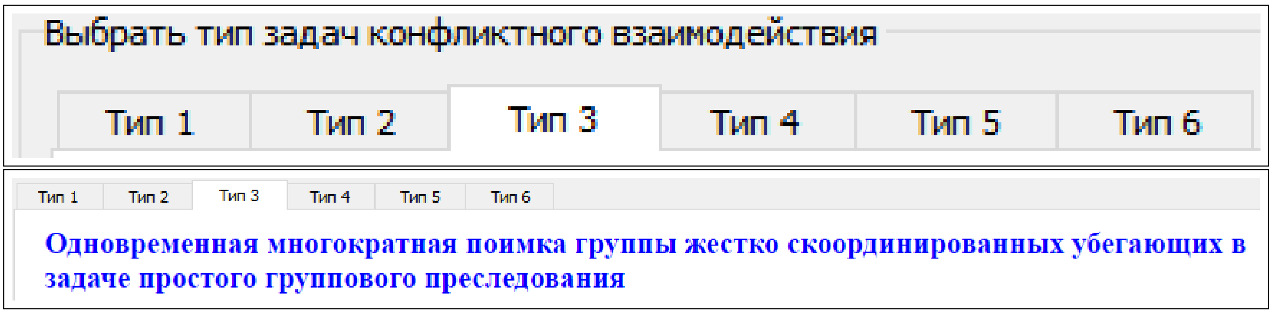


Рис. 19.11. Фрагменты главного окна. Выбрана вкладка «Тип 3»

Дальнейшая работа комплекса программ проводится согласно сделанному выбору типа задач конфликтного взаимодействия — «Тип 3».

Шаг 2. Если параметры изменять не нужно, то этот шаг пропускается.

Изменение параметров производится двумя способами (см. рис. 19.5):

1. При нажатии кнопки «Задать параметры по умолчанию» выполняется указанное действие.

2. По кнопке «Настроить параметры» средствами операционной системы открывается файл (модуль) с текущими параметрами для их просмотра и редактирования.

Шаг 3. Нажать кнопку «Выполнить моделирование» (см. рис. 19.7).

Будет открыто новое окно, предназначенное для проведения моделирования задач «Типа 3», см. рис. 19.12.

Результаты моделирования конкретных задач «Типа 3» приводятся в § 22.

В комплексе программ для задач «Типа 3» реализована приведенная в § 15 вычислительная схема расчета допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, обеспечивающих (суммарную) одновременную b-кратную поимку жестко скоординированных убегающих E_j, $j \in I(m)$, при любом допустимом управлении $v(t)$.

Функциональные возможности комплекса программ для задач «Типа 3»:

задание управления $v(t)$ убегающих E_j, $j \in I(m)$ (с клавиатуры или с использованием функции);

расчет управлений $u_i(t)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, и динамики всей системы конфликтного взаимодействия;

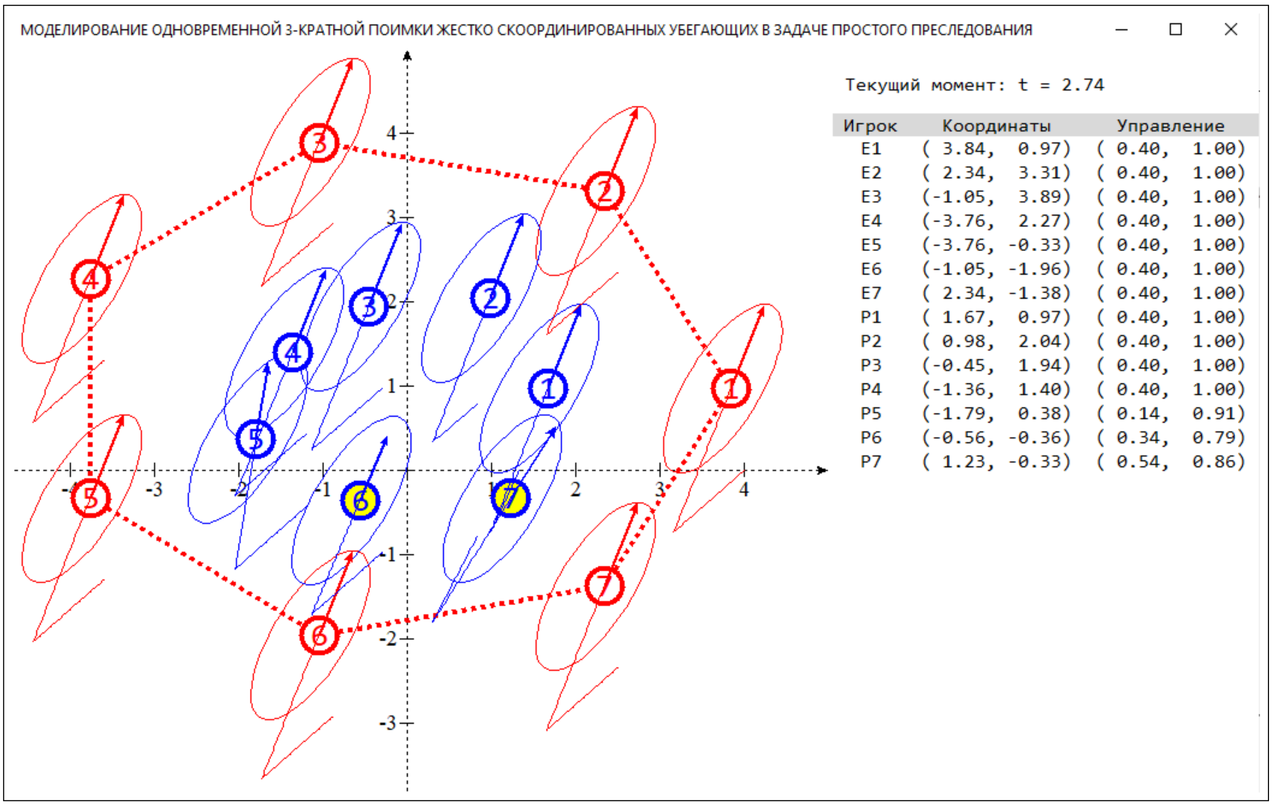


Рис. 19.12. Фрагмент моделирования задачи «Типа 3» с отображением всех элементов визуализации

визуальное динамическое преставление позиций $y_j(t)$ (красная окружность с номером j в центре), $j \in I(m)$, $x_i(t)$ (синяя окружность с номером i в центре), $i \in I(n)$, и управлений $v(t)$, $u_i(t)$ (если $u_i(t) \in \operatorname{Int} U(t)$, то соответствующий круг окрашивается в желтый цвет), $i \in I(n)$, игроков;

настраиваемое («показывать» / «не показывать») отображение других элементов визуализации (окно с представлением числовой информации о текущих моменте, позициях и управлениях игроков; система координат; траектории движения игроков $y_j(s)$, $j \in I(m)$, $x_i(s)$, $i \in I(n)$, $s \in [t_0, t]$; граница множества допустимых управлений $U(t)$ с привязкой к каждому игроку, то есть $y_j(t) + \partial U(t)$, $j \in I(m)$, $x_i(t) + \partial U(t)$, $i \in I(n)$; красные пунктирные линии, позволяющие акцентировать внимание на том, что убегающие жестко скоординированы).

Управление процессом моделирования для задач «Типа 3» и «Типа 1» аналогичны.

После окончания моделирования вновь активируется главное окно комплекса программ, см. рис. 19.3.

2.4. Моделирование одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе (Тип 4)

Шаг 1. В области выбора типа задач конфликтного взаимодействия нажать на вкладку «Тип 4» (рекомендуется проконтролировать свой выбор с помощью приведенного ниже описания), см. рис. 19.13.

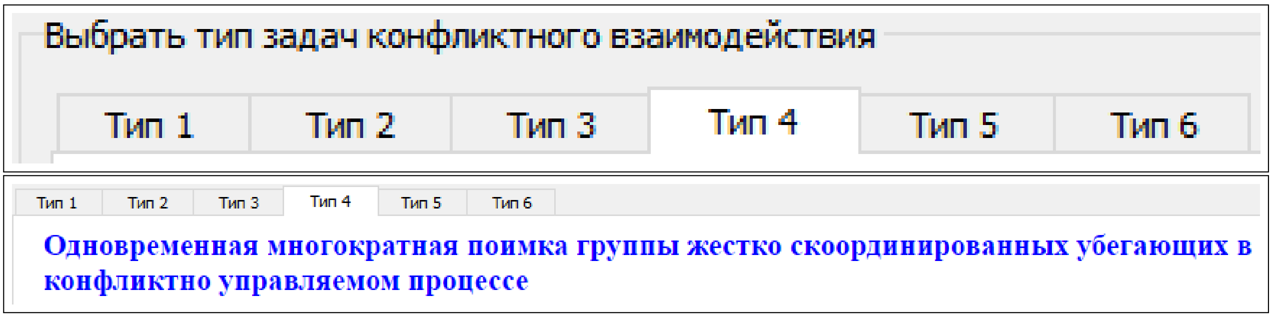


Рис. 19.13. Фрагменты главного окна. Выбрана вкладка «Тип 4»

Дальнейшая работа комплекса программ проводится согласно сделанному выбору типа задач конфликтного взаимодействия — «Тип 4».

Шаг 2. Если параметры изменять не нужно, то этот шаг пропускается.

Изменение параметров производится двумя способами (см. рис. 19.5):

1. При нажатии кнопки «Задать параметры по умолчанию» выполняется указанное действие.

2. По кнопке «Настроить параметры» средствами операционной системы открывается файл (модуль) с текущими параметрами для их просмотра и редактирования.

Шаг 3. Нажать кнопку «Выполнить моделирование» (см. рис. 19.7).

Будет открыто новое окно, предназначенное для проведения моделирования задач «Типа 4», см. рис. 19.14.

Результаты моделирования конкретных задач «Типа 4» приводятся в § 23.

В комплексе программ для задач «Типа 4» реализована приведенная в § 16 вычислительная схема расчета допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, обеспечивающих (суммарную) одновременную b-кратную поимку жестко скоординированных убегающих E_j, $j \in I(m)$, при любом допустимом управлении $v(t)$.

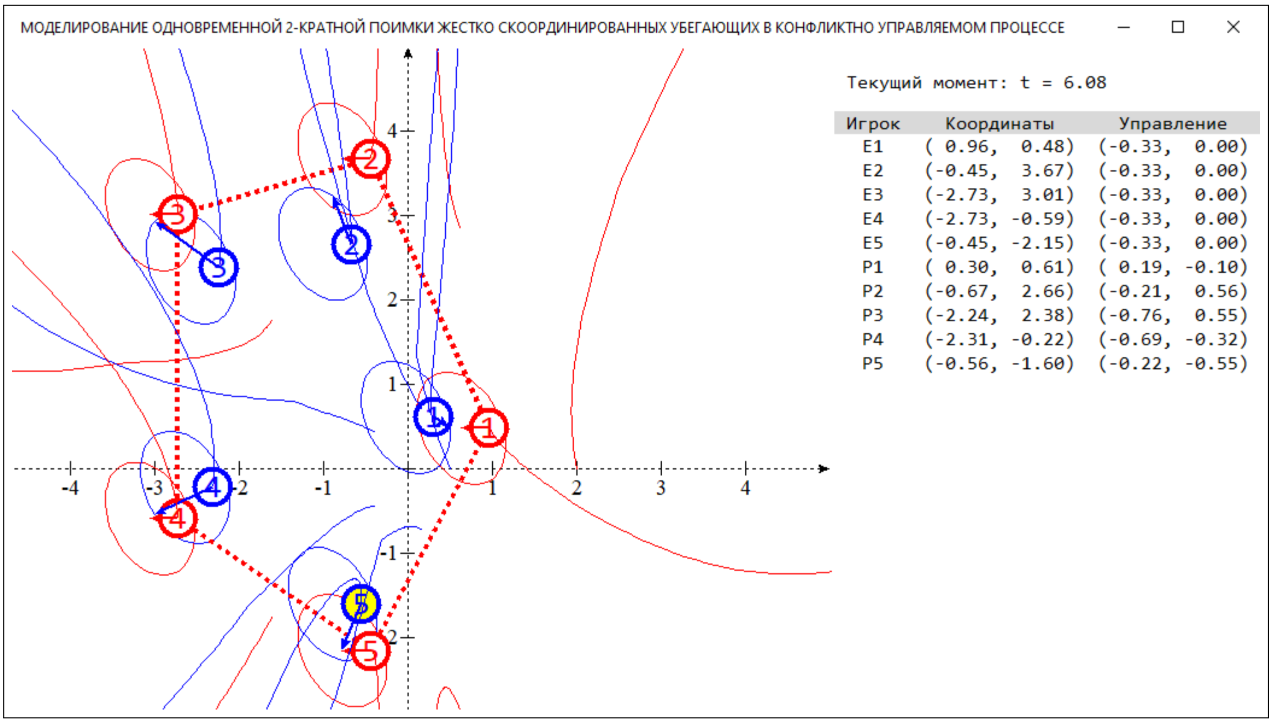


Рис. 19.14. Фрагмент моделирования задачи «Типа 4» с отображением всех элементов визуализации

Функциональные возможности комплекса программ для задач «Типа 4» совпадают с приведенными выше возможностями для задач «Типа 3».

Управление процессом моделирования для задач «Типа 4» и «Типа 1» аналогичны.

После окончания моделирования вновь активируется главное окно комплекса программ, см. рис. 19.3.

2.5. Моделирование действий слабого защитника убегающего в задаче простого группового преследования (Тип 5)

Шаг 1. В области выбора типа задач конфликтного взаимодействия нажать на вкладку «Тип 5» (рекомендуется проконтролировать свой выбор с помощью приведенного ниже описания), см. рис. 19.15.

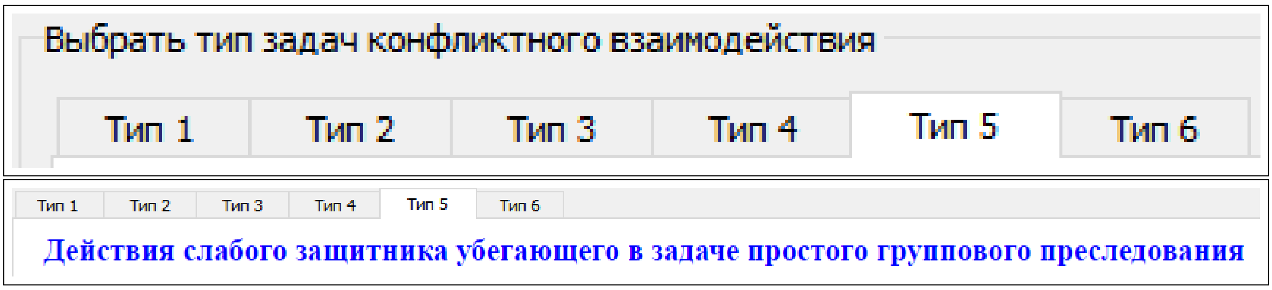


Рис. 19.15. Фрагменты главного окна. Выбрана вкладка «Тип 5»

Дальнейшая работа комплекса программ проводится согласно сделанному выбору типа задач конфликтного взаимодействия — «Тип 5».

Шаг 2. Если параметры изменять не нужно, то этот шаг пропускается.

Изменение параметров производится двумя способами (см. рис. 19.5):

1. При нажатии кнопки «Задать параметры по умолчанию» выполняется указанное действие.

2. По кнопке «Настроить параметры» средствами операционной системы открывается файл (модуль) с текущими параметрами для их просмотра и редактирования.

Шаг 3. Нажать кнопку «Выполнить моделирование» (см. рис. 19.7).

Будет открыто новое окно, предназначенное для проведения моделирования задач «Типа 5», см. рис. 19.16.

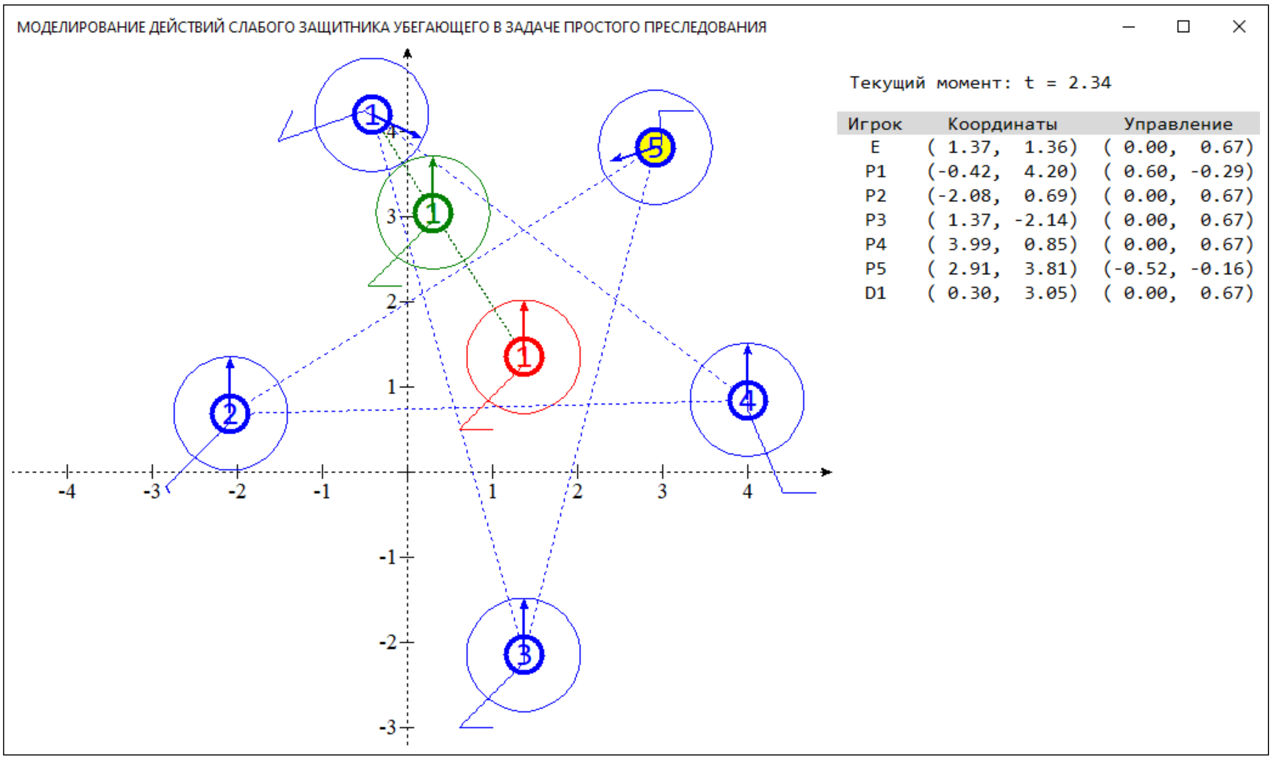


Рис. 19.16. Фрагмент моделирования задачи «Типа 5» с отображением всех элементов визуализации

Результаты моделирования конкретных задач «Типа 5» приводятся в § 24.

В комплексе программ для задач «Типа 5» реализованы приведенные в § 13 и § 17 вычислительные схемы расчета допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, и допустимых управлений $w_j(t)$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$. Управления преследователей, при отсутствии защитников убегающего ($r = 0$), обеспечивают одновременную b-кратную поимку убегающего E при любом допустимом управлении $v(t)$. Каждый защитник, при условии согласованного с ним поведения убегающего, снижает кратность поимки на единицу, то есть r защитников позволяют преследователям реализовать лишь одновременную $(b - r)$-кратную поимку убегающего.

Функциональные возможности комплекса программ для задач «Типа 3»:

задание управления $v(t)$ убегающего E (с клавиатуры или с использованием функции);

расчет управлений $u_i(t)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, управлений $w_j(t)$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$, и динамики всей системы конфликтного взаимодействия;

визуальное динамическое преставление позиций $y(t)$ (красная окружность с номером 1 в центре), $x_i(t)$ (синяя окружность с номером i в центре), $i \in I(n)$, $z_j(t)$ (зеленная окружность с номером j в центре), $j \in I(r)$, и управлений $v(t)$, $u_i(t)$ (если $u_i(t) \in \operatorname{Int} U(t)$, то соответствующий круг окрашивается в желтый цвет), $i \in I(n)$, $w_j(t)$, $j \in I(r)$, игроков;

настраиваемое («показывать»/«не показывать») отображение других элементов визуализации (окно с представлением числовой информации о текущих моменте, позициях и управлениях игроков; система координат; траектории движения игроков $y(s)$, $x_i(s)$, $i \in I(n)$, $z_j(s)$, $j \in I(r)$, $s \in [t_0, t]$; граница области допустимых управлений $U(t)$ с привязкой к каждому игроку, то есть $y(t)+\partial U(t)$, $x_i(t)+\partial U(t)$, $i \in I(n)$, $z_j(t)+\partial U(t)$, $j \in I(r)$; синие пунктирные линии, позволяющие оценить выполнимость необходимого условия одновременной $(b-r)$-кратной поимки; зеленные пунктирные линии, показывающие против какого преследователя действует каждый защитник убегающего).

Управление процессом моделирования для задач «Типа 5» и «Типа 1» аналогичны.

После окончания моделирования вновь активируется главное окно комплекса программ, см. рис. 19.3.

2.6. Моделирование действий слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе (Тип 6)

Шаг 1. В области выбора типа задач конфликтного взаимодействия нажать на вкладку «Тип 6» (рекомендуется проконтролировать свой выбор с помощью приведенного ниже описания), см. рис. 19.17.

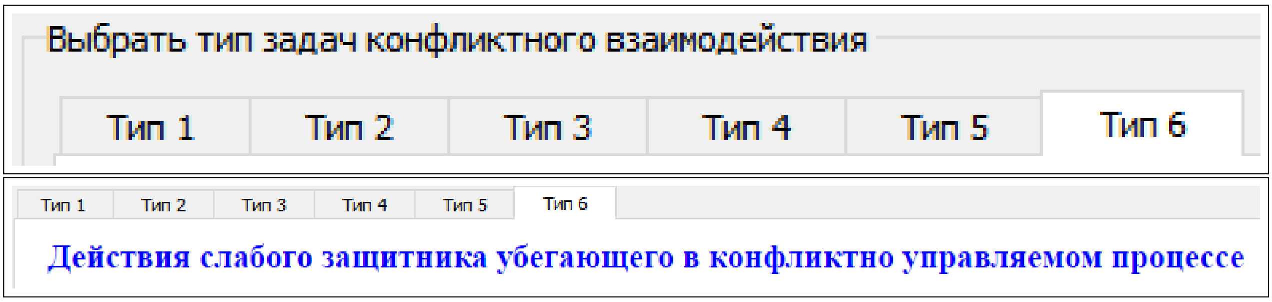


Рис. 19.17. Фрагменты главного окна. Выбрана вкладка «Тип 6»

Дальнейшая работа комплекса программ проводится согласно сделанному выбору типа задач конфликтного взаимодействия — «Тип 6».

Шаг 2. Если параметры изменять не нужно, то этот шаг пропускается.

Изменение параметров производится двумя способами (см. рис. 19.5):

1. При нажатии кнопки «Задать параметры по умолчанию» выполняется указанное действие.

2. По кнопке «Настроить параметры» средствами операционной системы открывается файл (модуль) с текущими параметрами для их просмотра и редактирования.

Шаг 3. Нажать кнопку «Выполнить моделирование» (см. рис. 19.7).

Будет открыто новое окно, предназначенное для проведения моделирования задач «Типа 6», см. рис. 19.18.

Результаты моделирования конкретных задач «Типа 6» приводятся в § 25.

В комплексе программ для задач «Типа 6» реализованы приведенные в § 14 и § 18 вычислительные схемы расчета допустимых управлений $u_i(t)$ преследователей P_i, $i \in I(n)$, и допустимых управлений $w_j(t)$ защитников убегающего D_j, $j \in I(r)$. Управления преследователей, при отсутствии защитников убегающего ($r = 0$), обеспечивают одновременную b-кратную поимку убегающего E при любом допустимом управлении $v(t)$. Каждый защитник, при условии согласованного с ним поведения убегающего, снижает кратность поимки на единицу, то есть r защитников позволяют преследователям реализовать лишь одновременную $(b-r)$-кратную поимку убегающего.

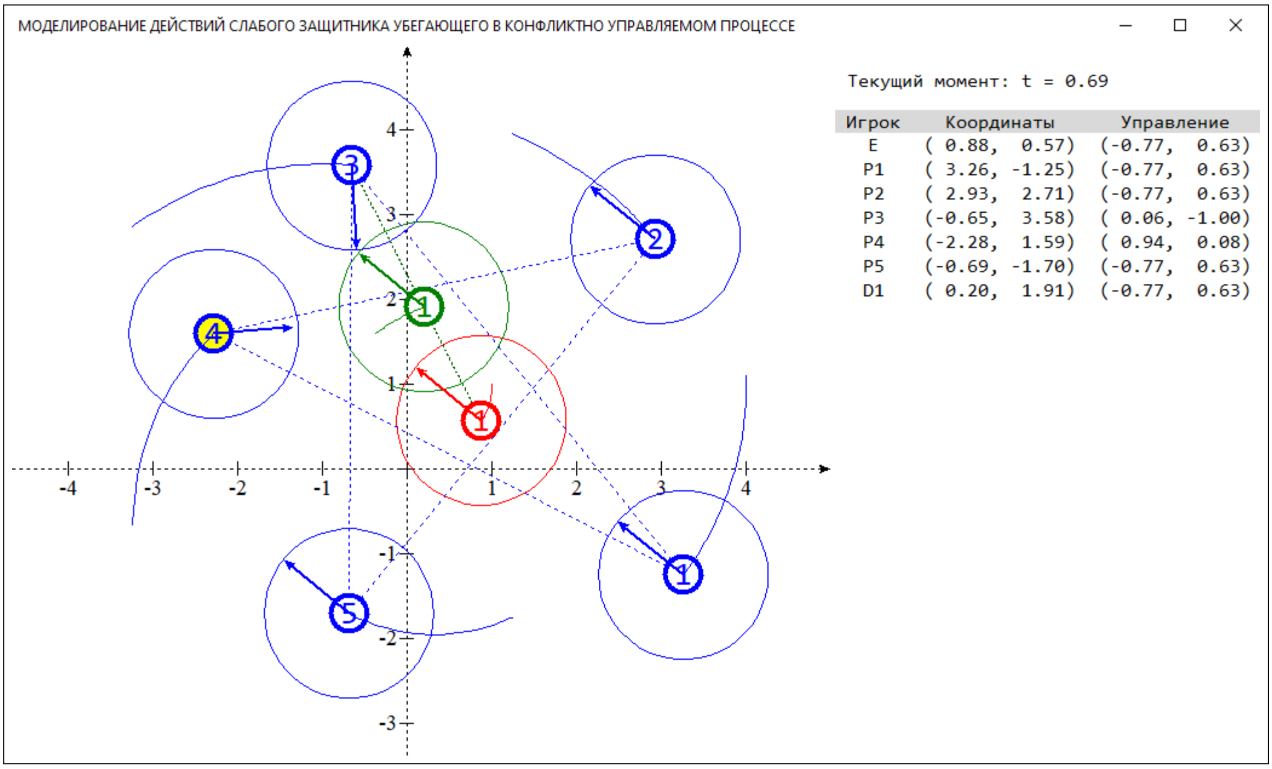


Рис. 19.18. Фрагмент моделирования задачи «Типа 6» с отображением всех элементов визуализации

Функциональные возможности комплекса программ для задач «Типа 6» совпадают с приведенными выше возможностями для задач «Типа 5».

Управление процессом моделирования для задач «Типа 6» и «Типа 1» аналогичны.

После окончания моделирования вновь активируется главное окно комплекса программ, см. рис. 19.3.

3. Основные технологии и подходы, использованные при проектировании и разработке комплекса программ

Проектирование и разработка комплекса программ реализованы на языке программирования Python (версия 3.9.7 64-bit), входящем в состав платформы Anaconda (версия 2021.11 64-bit). Применялись следующие инструменты: интегрированная среда разработки Spyder (версия 5.1.5); дизайнер графического интерфейса Qt Designer (версия 5.9.7). Перечень использованных библиотек: tkinter и PyQt5 (создание графических интерфейсов); math и random (вычисление значений математических функций и констант, получение псевдослучайных последовательностей чисел); subprocess, os, shutil и sys (управление процессами, взаимодействие с операционной системой и интерпретатором).

Комплекс реализован в виде отдельных программных модулей, выполняющих взаимосвязанные функции, см. рис. 19.19.

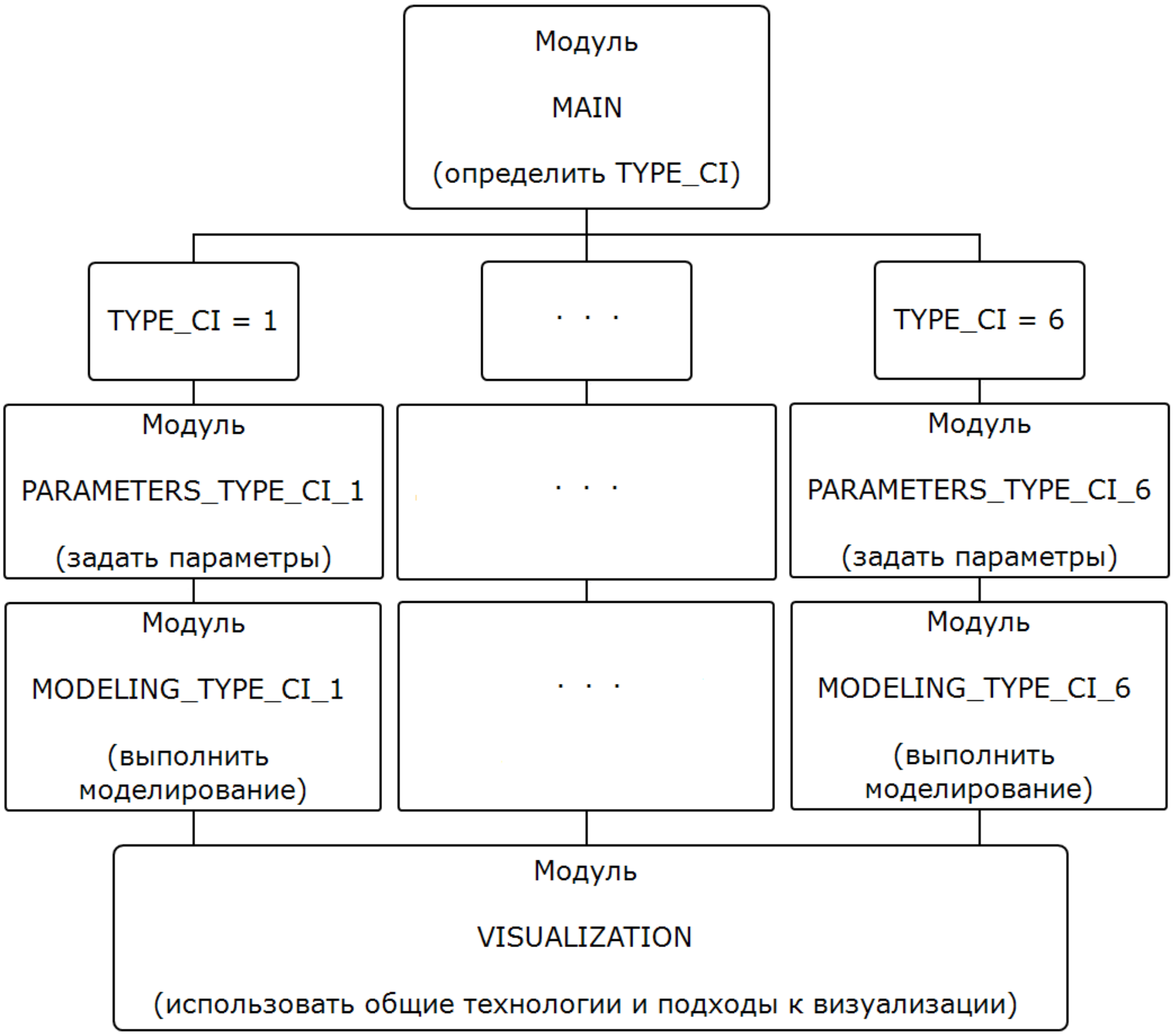


Рис. 19.19. Схема взаимосвязей основных модулей комплекса программ

Основные модули комплекса программ:

`MAIN` — модуль, в котором определяется тип задач конфликтного взаимодействия («Тип 1» — «`TYPE_CI = 1`», ..., «Тип 6» — «`TYPE_CI = 6`») и логика работы комплекса;

`PARAMETERS_TYPE_CI_1`, ..., `PARAMETERS_TYPE_CI_6` — модули, в которых задаются параметры задач конфликтного взаимодействия соответствующего типа («Тип 1», ..., «Тип 6»);

`MODELING_TYPE_CI_1`, ..., `MODELING_TYPE_CI_6` — модули, реализующие вычислительные схемы, рассмотренные в пятой главе;

`VISUALIZATION` — модуль, в котором определяются общие технологии и подходы к визуализации.

Отметим, что каждая из шести пар модулей (`PARAMETERS_TYPE_CI_1` и `MODELING_TYPE_CI_1`, ..., `PARAMETERS_TYPE_CI_6` и `MODELING_TYPE_CI_6`) отвечает за особенности функционирования своего типа задач конфликтного взаимодействия («Тип 1» — «`TYPE_CI = 1`», ..., «Тип 6» — «`TYPE_CI = 6`»). Это означает, что в логику комплекса заложена возможность его дальнейшего расширения — для исследования нового типа задач конфликтного взаимодействия необходимо добавить пару модулей (`PARAMETERS_TYPE_CI_N` и `MODELING_TYPE_CI_N`) в схему взаимосвязей основных модулей комплекса (см. рис. 19.19).

Все необходимые составляющие комплекса программ расположены в одной папке Software Packages.

Приведем основные характеристика компьютера, на котором проектировался и разрабатывался комплекс программ, а также проводились вычислительные эксперименты (их результаты приведены в следующих параграфах): операционная система — Windows 10 64-bit; процессор — Intel Core i3-4005U 1.7 ГГц; оперативная память — DDR3 6 ГБ; видеокарта — NVIDIA GeForce 840M; диск 1 — SSD 110 ГБ; диск 2 — HDD 930 ГБ.

§ 20. Моделирование одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования

Работа комплекса программ, в том числе порядок проведение вычислительных экспериментов, рассмотрена в § 19. Для проведения моделирования задачи простого группового преследования, рассмотренной в § 1, необходимо в области выбора типа задач конфликтного взаимодействия главного окна комплекса программ указать вкладку «Тип 1» (см. рис. 19.4).

Напомним вкратце постановку задачи § 1 для случая $k = 2$.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i \ &: \ \dot{x}_i = u_i, \ \ u_i \in U(t), \ \ x_i(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\ E \ &: \ \dot{y} = v, \quad v \in U(t), \quad y(t_0) = Y^0, \end{aligned} \tag{20.1}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^2$; для множества допустимых управлений $U(t)$ выполнено предположение о том, что существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ второго порядка и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^2$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Если выполнены достаточные условия одновременной многократной поимки (теоремы 1.3 и 1.4), то преследователи реализуют одновременную многократную поимку при любых допустимых управлениях убегающего.

П р и м е р 20.1. Рассмотрим игру $\Gamma_{20.1}$ вида (20.1) при $t_0 = 0$, $b = 2$, $n = 5$,

$$Y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ X_i^0 = \begin{pmatrix} 3\cos\dfrac{2\pi(i-1)}{5} + 1 \\ 3\sin\dfrac{2\pi(i-1)}{5} + 1 \end{pmatrix}, i \in I(5), \ B(t) = \mathcal{I}, g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 1.4 следует, что в игре $\Gamma_{20.1}$ возможна одновременная двукратная поимка. Фрагменты моделирования, выполненного в комплексе программ, приведены на рис. 20.1.

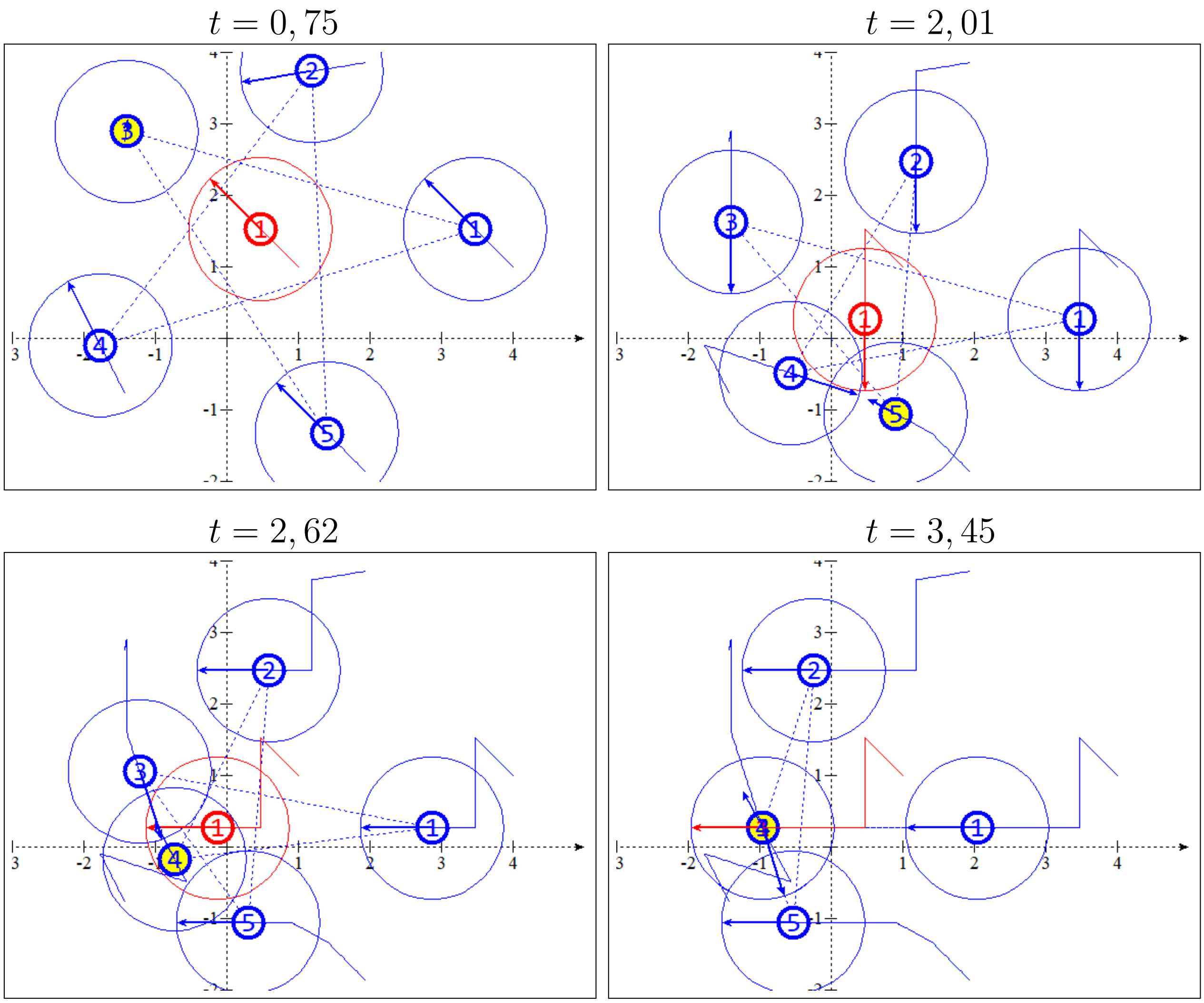


Рис. 20.1. Реализация одновременной двукратной поимки в игре $\Gamma_{20.1}$

Можно использовать комплекс программ для определения управлений преследователей и в случае, когда достаточные условия одновременной многократной поимки не выполнены, например, если есть основания полагать, что убегающий может использовать неразумное поведение.

Пример 20.2. Рассмотрим игру $\Gamma_{20.2}$ вида (20.1) при $t_0 = 0$, $b = 4$, $n = 4$,

$$Y^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ X_i^0 = \begin{pmatrix} 2\cos\dfrac{2\pi(i-1)}{4} \\ 2\sin\dfrac{2\pi(i-1)}{4} \end{pmatrix}, \ i \in I(4), \ B(t) = \mathcal{I}, \ g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 1.2 следует, что в игре $\Gamma_{20.2}$ возможно уклонения от встречи, например, при $v(t) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)^{\mathrm{T}}$. Пусть убегающий использует управление $v(t) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^{\mathrm{T}}$, в этом случае преследователи могут осуществить одновременную 4-кратную поимку (см. рис. 20.2).

$t = 0,48$ $t = 2,36$

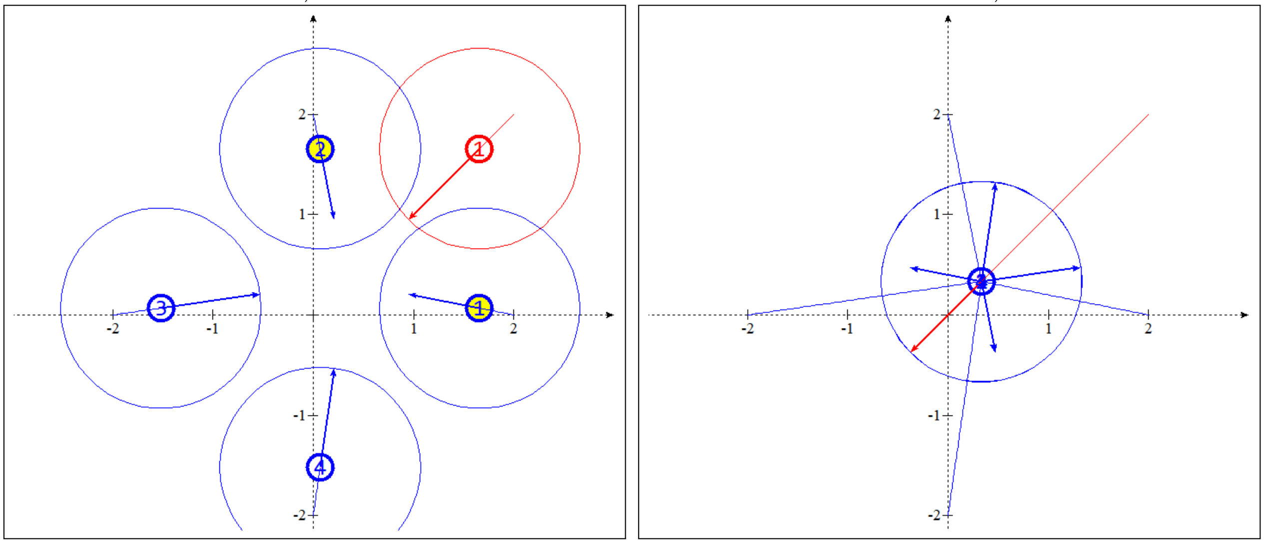


Рис. 20.2. Одновременная 4-кратная поимка в игре $\Gamma_{20.2}$ при использовании убегающим E управления $v(t) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)^{\mathrm{T}}$

Если выполнено условие уклонения от встречи, то можно задать управление убегающего и показать, что поимки не происходит.

Пример 20.3. Рассмотрим игру $\Gamma_{20.3}$ вида (20.1) при $t_0 = 0$, $b = 1$, $n = 4$,

$$Y^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; X_i^0 = \begin{pmatrix} 4 \\ i - 0,5 \end{pmatrix}, \; i \in I(4),$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 2 + 0,5\cos(\pi t) & 0 \\ 0 & 1 + 0,5\sin(\pi t) \end{pmatrix}, \; g(t) = \begin{pmatrix} \cos(5t) \\ \sin(5t) \end{pmatrix}.$$

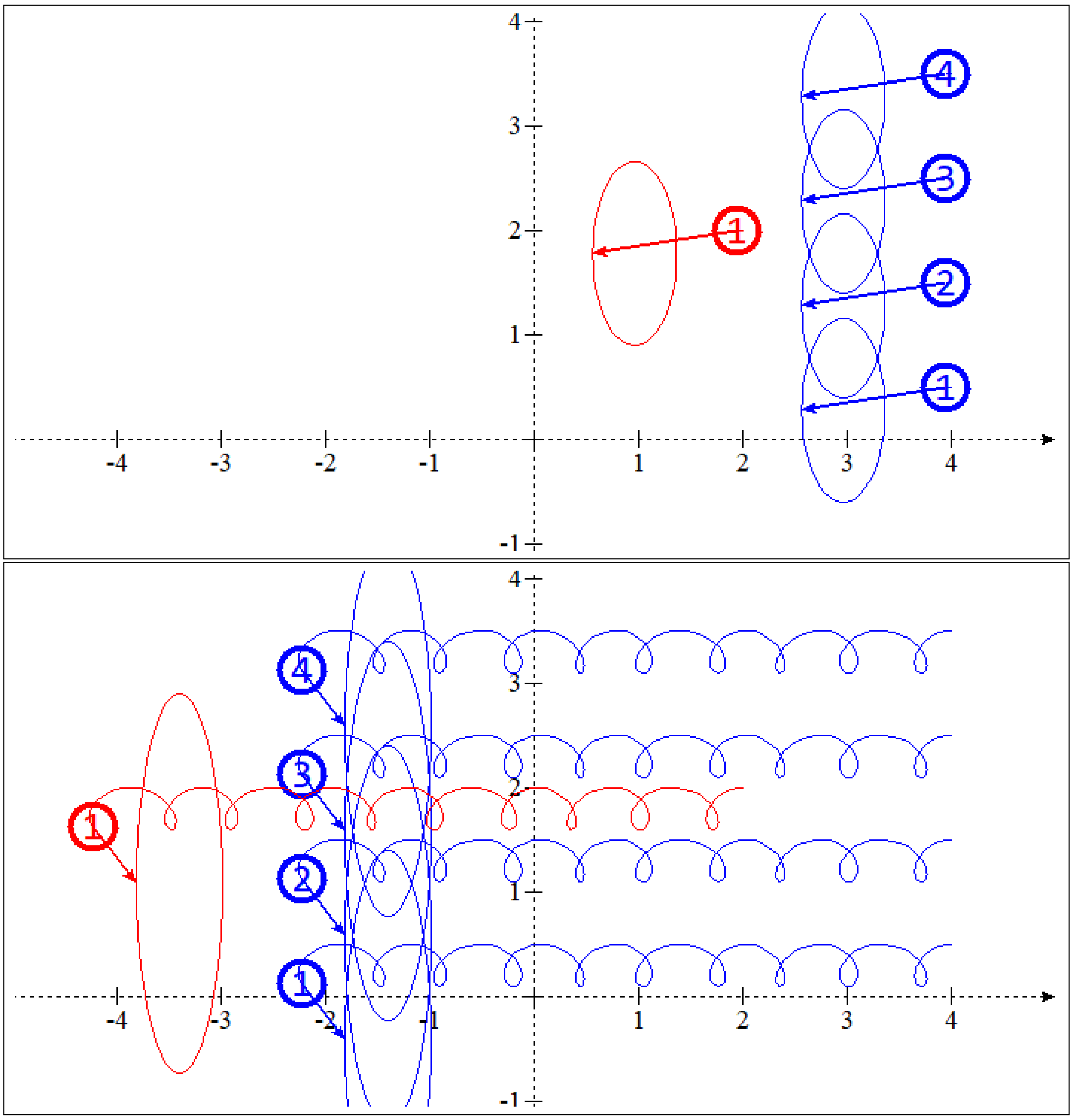
Из теоремы 1.2 следует, что в игре $\Gamma_{20.3}$ возможно уклонения от встречи. Пусть убегающий использует управление

$$v(t) = B^{-1}(t)(-1,0)^{\mathrm{T}} - g(t) = (-(2+0,5\cos(\pi t))^{-1} - \cos(5t), -\sin(5t))^{\mathrm{T}},$$

в этом случае поимки не происходит (см. рис. 20.3).

Комплекс программ используется для проверки гипотез о разрешимости близких по постановке задач.

Пример 20.4. В пространстве $\mathbb{R}^k$ $(k \geqslant 2)$ рассмотрим игру $\Gamma_{20.4}$ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)



$t = \ 0,04$

$t = 11,82$

Рис. 20.3. Уклонение от встречи в игре $\Gamma_{20.3}$. Убегающий E использует управление $v(t) = (-(2+0,5\cos(\pi t))^{-1} - \cos(5t), -\sin(5t))^{\mathrm{T}}$

$$
\begin{aligned}
P_i \ &: \ \dot{x}_i = u_i, \ \ u_i \in S(0,1), \quad x_i(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\
E \ &: \ \dot{y} = v, \quad\ v \in S(0,1/2), \ \ y(t_0) = Y^0,
\end{aligned}
\tag{20.2}
$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^k$.

В игре $\Gamma_{20.4}$ каждый преследователь P_i, $i \in I(n)$, может поймать убегающего E (скорость преследователей выше скорости убегающего в два раза). Следовательно, в игре $\Gamma_{20.4}$ возможна n-кратная поимка. Здесь может возникнуть вопрос о возможности одновременной n-кратной поимки.

Гипотеза 20.1. *В игре $\Gamma_{20.4}$ возможна одновременная n-кратная поимка из любых начальных позиций.*

Проведенное моделирование не дает оснований отвергать гипотезу 20.1 (фрагменты одного моделирования, выполненного в комплексе программ, приведены на рис. 20.4).

$t = 0,11$ $\qquad$ $t = 4,51$

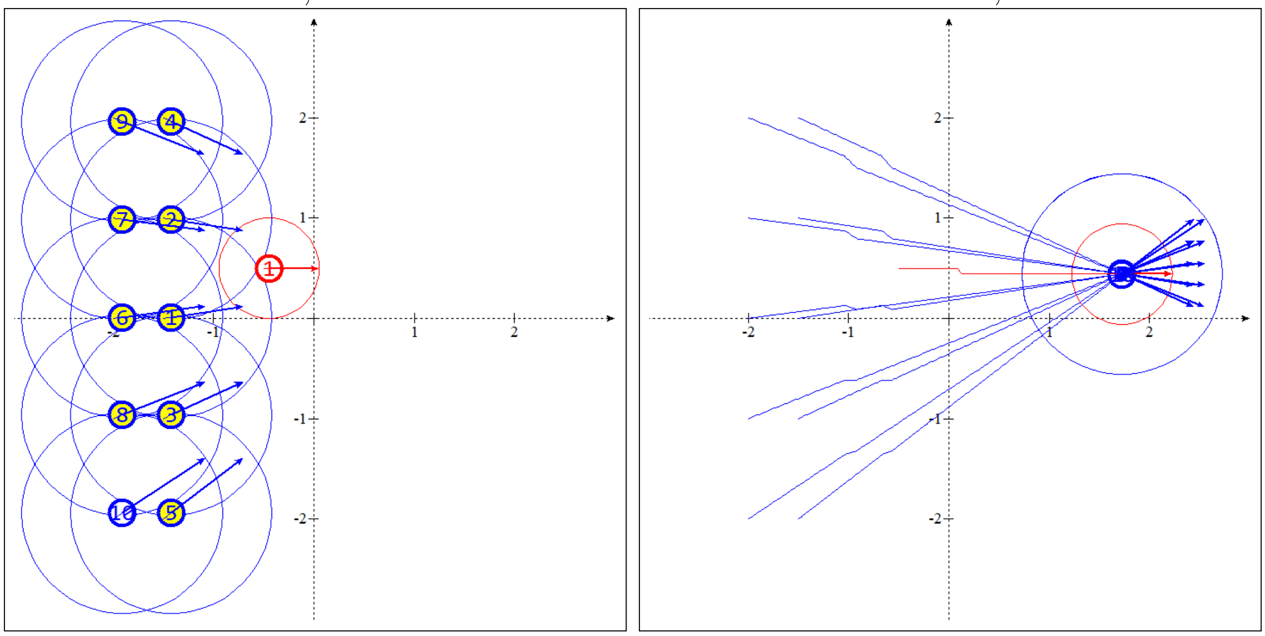


Рис. 20.4. Реализация одновременной 10-кратной поимки в игре $\Gamma_{20.4}$

Вернемся к рассмотренной в §1 игре Г. Комплекс программ позволяет искать другие или ослаблять имеющиеся условия разрешимости.

П р е д п о л о ж е н и е 20.1. Существуют кусочно-непрерывная на $[t_0, \infty)$ и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ порядка k и кусочно-непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^k$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty). \tag{20.3}$$

Г и п о т е з а 20.2. *Теоремы* 1.1 (*о достаточных условиях нестрогой одновременной многократной поимки*), 1.2 (*о необходимых условиях многократной поимки*), 1.3 (*о достаточных условиях одновременной многократной поимки*), 1.4 (*о необходимых и достаточных условиях одновременной многократной поимки*) *будут иметь место, если в их формулировках предположение* 1.1 *заменить на предположение* 20.1.

П р и м е р 20.5. Рассмотрим игру $\Gamma_{20.5}$ вида (20.1) при $t_0 = 0$, $b = 2$, $n = 5$,

$$Y^0 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \; X_i^0 = \begin{pmatrix} 3\cos\dfrac{2\pi(i-1)}{5} - 0,5 \\ 3\sin\dfrac{2\pi(i-1)}{5} + 0,5 \end{pmatrix}, \; i \in I(5), \; B(t) = \mathcal{I},$$

$$g(t) = \begin{cases} (1,1)^{\mathrm{T}}, & \text{если } \{t\} < 0,25 \\ (-1,1)^{\mathrm{T}}, & \text{если } 0,25 \leqslant \{t\} < 0,5 \\ (-1,-1)^{\mathrm{T}}, & \text{если } 0,5 \leqslant \{t\} < 0,75 \\ (1,-1)^{\mathrm{T}}, & \text{если } 0,75 \leqslant \{t\} \end{cases}, \; \{\cdot\} \text{ — дробная часть числа.}$$

Фрагменты выполненного моделирования приведены на рис. 20.5.

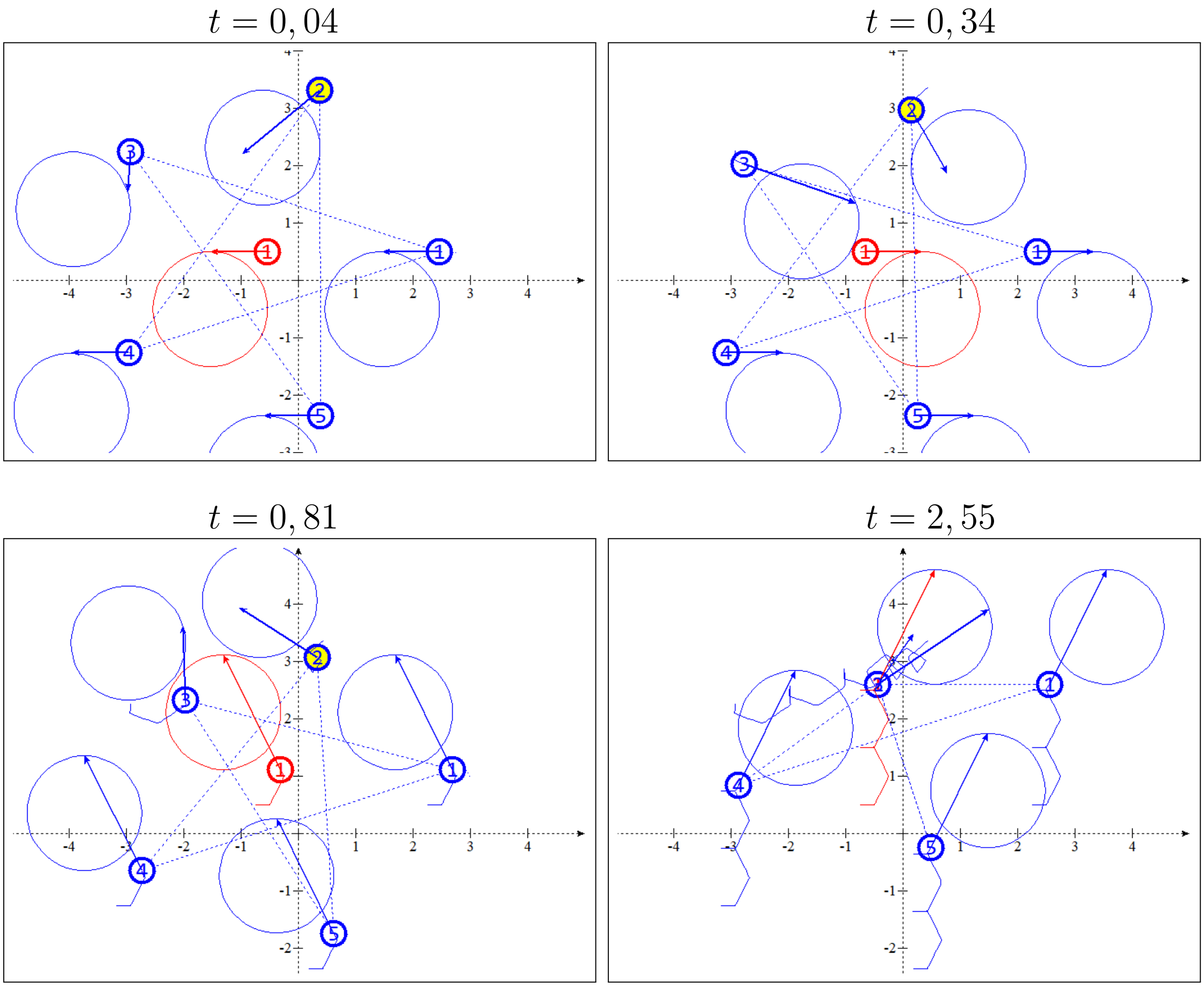


Рис. 20.5. Реализация одновременной двукратной поимки в игре $\Gamma_{20.5}$

П р и м е р 20.6. Рассмотрим игру $\Gamma_{20.6}$ вида (20.1) при $t_0 = 0$, $b = 1$, $n = 5$,

$$Y^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \end{pmatrix},\ X_i^0 = \begin{pmatrix} -3 \\ i-2 \end{pmatrix},\ i \in I(5),\ B(t) = \mathcal{I},$$

$g(t)$ такая же как в примере 20.5.

В игре $\Gamma_{20.6}$ возможно уклонения от встречи (см. рис. 20.6).

$t = 0,04$ $t = 3,68$

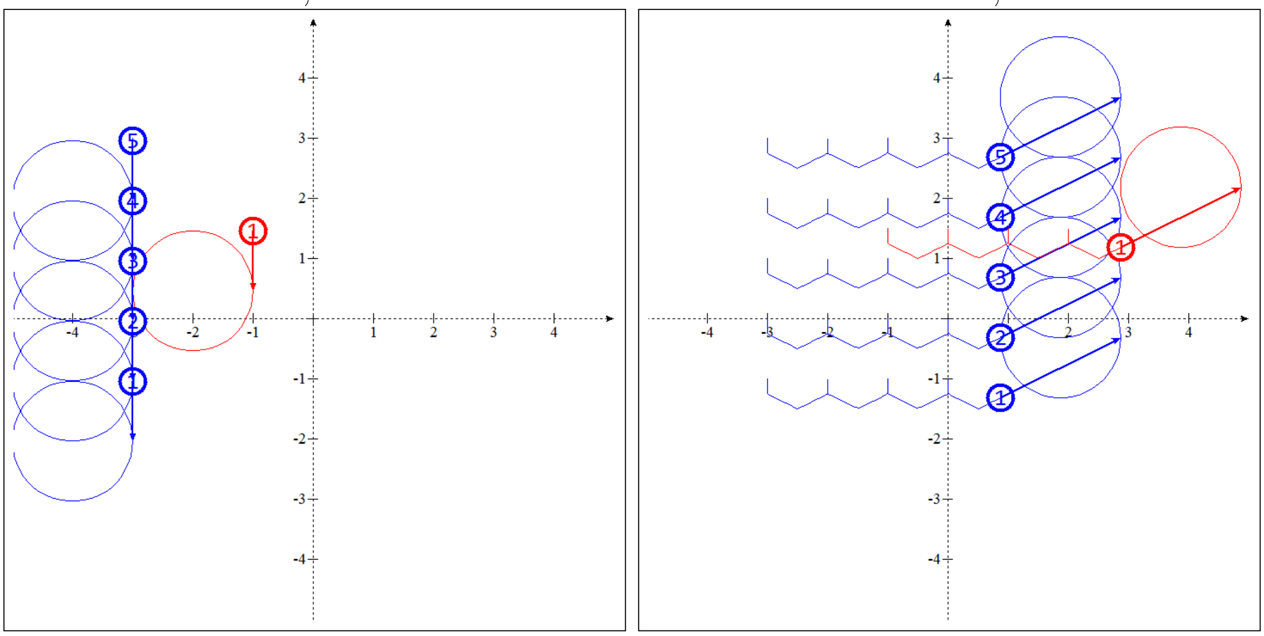


Рис. 20.6. Уклонения от встречи в игре $\Gamma_{20.6}$

Проведенное моделирование, в том числе на примерах 20.5 и 20.6, не дает оснований отвергать гипотезу 20.2.

§ 21. Моделирование одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе

Работа комплекса программ, в том числе порядок проведение вычислительных экспериментов, рассмотрена в § 19. Для проведения моделирования конфликтно управляемого процесса, рассмотренного в § 5, необходимо в области выбора типа задач конфликтного взаимодействия главного окна комплекса программ указать вкладку «Тип 2» (см. рис. 19.9).

Напомним вкратце постановку задачи § 5 для случая $k = 2$.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \dots, P_n$ и убегающего E с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i \ &: \ \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \ \ u_i \in U(t), \ \ x_i(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\ E \ &: \ \dot{y} = A(t)y + v, \qquad v \in U(t), \quad y(t_0) = Y^0, \end{aligned} \tag{21.1}$$

причем $X_i^0 \neq Y^0$ при всех $i \in I(n)$. Здесь $x_i, y \in \mathbb{R}^2$; $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица второго порядка; для множества допустимых управлений $U(t)$ выполнено предположение о том, что существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ второго порядка и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^2$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Если выполнены достаточные условия одновременной многократной поимки (теоремы 5.1 и 5.3), то преследователи реализуют одновременную многократную поимку при любых допустимых управлениях убегающего.

П р и м е р 21.1. Рассмотрим игру $\Gamma_{21.1}$ вида (21.1) при $t_0 = 0$, $b = 2$, $n = 5$,

$$Y^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_i^0 = \begin{pmatrix} \dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{2\pi(i-1)}{5} + 1 \\ \dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{2\pi(i-1)}{5} \end{pmatrix}, i \in I(5), \ B(t) = \mathcal{I}, g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{и } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ для которой } \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 5.3 следует, что в игре $\Gamma_{21.1}$ возможна одновременная двукратная поимка. Фрагменты моделирований, выполненных в комплексе программ, приведены на рис. 21.1 и 21.2.

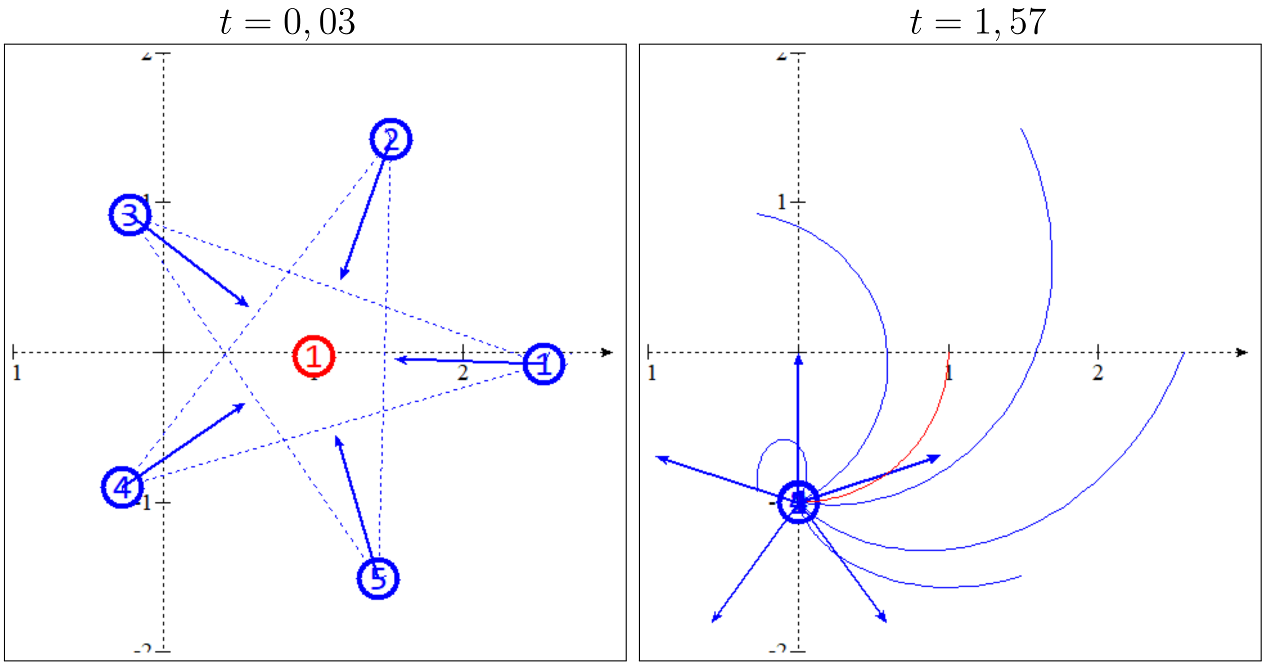


Рис. 21.1. «Случайная» реализация одновременной 5-кратной (при реализации одновременной двукратной) поимки в игре $\Gamma_{21.1}$. Убегающий E использует управление $v(t) = (0, 0)^{\mathrm{T}}$

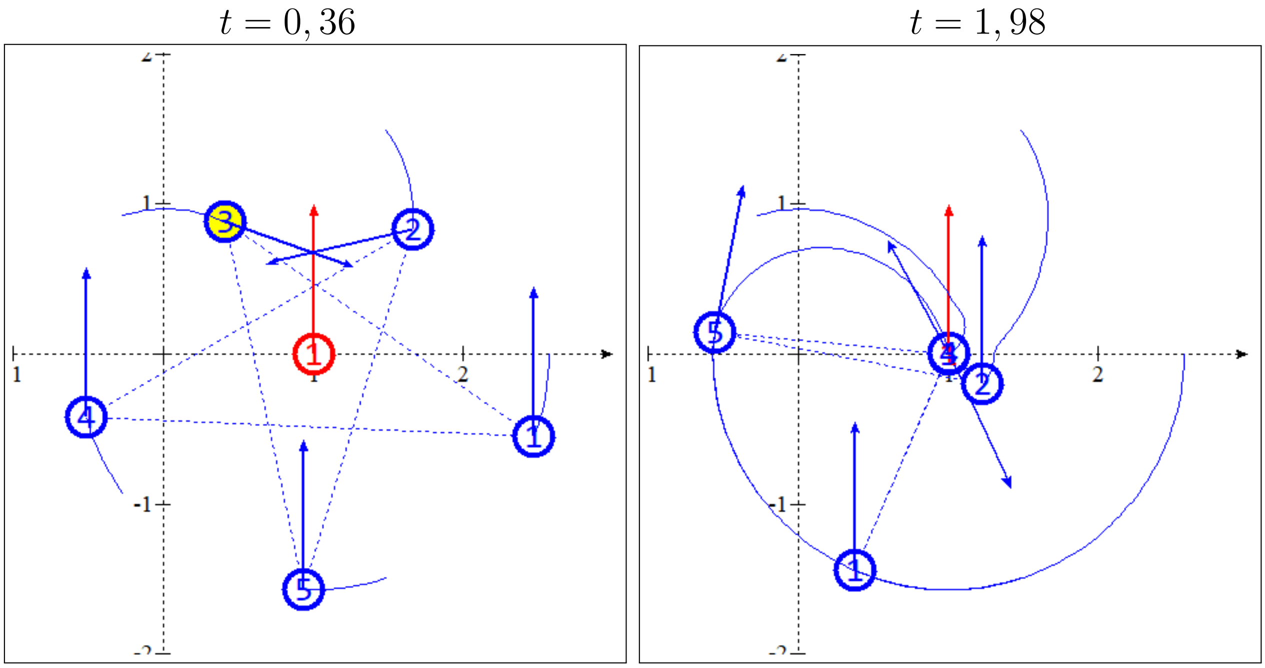


Рис. 21.2. Реализация одновременной двукратной поимки в игре $\Gamma_{21.1}$. Убегающий E использует управление $v(t) = (0, 1)^{\mathrm{T}}$

Если выполнено условие уклонения от встречи, то можно задать управление убегающего и показать, что поимки не происходит. Если же имеются основания полагать, что убегающий может использовать неразумное поведение, то можно использовать комплекс программ для определения управлений преследователей и в случае, когда достаточные условия одновременной многократной поимки не выполнены.

П р и м е р 21.2. Рассмотрим игру $\Gamma_{21.2}$ вида (21.1) при $t_0 = 0$, $b = 1$, $n = 3$,

$$Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_1^0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2^0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{pmatrix},\ X_3^0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -1 \end{pmatrix},\ B(t) = \mathcal{I},$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ для которой } \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Из теоремы 5.2 следует, что в игре $\Gamma_{21.2}$ возможно уклонения от встречи, например, при

$$v(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Фрагменты такого моделирования приведены на рис. 21.3.

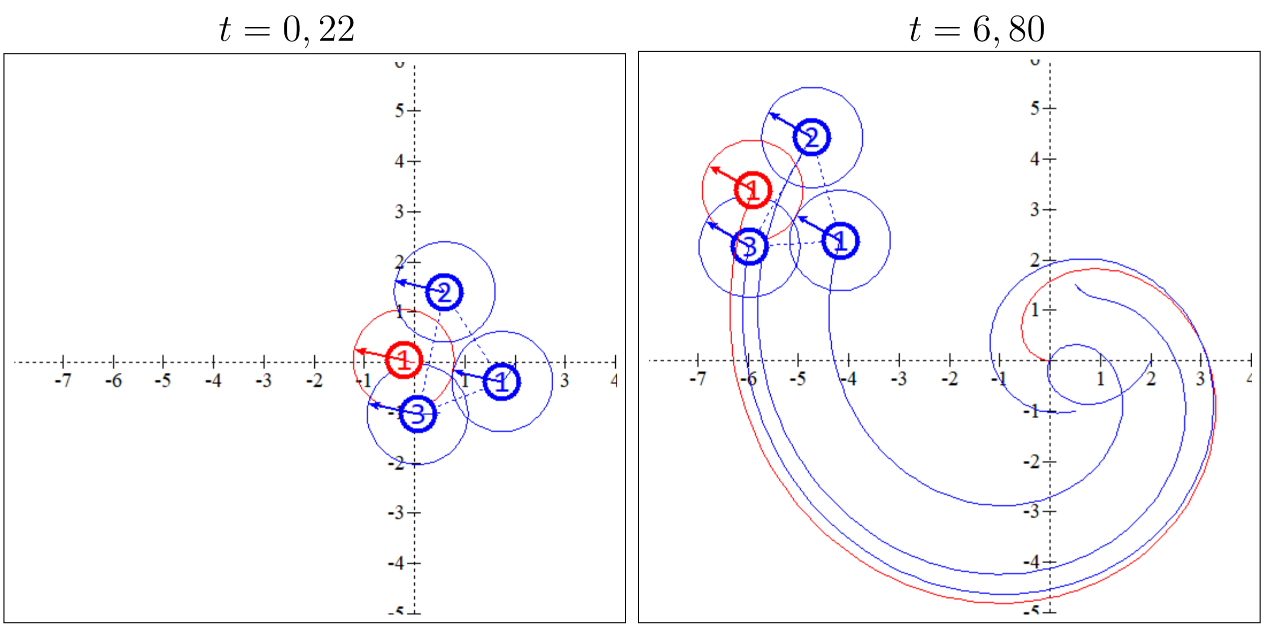


Рис. 21.3. Уклонения от встречи в игре $\Gamma_{21.2}$. Убегающий E использует управление $v(t) = \Phi(t)(-1,0)^{\mathrm{T}} = (-\cos t, \sin t)^{\mathrm{T}}$

Если убегающий будет использовать управление $v(t) = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$, то в этом случае преследователи смогут осуществить поимку, см. рис. 21.4.

$t = 0,04$ $\qquad\qquad$ $t = 1,58$

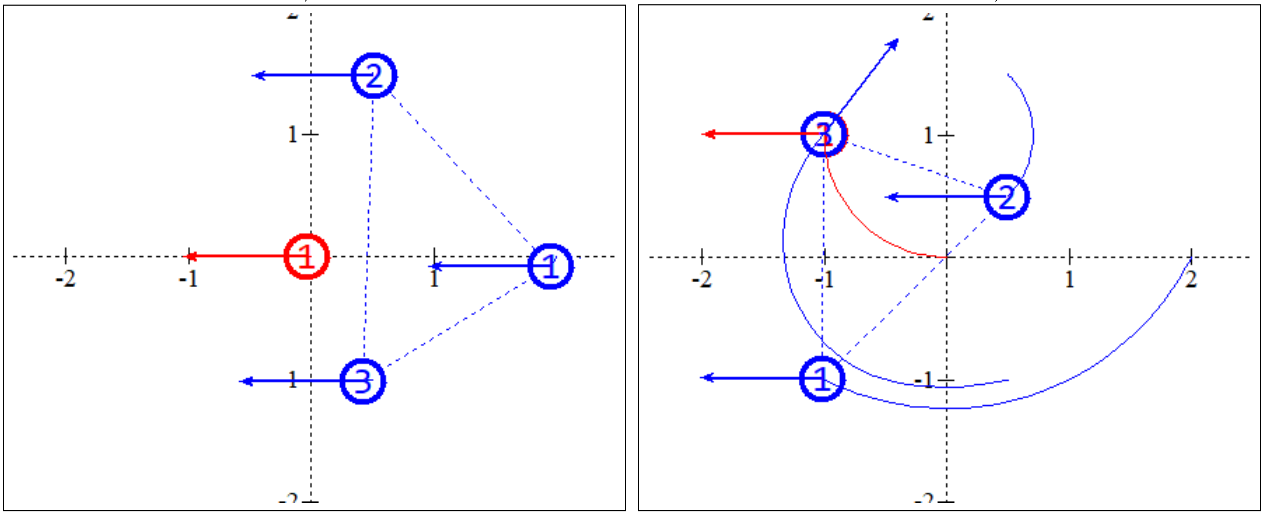


Рис. 21.4. Реализация поимки в игре $\Gamma_{21.2}$. Убегающий E использует управление $v(t) = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$

§ 22. Моделирование одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования

Работа комплекса программ, в том числе порядок проведение вычислительных экспериментов, рассмотрена в § 19. Для проведения моделирования задачи простого группового преследования, рассмотренной в § 2, необходимо в области выбора типа задач конфликтного взаимодействия главного окна комплекса программ указать вкладку «Тип 3» (см. рис. 19.11).

Напомним вкратце постановку задачи § 2 для случая $k = 2$.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i \;&:\; \dot{x}_i = u_i, \;\; u_i \in U(t), \;\; x_i(t_0) = X_i^0, \;\; i \in I(n), \\ E_j \;&:\; \dot{y}_j = v, \quad v \in U(t), \quad y_j(t_0) = Y_j^0, \;\; j \in I(m), \end{aligned} \tag{22.1}$$

причем $X_i^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n)$, $j \in I(m)$. Здесь x_i, $y_j \in \mathbb{R}^2$; для множества допустимых управлений $U(t)$ выполнено предположение о том, что существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ второго порядка и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^2$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Если выполнены достаточные условия одновременной многократной поимки (теоремы 2.1 и 2.2), то преследователи могут ее реализовать при любом допустимом управлении убегающих.

П р и м е р 22.1. Рассмотрим игру $\Gamma_{22.1}$ вида (22.1) при $t_0 = 0$, $b = 2$, $n = 5$, $m = 5$, $B(t) = (2 + \cos(2t))\mathcal{I}$, $g(t) = (1/3, 0)^{\mathrm{T}}$,

$$Y_j^0 = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi(j-1)}{5} \\ \sin\dfrac{2\pi(j-1)}{5} + 1 \end{pmatrix}, j \in I(5), X_i^0 = \begin{pmatrix} 3\cos\dfrac{2\pi(i-1)}{5} \\ 3\sin\dfrac{2\pi(i-1)}{5} + 1 \end{pmatrix}, i \in I(5).$$

Условие 2.2 имеет место (достаточно выбрать $j_i = i$). Из теоремы 2.2 следует, что в игре $\Gamma_{22.1}$ возможна одновременная двукратная поимка. Фрагменты двух моделирований, выполненных в комплексе программ, приведены на рис. 22.1 и 22.2.

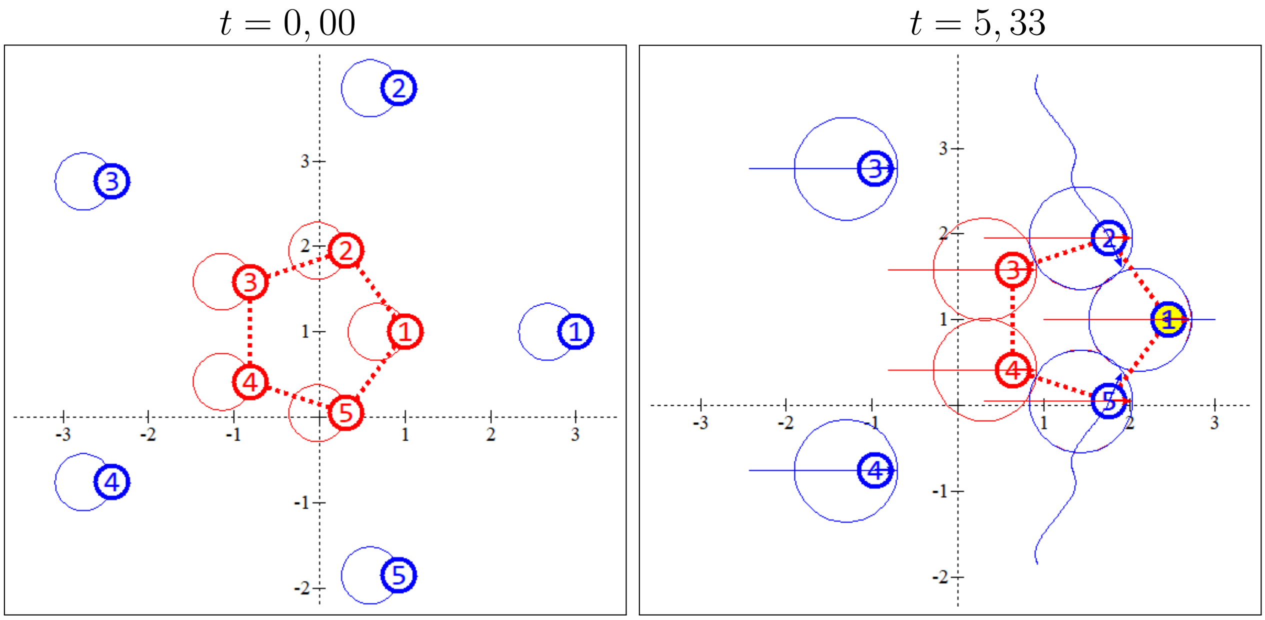


Рис. 22.1. «Случайная» реализация одновременной 3-кратной (при реализации одновременной двукратной) поимки в игре $\Gamma_{22.1}$. Убегающие E_j используют управление $v(t) = B^{-1}(t)(1,0)^{\mathrm{T}} - g(t) = ((2+\cos(2t))^{-1} - 1/3, 0)^{\mathrm{T}}$

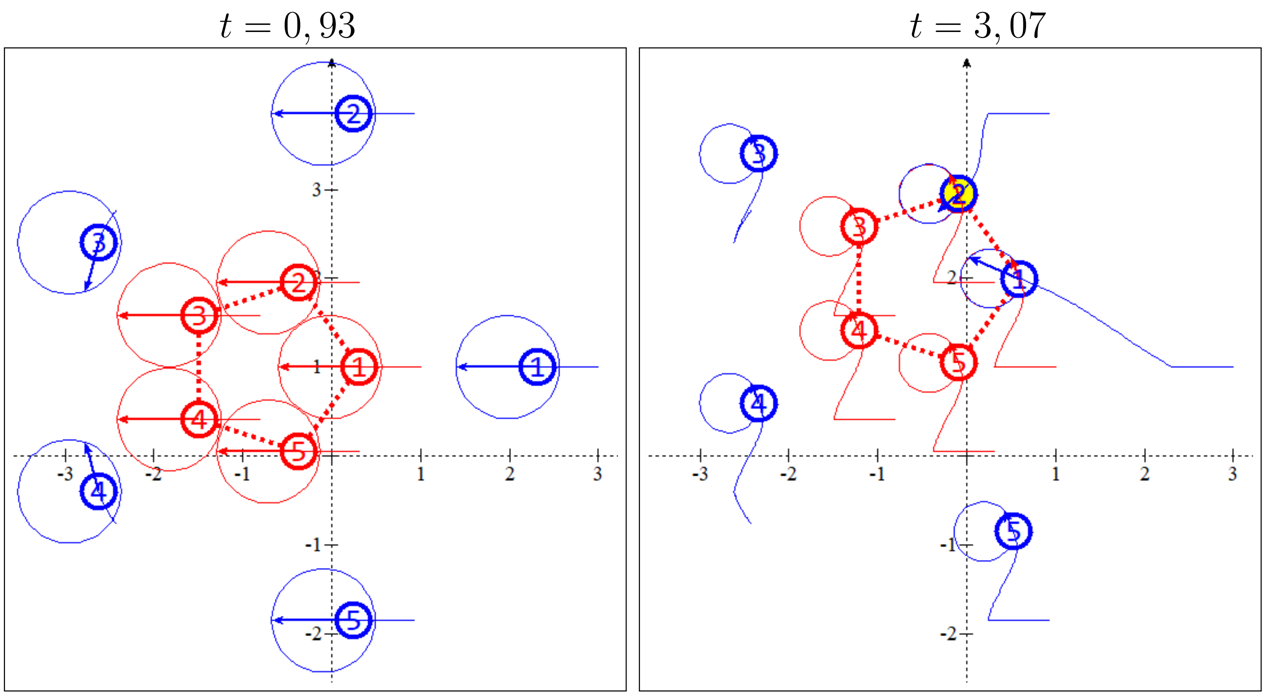


Рис. 22.2. Реализация одновременной двукратной поимки в игре $\Gamma_{22.1}$

Пример 22.2. Рассмотрим игру $\Gamma_{22.2}$ вида (22.1) при $t_0 = 0$, $b = 4$, $n = 9$, $m = 9$, $B(t) = \mathcal{I}$, $g(t) = (0, 0)^{\mathrm{T}}$,

$$Y_j^0 = \begin{pmatrix} 3\cos\dfrac{2\pi(j-1)}{9} \\ 3\sin\dfrac{2\pi(j-1)}{9} \end{pmatrix}, j \in I(9), X_i^0 = \begin{pmatrix} 2\cos\dfrac{2\pi(i-1)}{9} \\ 2\sin\dfrac{2\pi(i-1)}{9} \end{pmatrix}, i \in I(9).$$

Условие 2.2 имеет место (достаточно выбрать $j_i = i$). Из теоремы 2.2 следует, что в игре $\Gamma_{22.2}$ возможна одновременная 4-кратная поимка, см. рис. 22.3.

$t = 0,03$ $\qquad\qquad$ $t = 2,08$

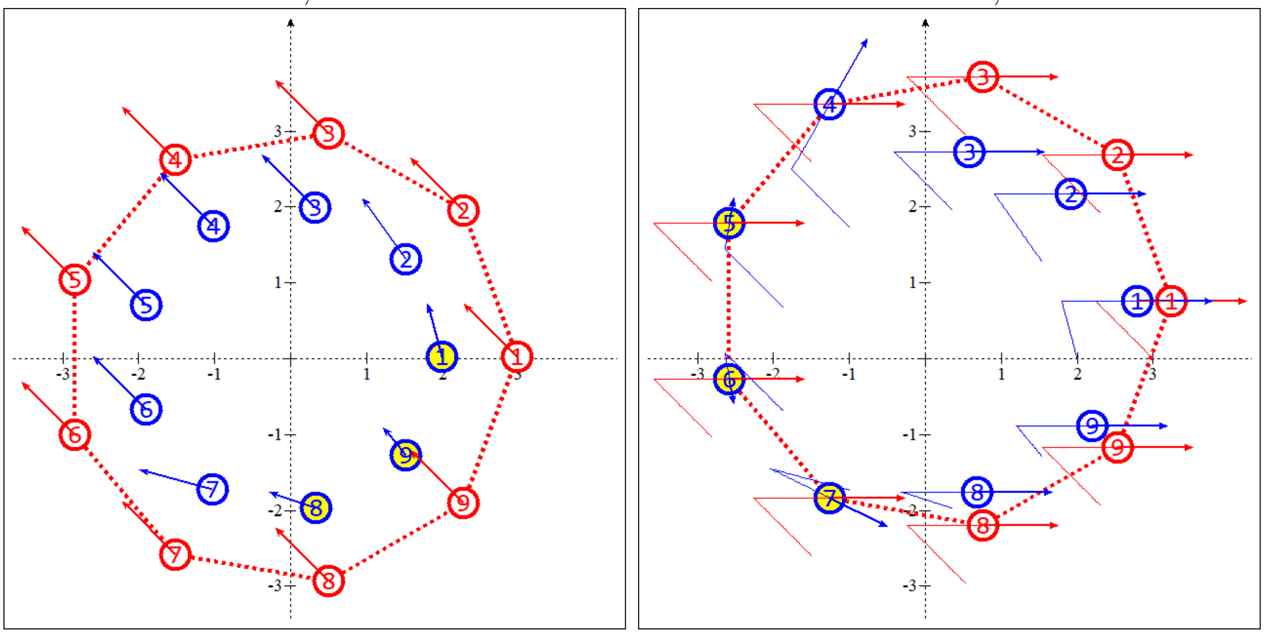


Рис. 22.3. Реализация одновременной 4-кратной поимки в игре $\Gamma_{22.2}$

§ 23. Моделирование одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе

Работа комплекса программ, в том числе порядок проведение вычислительных экспериментов, рассмотрена в § 19. Для проведения моделирования конфликтно управляемого процесса, рассмотренного в § 6, необходимо в области выбора типа задач конфликтного взаимодействия главного окна комплекса программ указать вкладку «Тип 4» (см. рис. 19.13).

Напомним вкратце постановку задачи § 6 для случая $k = 2$.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ рассматривается дифференциальная игра Γ $n+m$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$ и m убегающих $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned} P_i \ &: \ \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \ \ u_i \in U(t), \ \ x_i(t_0) = X_i^0, \ \ i \in I(n), \\ E_j \ &: \ \dot{y}_j = A(t)y_j + v, \ \ \ v \in U(t), \ \ \ y_j(t_0) = Y_j^0, \ \ j \in I(m), \end{aligned} \tag{23.1}$$

причем $X_i^0 \neq Y_j^0$ при всех $i \in I(n)$, $j \in I(m)$. Здесь x_i, $y_j \in \mathbb{R}^2$; $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица второго порядка; для множества допустимых управлений $U(t)$ выполнено предположение о том, что существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ второго порядка и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^2$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

Если выполнены достаточные условия одновременной многократной поимки (теоремы 6.1 и 6.2), то преследователи могут ее реализовать при любом допустимом управлении убегающих.

П р и м е р 23.1. Рассмотрим игру $\Gamma_{23.1}$ вида (23.1) при $t_0 = 0$, $b = 2$, $n = 5$, $m = 5$, $B(t) = \mathcal{I}$, $g(t) = (0, 0)^{\mathrm{T}}$,

$$Y_j^0 = \begin{pmatrix} 2\cos\dfrac{2\pi(j-1)}{5} \\ 3\sin\dfrac{2\pi(j-1)}{5} \end{pmatrix}, j \in I(5), X_i^0 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2\cos\dfrac{2\pi(i-1)}{5} \\ 3\sin\dfrac{2\pi(i-1)}{5} \end{pmatrix}, i \in I(5),$$

и $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t \sin t & -\cos t \\ 2\cos t - \cos^3 t & -\cos t \sin t \end{pmatrix}$, для нее $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\sin t \\ \sin t & \cos^2 t \end{pmatrix}$.

Условие 6.2 имеет место (достаточно выбрать $j_i = i$). Из теоремы 6.2 следует, что в игре $\Gamma_{23.1}$ возможна одновременная двукратная поимка, см. рис. 23.1.

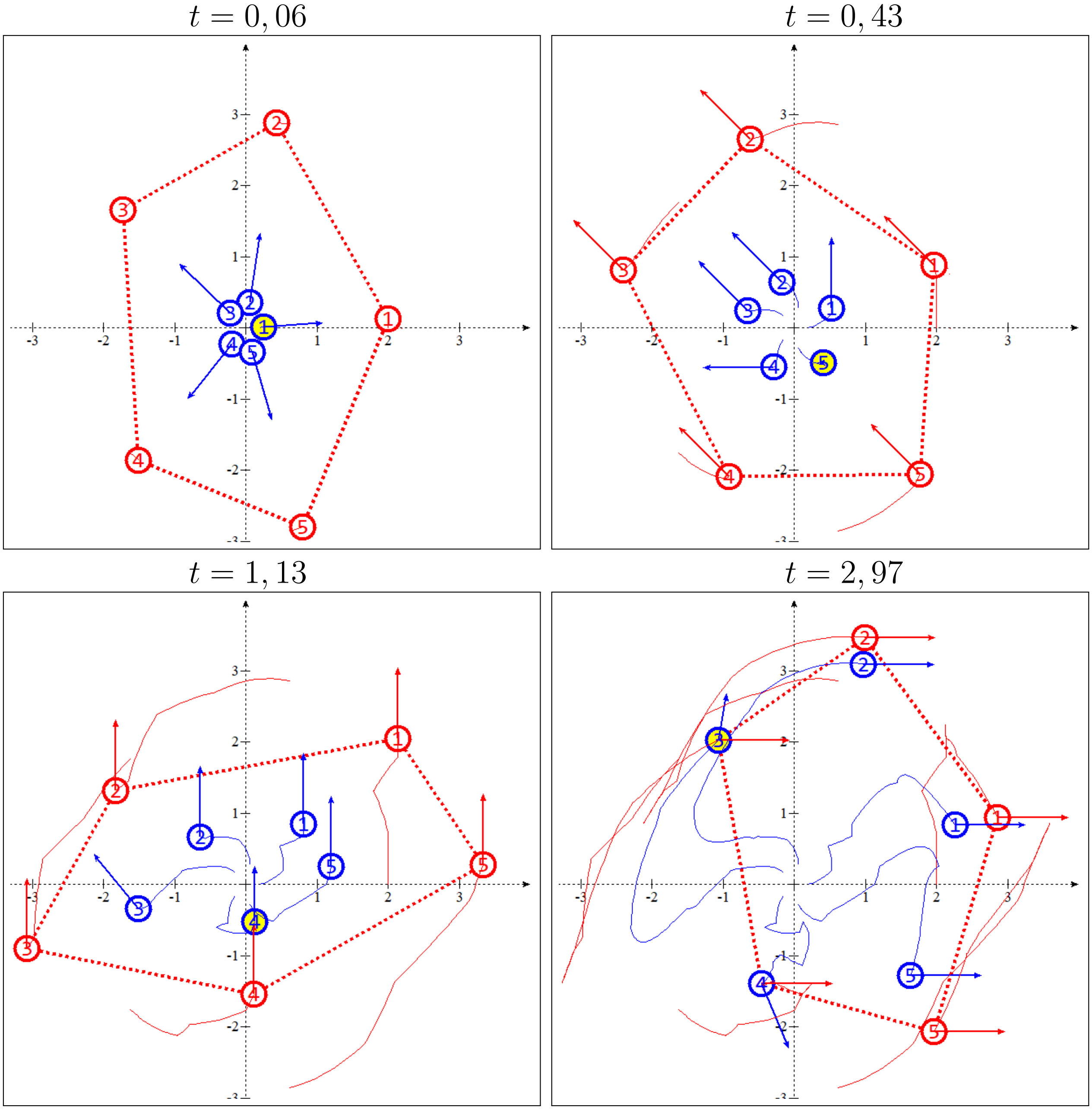


Рис. 23.1. Реализация одновременной двукратной поимки в игре $\Gamma_{23.1}$

П р и м е р 23.2. Рассмотрим игру $\Gamma_{23.2}$ вида (23.1) при $t_0 = 0$, $b = 1$, $n = 3$, $m = 2$, $B(t) = \mathcal{I}$, $g(t) = (0, 0)^{\mathrm{T}}$,

$$Y_1^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ Y_2^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_1^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ X_2^0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ X_3^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

и $A(t) = \begin{pmatrix} \pi\cos(\pi t) & 0 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}$, для нее $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\sin(\pi t)} & 0 \\ 0 & e^{\cos t - 1} \end{pmatrix}$.

Условие 6.2 имеет место ($j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 1$). Из теоремы 6.2 следует, что в игре $\Gamma_{23.2}$ возможна поимка (однократная), см. рис. 23.2 и 23.3.

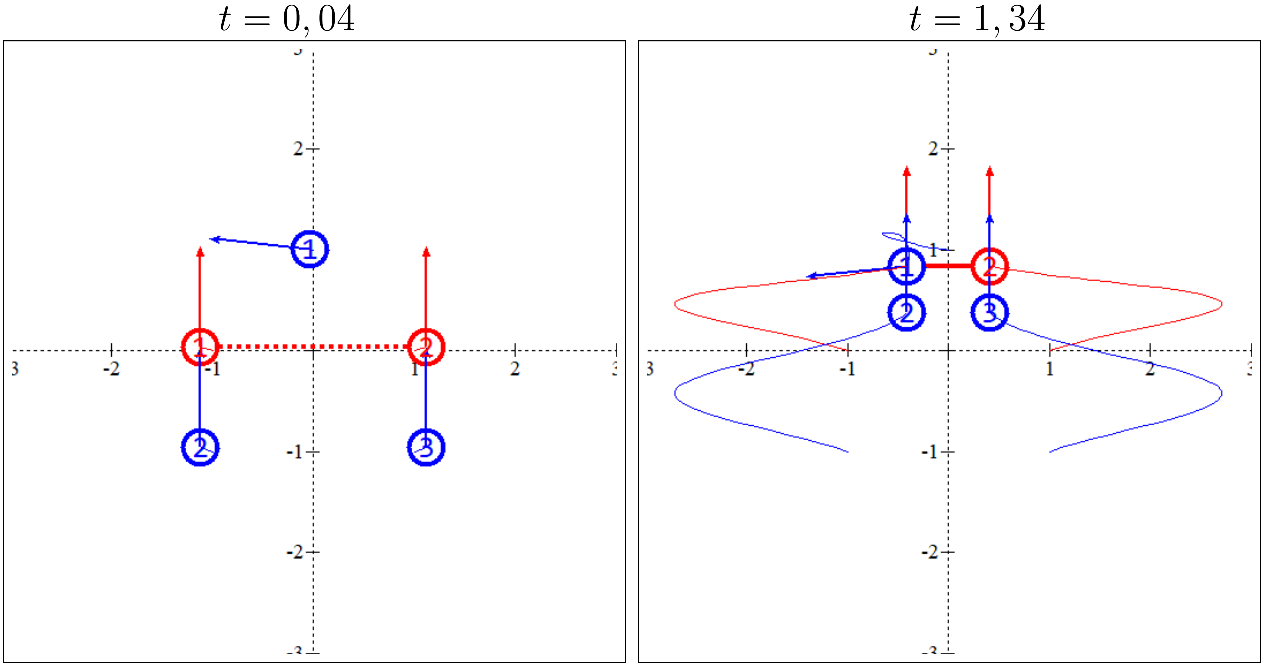


Рис. 23.2. Реализация поимки в игре $\Gamma_{23.2}$. Убегающие E_1, E_2 используют управление $v(t) = (0, 1)^{\mathrm{T}}$

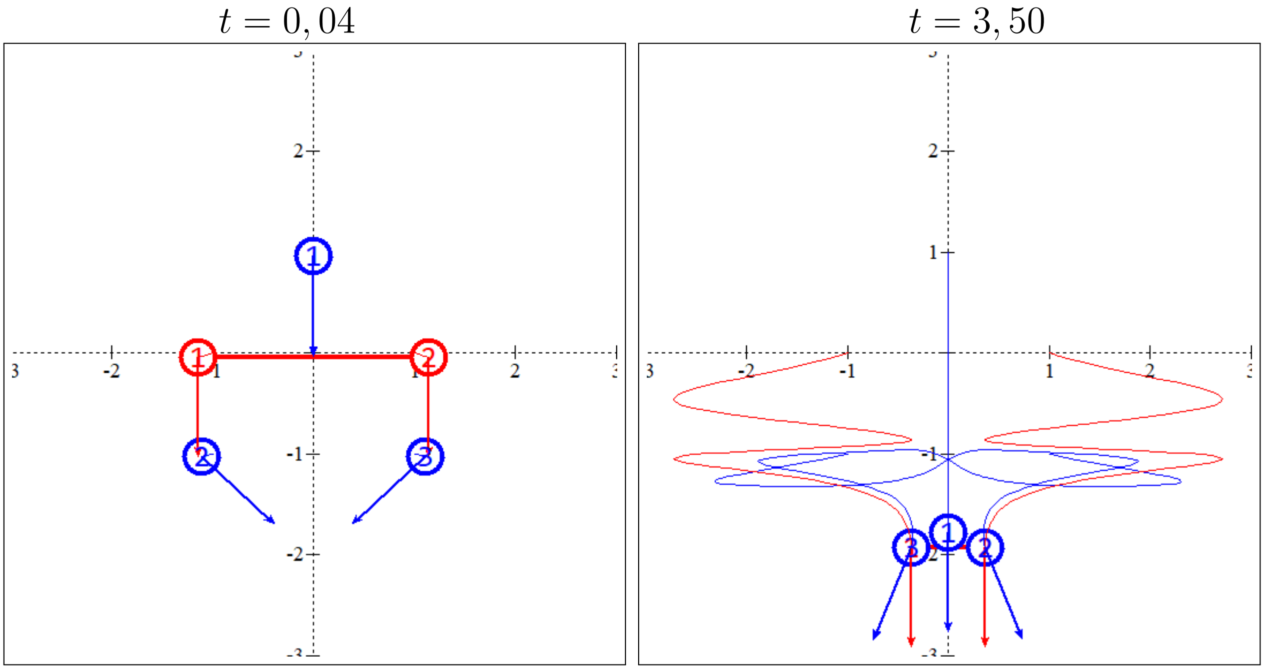


Рис. 23.3. «Случайная» реализация одновременной двукратной поимки (при реализации поимки) в игре $\Gamma_{23.2}$. Убегающие E_1, E_2 используют управление $v(t) = (0, -1)^{\mathrm{T}}$

§ 24. Моделирование действий слабого защитника убегающего в задаче простого группового преследования

Работа комплекса программ, в том числе порядок проведение вычислительных экспериментов, рассмотрена в § 19. Для проведения моделирования задачи простого группового преследования, рассмотренной в § 4, необходимо в области выбора типа задач конфликтного взаимодействия главного окна комплекса программ указать вкладку «Тип 5» (см. рис. 19.15).

Напомним вкратце постановку задачи § 4 для случая $k = 2$.

В пространстве R^2 рассматривается дифференциальная игра Γ $n + r + 1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, \ldots, D_r$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{array}{llllll} P_i & : \dot{x}_i = u_i, & u_i \in U(t), & x_i(t_0) = X_i^0, & & i \in I(n), \\ E & : \dot{y} = v, & v \in U(t), & y(t_0) = Y^0, & & \\ D_j & : \dot{z}_j = w_j, & w_j \in U(t), & z_j(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), & & j \in I(r). \end{array} \tag{24.1}$$

Здесь $x_i, y, z_j \in \mathbb{R}^2$; для множества допустимых управлений $U(t)$ выполнено предположение о том, что существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ второго порядка и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^2$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

В системе (24.1) заданы начальные позиции X_i^0, Y^0, причем $X_i^0 \neq Y^0$ для всех $i \in I(n)$. Каждый защитник D_j, $j \in I(r)$, выбирает свою начальную позицию $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ до начала движения участников, причем $L > 0$ — такая фиксированная постоянная, что $X_i^0 \notin S(Y^0, L)$ для всех $i \in I(n)$.

Рассматривается вариант игры, в котором все защитники убегающего D_j, $j \in I(r)$, слабые. Это означает, что в случае $y(\theta) = x_i(\theta) = z_j(\theta)$ происходит поимка (преследователь до момента гибели успевает поймать убегающего). Следовательно, чтобы поимки не произошло слабый защитник D_j должен обеспечить выполнение следующих соотношений $y(\theta) \neq x_i(\theta) = z_j(\theta)$ (уничтожить преследователя раньше, чем последний поймает убегающего).

В игре со слабыми защитниками убегающего от всех участников дополнительно требуется, чтобы выполнялось предположение 4.2 (все игроки используют допустимые управления, являющиеся кусочно-постоянными функциями на $[t_0, \infty)$).

Если выполнены достаточные условия одновременной многократной поимки (теоремы 4.4 и 4.6), то преследователи реализуют одновременную многократную поимку при любых допустимых управлениях убегающего и его группы защитников.

Пример 24.1. Сначала рассмотрим игру $\Gamma_{24.1}$ вида (24.1) без защитников ($r = 0$) при $t_0 = 0$, $n = 5$,

$$Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix}, X_i^0 = \begin{pmatrix} 4\cos\dfrac{2\pi(i-1)}{5} \\ 4\sin\dfrac{2\pi(i-1)}{5} + 1 \end{pmatrix}, i \in I(5), B(t) = \mathcal{I}, g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Условие 4.1 выполнено при $(b + r) = 1$ или 2, а при $(b + r) \geqslant 3$ — не выполнено. Из теоремы 4.6 (так как здесь $r = 0$) следует, что в игре $\Gamma_{24.1}$ возможна одновременная двукратная поимка, причем поимка большей кратности (при правильном поведении убегающего) невозможна. Фрагменты моделирования, выполненного в комплексе программ, приведены на рис. 24.1.

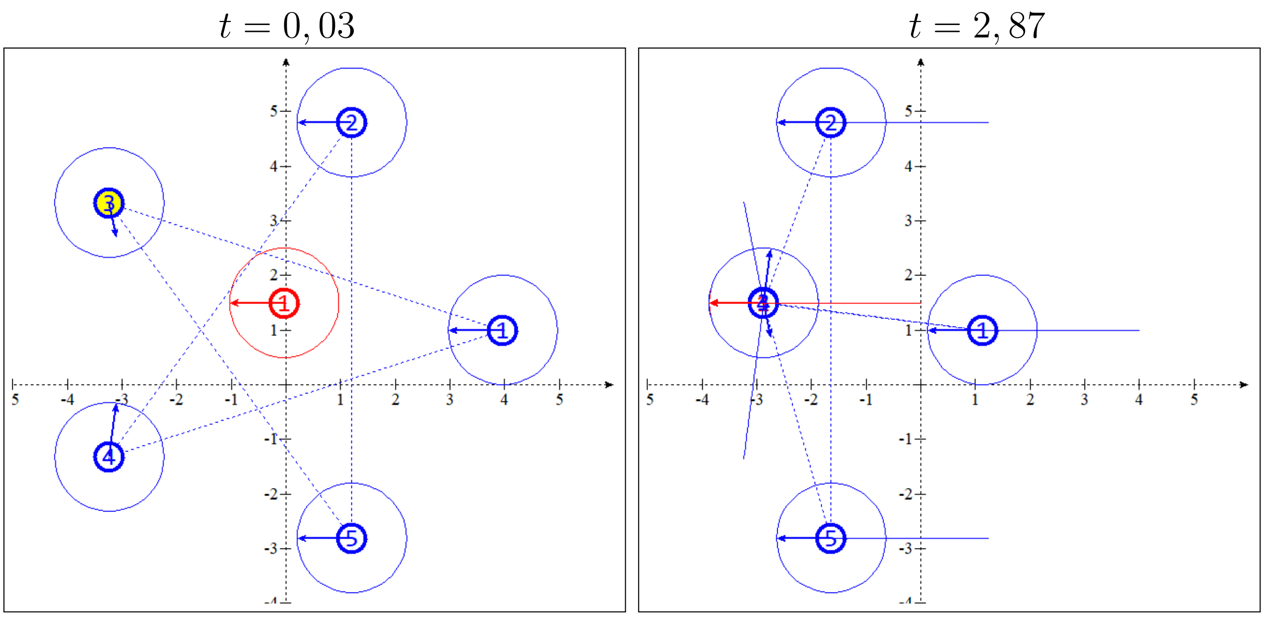


Рис. 24.1. Реализация одновременной двукратной поимки в игре $\Gamma_{24.1}$. Убегающий E использует управление $v(t) = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$

П р и м е р 24.2. Теперь рассмотрим игру $\Gamma_{24.2}$ вида (24.1) с одним защитником убегающего ($r = 1$), в которой $L = 2$, а остальные параметры совпадают с параметрами игры $\Gamma_{24.1}$.

Из теоремы 4.6 (так как здесь $r = 1$) следует, что в игре $\Gamma_{24.2}$ возможна (однократная) поимка, причем поимка большей кратности (при правильном поведении убегающего и его защитника) невозможна. Фрагменты моделирования приведены на рис. 24.2.

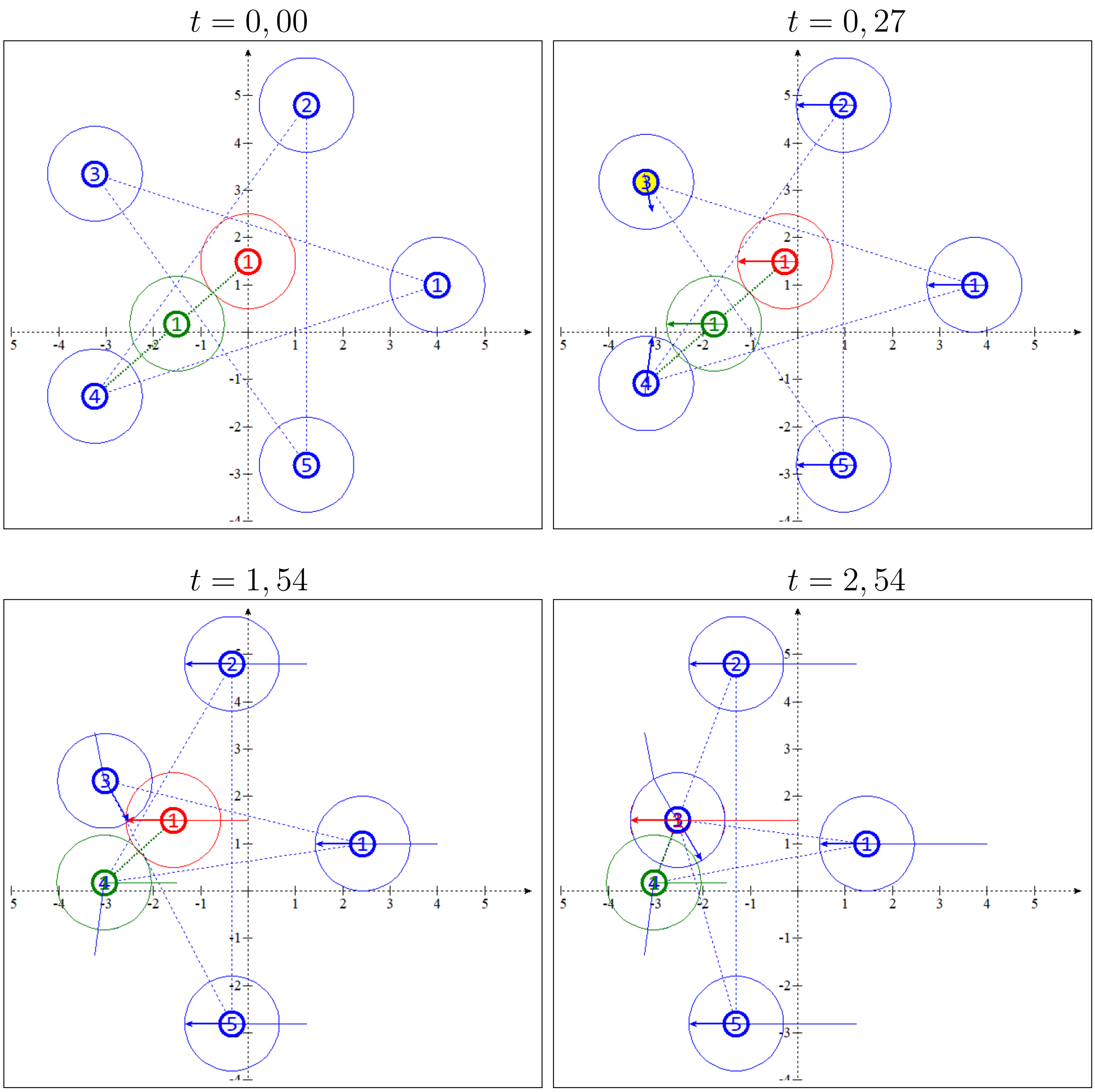


Рис. 24.2. Реализация поимки в игре $\Gamma_{24.2}$. Убегающий E использует управление $v(t) = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$. Защитник D_1 действует против преследователя P_4

Отметим, что поимка в игре $\Gamma_{24.2}$ произошла раньше ($t = 2,54$, рис. 24.2) чем одновременная двукратная поимка в игре $\Gamma_{24.1}$ ($t = 2,87$, рис. 24.1). Это произошло по следующей причине — преследователь P_3 до момента уничтожения преследователя P_4 защитником D_1 ($t = 1,54$, рис. 24.2) строил свое управление из расчета реализации одновременной двукратной поимки убегающего E (поэтому двигался не с максимально возможной скоростью), а после гибели преследователя P_4 продолжил преследование (с максимальной скоростью) с целью осуществления (однократной) поимки убегающего E. Как было указано в доказательстве теоремы 4.4, преследователь P_3 мог не учитывать факта гибели преследователя P_4 и не изменять свое управление. В этом случае поимка все равно бы произошла, но уже позже ($t = 2,87$, то есть ровно в момент завершения преследования в игре $\Gamma_{24.1}$).

Пример 24.3. Наконец рассмотрим игру $\Gamma_{24.3}$ вида (24.1) с двумя защитниками убегающего ($r = 2$), в которой остальные параметры совпадают с параметрами игры $\Gamma_{24.2}$.

Из теоремы 4.6 (так как здесь $r = 2$) следует, что в игре $\Gamma_{24.3}$ (при правильном поведении убегающего и его защитников) возможно уклонение от встречи. Пример работы комплекса программ приведен на рис. 24.3 (для большей наглядности, в отличии от рис. 24.1 и 24.2, здесь отключено отображение границы множества допустимых управлений с привязкой к каждому игроку).

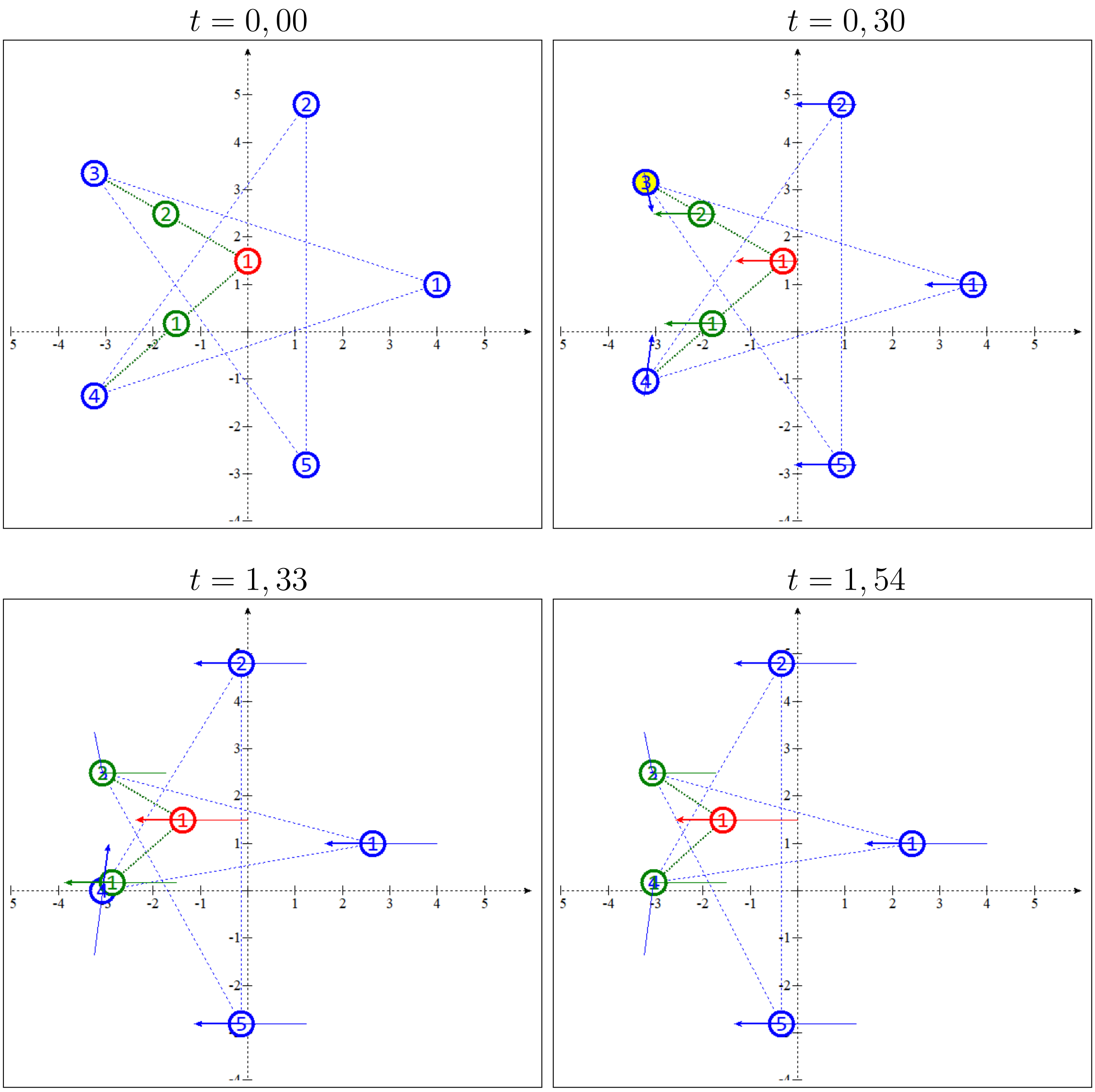


Рис. 24.3. Уклонение от встречи в игре $\Gamma_{24.3}$. Убегающий E использует управление $v(t) = (-1, 0)^{\mathrm{T}}$. Защитник D_1 действует против преследователя P_4, защитник D_2 — против преследователя P_3

§ 25. Моделирование действий слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе

Работа комплекса программ, в том числе порядок проведение вычислительных экспериментов, рассмотрена в § 19. Для проведения моделирования конфликтно управляемого процесса, рассмотренного в § 8, необходимо в области выбора типа задач конфликтного взаимодействия главного окна комплекса программ указать вкладку «Тип 6» (см. рис. 19.17).

Напомним вкратце постановку задачи § 8 для случая $k = 2$.

В пространстве R^2 рассматривается дифференциальная игра Γ $n + r + 1$ лиц: n преследователей $P_1, P_2, \ldots, P_n$, убегающего E и r защитников убегающего $D_1, D_2, \ldots, D_r$ с законами движения и начальными условиями (при $t = t_0$)

$$\begin{aligned}
&P_i : \dot{x}_i = A(t)x_i + u_i, \;\; u_i \in U(t), \;\; x_i(t_0) = X_i^0, && i \in I(n),\\
&E\, : \dot{y} = A(t)y + v, \quad\;\; v \in U(t), \quad y(t_0) = Y^0, && \\
&D_j\colon \dot{z}_j = A(t)z_j + w_j, \;\; w_j \in U(t), \;\; z_j(t_0) = Z_j^0 \in S(Y^0, L), && j \in I(r).
\end{aligned} \tag{25.1}$$

Здесь $x_i, y, z_j \in \mathbb{R}^2$; $A(t)$ — непрерывная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица второго порядка; для множества допустимых управлений $U(t)$ выполнено предположение о том, что существуют непрерывная и невырожденная на $[t_0, \infty)$ квадратная матрица $B(t)$ второго порядка и непрерывная на $[t_0, \infty)$ функция $g(t) \in \mathbb{R}^2$ такие, что

$$B(t)(U(t) + g(t)) = S(0, 1) \text{ для всех } t \in [t_0, \infty).$$

В системе (25.1) заданы начальные позиции X_i^0, Y^0, причем $X_i^0 \neq Y^0$ для всех $i \in I(n)$. Каждый защитник D_j, $j \in I(r)$, выбирает свою начальную позицию $Z_j^0 \in S(Y^0, L)$ до начала движения участников, причем $L > 0$ — такая фиксированная постоянная, что $X_i^0 \notin S(Y^0, L)$ для всех $i \in I(n)$.

Рассматривается вариант игры, в котором все защитники убегающего D_j, $j \in I(r)$, слабые. Это означает, что в случае $y(\theta) = x_i(\theta) = z_j(\theta)$ происходит поимка (преследователь до момента гибели успевает поймать убегающего). Следовательно, чтобы поимки не произошло слабый защитник D_j должен обеспечить выполнение следующих соотношений $y(\theta) \neq x_i(\theta) = z_j(\theta)$ (уничтожить преследователя раньше, чем последний поймает убегающего).

В игре со слабыми защитниками убегающего от всех участников дополнительно требуется, чтобы выполнялось предположение 8.2 (игроки используют такие допустимые управления, что все функции $\Phi^{-1}(t)u_i(t)$, $i \in I(n)$, $\Phi^{-1}(t)v(t)$, $\Phi^{-1}(t)w_j(t)$, $j \in I(r)$, являются кусочно-постоянными на $[t_0, \infty)$).

Если выполнены достаточные условия одновременной многократной поимки (теоремы 8.3 и 8.6), то преследователи реализуют одновременную многократную поимку при любых допустимых управлениях убегающего и его группы защитников.

П р и м е р 25.1. Сначала рассмотрим игру $\Gamma_{25.1}$ вида (25.1) без защитников ($r = 0$) при $t_0 = 0$, $n = 5$,

$$Y^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{2}{5} \end{pmatrix}, X_i^0 = \begin{pmatrix} 4\cos\dfrac{2\pi(i-1)}{5} \\ 4\sin\dfrac{2\pi(i-1)}{5} + 1 \end{pmatrix}, i \in I(5), B(t) = \mathcal{I}, g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{и } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ для которой } \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Условие 8.1 выполнено при $(b + r) = 1$ или 2, а при $(b + r) \geqslant 3$ — не выполнено. Из теоремы 8.6 (так как здесь $r = 0$) следует, что в игре $\Gamma_{25.1}$ возможна одновременная двукратная поимка, причем поимка большей кратности (при правильном поведении убегающего) невозможна. Фрагменты моделирования приведены на рис. 25.1.

П р и м е р 25.2. Теперь рассмотрим игру $\Gamma_{25.2}$ вида (25.1) с одним защитником убегающего ($r = 1$), в которой $L = 2$, а остальные параметры совпадают с параметрами игры $\Gamma_{25.1}$.

Из теоремы 8.6 (так как здесь $r = 1$) следует, что в игре $\Gamma_{25.2}$ возможна (однократная) поимка, причем поимка большей кратности (при правильном поведении убегающего и его защитника) невозможна. Фрагменты моделирования приведены на рис. 25.2 (для большей наглядности, в отличии от рис. 25.1, здесь отключено отображение границы множества допусти-

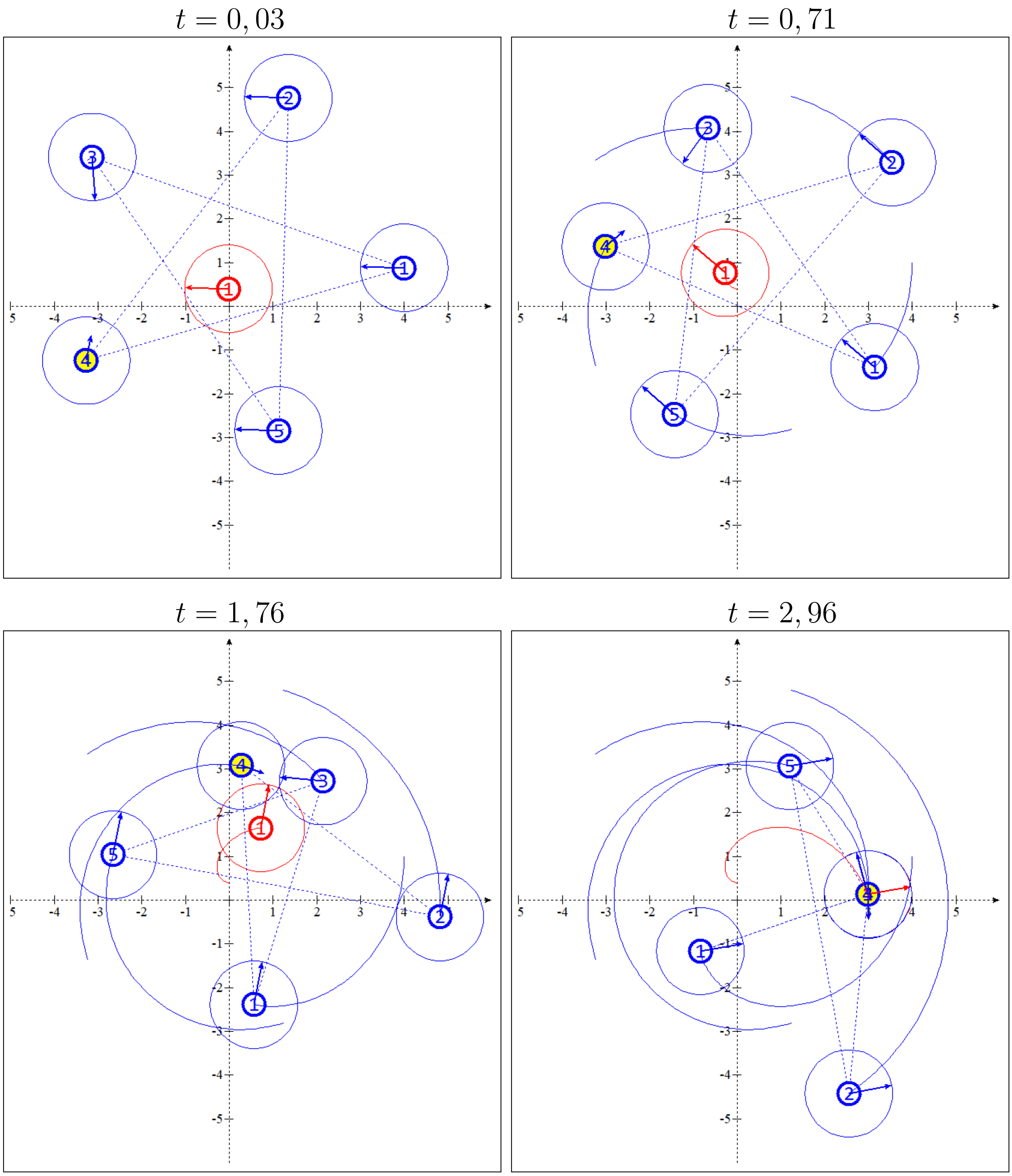


Рис. 25.1. Реализация одновременной двукратной поимки в игре $\Gamma_{25.1}$. Убегающий E использует управление $v(t) = \Phi(t)(-1,0)^{\mathrm{T}} = (-\cos t, \sin t)^{\mathrm{T}}$

мых управлений с привязкой к каждому игроку; синих пунктирных линий, позволяющих оценить выполнимость необходимого условия одновременной многократной поимки; зеленных пунктирных линий, показывающих против какого преследователя действует каждый защитник убегающего).

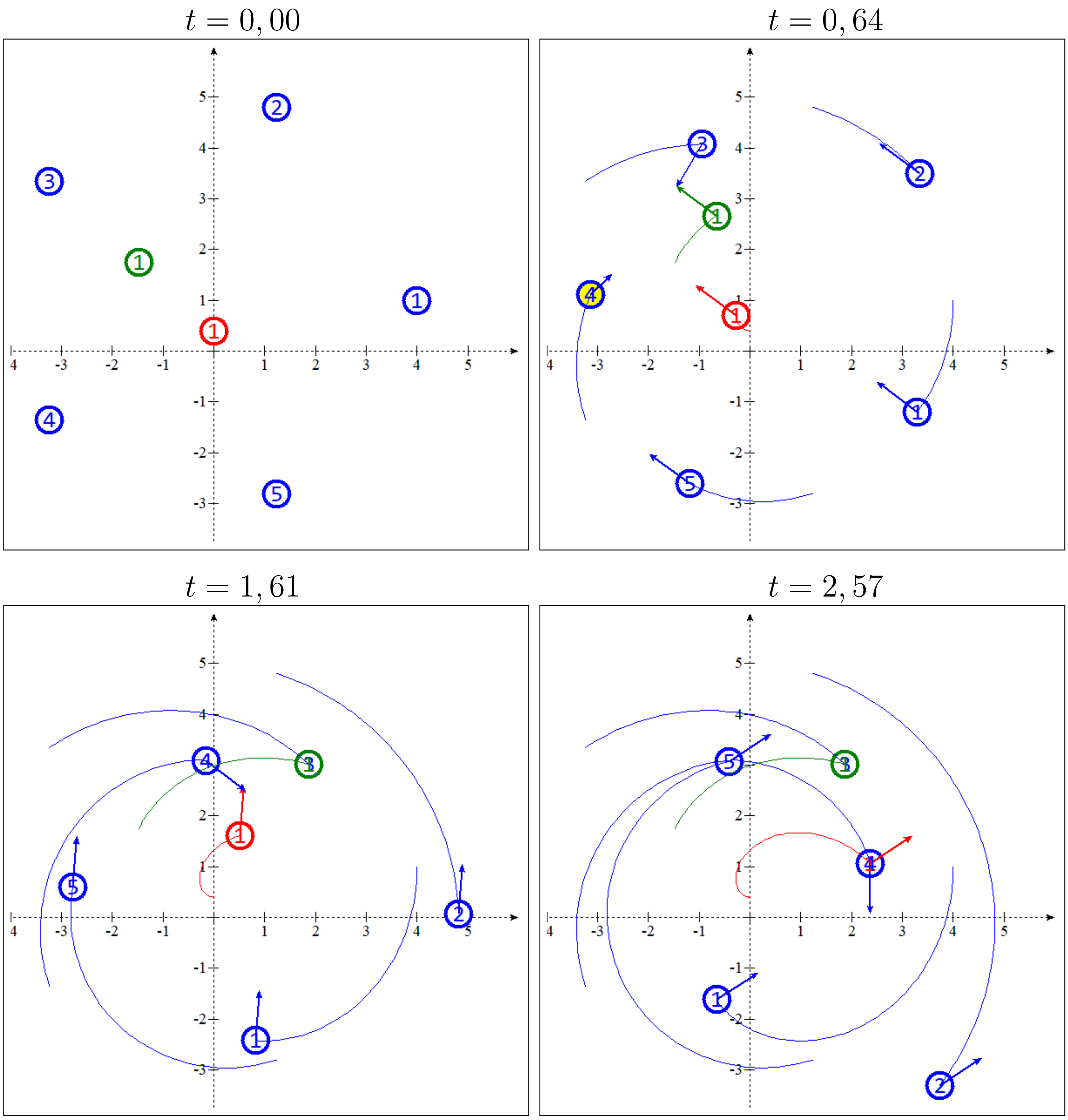


Рис. 25.2. Реализация поимки в игре $\Gamma_{25.2}$. Убегающий E использует управление $v(t) = \Phi(t)(-1,0)^{\mathrm{T}} = (-\cos t, \sin t)^{\mathrm{T}}$. Защитник D_1 действует против преследователя P_3

Отметим, что поимка в игре $\Gamma_{25.2}$ произошла раньше ($t = 2,57$, рис. 25.2) чем одновременная двукратная поимка в игре $\Gamma_{25.1}$ ($t = 2,96$, рис. 25.1). Объяснение этого факта аналогично тому, которое приведено в примере 24.2.

П р и м е р 25.3. Наконец рассмотрим игру $\Gamma_{25.3}$ вида (25.1) с двумя защитниками убегающего ($r = 2$), в которой остальные параметры совпадают с параметрами игры $\Gamma_{25.2}$.

Из теоремы 8.6 (так как здесь $r = 2$) следует, что в игре $\Gamma_{25.3}$ (при правильном поведении убегающего и его защитников) возможно уклонение от встречи. Фрагменты моделирования приведены на рис. 25.3.

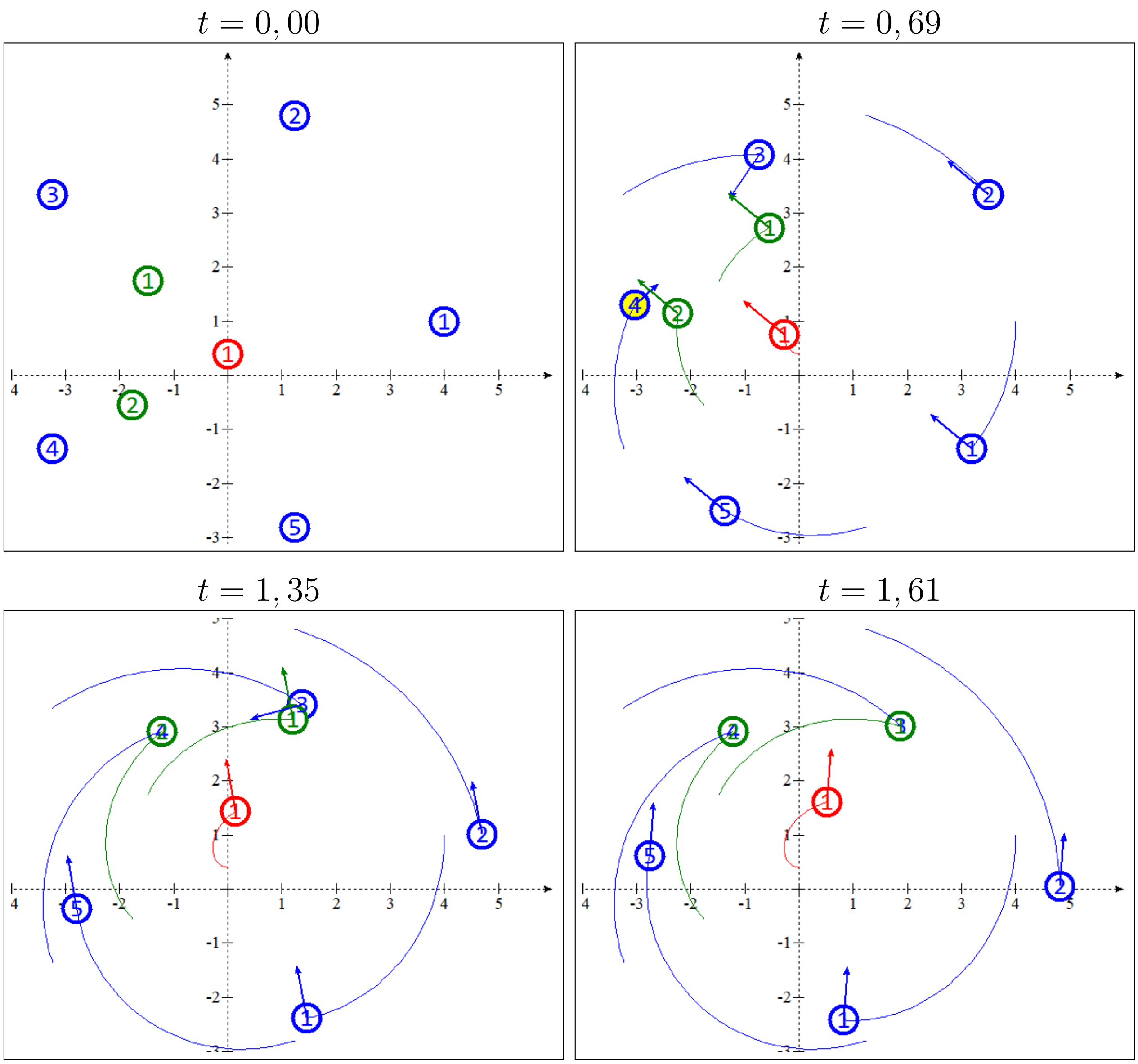


Рис. 25.3. Уклонение от встречи в игре $\Gamma_{25.3}$. Убегающий E использует управление $v(t) = \Phi(t)(-1, 0)^{\mathrm{T}} = (-\cos t, \sin t)^{\mathrm{T}}$. Защитник D_1 действует против преследователя P_3, защитник D_2 — против преследователя P_4

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью диссертационной работы являлась разработка новых аналитических и численных методов исследования математических моделей задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов.

Основные результаты работы:

В главе 1 для математической формализации задачи конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов для случая простых движений при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников получены аналитические условия разрешимости и разработаны методы управления группой преследователей, гарантирующие: одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего (§ 1); суммарную одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку группы жестко скоординированных убегающих (§ 2); синхронную реализацию одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности (§ 3); одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего, имеющего в своем распоряжении группу защитников (§ 4).

В главе 2 для задачи конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов в форме нестационарных конфликтно управляемых процессов при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников получены аналитические условия разрешимости и разработаны методы управления группой преследователей, гарантирующие: одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего (§ 5); суммарную одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку группы жестко скоординированных убегающих (§ 6); синхронную реализацию одновременных поимок заданной для каждого убегающего кратности (§ 7); одновременную многократную (нестрогую одновременную многократную, многократную) поимку убегающего, имеющего в своем распоряжении группу защитников (§ 8).

В главе 3 для задачи конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов в виде обобщенного нестационарного контрольного примера

Л.С. Понтрягина при одинаковых динамических и инерционных возможностях участников получены аналитические условия разрешимости и разработаны методы управления группой преследователей, гарантирующие: многократную поимку убегающего (§ 9); нестрогую одновременную многократную поимку убегающего (§ 10).

В главе 4 для задачи конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов при большей маневренности убегающих разработаны аналитические методы управления убегающими, гарантирующие: мягкое убегание от группы преследователей одного убегающего из любых начальных позиций (§ 11); мягкое убегание всех жестко скоординированных убегающих от группы преследователей из любых начальных позиций (§ 12).

В главе 5 для решения некоторых типов задач конфликтного взаимодействия разработаны вычислительные схемы: реализации одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования (§ 13) и конфликтно управляемом процессе (§ 14); реализации одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого преследования (§ 15) и конфликтно управляемом процессе (§ 16); действий слабого защитника убегающего в задаче простого преследования (§ 17) и конфликтно управляемом процессе (§ 18).

В главе 6 приведена общая характеристика используемого для проведения вычислительных экспериментов комплекса программ моделирования конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов (§ 19), а также рассмотрены результаты его работы при моделировании: одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования (§ 20); одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе (§ 21); одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования (§ 22); одновременной многократной поимки группы жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе (§ 23); действий слабого защитника убегающего в задаче простого группового преследования (§ 24); действий слабого защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе (§ 25).

Основные результаты работы позволяют сделать вывод о том, что цель диссертационного исследования достигнута.

Рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы. Результаты настоящей работы могут быть использованы для дальнейшего развития аналитических и численных методов исследования математических моделей задач конфликтного взаимодействия групп управляемых объектов, рассматриваемых в рамках теории дифференциальных игр. Например, перспективным направлением исследований представляется разработка новых аналитических и численных методов управления, гарантирующих одновременную многократную поимку в других задачах конфликтного взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. Простейшая дифференциальная игра поочередного преследования // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 8. — С. 5–15.

2. Абрамянц Т.Г., Иванов М.Н., Маслов Е.П., Яхно В.П. Об одной задаче уклонения от обнаружения // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 10. — С. 3–12.

3. Азамов А.А. О задаче убегания по заданной кривой // Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46. — Вып. 4. — С. 694–696.

4. Азамов А.А. Двойственность линейных дифференциальных игр преследования // ДАН СССР. — 1982. — Т. 263. — № 4. — С. 777–780.

5. Азамов А.А. Об альтернативе для игр преследования-убегания на бесконечном интервале времени // Прикладная математика и механика. — 1986. — Т. 50. — Вып. 4. — С. 561–566.

6. Азамов А.А. О существовании стратегии с кусочно-постоянными реализациями // Математические заметки. — 1987. — Т. 41. — № 5. — С. 718–723.

7. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с.

8. Альбрехт Э.Г. О сближении квазилинейных объектов в регулярном случае // Дифференциальные уравнения. — 1971. — Т. 7. — № 7. — С. 1171–1178.

9. Альбус Дж., Мейстел А., Чикрий А.А., Белоусов А.А., Козлов А.И. Об игровой задаче «мягкой посадки» для движущихся объектов // Искусственный интеллект. — 2000. — № 3. — С. 404–411.

10. Банников А.С. Об одной задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 3. — С. 3–11.

11. Банников А.С. Нестационарная задача группового преследования // Известия вузов. Математика. — 2009. — № 5. — С. 3–12.

12. Банников А.С. Некоторые нестационарные задачи группового преследования // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2013. — Вып. 1 (41). — С. 3–46.

13. Баранова И.Н. К примеру Л.С. Понтрягина со многими участниками // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2006. — № 4. — С. 34–37.

14. Бардадым Т.А. Задача преследования с простым движением и разнотипными ограничениями на управления // Кибернетика. — 1982. — № 2. — С. 80–84.

15. Берж К. Общая теория игр нескольких лиц. — М.: Физматгиз, 1961. — 126 с.

16. Благодатских А.И. Уклонение жестко скоординированных убегающих в одной задаче группового преследования // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2004. — Вып. 2 (30). — С. 3–24.

17. Благодатских А.И. Уклонение жестко скоординированных убегающих от группы инерционных объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 6. — С. 143–149.

18. Благодатских А.И. О двух колебательных конфликтно управляемых процессах со многими участниками // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2005. — Вып. 2 (32). — С. 3–22.

19. Благодатских А.И. Об одном колебательном конфликтно управляемом процессе со многими участниками // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2005. — № 2. — С. 43–45.

20. Брыкалов С.А. Две дифференциальные игры с невыпуклыми целевыми множествами // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2002. — № 3. — С. 94–101.

21. Брыкалов С.А. Непрерывная обратная связь в задачах конфликтного управления // Докл. РАН. — 2001. — Т. 376. — № 4. — С. 442–444.

22. Брыкалов С.А. Конфликтно управляемая система с нефиксированным моментом окончания // Труды Ин-та Математики и Механики УрО РАН. — 2000. — Т. 6. — № 2. — С. 313–319.

23. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Задача преследования группы жестко скоординированных убегающих // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2001. — № 5. — С. 75–79.

24. Вагин Д.А., Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. — 2002. — Т. 66. — Вып. 2. — С. 234–241.

25. Вайсборд Э.М., Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. — М.: Советское радио, 1980. — 304 с.

26. Варга Д. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. — М.: Наука, 1977. — 624 с.

27. Васильева Л.Г. Об одной дифференциальной игре убегания // Дифференциальные, бескоалиционные, кооперативные и статистические игры. — Калинин: Изд-во Калининского ун-та, 1979. — С. 26–33.

28. Вишневецкий Л.С., Меликян А.А. Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия // Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46. — Вып. 4. — С. 613–620.

29. Габриелян М.С., Субботин А.И. Игровые задачи о встречи с целевыми множествами // Прикладная математика и механика. — 1979. — Т. 43. — Вып. 2. — С. 204–208.

30. Григоренко Н.Л. Игра простого преследования-убегания группы преследователей и одного убегающего // Вестник МГУ. Серия вычислительная математика и кибернетика. — 1983. — № 1. — С. 41–47.

31. Григоренко Н.Л. Преследование несколькими управляемыми объектами двух убегающих // ДАН СССР. — 1985. — Т. 282. — № 5. — С. 1051–1054.

32. Григоренко Н.Л. Задача преследования несколькими объектами // Труды математического института АН СССР. — 1984. — Т. 166. — С. 61–75.

33. Григоренко Н.Л. О квазилинейной задаче преследования несколькими объектами // ДАН СССР. — 1977. — Т. 259. — № 5. — С. 1040–1043.

34. Григоренко Н.Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — М.: Изд-во МГУ, 1990. — 197 с.

35. Григоренко Н.Л. К теории дифференциальных игр трех лиц // Труды Ин-та Математики и Механики УрО РАН. — 2006. — Т. 12. — № 1. — С. 78–87.

36. Григоренко Н.Л. Игровые задачи управления с переменной структурой // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 1991. — № 4. — С. 5–16.

37. Григоренко Н.Л. К теории дифференциальных игр нескольких лиц // Труды МИАН. — 1999. — Т. 224. — С. 130–138.

38. Гусятников П.Б. Убегание и l-убегание в дифференциальной игре многих лиц // ДАН СССР. — 1977. — Т. 232. — № 3. — С. 517–520.

39. Гусятников П.Б. Дифференциальная игра убегания m лиц // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1978. — № 6. — С. 22–32.

40. Гусятников П.Б. Теория дифференциальных игр. — М.: МФТИ, 1982. — 99 с.

41. Демидов К.В. Об одной задаче группового преследования с r-кратной поимкой // Вопросы вычислительной математики и программирования. — М.: МГУ, 1984. — С. 73–75.

42. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

43. Железнов В.С., Иванов М.Н., Маслов Е.П., Курский Э.А. Об одной задаче уклонения в пространстве // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 5. — С. 11–22.

44. Жимовский В. Два следствия решения одной задачи уклонения от многих преследователей // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 1980. — V. 28. — № 3–4. — P. 155–159.

45. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — Киев: Наукова думка, 1994. — 320 с.

46. Зак В.Л. Задача уклонения от многих преследователей // ДАН СССР. — 1982. — Т. 265. — № 5. — С. 1051–1053.

47. Зак В.Л. Построение стратегии уклонения от нескольких преследователей для динамических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1984. — № 4. — С. 143–147.

48. Ибрагимов Г.И., Рихсиев Б.Б. О некоторых достаточных условиях оптимальности времени преследования в дифференциальных играх со многими участниками // Автоматика и телемеханика. — 2006. — № 4. — С. 16–24.

49. Иванов Г.Е., Половинкин Е.С. О сильно выпуклых линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. — 1995. — Т. 31. — № 10. — С. 1641–1648.

50. Иванов М.Н., Маслов Е.П. О сравнении двух методов преследования в задаче о поочередной встрече // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 7. — С. 38–43.

51. Иванов Р.П. К вопросу о мягкой поимке в дифференциальных играх со многими догоняющими и одним уклоняющимся игроком // Труды Математического института АН СССР. — 1988. — Т. 185. — С. 74–83.

52. Иванов Р.П. Простое преследование-убегание на компакте // ДАН СССР. — 1980. — Т. 254. — № 6. — С. 1318–1321.

53. Иванов Р.П. Измеримые стратегии в дифференциальных играх // Математический сборник. — 1989. — Т. 180. — № 1. — С. 119–135.

54. Иванов Р.П., Ледяев Ю.С. Оптимальность времени преследования в дифференциальной игре многих объектов с простым движением // Труды Математического института АН СССР. — 1981. — Т. 158. — С. 87–97.

55. Ковшов А.М. Параллельные стратегии в играх преследования на сфере: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук: 01.01.09. — СПб: Санкт-Петербургский гос. ун-т., 1996. — 14 с.

56. Константинов Р.В. О квазилинейной дифференциальной игре преследования с простой динамиков при наличии фазового ограничения // Математические заметки. — 2001. — Т. 69. — Вып. 4. — С. 581–590.

57. Красовский А.Н. Синтез смешанных стратегий управления. — Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1988. — 151 с.

58. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.

59. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи сближения // Прикладная математика и механика. — 1970. — Т. 34. — Вып. 6. — С. 1005–1022.

60. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 455 с.

61. Красовский Н.Н. Управление динамической системой: задаче о минимуме гарантированного результата. — М.: Наука, 1985. — 518 с.

62. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 392 с.

63. Куржанский А.Б., Осипов Ю.С. К задаче управления с ограниченными фазовыми координатами // Прикладная математика и механика. — 1968. — Т. 32. — Вып. 2. — С. 194–202.

64. Кучкаров А.Ш., Рихсиев Б.Б. О решении одной задачи преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 8. — С. 41–45.

65. Лагунов В.Н. Введение в дифференциальные игры. — Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики, 1979. — 342 с.

66. Лагунова Н.В. Задача убегания от четырех преследователей // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. — 1992. — № 3. — С. 57–63.

67. Левченков А.Ю. Об одной задаче сближения двух различных преследователей с одним убегающим // Прикладная математика и механика. — 1988. — Т. 52. — Вып. 1. — С. 3–8.

68. Лутманов С.В. Теорема об альтернативе в дифференциальных играх нескольких лиц в различных классах стратегий // Вестник Пермского ун-та. Математика. — 1994. — Вып. 1. — С. 152–162.

69. Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. Дифференциальные игры преследования-уклонения с групповой целью // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика. — М: ВИНИТИ, 1991. — Т. 32. — С. 32–59.

70. Меликян А.А. Оптимальное взаимодействие двух преследователей в игровой задаче // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1981. — № 2. — С. 49–56.

71. Меликян А.А., Овакимян Н.В. Игровая задача простого преследования на многообразиях // Прикладная математика и механика. — 1991. — Т. 55. — Вып. 1. — С. 54–62.

72. Меликян А.А., Овакимян Н.В. Игровая задача простого преследования на двумерном конусе // Прикладная математика и механика. — 1991. — Т. 55. — Вып. 5. — С. 741–750.

73. Мищенко Е.Ф. Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1971. — № 5. — С. 3–9.

74. Мищенко Е.Ф., Сатимов Н.Ю. Уклонение от встречи в дифференциальных играх многих лиц // ДАН СССР. — 1975. — Т. 224. — № 2. — С. 285–288.

75. Мищенко Е.Ф., Никольский М.С., Сатимов Н.Ю. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц // Труды математического института АН СССР. — 1977. — Т. 143. — С. 105–128.

76. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. — М.: МГУ, 1984. — 65 с.

77. Никольский М.С. О некоторых актуальных задачах теории дифференциальных игр // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33. — № 11. — С. 1557–1558.

78. Остапенко В.В., Колесник Д.В. Оптимальные области управления в дифференциальных играх с нефиксированным временем // Кибернетика и системный анализ. — 2002. — № 2. — С. 168–172.

79. Оуэн Г. Теория игр. — М.: Мир, 1971. — 230 с.

80. Партхасаратхи Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. — М.: Мир, 1974. — 295 с.

81. Патланжоглу О.М. О потенциале игрока в обобщенном контрольном примере Л.С. Понтрягина // Автоматика. — 1992. — № 6. — С. 17–26.

82. Пацко В.С. Дифференциальная игра уклонения на плоскости // Прикладная математика и механика. — 1977. — Т. 41. — Вып. 4. — С. 604–608.

83. Пацко В.С. Дифференциальная игра качества второго порядка // Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46. — Вып. 4. — С. 596–605.

84. Пацко В.С., Турова В.Л. Численное решение дифференциальных игр на плоскости. Препринт. — Екатеринбург. ИММ УрО РАН, 1995. — 77 с.

85. Пашков А.Г., Терехов С.Д. Об одной игре оптимального преследования двумя объектами одного // Прикладная математика и механика. — 1983. — Т. 47. — Вып. 6. — С. 898–903.

86. Пашков А.Г., Терехов С.Д. Дифференциальная игра сближения двух динамических объектов с третьим // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — 1986. — № 3. — С. 66–71.

87. Перекатов А.Е., Чикрий А.А. Поочередное преследование по позиции // Автоматика и телемеханика. — 1993. — № 10. — С. 86–95.

88. Петров Н.Н. Об управляемости автономных систем // Дифференциальные уравнения. — 1968. — Т. 4. — № 4. — С. 606–617.

89. Петров Н.Н. Доказательство существования значения игры преследования с ограниченным временем // Дифференциальные уравнения. — 1970. — Т. 6. — № 5. — С. 784–797.

90. Петров Н.Н. Существование значения игры преследования // Дифференциальные уравнения. — 1971. — Т. 7. — № 5. — С. 827–839.

91. Петров Н.Н. О существовании значения игры преследования // ДАН СССР. — 1970. — Т. 190. — № 6. — С. 1289–1291.

92. Петров Н.Н., Прокопенко В.А. Об одной задаче преследования группы убегающих // Дифференциальные уравнения. — 1987. — Т. 23. — № 4. — С. 725–726.

93. Петров Н.Н., Петров Н.Никандр. О дифференциальной игре «казаки-разбойники» // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19. — № 8. — С. 1366–1374.

94. Петров Н.Н. Теория игр. — Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1997. — 195 с.

95. Петров Н.Н. Простое преследование при наличии фазовых ограничений // Деп. в ВИНИТИ 20 марта 1984 г. — № 1684. — 14 с.

96. Петров Н.Н. Одна оценка в дифференциальной игре со многими убегающими // Вестник Лениград. ун-та. — 1985. — № 22. — С. 107–109.

97. Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. — 1988. — Т. 52. — Вып. 6. —С. 1030–1033.

98. Петров Н.Н. Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 5. — С. 22–26.

99. Петров Н.Н. Квазилинейные конфликтно-управляемые процессы с дополнительными ограничениями // Прикладная математика и механика. — 1993. — Т. 57. — Вып. 6. — С. 61–68.

100. Петров Н.Н. Об одном классе задач группового преследования с фазовыми ограничениями // Автоматика и телемеханика. — 1994. — № 3. — С. 42–49.

101. Петров Н.Н. Существование значения игры преследования со многими участниками // Прикладная математика и механика. — 1994. — Т. 58. — Вып. 4. — С. 22–29.

102. Петров Н.Н. Об одной задаче группового преследования с фазовыми ограничениями // Математика. Изв. вузов. — 1994. — № 4(383). — С. 24–29.

103. Петров Н.Н. Об одной задаче преследования группы убегающих // Автоматика и телемеханика. — 1996. — № 6. — С. 48–54.

104. Петров Н.Н. Многократная поимка в примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61. — Вып. 5. — С. 747–754.

105. Петров Н.Н. Простое преследование жесткосоединенных убегающих // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 12. — С. 89–95.

106. Петров Н.Н. Групповое преследование с дополнительными ограничениями // Кибернетика и вычислительная техника. — 1997. — Вып. 115. — С. 1–12.

107. Петров Н.Н. Нестационарный пример Понтрягина с фазовыми ограничениями // Проблемы управления и информатики. — 2000. — № 4. — С. 18–24.

108. Петров Н.Н. Об одной задаче преследования со многими убегающими // Вестник Удмурт. ун-та. — 2000. — № 1. — С. 131–136.

109. Петров Н.Н. Одна задача уклонения от многих преследователей // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1998. — № 1. — С. 41–43.

110. Петров Н.Н. «Мягкая» поимка в примере Л.С. Понтрягина со многими участниками // Прикладная математика и механика. — 2003. — Т. 67. — Вып. 5. — С. 759–770.

111. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2015. — Т. 21. — № 2. — С. 178–186.

112. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина // Автоматика и телемеханика. — 2016. — № 5. — С. 128–135.

113. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка убегающего в линейных рекуррентных дифференциальных играх // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2017. — Т. 23. — № 1. — С. 212–218.

114. Петров Н.Н., Соловьева Н.А. Многократная поимка заданного числа убегающих в рекуррентном примере Л.С. Понтрягина // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — 2020. — Т. 186. — С. 108–115.

115. Петров Н.Н., Нарманов А.Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28. — Вып. 2. — С. 193–198.

116. Петров Н.Н., Нарманов А.Я. Многократная поимка заданного числа убегающих в задаче с дробными производными и простой матрицей // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2019. — Т. 25. — № 3. — С. 188–199.

117. Петров Н.Н., Щелчков К.А. К задаче Черноусько // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — Вып. 4. — С. 62–67.

118. Петросян Л.А. Дифференциальные игры на выживание со многими участниками // ДАН СССР. — 1965. — Т. 161. — № 2. — С. 285–287.

119. Петросян Л.А. Игры преследования с «линией жизни» // Вестник Ленинградск. ун-та. — 1967. — № 3. — С. 76–85.

120. Петросян Л.А. Об одном классе игр преследования: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. — Вильнюс: Вильнюсский гос. ун-т, 1965. — 7 с.

121. Петросян Л.А. Дифференциальные игры преследования. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. — 232 с.

122. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. — М.: Высшая школа, 1998. — 299 с.

123. Петросян Л.А., Томский Г.В. Геометрия простого преследования. — Новосибирск: Наука, 1983. — 142 с.

124. Петросян Л.А., Томский Г.В. Динамические игры и их приложения. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. — 252 с.

125. Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю. Игры поиска. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского гос. ун-та, 1992. — 215 с.

126. Петросян Л.А., Рихсиев Б.Б. Преследование на плоскости. — М.: Наука, 1991. — 96 с.

127. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно-управляемые процессы // Прикладная математика и механика. — 1993. — Т. 57. — Вып. 3. — С. 3–14.

128. Питцык М.В., Чикрий А.А. О задаче группового преследования // Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46. — Вып. 5. — С. 730–736.

129. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Т. 2. — М.: Наука, 1988. — 575 с.

130. Понтрягин Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания // Труды математического института АН СССР. — 1971. — Т. 112. — С 30–63.

131. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх I // ДАН СССР. — 1967. — Т. 174. — № 6. — С. 1278–1280.

132. Понтрягин Л.С. О линейных дифференциальных играх II // ДАН СССР. — 1967. — Т. 175. — № 4. — С. 764–766.

133. Понтрягин Л.С. К теории дифференциальных игр // Успехи математических наук. — 1966. — Т. 21. — Вып. 4. — С. 219–274.

134. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Математический сборник. — 1980. — Т. 112. — № 3. — С. 307–330.

135. Понтрягин Л.С., Мищенко Е.Ф. Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. — 1971. — Т. 7. — № 3. — С. 436–445.

136. Понтрягин Л.С., Мищенко А.С. Линейная дифференциальная игра преследования: аналитическая теория // Математический сборник. — 1986. — Т. 131. — № 2. — С. 131–158.

137. Понтрягин Л.С., Мищенко А.С. Решение линейной дифференциальной игры преследования без дискриминации убегающего объекта // ДАН СССР. — 1984. — Т. 277. — № 6. — С. 1063–1066.

138. Понтрягин Л.С., Мищенко А.С. Решение линейной дифференциальной игры преследования на основе альтернированного интегрирования без дискриминации управления убегания // ДАН СССР. — 1984. — Т. 278. — № 1. — С. 1330–1334.

139. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. — 391 с.

140. Прокопович П.В., Чикрий А.А. Одна дифференциальная игра убегания // ДАН УССР. Серия А. — 1989. — № 1. — С. 71–74.

141. Прокопович П.В., Чикрий А.А. Линейная задача убегания при взаимодействии групп объектов // Прикладная математика и механика. — 1994. — Т. 58. — Вып. 4. — С. 12–21.

142. Пшеничный Б.Н. Простое преследование несколькими объектами // Кибернетика. — 1976. — № 3. — С. 145–146.

143. Пшеничный Б.Н. Структура дифференциальных игр // ДАН СССР. — 1969. — Т. 184. — № 2. — С. 285–287.

144. Пшеничный Б.Н. О линейных дифференциальных играх // Кибернетика. — 1968. — № 1. — С. 47–53.

145. Пшеничный Б.Н. Линейные дифференциальные игры // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 1. — С. 65–78.

146. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. — Киев: Наукова думка, 1992. — 259 с.

147. Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С. К решению задачи простого преследования несколькими управляемыми объектами // Институт Кибернетики АН УССР. — Препринт 79–47. — 1979. — С. 3–6.

148. Пшеничный Б.Н., Раппопорт И.С. Об одной задаче группового преследования // Кибернетика. — 1979. — № 6. — С. 145–146.

149. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Преследование несколькими управляемыми объектами при наличии фазовых ограничений // ДАН СССР. — 1981. — Т. 259. — № 4. — С. 785–789.

150. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Групповое преследование в дифференциальных играх // Wiss. Z. Techn Hochsch. Leipzig. — 1982. — V. 6. — № 1. — P. 13–27.

151. Пшеничный Б.Н., Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Эффективный метод решения дифференциальных игр со многими преследователями // ДАН СССР. — 1981. — Т. 256. — № 3. — С. 530–535.

152. Рихсиев Б.Б. Об оптимальности времени преследования в дифференциальных играх многих лиц с простым движением // Изв. АН Узб. ССР. Серия физ.-мат. наук. — 1984. — № 4. — С. 37–39.

153. Рихсиев Б.Б. Дифференциальные игры с простым движением. — Ташкент: Изд-во Фан, 1989. — 232 с.

154. Рихсиев Б.Б., Ибрагимов Г.И. Простое преследование в кубе // Изв. АН Узб. ССР. Серия физ.-мат. наук. — 1990. — № 2. — С. 42–45.

155. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973. — 469 с.

156. Савинов В.Б. Дифференциальная игра преследования одним преследователем нескольких убегающих // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. — 1995. — Т. 3. — С. 147–171.

157. Сатимов Н.Ю. О задачах избежания взаимных столкновений // ДАН Узб. ССР. — 1981. — № 2. — С. 3–5.

158. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. О задачах преследования и уклонения от встречи в дифференциальных играх между группами преследователей и убегающих // ДАН Узб. ССР. — 1983. — № 4. — С. 3–6.

159. Сатимов Н.Ю., Маматов М.Ш. Об одном классе линейных дифференциальных и дискретных игр между группами преследователей и убегающих // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14. — № 7. — С. 1208–1214.

160. Сатимов Н.Ю., Азамов А.А., Хайдаров Б.К. Простое преследование многими объектами одного убегающего // ДАН Узб. СССР. — 1981. — № 12. — С. 3–5.

161. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. О квазилинейных дифференциальных играх убегания // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14. — № 6. — С. 1046–1052.

162. Сатимов Н.Ю., Рихсиев Б.Б. Методы решения задачи уклонения от встречи в математической теории управления. — Ташкент: Изд-во Фан, 2000. — 176 с.

163. Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М. О некоторых игровых задачах в распределенных управляемых системах // Прикладная математика и механика. — 2005. — Т. 69. — Вып. 6. — С. 986–992.

164. Сатимов Н.Ю., Кучкаров А.Ш. Уклонение от встречи со многими преследователями на поверхности // Узбекский математический журнал. — 2001. — № 1. — С. 51–55.

165. Синицын А.В. Построение функции цены в игре преследования несколькими объектами // Прикладная математика и механика. — 1993. — Т. 57. — Вып. 1. — С. 52–57.

166. Смольяков Э.Р. Теория антагонизмов и дифференциальные игры. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 158 с.

167. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. — М.: Наука, 1981. — 287 с.

168. Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. — М.: Наука, 1991. — 216 с.

169. Субботин А.И. Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // ДАН СССР. — 1980. — Т. 254. — № 2. — С. 293–297.

170. Субботин А.И., Субботина Н.Н. Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой дифференциальной игры // ДАН СССР. — 1978. — Т. 243. — № 4. — С. 862–865.

171. Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. Алгоритм построения стабильного моста в линейной задаче сближения с выпуклой целью // Исследования задач минимаксного управления. — Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1985. — С. 82–90.

172. Токманцев Т.Б., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Численная аппроксимация стабильных мостов в дифференциальных играх на конечном промежутке времени // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби: Труды Международного семинара. — Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2006. — Т. 1. — С. 294–302.

173. Тухтасинов М. О некоторых задачах теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами // Прикладная математика и механика. — 1995. — Т. 59. — Вып. 6. — С. 979–984.

174. Ухоботов В.И. Дифференциальная игра с простым движением // Известия вузов. Математика. — 1991. — № 8. — С. 69–72.

175. Ухоботов В.И. Метод одномерного проектирования в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями общего вида. — Челябинск: Изд-во Челябинского ун-та, 1998. — 78 с.

176. Ушаков В.Н. К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1980. — № 4. — С. 29–36.

177. Ушаков В.Н., Хрипунов В.Н. О приближенном построении решений в игровых задачах управления // Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61. — Вып. 3. — С. 413–421.

178. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования // Вестник МГУ. Серия Математика. механика. — 1959. — № 2. — С. 25–32.

179. Ченцов А.Г. Итерационная программная конструкция для дифференциальной игры с фиксированным временем окончания // ДАН СССР. — 1978. — Т. 240. — № 1. — С. 36–39.

180. Ченцов А.Г. О некоторых свойствах множеств позиционного поглощения в дифференциальных играх сближения-уклонения // Задачи динамического управления. — Свердловск: УНЦ АН СССР, 1981. — С. 82–91.

181. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. — М.: Наука, 1978. — 270 с.

182. Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. — 1976. — Т. 40. — Вып. 1. — С. 14–24.

183. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Линейная задача преследования несколькими объектами // Кибернетика. — 1978. — № 3. — С. 86–92.

184. Чикрий А.А. Линейная задача убегания от многих преследователей // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1976. — № 4. — С. 46–50.

185. Чикрий А.А. Групповое преследование при ограниченных координатах убегающего // Прикладная математика и механика. — 1982. — Т. 46. — Вып. 6. — С. 906–913.

186. Чикрий А.А. Квазилинейные дифференциальные игры со многими участниками // ДАН СССР. — 1979. — Т. 246. — № 6. — С. 1306–1309.

187. Чикрий А.А. Квазилинейная задача сближения с участием нескольких лиц // Прикладная математика и механика. — 1979. — Т. 43. — Вып. 3. — С. 451–455.

188. Чикрий А.А. Задача уклонения в нелинейных дифференциальных играх // Кибернетика. — 1975. — № 3. — С. 65-68.

189. Чикрий А.А., Мачихин И.И. Квазилинейные конфликтно управляемые процессы с переменной структурой // Проблемы управления и информатики. — 1998. — № 6. — С. 31–41.

190. Чикрий А.А., Питцык М.В. Сочетание усилий преследователей с различными динамическими возможностями // ДАН УССР. — 1984. — № 1. — С. 73–76.

191. Чикрий А.А. О задаче уклонения в линейной дифференциальной игре // Автоматика и телемеханика. — 1977. — № 9. — С. 24–29.

192. Чикрий А.А. О задачах убегания при ограниченных фазовых координатах // Кибернетика. — 1977. — № 4. — С. 40–45.

193. Чикрий А.А. Дифференциальные игры нескольких лиц // Кибернетика. — 1976. — № 4. — С. 99–101.

194. Чикрий А.А., Шишкина Н.Б. О задаче группового преследования при наличии фазовых ограничений // Автоматика и телемеханика. — 1985. — № 2. — С. 59–68.

195. Чикрий А.А., Питцык М.В., Шишкина Н.Б. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина и некоторые эффективные способы преследования // Кибернетика. — 1986. — № 5. — С. 75–81.

196. Чикрий А.А. Конфликтно управляемые процессы. — Киев: Наукова думка, 1992. — 383 с.

197. Чикрий А.А. Дифференциальные игры с несколькими преследователями // Mathematical Control Theory. Banach Center Publications. — 1985. — V. 14. — С. 81–107.

198. Чикрий А.А., Прокопович П.В. Задача убегания от группы для однотипных инерционных объектов // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 6. — С. 998–1004.

199. Чикрий А.А., Прокопович П.В. О задаче убегания при взаимодействии групп линейных объектов // Кибернетика. — 1989. — № 5. — С. 59–63.

200. Чикрий А.А., Прокопович П.В. Задача убегания при взаимодействии групп линейных объектов // ДАН СССР. — 1993. — Т. 333. — № 5. — С. 591–593.

201. Чикрий А.А., Калашникова С.Ф. Преследование управляемым объектом группы убегающих // Кибернетика. — 1987. — № 4. — С. 1–8.

202. Чикрий А.А., Соболенко Л.А., Калашникова С.Ф. Численный метод решения задачи поочередного преследования // Кибернетика. — 1988. — № 1. — С. 44–49.

203. Чикрий А.А., Мачихин И.И. Линейные дифференциальные игры с импульсным управлением игроков // Труды Ин-та Математики и механики УрО РАН. — 2005. — Т. 11. — № 1. — С. 212–224.

204. Чикрий А.А., Мачихин И.И., Чикрий К.А. Конфликтно управляемые процессы с разрывными траекториями // Кибернетика и системный анализ. — 2004. — № 5. — С. 108–115.

205. Чикрий А.А. Проблема уклонения от встречи для управляемых динамических объектов // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 1. — С. 120–132.

206. Чиркова Л.С. Уклонение от группы инерционных объектов // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 3. — С. 45–53.

207. Чиркова Л.С. Уклонение от группы инерционных объектов в игре четвертого порядка // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2013. — Вып. 2 (42). — С. 58–102.

208. Чистяков С.В. Программные итерации и универсальные ε оптимальные стратегии в позиционной дифференциальной игре // ДАН СССР. — 1991. — Т. 319. — № 6. — С. 1333–1335.

209. Хайдаров Б.К. Позиционная l-поимка в игре одного убегающего и нескольких преследователей // Прикладная математика и механика. — 1984. — Т. 48. — Вып. 4. — С. 574–579.

210. Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970. — 424 с.

211. Шевченко И.И. Простейшая модель поочередного преследования // Автоматика и телемеханика. — 1982. — № 4. — С. 38–42.

212. Шевченко И.И. Поочередное преследование трех убегающих // Автоматика и телемеханика. — 1983. — № 7. — С. 70–75.

213. Шевченко И.И. О сближении с коалицией // Автоматика и телемеханика. — 1986. — № 1. — С. 47–55.

214. Ширяев В.Д. Бескоалиционная игра простого преследования // Управление, надежность, навигация. — Саранск: Изд-во Мордовского ун-та, 1984. — С. 33–41.

215. Шуравина И.Н. Об одной задаче уклонения в конусе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 2. — С. 13–16.

216. Фазылов А.З. К задаче избежания столкновений // Изв. АН Узб. ССР. Серия физ.-мат. наук. — 1987. — № 3. — С. 30–36.

217. Югай Л.П. Об l-уклонении в линейной дифференциальной игре многих лиц // Дифференциальные уравнения. — 1979. — Т. 15. — № 5. — С. 840–845.

218. Югай Л.П. Об одном достаточном условии уклонения по направлению // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32. — № 9. — С. 1291–1292.

219. Barton J.C., Elieser C.J. On pursuit curves // J. Austral. Mat. Soc. B. — 2000. — V. 41. — № 3. — P. 358–371.

220. Berkovitz L.D. Differential game of generalized pursuit and evasion // SIAM J. Contr. and Optimiz. — 1986. — V. 24. — № 3. — P. 361–373.

221. Borovko P., Rzymowski W., Stachura A. Evasion from many pursuers in the simple case // J. Math. Anal. and Appl. — 1988. — V. 135. — № 1. — P. 75–80.

222. Chikrii A.A. The problem of avoidance for controlled dynamic objects // Game Theory and Appl. — 1997. — V. III. — P. 7–20.

223. Chodun W. Differential games of evasion with many pursuers // J. Math. Anal. and Appl. — 1989. — V. 142. — № 2. — P. 370–389.

224. Fleming W.H. A note on differential games of prescribed duration // Contributions to the Theory of Games. — 1957. — V. 3. — P. 407–416.

225. Fleming W.H. The convergence problem for differential games // J. Math. Anal. Appl. — 1961. — № 3. — P. 102–116.

226. Fleming W.H. The convergence problem for differential games, II // Annals of Math. Study. — 1964. — V. 52. — P. 195–210.

227. Flynn J.O. Lion and Mann: the boundary constraint // SIAM J. Control. — 1971. — V. 11. — № 3. — P. 397–411.

228. Friedman A. Differential Games. — New York: Wiley Intersci, 1971. — 354 p.

229. Garcia E., Casbeer D.W., Pachter M. Active target defense differential game with a fast defender // Proceedings of the American Control Conference. — 2015. — P. 3752–3757.

230. Garcia E., Casbeer D.W., Pachter M. The complete differential game of active target defense // J. Optim. Theory Appl. — 2021. — V. 191. — P. 675–699.

231. Hajek O. Pursuit Games. — New York: Acad. Press, 1975. — 266 p.

232. Kumkov S.S., Patsko V.S. Attacker-defender-target problem in the framework of space intercept // Proceedings of the 57th Israel Annual Conference on Aerospace Science. 2017.

233. Leitman G., Lin H.S. Evasion in the plane // Lect. Notes Contr. Inform. Sci. — 1978. — № 6. — P. 255–263.

234. Petrov N.N., Solov'eva N.A. Problem of multiple capture of given number of evaders in recurrent differential games // Сибирские электронные математические известия. — 2022. — V. 19. — Iss. 1. — P. 371–377.

235. Rusnak I. The lady, the bandits and the body guards — a two team dynamic game // Proceedings of the 16th IFAC World Congress. — 2005. — V. 38. — P. 934–939.

236. Rzymowski W. Method of construction of the evasion strategy for differential game with many evaders // Roszpr. mat. — 1986. — № 247.

237. Steinhaus H. Definitions for a theory of games and pursuit // Mysl Academika. — 1925. — V. 1. — № 1. — P. 13–14.

238. Yong J. On differential evasion games // SIAM J. Contr. and Optimiz. — 1988. — V. 26. — № 1. — P. 1–22.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК и Аттестационным советом УрФУ

239. Благодатских А.И. О мягком убегании группы скоординированных убегающих // Прикладная математика и механика. — 2005. — Т. 69. — Вып. 6. — С. 993–1002.

  Blagodatskikh A.I. Weak evasion of a group of coordinated evaders // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2005. — Vol. 69. — Iss. 6. — P. 891–899. (0,563 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

240. Благодатских А.И. Групповое преследование убегающего в примере Понтрягина // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2005. — Вып. 4 (34). — С. 57–66.

  Blagodatskikh A.I. Group pursuit of evader in Pontryagin's example // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2005. — Iss. 4 (34). — P. 57–66. (0,313 п.л.) (WoS)

241. Благодатских А.И. К задаче группового преследования // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2006. — Вып. — 2 (36). — С. 3–8.

  Blagodatskikh A.I. To a problem of group pursuit // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2006. — Iss. 2 (36). — P. 3–8. (0,188 п.л.) (WoS)

242. Благодатских А.И. Об одной задаче группового преследования // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2006. — Вып. — 3 (37). — С. 11–12.

Blagodatskikh A.I. One problem of group pursuit // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2006. — Iss. 3 (37). — P. 11–12. (0,125 п.л.) (WoS)

243. Благодатских А.И. О задаче группового преследования в нестационарном примере Понтрягина // Вестник Удмуртского университета. Математика. — 2007. — № 1. — С. 17–24.

Blagodatskikh A.I. About a problem of group pursuit in non-stationary Pontriagin's problem // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. — 2007. — № 1. — P. 17–24. (0,5 п.л.)

244. Благодатских А.И. Почти периодические конфликтно управляемые процессы со многими участниками // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 2. — С. 83–86.

Blagodatskikh A.I. Almost periodic processes with conflict control with many participants // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2007. — Vol. 46. — Iss. 2. — P. 244–247. (0,25 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

245. Благодатских А.И. Пример Понтрягина со многими участниками // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2007. — Вып. 1. — С. 16–23.

Blagodatskikh A.I. Pontryagin's problem with many players // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Seriya 10. Prikladnaya Matematika. Informatika. Protsessy Upravleniya. — 2007. — Iss. 1. — P. 16–23. (0,5 п.л.) (zbMATH)

246. Благодатских А.И. Две нестационарные задачи преследования жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 1. — С. 47–60.

Blagodatskikh A.I. Two non-stationary pursuit problems of a rigidly connected evaders // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2008. — Iss. 1. — P. 47–60. (0,875 п.л.)

247. Благодатских А.И. О некоторых задачах группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2008. — Вып. 2. — С. 19–20.

Blagodatskikh A.I. About some problems of group pursuit // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2008. — Iss. 2. — P. 19–20. (0,125 п.л.)

248. Благодатских А.И. Групповое преследование в нестационарном примере Понтрягина // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44. — № 1. — С. 39–44.

Blagodatskikh A.I. Group pursuit in Pontryagin's nonstationary example // Differential Equations. — 2008. — Vol. 44. — № 1. — P. 40–46. (0,438 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

249. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задаче простого преследования // Прикладная математика и механика. — 2009. — Т. 73. — Вып. 1. — С. 54–59.

Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a simple pursuit problem // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2009. — Vol. 73. — Iss. 1. — P. 36–40. (0,313 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

250. Благодатских А.И. Многократная поимка в примере Понтрягина // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2009. — Вып. 2. — С. 3–12.

Blagodatskikh A.I. Multiple capture in a Pontriagin's problem // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2009. — Iss. 2. — P. 3–12. (0,625 п.л.)

251. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка убегающих // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2012. — Вып. 1 (39). — С. 13–14.

Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture of evaders // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2012. — Iss. 1 (39). — P. 13–14. (0,125 п.л.) (WoS, zbMATH)

252. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка убегающих в задаче простого преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2012. — Вып. 3. — С. 13–18.

Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture of evaders in a simple group pursuit problem // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2012. — Iss. 3. — P. 13–18. (0,375 п.л.) (zbMATH)

253. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в конфликтно управляемом процессе // Прикладная математика и механика. — 2013. — Т. 77. — Вып. 3. — С. 433–440.

Blagodatskikh A.I. Simultaneous multiple capture in a conflict-controlled process // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 2013. — Vol. 77. — Iss. 3. — P. 314–320. (0,438 п.л.) (WoS, zbMATH)

254. Благодатских А.И. Поимка группы убегающих в конфликтно управляемом процессе // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2013. — Вып. 4. — С. 20–26.

Blagodatskikh A.I. Capture of a group of evaders in a conflict-controlled process // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2013. — Iss. 4. — P. 20–26. (0,438 п.л.) (zbMATH)

255. Благодатских А.И. Мягкое убегание жестко скоординированных убегающих в нелинейной задаче группового преследования // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2014. — Вып. 4. — С. 3–17.

Blagodatskikh A.I. Weak evasion of a group of rigidly coordinated evaders in the nonlinear problem of group pursuit // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2014. — Iss. 4. — P. 3–17. (0,938 п.л.) (zbMATH)

256. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Групповое преследование с фазовыми ограничениями в почти периодическом примере Понтрягина // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51. — № 3. — С. 387–394.

Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. Group pursuit with state constraints in Pontryagin's almost periodic example // Differential Equations. — 2015. — Vol. 51. — № 3. — P. 391–398. (0,5 п.л. / 0,25 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

257. Благодатских А.И. Задачи группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2015. — Вып. 2 (46). — С. 13–20.

Blagodatskikh A.I. Problems of group pursuit with equal opportunities in a presence of defenders for an evader // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2015. — Iss. 2 (46). — P. 13–20. (0,5 п.л.) (WoS, zbMATH)

258. Благодатских А.И. Многократная поимка жестко скоординированных убегающих // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2016. — Т. 26. — Вып. 1. — С. 46–57.

Blagodatskikh A.I. Multiple capture of rigidly coordinated evaders // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. — 2016. — Vol. 26. — Iss. 1. — P. 46–57. (0,75 п.л.) (Scopus, zbMATH)

259. Благодатских А.И. Задача простого группового преследования с равными возможностями при наличии защитников убегающего // Математическая теория игр и ее приложения. — 2014. — Т. 6. — Вып. 2. — С. 32–41.

Blagodatskikh A.I. A simple group pursuit problem with equal opportunities and the presence of evader's defenders // Automation and Remote Control. — 2016. — Vol. 77. — № 4. — P. 716–721. (0,375 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

260. Благодатских А.И. Уклонение жестко скоординированных убегающих при наличии фазовых ограничений // Математическая теория игр и ее приложения. — 2015. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 3–14.

Blagodatskikh A.I. Evasion of rigidly coordinated targets under phase constraints // Automation and Remote Control. — 2017. — Vol. 78. — № 6. — P. 1151–1158. (0,5 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

261. Blagodatskikh A.I., Petrov N.N. Simultaneous multiple capture of rigidly coordinated evaders // Dynamic Games and Applications. — 2019. — Vol. 9. — Iss. 3. — P. 594–613. (1,25 п.л. / 0,625 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

262. Благодатских А.И. Синхронная реализация одновременных многократных поимок убегающих // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2023. — Т. 61. — С. 3–26.

Blagodatskikh A.I. Synchronous implementation of simultaneous multiple captures of evaders // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2023. — Vol. 61. — P. 3–26. (1,5 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

263. Благодатских А.И., Банников А.С. Одновременная многократная поимка при наличии защитников убегающего // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2023. — Т. 62. — С. 10–29.

Blagodatskikh A.I., Bannikov A.S. Simultaneous multiplecapture in the presence of evader's defenders // Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta. — 2023. — Vol. 62. — P. 10–29. (1,25 п.л. / 0,625 п.л.) (Scopus, WoS, zbMATH)

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ

264. Благодатских А.И. Моделирование одновременной многократной поимки убегающего в задаче простого группового преследования // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023618634. Дата регистрации: 27.04.2023.

265. Благодатских А.И. Моделирование одновременной многократной поимки жестко скоординированных убегающих в задаче простого группового преследования // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023619171. Дата регистрации: 04.05.2023.

266. Благодатских А.И. Моделирование одновременной многократной поимки убегающего в конфликтно управляемом процессе // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023619727. Дата регистрации: 15.05.2023.

267. Благодатских А.И. Моделирование действий защитника убегающего в задаче простого преследования // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023619892. Дата регистрации: 17.05.2023.

268. Благодатских А.И. Моделирование действий защитника убегающего в конфликтно управляемом процессе // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной

ной регистрации программы для ЭВМ № 2024615850. Дата регистрации: 13.03.2024.

269. Благодатских А.И. Моделирование одновременной многократной поимки жестко скоординированных убегающих в конфликтно управляемом процессе // Федеральная служба по интеллектуальной собственности (Роспатент). Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2024617971. Дата регистрации: 08.04.2024.

Монография

270. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтное взаимодействие групп управляемых объектов. — Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, 2009. — 264 с. (15,34 п.л. / 4,602 п.л.)

Материалы научных мероприятий

271. Благодатских А.И., Петров Н.Н. О некоторых задачах группового преследования // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби: Тезисы докладов Международного семинара. — Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2005. — С. 38–39. (0,063 п.л. / 0,031 п.л.)

272. Благодатских А.И., Петров Н.Н. О некоторых задачах группового преследования // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби: Труды Международного семинара. — Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2006. — Т. 1. — С. 189–196. (0,5 п.л. / 0,25 п.л.)

273. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Пример Понтрягина со многими участниками // Устойчивость и процессы управления: Труды Международной конференции. — СПб: Изд-во Санкт-Петербургского государственного университета, 2005. — Т. 1. — С. 504–513. (0,625 п.л. / 0,313 п.л.)

274. Благодатских А.И. Об одном почти периодическом конфликтно управляемом процессе со многими участниками // Математика. Механика. Информатика: Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. — Челябинск: Изд-во Челябинского государственного университета, 2006. — С. 18. (0,031 п.л.)

275. Благодатских А.И., Петров Н.Н. Конфликтно управляемые процессы при взаимодействии групп управляемых объектов // Математическая теория оптимального управления и теория дифференциальных включений: Тезисы докладов научного семинара. — М.: Изд-во Московского государственного университета, 2006. — С. 12. (0,031 п.л. / 0,016 п.л.)

276. Благодатских А.И. Почти периодические конфликтно управляемые процессы со многими участниками // Дифференциальные уравнения и топология: Тезисы докладов Международной конференции. — М.: Изд-во Московского государственного университета, 2008. — С. 323–324. (0,125 п.л.)

277. Благодатских А.И. Многократная поимка в примере Понтрягина // Девятая Российская университетско-академическая научно-практическая конференция: Тезисы докладов. — Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, 2008. — С. 115–116. (0,063 п.л.)

278. Благодатских А.И. О некоторых задачах группового преследования // Современные проблемы математики, механики и их приложений: Материалы Международной конференции. — М.: Изд-во Московского государственного университета, 2009. — С. 124. (0,063 п.л.)

279. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка убегающих в задачах преследования с равными возможностями участников // Современные проблемы математики: Тезисы докладов Международной (44-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. — Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2013. — С. 80–83. (0,125 п.л.)

280. Благодатских А.И. Групповое преследование при наличии защитников убегающего // Динамика систем и процессы управления: Тезисы докладов Международной конференции. — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, УрФУ, 2014. — С. 44–46. (0,094 п.л.)

281. Благодатских А.И. Групповое преследование при наличии защитников убегающего // Динамика систем и процессы управления: Труды Международной конференции. — Екатеринбург: Изд-во УМЦ УПИ, 2015. — С. 96–102. (0,438 п.л.)

282. Благодатских А.И. Мягкое убегание жестко скоординированных объектов // Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби: Тезисы докладов Международного семинара. — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, УрФУ, 2015. — С. 40–42. (0,094 п.л.)

283. Благодатских А.И. Поимка защищаемой группы убегающих в конфликтно управляемом процессе // Теория управления и математическое моделирование: Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием. — Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, 2015. — С. 150–152. (0,188 п.л.)

284. Благодатских А.И. К задаче о мягком убегании жестко скоординированных объектов // Современные проблемы математики и ее приложений: Труды 46-й Международной молодежной школы-конференции. — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2015. — С. 33–37. (0,156 п.л.)

285. Благодатских А.И. Об одновременной многократной поимке группы убегающих // Устойчивость, управление, дифференциальные игры: Материалы Международной конференции. — Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2019. — С. 84–87. (0,125 п.л.)

286. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задачах группового преследования // Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всероссийской конференции с международным участием. — Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, 2020. — С. 154–156. (0,094 п.л.)

287. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка группы убегающих // Теория управления и математическое моделирование: Материалы Всероссийской конференции с международным участием. — Ижевск: Изд-во Удмуртского государственного университета, 2022. — С. 159–163. (0,156 п.л.)

288. Благодатских А.И. Одновременная многократная поимка в задачах группового преследования // Системный анализ: моделирование и управление: Тезисы докладов Международной конференции. — М.: Изд-во Московского государственного университета, 2024. — С. 38–40. (0,094 п.л.)