

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Уральский федеральный университет имени
первого Президента России Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи

ЛАМОТКИН Алексей Евгеньевич

**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АВТОМАТИЗАЦИЯ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОГРАММНЫХ ТРАЕКТОРИЙ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ В КВАТЕРНИОННОЙ
ПАРАМЕТРИЗАЦИИ**

2.3.7. Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Екатеринбург – 2023

Работа выполнена на кафедре «Металлургические и роторные машины» Института новых материалов и технологий ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор, **МИТЮШОВ Евгений Александрович**

Официальные оппоненты: **ДОЛГИЙ Юрий Филиппович**, доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», г. Екатеринбург, профессор кафедры прикладной математики и механики Института естественных наук и математики;

ВОХМИНЦЕВ Александр Владиславович, доктор технических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Челябинский государственный университет», заведующий научно-исследовательской лабораторией «Интеллектуальные информационные технологии и системы»;

ЛОГУНОВА Оксана Сергеевна, доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова», заведующий кафедрой вычислительной техники и программирования Института энергетики и автоматизированных систем

Защита состоится 12 декабря 2023 г. в 14:00 ч **на заседании диссертационного совета** УрФУ 2.3.11.30 **по адресу:** 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, ауд. И-420 (зал Ученого совета).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», <https://dissovet2.urfu.ru/mod/data/view.php?d=12&rid=5334>

Автореферат разослан «__» _____ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Уколов Станислав Сергеевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы работы. Кватернионы являются мощным инструментом математического и компьютерного моделирования, доказавшим свою эффективность во многих областях науки и техники. Они широко используются для различных приложений, таких, как компьютерная графика и анимация, виртуальная реальность, робототехника, аэрокосмическая техника и др. Кватернионы особенно полезны для представления поворотов и ориентаций в трехмерном пространстве. Формулы, использующие кватернионы, зачастую являются компактными и рациональными, что позволяет получать оригинальные результаты как в новых, так и в ранее изученных задачах.

Прикладные задачи с использованием кватернионной параметризации рассматривались в работах Бирюкова В.Г., Бранца В.Н., Гордеева В.Н., Копытова Н.П., Крищенко А.П., Маланина В.В., Малыкина Г.Б., Молоденкова А.В., Панкова А.А., Плотникова П.К., Сергеева А.Н., Стрелковой Н.А., Челнокова Ю.Н., Чуба В.Ф., Шмыглевского И.П., Chen Z., Dam E.B., Koch M., Lillholm M., Holm D.D., Madgwick S.O.H., Shoemake K., Shuster M.D. и др. Как показывает анализ работ, находящихся в открытом доступе, результаты применения кватернионов при описании движения в реальных системах сосредоточены в области робототехники или космоса и плохо распространяются на другие технические системы из-за специфики задач. В.Н. Гордеевым была высказана мысль, что отсутствие широкого распространения результатов применения кватернионов среди инженеров, скорее всего, связано со сложностью и неинтуитивностью кватернионов, которые представляют собой гиперкомплексные числа, а также с тем, что геометрическое представление движения, заданного кватернионами, требует глубокого понимания четырехмерной геометрии.

Использование кватернионного формализма является перспективным и способно привести к лучшему пониманию движения в технических системах, к его более эффективному анализу и новым важным результатам. Разработка метода, который позволяет геометрически изображать закон движения, заданный кватернионами, в трехмерном пространстве улучшает наглядность кватернионных методов и повышает их популярность при описании сферического движения в таких системах, как шарнирные механизмы, карданные передачи, гироскопы и т.п.

Указанный метод удобно использовать при проектировании и компьютерном моделировании программных траекторий пространственных механизмов. Построение программной траектории является важным элементом решения задачи автоматизированного управления механическими системами, который, в частности, рассматривался в работах М.А. Велищанского, О.В. Ермошиной, А.П. Крищенко и др. Программная траектория понимается в обобщенном смысле как траектория в соответствующем s -мерном

конфигурационном пространстве обобщенных координат. В случае сферического движения твердого тела в качестве таких координат классическим выбором являются углы Эйлера, или самолетные углы. Получаемое при этом конфигурационное пространство является трехмерным, но кинематические уравнения движения имеют особые точки, в которых производные угловых параметров имеют разрывы второго рода. Переход к кватернионной параметризации при описании сферического движения позволяет получить кинематические уравнения, не имеющие особенностей. При этом использование кватернионной параметризации имеет недостаток - конфигурационное пространство представляет собой единичную 3-сферу в четырехмерном пространстве, что лишает исследователя возможностей визуального анализа. Отображение этой четырехмерной 3-сферы в \mathbb{R}^3 с использованием эйлеровой параметризации ось-угол позволяет получить удобные для анализа трехмерные программные траектории пространственных механизмов.

Цель диссертационной работы: разработать метод проектирования и компьютерного моделирования для синтеза, анализа и графической визуализации программных траекторий сферического движения. Продемонстрировать продуктивность предложенного метода при разработке компьютерных моделей и алгоритмов проектирования программных траекторий сферического движения пространственных механизмов, а также его применимость к исследованию движения реальных технических систем на примере универсального шарнира. Для достижения цели диссертационной работы решены следующие задачи:

1. Анализ существующих методов математического моделирования ориентации твердого тела в трехмерном пространстве.
2. Разработка метода проектирования и компьютерного моделирования для синтеза, анализа и графической визуализации программных траекторий сферического движения.
3. Разработка алгоритмов, использующих метод отображения единичных кватернионов в трехмерное пространство векторов поворота, для проектирования и компьютерного моделирования программной траектории переориентации твердого тела за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях.
4. Разработка алгоритмов реализации программных траекторий в технических системах, в которых управление ориентацией осуществляется двигателями-маховиками или линейными приводами.
5. Компьютерное моделирование в кватернионной параметризации кинематики и динамики универсального шарнира. Проведение анализа траекторий движения крестовины универсального шарнира и динамических нагрузок, действующих на нее.

Методы исследования: в основе работы лежат методы математического и компьютерного моделирования ориентации твердого тела, использующие кватернионную параметризацию.

Научная новизна и теоретическая значимость работы:

1. Разработан метод проектирования и компьютерного моделирования для синтеза, анализа и графической визуализации программных траекторий сферического движения.

2. Разработан алгоритм, использующий метод отображения единичных кватернионов в трехмерное пространство векторов поворота, для проектирования и компьютерного моделирования программной траектории переориентации твердого тела в виде многочлена пятой степени за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях.

3. Разработаны интерполяционные алгоритмы, использующие методы отображения единичных кватернионов в трехмерное пространство векторов поворота, для проектирования и компьютерного моделирования программной траектории переориентации твердого тела, близкой к траектории равномерного плоского поворота за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях.

4. Проведен анализ траекторий движения крестовины универсального шарнира, а также действующих на нее динамических нагрузок.

Практическая значимость полученных результатов состоит в возможности применения разработанных алгоритмов для проектирования движения в технических системах. В работе предлагаются варианты реализации таких алгоритмов для систем с двигателями-маховиками и для систем с линейными приводами. Предложенные в диссертации модели и алгоритмы положены в основу двух зарегистрированных программных продуктов для ЭВМ.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод проектирования и компьютерного моделирования для синтеза, анализа и графической визуализации программных траекторий сферического движения.

2. Алгоритм, использующий метод отображения единичных кватернионов в трехмерное пространство векторов поворота, для проектирования и компьютерного моделирования программной траектории переориентации твердого тела в виде многочлена пятой степени за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях.

3. Интерполяционные алгоритмы, использующие методы отображения единичных кватернионов в трехмерное пространство векторов поворота, для проектирования и компьютерного моделирования программной траектории переориентации твердого тела, близкой к траектории равномерного плоского поворота за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях.

4. Результаты анализа траекторий движения крестовины универсального шарнира, а также действующих на нее динамических нагрузок.

Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, подтверждается многочисленными вычислительными экспериментами, выполненными с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, в которой были реализованы предложенные в диссертации модели и алгоритмы. Итоги проведенных исследований и экспериментов представлены рядом публикаций в рецензируемых научных изданиях и не противоречат положениям современной науки.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на международных и всероссийских научных конференциях: XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения «МИКМУС-2019»; Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (FARM-2019)»; XLIV Академические чтения по космонавтике; Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование СТММ2020»; III Международный семинар, посвященный 75-летию академика А.И. Субботина «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби CGS'2020»; Международная конференция «Проблемы прикладной механики»; VI Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (FARM-2020)»; XLV Академические чтения по космонавтике; Международная конференция «Polynomial Computer Algebra PCA'2021»; VII Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (FARM-2021)»; XXIII Всероссийская научно-техническая конференция «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации – 2022»; VIII Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (FARM-2022)»; XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред

Публикации по теме диссертации. Результаты исследования по теме диссертации опубликованы в 18 работах, из них 5 статей опубликовано в рецензируемых научных журналах, определенных ВАК РФ и Аттестационным советом УрФУ, в том числе 3 статьи в изданиях, входящих в международную базу цитирования Scopus. Получено 2 свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 148 страницах текста, содержит 42 рисунка, 2 таблицы. Список литературы состоит из 129 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы диссертационного исследования, оценивается степень ее разработанности, определяются цели и задачи диссертационного исследования, определяются методы исследования, раскрывается научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов.

В первой главе выполнен обзор существующих методов математического моделирования ориентации твердого тела в трехмерном пространстве, определены их сильные и слабые стороны в сравнении с кватернионами, также исследованы особенности использования кватернионов в математическом моделировании и при проектировании программного движения, их достоинств и недостатков.

Применение кватернионов для описания ориентации твердого тела опирается на задание параметров ось-угол. Вследствие теоремы Эйлера-Даламбера ориентации твердого тела можно поставить в соответствие направляющий вектор оси \vec{e} и угол χ , на который надо повернуть тело вокруг этой оси, чтобы перевести его из нулевого положения в описываемое. Ключевую роль в работе играют 2 варианта представления параметров ось-угол:

- 1) Единичные кватернионы, или версоры, способны хранить в себе информацию о векторе и числе:

$$\mathbf{q} = \cos \frac{\chi}{2} + \sin \frac{\chi}{2} \vec{e}.$$

- 2) Векторы поворота (векторы Эйлера)

$$\vec{r} = \chi \vec{e}.$$

Сравнивая способы математического моделирования ориентации твердого тела, можно сделать вывод, что кватернионы являются методом, сочетающим в себе положительные стороны других способов описания, минимизирующим при этом их недостатки. Так, кинематические уравнения для версоров не вырождаются (в отличие от углов Эйлера) и являются линейными, как и для матриц поворота, при этом для задания ориентации требуется всего 4 параметра (вместо 9 у матриц), поэтому их можно назвать одним из наиболее эффективных методов для описания положения тела в трехмерном пространстве. Кроме того, применение кватернионов в задачах кинематического управления ориентацией твердого тела дает возможность получить аналитические решения многих задач (в том числе классических), в которых традиционные методы задания ориентации позволяют получать лишь численные решения.

Одним из недостатков использования кватернионов можно считать усложнение анализа получаемых программных траекторий, т. к. они будут располагаться на 3-сфере в четырехмерном пространстве, что делает невозможным их визуализацию и лишает интуитивности. Действительно, исследование работ, связанных с изучением сферического движения в пространственных механизмах, таких, как гироскопы, карданные передачи и т.п., позволяет сделать вывод, что кватернионный формализм в них практически не используется. Разработка метода трехмерного представления движения, заданного кватернионами, позволила бы повысить наглядность этих методов.

Векторы поворота дают довольно простую геометрическую интерпретацию ориентации тела, однако использование данного способа сопровождается вычислительными трудностями, например, сложностью кинематических уравнений и их интегрирования. В сочетании с кватернионами эти 2 способа могли бы дополнить друг друга, сочетая в себе вычислительные преимущества кватернионов и трехмерную визуализацию векторов поворота.

Во второй главе разрабатывается метод проектирования и компьютерного моделирования программных траекторий сферического движения, который упрощает геометрическую интерпретацию кватернионных методов и основан на отображении движения, заданного в кватернионах, в трехмерное пространство векторов поворота. Проводится анализ вида траекторий эйлеровых (плоских) поворотов.

Единичные кватернионы и векторы поворота задают параметры ось-угол. Используя этот факт, можно установить следующие соответствия между компонентами кватерниона ориентации и вектора поворота в трехмерном пространстве:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_0 = \cos \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{2}, \\ q_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \sin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{2}, \\ q_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \sin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{2}, \\ q_3 = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \sin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{2}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0 \Big|_{\substack{x_1=0, \\ x_2=0, \\ x_3=0}} = 1, \\ q_1 \Big|_{\substack{x_1=0, \\ x_2=0, \\ x_3=0}} = \lim_{x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0} q_1 = 0, \\ q_2 \Big|_{\substack{x_1=0, \\ x_2=0, \\ x_3=0}} = \lim_{x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0} q_2 = 0, \\ q_3 \Big|_{\substack{x_1=0, \\ x_2=0, \\ x_3=0}} = \lim_{x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0} q_3 = 0. \end{array} \right. \quad (1)$$

или же:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{2q_1 \arccos q_0}{\sqrt{1 - q_0^2}}, \\ x_2 = \frac{2q_2 \arccos q_0}{\sqrt{1 - q_0^2}}, \\ x_3 = \frac{2q_3 \arccos q_0}{\sqrt{1 - q_0^2}}. \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \Big|_{\substack{q_0=1, \\ q_1=0, \\ q_2=0, \\ q_3=0}} = \lim_{q_0 \rightarrow 1, q_1 \rightarrow 0, q_2 \rightarrow 0, q_3 \rightarrow 0} x_1 = 0, \\ x_2 \Big|_{\substack{q_0=1, \\ q_1=0, \\ q_2=0, \\ q_3=0}} = \lim_{q_0 \rightarrow 1, q_1 \rightarrow 0, q_2 \rightarrow 0, q_3 \rightarrow 0} x_2 = 0, \\ x_3 \Big|_{\substack{q_0=1, \\ q_1=0, \\ q_2=0, \\ q_3=0}} = \lim_{q_0 \rightarrow 1, q_1 \rightarrow 0, q_2 \rightarrow 0, q_3 \rightarrow 0} x_3 = 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Одной из особенностей параметров ось-угол является то, что данные параметры определяются неоднозначно по ориентации тела. Так, среди единичных кватернионов каждой ориентации соответствует два значения, а среди векторов поворота таких значений бесконечно много. В зависимости

от решаемой задачи могут быть выбраны следующие конфигурационные пространства в \mathbb{R}^3 : шар радиусом π , шар радиусом 2π , все пространство \mathbb{R}^3 .

Формулы (1)-(2) позволяют движение, заданное кватернионами, представлять в виде движения точки в трехмерном пространстве и наоборот. Использование этой связи дает возможность получить наглядное представление траекторий поворота тела в трехмерном пространстве.

Важное место среди пространственных поворотов твердого тела занимают эйлеровы повороты. Известно, например, что они являются более эффективными по быстродействию и расходу топлива при развороте космического аппарата. Поэтому особый интерес представляет исследование того, как должны выглядеть траектории эйлеровых поворотов в \mathbb{R}^3 при использовании отображения (2). В рамках диссертационной работы было доказано 3 утверждения касательно данного вопроса.

Утверждение 1:

Образом траектории эйлерова поворота в \mathbb{R}^3 является плоская кривая, причем плоскость этой кривой проходит через начало координат.

Утверждение 2:

Если кватернионы начальной и конечной ориентаций имеют нулевые действительные части, то траекторией эйлерова поворота в \mathbb{R}^3 является дуга окружности радиусом π .

Утверждение 3:

Если векторные части кватернионов начальной и конечной ориентаций коллинеарны, то траекторией эйлерова поворота в \mathbb{R}^3 является отрезок прямой, проходящей через начало координат.

Данные утверждения наглядно проиллюстрированы на рис. 1. Точка

A является образом кватерниона $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^T$, точка B является образом

кватерниона $\left[0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right]^T$, точка C является образом кватерниона

$\left[0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T$. Траектория AB удовлетворяет условиям утверждения 1, траектория BC удовлетворяет условиям утверждения 2, траектория

CA удовлетворяет условиям утверждения 3.

Знание признаков плоских траекторий в \mathbb{R}^3 может быть полезно при решении задачи кинематического управления, в частности, при построении траекторий программных движений. Действительно, задача кинематического управления для кватернионов, в которой требуется найти закон программного движения $q_0(t), q_1(t), q_2(t), q_3(t)$ и управление $\Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t)$, ее реализующее, которые поворачивают тело из заданной начальной конфигурации в заданную конечную за фиксированное время T , с использо-

ванием формул (1)-(2) может быть переформулирована для векторов поворота. При такой постановке задача может быть проинтерпретирована как задача управления движением точки в трехмерном пространстве в которой требуется найти закон программного движения $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ и управление $\Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t)$, ее реализующее, которые переводят точку из заданной начальной конфигурации в заданную конечную за фиксированное время T . Однако из-за вычислительных трудностей, которые могут возникнуть при такой постановке задачи, следует рассматривать ее как вспомогательную и позволяющую проводить визуальный анализ решения исходной задачи.

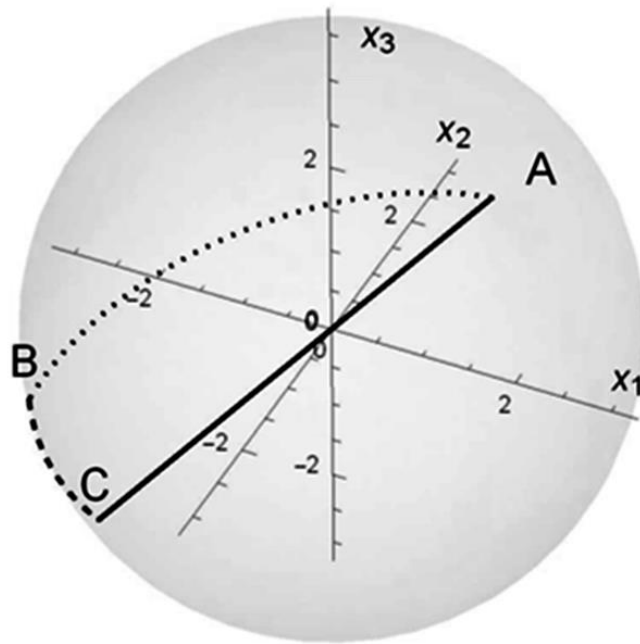


Рисунок 1 – Траектории плоских поворотов в шаре радиусом π .

В третьей главе разрабатывается метод построения квазиоптимальной программной траектории поворота твердого тела за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях на скорость и ускорение, использующий отображения кватернионов в трехмерное евклидово пространство. Также разрабатывается интерполяционный алгоритм, использующий трехмерное отображение кватернионов для автоматизированного проектирования программной траектории переориентации твердого тела за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях на скорость, которая была бы близка к траектории равномерного плоского поворота.

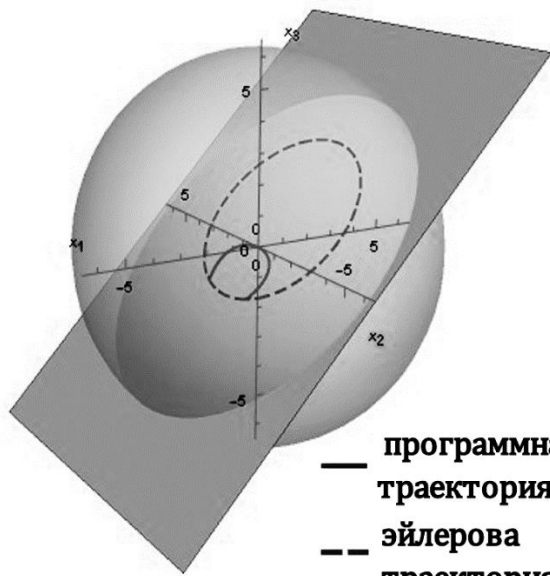
Первый из разработанных методов предполагает построение программного поворота, удовлетворяющего заданным граничным условиям в виде полинома пятой степени:

$$\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^5 \vec{a}_k t^k, \quad 0 \leq t \leq T,$$

его коэффициенты находятся с помощью заданных граничных условий:

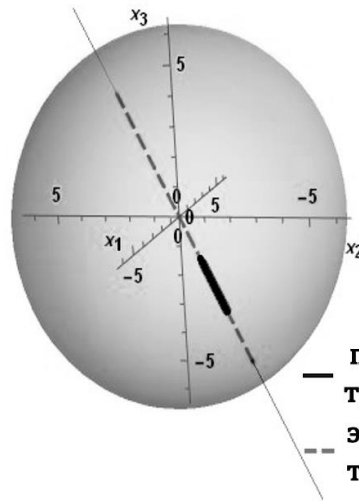
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_0 = \vec{r}_0, \\ \vec{a}_1 = \dot{\vec{r}}_0, \\ \vec{a}_2 = \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0, \\ \vec{a}_5 T^5 + \vec{a}_4 T^4 + \vec{a}_3 T^3 = \vec{r}_T - \vec{r}_0 - \dot{\vec{r}}_0 T - \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0 T^2, \\ 5\vec{a}_5 T^4 + 4\vec{a}_4 T^3 + 3\vec{a}_3 T^2 = \dot{\vec{r}}_T - \dot{\vec{r}}_0 - \ddot{\vec{r}}_0 T, \\ 20\vec{a}_5 T^3 + 12\vec{a}_4 T^2 + 6\vec{a}_3 T = \ddot{\vec{r}}_T - \ddot{\vec{r}}_0. \end{array} \right.$$

Идея данного метода взята из работ А.П. Крищенко, М.А. Велищанского и др., в которых описан аналогичный метод построения программного движения для кватернионов. Его коэффициенты находятся из заданных граничных условий. Построенные данным методом программные движения именуется квазиоптимальными, т.к. метод их построения предполагает единственность варианта такого движения, а следовательно, оптимальность по любому возможному критерию качества.



— программная траектория
 - - - эйлерова траектория

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^0 &= (0.5, -0.5, -0.5, -0.5)^T, \\ \mathbf{q}^T &= (0.5, -0.5, 0.5, -0.5)^T, \\ \vec{\Omega}^0 &= (0.5, 0, 0), \quad \vec{\Omega}^T = (0, 0, -0.5), \\ \dot{\vec{\Omega}}^0 &= (0, 0, 0), \quad \dot{\vec{\Omega}}^T = (0, 0, 0). \end{aligned}$$



— программная траектория
 - - - эйлерова траектория

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^0 &= (0.5, -0.5, -0.5, -0.5)^T, \\ \mathbf{q}^T &= (-0.5, -0.5, -0.5, -0.5)^T, \\ \vec{\Omega}^0 &= (0, 0, 0), \quad \vec{\Omega}^T = (0, 0, 0), \\ \dot{\vec{\Omega}}^0 &= (0, 0, 0), \quad \dot{\vec{\Omega}}^T = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Рисунок 2 – Траектории разворота за $T = 10$ с в шаре радиусом 2π

На рис. 2 представлены программные траектории, полученные этим методом для разных граничных условий. В некоторых случаях построенная траектория может описывать плоский поворот, а в некоторых - нет; трехмерное представление траекторий позволяет сразу визуально это оценить. Так, видно, что левая траектория не является плоским поворотом, в то время как правая - является. Это позволяет исключить одну из трудностей, которая возникает при использовании данного метода для кватернионов - оценка эйлеровости поворота. Еще одну сложность, которую мы избегаем, - это необходимость нормирования фазового вектора в каждый момент времени. Компьютерный эксперимент показал, что среднее время вычисления коэффициентов полинома $\vec{r}(t)$ на 23% меньше, чем коэффициентов аналогичного полинома для кватернионов.

Плоские повороты, как отмечалось ранее, в определенных случаях являются наиболее эффективными, поэтому вместо квазиоптимальной траектории, построенной предыдущим методом, целесообразней стремиться к некоторой траектории плоского поворота. Этого можно добиться с помощью интерполяционных методов. Для этого сначала с помощью сферической линейной интерполяции строится траектория эйлера поворота в пространстве кватернионов, а затем по формулам (2) находится ее образ в пространстве векторов поворота. Построенный образ используется для нахождения n узлов интерполяции, после чего строится интерполяционная функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям.

В работе рассматриваются 2 вида интерполяционных функций - интерполяционный многочлен и кубические сплайны. В первом случае интерполяционная функция строится в виде многочлена степени $n + 3$:

$$\vec{r} = \sum_{k=0}^{n+3} \vec{a}_k t^k,$$

коэффициенты которых находятся с учетом граничных условий и значений функции в узлах интерполяции:

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \dot{\vec{r}}(0), \\ \sum_{k=1}^{n+3} \vec{a}_k k T^{k-1} = \dot{\vec{r}}(T), \\ \vec{a}_0 = \vec{r}(0), \\ \sum_{k=0}^{n+3} \vec{a}_k \left(\frac{iT}{n+1}\right)^{k-1} = \vec{r}\left(\frac{iT}{n+1}\right), \quad i = 1, \dots, n+1. \end{cases}$$

В случае использования кубических сплайнов интерполяционная функция на каждом интерполяционном отрезке $\left[\frac{iT}{n+1}, \frac{(i+1)T}{n+1}\right]$, $(i = 0, \dots, n)$ ищется в виде некоторого кубического многочлена:

$$\vec{r}_i(t) = \vec{a}_{i0} + \vec{a}_{i1}t + \vec{a}_{i2}t^2 + \vec{a}_{i3}t^3, \quad (i = 0, \dots, n),$$

коэффициенты этих многочленов могут быть найдены из системы:

$$\begin{aligned}
 & \vec{a}_{00} = \vec{r}(0), \\
 & \vec{a}_{01} = \dot{\vec{r}}(0), \\
 & \vec{a}_{i0} + \vec{a}_{i1} \left(\frac{iT}{n+1} \right) + \vec{a}_{i2} \left(\frac{iT}{n+1} \right)^2 + \vec{a}_{i3} \left(\frac{iT}{n+1} \right)^3 = \vec{r} \left(\frac{iT}{n+1} \right), \quad i = 1, \dots, n, \\
 & \vec{a}_{i0} + \vec{a}_{i1} \left(\frac{(i+1)T}{n+1} \right) + \vec{a}_{i2} \left(\frac{(i+1)T}{n+1} \right)^2 + \vec{a}_{i3} \left(\frac{(i+1)T}{n+1} \right)^3 = \vec{r} \left(\frac{(i+1)T}{n+1} \right), \quad i = 0, \dots, n-1, \\
 & \vec{a}_{n0} + \vec{a}_{n1}T + \vec{a}_{n2}T^2 + \vec{a}_{n3}T^3 = \vec{r}(T), \\
 & \vec{a}_{n1} + 2\vec{a}_{n2}T + 3\vec{a}_{n3}T^2 = \dot{\vec{r}}(T), \\
 & \vec{a}_{i1} + 2\vec{a}_{i2} \left(\frac{(i+1)T}{n+1} \right) + 3\vec{a}_{i3} \left(\frac{(i+1)T}{n+1} \right)^2 = \\
 & = \vec{a}_{i+1,1} + 2\vec{a}_{i+1,2} \left(\frac{(i+1)T}{n+1} \right) + 3\vec{a}_{i+1,3} \left(\frac{(i+1)T}{n+1} \right)^2, \quad i = 0, \dots, n-1, \\
 & \vec{a}_{i2} + 3\vec{a}_{i3} \left(\frac{(i+1)T}{n+1} \right) = \\
 & = \vec{a}_{i+1,2} + 3\vec{a}_{i+1,3} \left(\frac{(i+1)T}{n+1} \right), \quad i = 0, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

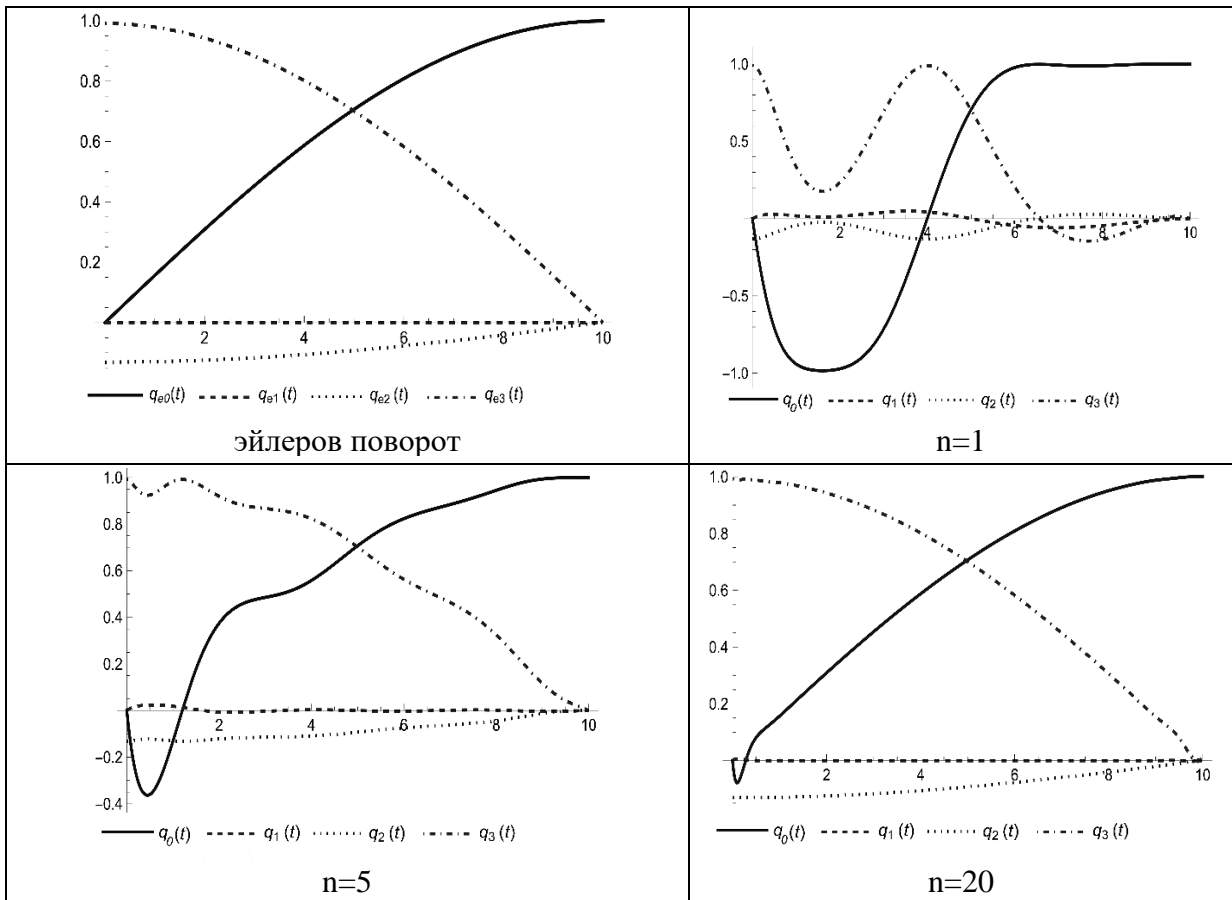


Рисунок 3 – Интерполяция с помощью многочлена

На рис. 3 представлены изменения вида интерполяционных функций компонент программного кватерниона $q(t)$ при $T=10$ с и граничных условиях:

$$\mathbf{q}_0 = (0, 0, -0.131, 0.991)^T, \quad \mathbf{q}_T = (1, 0, 0, 0)^T,$$

$$\vec{\Omega}_0 = (0, -0.831, 3.86)^T, \quad \vec{\Omega}_T = (0, 0, -0.2)^T.$$

Для сравнения на рис. 4 построены интерполяционные функции для тех же самых граничных условий методом кубических сплайнов.

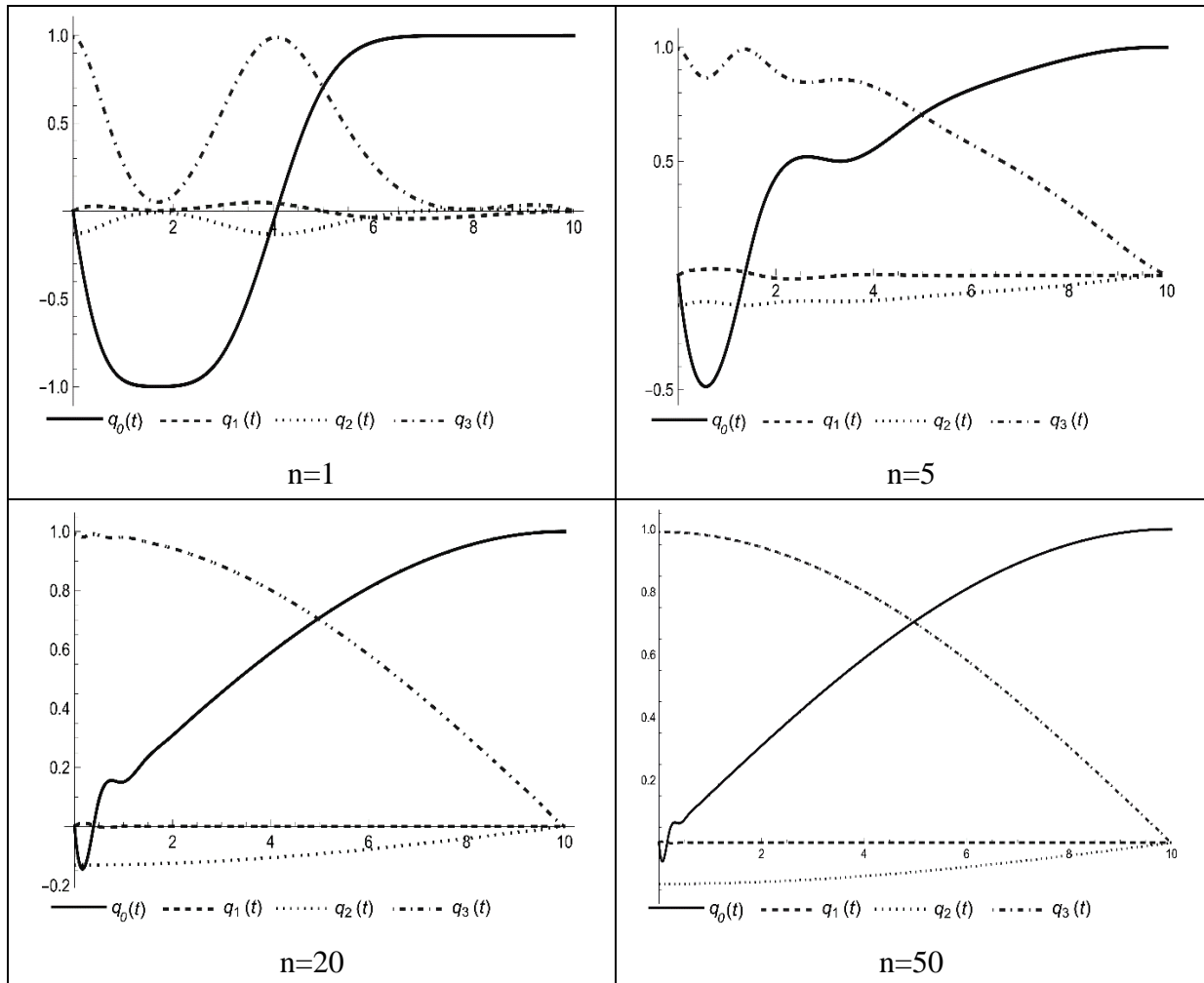


Рисунок 4 – Интерполяция с помощью кубических сплайнов

Из этих графиков видно, что с увеличением n программное движение приближается к эйлерову. Однако при большом количестве узлов интерполяционные многочлены имеют склонность к осцилляциям (колебаниям) между узлами, а использование сплайнов устраняет эту проблему.

Предложенные программные траектории допускают различные варианты практической реализации. Так, в случае космических аппаратов программные движения могут осуществляться за счет управления с помощью внутренних двигателей-маховиков, которое основано на законе сохранения кинетического момента. В случае же платформы Стюарта управление происходит за счет изменения длин линейных приводов.

На рис. 5 проиллюстрировано положение платформы Стюарта в момент времени $t = 2.5$ с при ее движении по квазиоптимальной траектории, построенной для граничных условий: $\mathbf{q}(0) = \left(\cos \frac{\pi}{16}, 0, \sin \frac{\pi}{16}, 0 \right)^T$, $\mathbf{q}(10) = \left(\cos \frac{\pi}{16}, \sin \frac{\pi}{16}, 0, 0 \right)^T$.

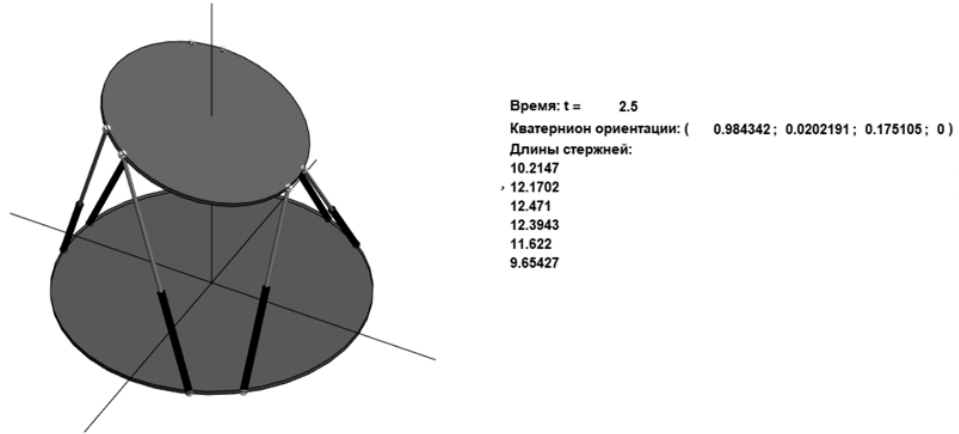


Рисунок 5 – Положение платформы Стюарта в момент времени $t = 2.5$ с

В четвертой главе производится описание и анализ движения универсального шарнира с использованием кватернионов и их отображения, а также, используя данный подход, анализируются динамические нагрузки, действующие на универсальный шарнир, с учетом инерции крестовины.

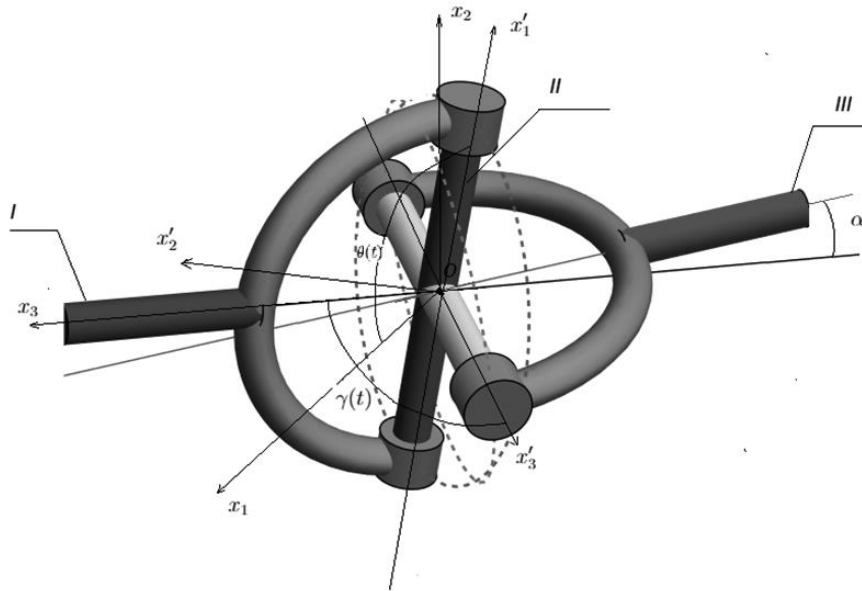


Рисунок 6 – Схема универсального шарнира

На рис. 6 представлена схема универсального шарнира, который можно условно разбить на ведущий вал I, ведомый вал III и крестовину шарнира II. В данном случае интерес представляет именно сферическое движение крестовины. Закон движения крестовины может быть описан с помощью кватернионов следующим образом:

$$\begin{aligned}
 q_0(\varphi_I) &= \cos \frac{\varphi_I}{2} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_I) \right], \\
 q_1(\varphi_I) &= \cos \frac{\varphi_I}{2} \sin \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_I) \right], \\
 q_2(\varphi_I) &= \sin \frac{\varphi_I}{2} \sin \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_I) \right], \\
 q_3(\varphi_I) &= \sin \frac{\varphi_I}{2} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_I) \right].
 \end{aligned}$$

здесь φ_I – это угол поворота ведущего вала.

Траектория движения крестовины зависит от величины угла между осями валов. На рис. 7 представлены варианты траекторий для стационарных углов между валами.

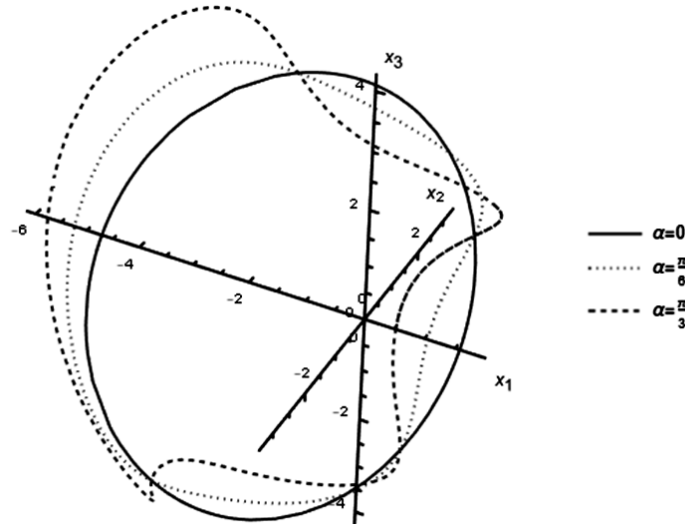


Рисунок 7 – Траектории поворота крестовины универсального шарнира

Видно, что при угле между валами 0 градусов поворот крестовины является плоским, а при увеличении этого угла траектория все более отличается от эйлеров. Замкнутость этих траекторий очевидным образом свидетельствует о периодическом характере движения крестовины.

Если считать, что угол между валами меняется плавно от 0 до α^* за T секунд, то с помощью траекторий можно оценить плавность перехода на стационарное движение. Пусть для примера:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(t) &= \alpha^* \left(6 \left(\frac{t}{T} \right)^5 - 15 \left(\frac{t}{T} \right)^4 + 10 \left(\frac{t}{T} \right)^3 \right), \\
 \alpha_2(t) &= \alpha^* \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right), \\
 \alpha_3(t) &= \alpha^* \left(35 \left(\frac{t}{T} \right)^4 - 84 \left(\frac{t}{T} \right)^5 + 70 \left(\frac{t}{T} \right)^6 - 20 \left(\frac{t}{T} \right)^7 \right).
 \end{aligned}$$

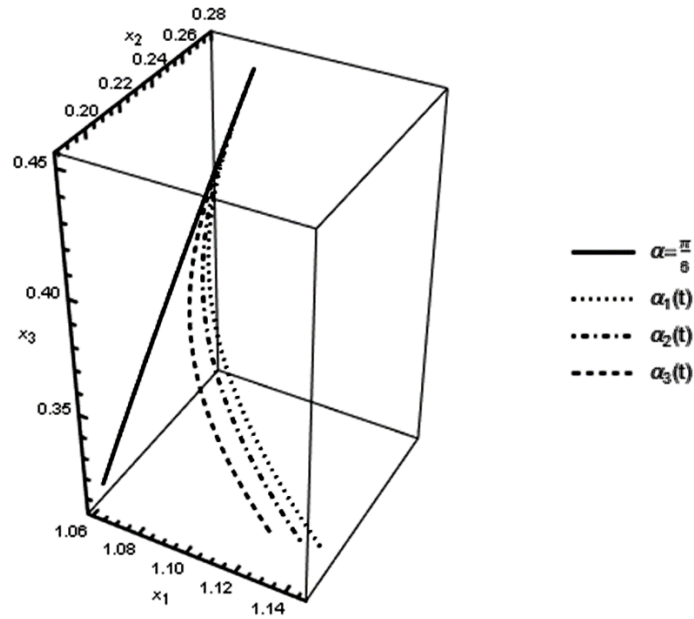


Рисунок 8 – Участки траекторий поворота крестовины универсального шарнира от 0.7 с до 1 с

На рис. 8 сплошной линией показана траектория, соответствующая постоянному углу между валами $\alpha = \pi/6$ ($T = 1$ с). Видно, что наиболее плавный переход на эту траекторию обеспечивается функцией $\alpha_3(t)$.

Использование кватернионного формализма позволяет относительно легко провести анализ влияния инерционных характеристик крестовины на момент на выходном валу, который влияет на износ шипов крестовины.

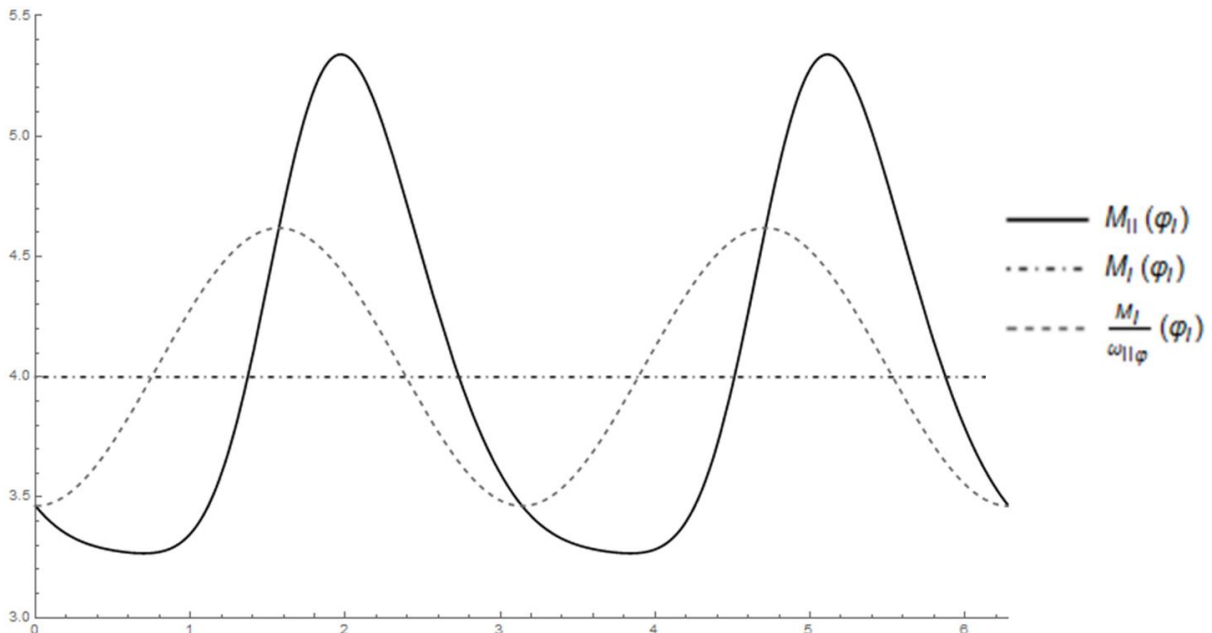


Рисунок 9 – Графики крутящих моментов, действующих на крестовину

$$M_l = 4 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad \omega_l = 110 \text{ рад/с}, \quad \alpha = 30^\circ,$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

На рис. 9 представлены значения моментов, действующих на крестовину. Горизонтальной штрихпунктирной линией показан приложенный момент на ведущем валу, пунктирной линией показано значение реактивного момента на ведомом валу, если пренебречь инерцией крестовины. Сплошной линией показано значение реактивного момента на ведомом валу при учете инерционных характеристик крестовины. Как видно из графика, пиковые значения момента на выходном валу при учете инерции крестовины оказываются выше, что должно способствовать более быстрому износу шипов ведомого вала. Однако можно попытаться уменьшить динамическую нагрузку на шипы выходного вала, если попробовать перераспределить массу крестовины.

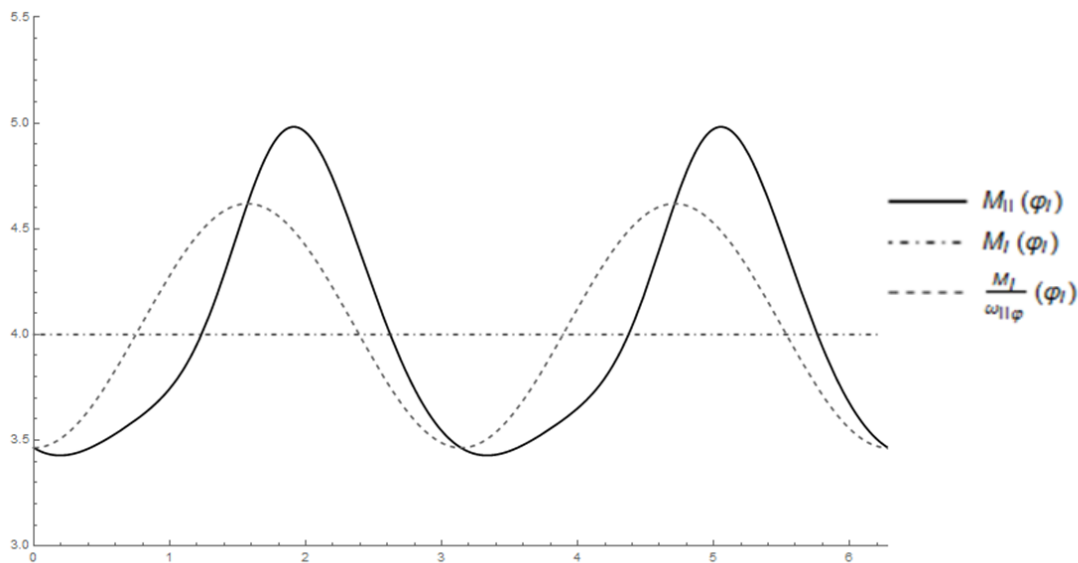


Рисунок 10 – Графики крутящих моментов, действующих на крестовину

$$M_I = 4 \text{ Н} \cdot \text{м}, \quad \omega_I = 110 \text{ рад/с}, \quad \alpha = 30^\circ,$$

$$I_1 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

На рис. 10 представлен пример перераспределения массы крестовины таким образом, что первый инвариант тензора инерции остается неизменным. Это сказывается на динамических свойствах механической системы и приводит к уменьшению максимального значения крутящего момента на выходном валу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый метод в описании сферического движения твердых тел, предполагающий совмещение двух известных методов - кватернионов и векторов поворота. Он позволил объединить достоинства обоих методов - простоту математических выражений кватернионов и про-

стоту геометрической интерпретации векторов поворота - и тем самым расширить распространенный кватернионный формализм средствами трехмерного визуального анализа.

Рассмотрено применение изложенного подхода при решении двух задач, обладающих большой практической значимостью. Первая из них предполагает получение программной траектории переориентации твердого тела за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях на скорость и ускорение. Во второй исследуется движение универсального шарнира и проводится анализ действующих на него динамических нагрузок.

Задача переориентации твердого тела решалась с использованием концепции квазиоптимальных траекторий, однако в отличие от известных работ, в которых применяются единичные кватернионы, для их построения использовалось пространство векторов поворота, что обладает некоторыми преимуществами. Во-первых, построение программной траектории в пространстве векторов поворота позволяет сразу произвести ее визуальный анализ, например, сравнить с траекторией эйлера поворота. Во-вторых, при построении программных траекторий отсутствует необходимость нормирования фазового вектора. В-третьих, более низкая размерность фазового вектора (3 координаты у вектора поворота против 4 у кватернионов) позволяет сократить время вычислений в среднем на 23%. Всего было разработано три алгоритма автоматизированного проектирования программного разворота твердого тела при заданных краевых условиях на угловое положение, скорость и ускорение. На основе разработанных алгоритмов были созданы и зарегистрированы программы для ЭВМ с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Эффективность полученных алгоритмов была продемонстрирована на конкретных числовых примерах, а также рассмотрены способы реализации получаемых программных траекторий с помощью двигателей маховиков (для космических аппаратов) и с помощью линейных приводов (для платформы Стюарта).

Продуктивность рассмотренного метода также продемонстрирована в рамках исследования движения универсального шарнира. Были получены компактные и рациональные формулы, позволяющие проанализировать динамические нагрузки, действующие на шарнир неравных угловых скоростей, учитывая инерционные параметры крестовины. В результате анализа было установлено, что истинное значение момента на выходном валу при учете инерционных характеристик крестовины оказывается выше, чем при пренебрежении ими. Также анализ показал, что значения крутящего момента на входном валу меньше достигаемых значений на выходном валу, на основании чего можно сделать вывод, что разворот крестовины на 90 градусов вокруг оси, перпендикулярной плоскости крестовины, который приво-

дит к смене шипов, принимающих нагрузку от ведущего вала, на шипы, передающие нагрузку ведомому валу, позволит продлить эксплуатационный ресурс универсального шарнира. Кроме вышесказанного, было показано, что посредством изменения массовых характеристик крестовины можно уменьшить динамические нагрузки и тем самым уменьшить износ контактирующих поверхностей.

Таким образом, рассмотренный подход, использующий кватернионы и их отображение в пространство поворотов, доказал свою эффективность при проектировании и исследовании сферического движения пространственных механизмов и может быть полезен в первую очередь для инженеров и исследователей, занимающихся данными вопросами.

В рамках дальнейшей разработки темы может быть установлена более тесная связь между формой траектории и характеристиками движения (например, кинетической энергией). Это позволит проводить более глубокий визуальный анализ получаемого программного движения.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных ВАК РФ и Аттестационным советом УрФУ:

1. **Lamotkin A. E.** Designing the program trajectory for steering a spacecraft under arbitrary boundary condition / **A. E. Lamotkin**, N. E. Misyura, E. A. Mityushov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 747, №1. – 012087. 0,563 п.л. / 0,188 п.л. (Scopus)
2. Mityushov E. A. Construction of a programmed trajectory in the configuration space of rotations for solving the problem of the solid rotation / E. A. Mityushov, N. E. Misyura, **A. E. Lamotkin** // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1705, №1. – 012031. 0,563 п.л. / 0,188 п.л. (Scopus)
3. Mityushov E. A. Designing a program trajectory of a smooth turn / E. A. Mityushov, N. E. Misyura, **A. E. Lamotkin** // AIP Conference Proceedings. – 2021. – Vol. 2340. – 050006. 0,438 п.л. / 0,146 п.л. (Scopus)
4. Митюшов Е. А. Моделирование кинематики и динамики шарнира неравных угловых скоростей / Е. А. Митюшов, Н. Е. Мисюра, **А. Е. Ламоткин** и др. // *Computational Nanotechnology*. – 2022. – №9(4). – С. 48–54. 0,438 п.л. / 0,110 п.л.
5. Митюшов Е. А. Построение траекторий движения универсального шарнира в конфигурационном пространстве в \mathbb{R}^3 / Е. А. Митюшов, Н. Е. Мисюра, **А. Е. Ламоткин** // *Computational Nanotechnology*. – 2023. – №10(1). – С. 60–66. 0,438 п.л. / 0,146 п.л.

Свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ:

6. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2021666432 Российская Федерация. Математическая модель плавного

разворота малого космического аппарата вдоль траектории, близкой к эйлеровой / **А. Е. Ламоткин**, Н. Е. Мисюра, Е. А. Митюшов, заявитель и правообладатель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина». – № 2021665367 ; заявл. 06.10.2021 ; опубл. 14.10.2021.

7. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ 2022669246 Российская Федерация. Построение траектории вращения универсального шарнира в трехмерном пространстве / **А. Е. Ламоткин**, Н. Е. Мисюра, Е. А. Митюшов, заявитель и правообладатель Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина». – № 2022668600 ; заявл. 13.10.2022 ; опубл. 19.10.2022.

Публикации в других изданиях:

8. **Ламоткин А. Е.** Применение кватернионов к задаче о плавном развороте космического аппарата / **А. Е. Ламоткин**, Н. Е. Мисюра, Е. А. Митюшов // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения «МИКМУС-2019». Сборник трудов конференции, Декабрь 4–6, 2019 – Москва, 2020. – С. 484–487. 0,250 п.л. / 0,063 п.л.
9. **Ламоткин А. Е.** Построение программной траектории в конфигурационном пространстве вращений для решения задачи о плавном развороте твердого тела / **А. Е. Ламоткин**, Н. Е. Мисюра, Е. А. Митюшов // Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Тезисы докладов, Декабрь 10–12, 2019 – Москва, 2020. – С. 168–170. 0,188 п.л. / 0,063 п.л.
10. **Ламоткин А. Е.** Кинематика плавного разворота космического аппарата / **А. Е. Ламоткин**, Н. Е. Мисюра, Е. А. Митюшов // XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся ученых – пионеров освоения космического пространства. Сборник тезисов: в 2 т. Т.1, Январь 28–31, 2020 – Москва, 2020. – С. 275–276. 0,125 п.л. / 0,042 п.л.
11. Мисюра Н. Е. Терминальное управление сферическим движением / Н. Е. Мисюра, **А. Е. Ламоткин**, Е. А. Митюшов // Материалы всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование СТММ2020», Июнь 15–19, 2020 – Ижевск, 2020. – С. 324–325. 0,125 п.л. / 0,042 п.л.
12. Митюшов Е. А. Моделирование эталонных групп вращений / Е. А. Митюшов, Н. Е. Мисюра, **А. Е. Ламоткин** // Материалы всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование СТММ2020», Июнь 15–19, 2020 – Ижевск, 2020. – С. 326–327. 0,125 п.л. / 0,042 п.л.

13. **Ламоткин А. Е.** Об одном способе построения программной траектории сферического движения твердого тела / **А. Е. Ламоткин**, Н. Е. Мисюра, Е. А. Митюшов // Об одном способе построения программной траектории сферического движения твердого тела // Материалы III международного семинара, посвященного 75-летию академика А.И. Субботина «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби CGS'2020», Октябрь 26–30, 2020 – Екатеринбург, 2020. – С. 220–224. 0,313 п.л. / 0,104 п.л.
14. **Ламоткин А. Е.** Динамика плавного разворота. / **А. Е. Ламоткин**, Н. Е. Мисюра, Е. А. Митюшов // Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Тезисы докладов. Часть I, Декабрь 2–4, 2020 – Москва, 2021. – С. 161–163. 0,188 п.л. / 0,063 п.л.
15. **Ламоткин А. Е.** Математическая модель двухосной закрутки малого космического аппарата двигателями-маховиками / **А. Е. Ламоткин**, Н. Е. Мисюра, Е. А. Митюшов // XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся ученых – пионеров освоения космического пространства. Сборник тезисов: в 4 т. Т.1, Март 30–Апрель 2, 2021 – Москва, 2021. – С. 472–474. 0,188 п.л. / 0,063 п.л.
16. **Lamotkin A. E.** On One Method for constructing a programmed trajectory in problems of stabilizing a spacecraft / **A. E. Lamotkin**, N. E., Misyura, E. A. Mityushov // MATEC Web of Conferences. – 2021. – 346 (78). – 03055. 0,375 п.л. / 0,125 п.л.
17. Mityushov E. A. Quaternionic description of the Euler trajectories of a rigid body in various configuration spaces / E. A. Mityushov, N. E. Misyura, **A. E. Lamotkin** // Polynomial Computer Algebra '2021. Book of abstracts., April 19–24, 2021 – St. Petersburg, 2021. – P. 150–153. 0,250 п.л. / 0,063 п.л.
18. **Ламоткин А. Е.** Кватернионное представление дифференциальных уравнений эйлера поворота. / **А. Е. Ламоткин**, Н. Е. Мисюра, Е. А. Митюшов // Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики». Тезисы докладов. Часть I, Декабрь 7–10, 2021 – Москва, 2022. – С. 218–220. 0,188 п.л. / 0,063 п.л.
19. **Ламоткин А. Е.** Компьютерное моделирование кинематики и динамики универсального шарнира / **А. Е. Ламоткин**, Е. А. Митюшов // Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации – 2022. Материалы XXIII всероссийской научно-технической конференции, Ноябрь 16–18, 2022 – Пермь, 2022. – С. 122–123. 0,125 п.л. / 0,042 п.л.
20. Митюшов Е. А. Динамика и ресурс универсальных шарниров в карданных передачах / Е. А. Митюшов, **А. Е. Ламоткин** // XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов, Февраль 13–17, 2023 – Пермь, 2023. – С. 217. 0,063 п.л. / 0,032 п.л.