

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»
Институт новых материалов и технологий
Кафедра металлургических и роторных машин



На правах рукописи

Ламоткин Алексей Евгеньевич

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АВТОМАТИЗАЦИЯ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПРОГРАММНЫХ ТРАЕКТОРИЙ
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ В КВАТЕРНИОННОЙ
ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

2.3.7 Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
технических наук

Научный руководитель
доктор физ.-мат. наук, профессор
Митюшов Е.А.

Екатеринбург – 2023

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	2
ГЛАВА 1. ОБЗОР ПРИМЕНЕНИЯ КВАТЕРНИОНОВ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ.....	2
1.1. Обзор методов математического моделирования ориентации твердого тела в трехмерном пространстве	12
1.1.1. Углы конечного вращения	13
1.1.2. Специальные ортогональные матрицы группы $SO(3)$	18
1.1.3. Параметры ось - угол. Векторы Эйлера и Родрига.....	20
1.1.4. Тензор поворота	22
1.1.5. Кватернионы и параметры Родрига-Гамильтона.....	23
1.1.6. Специальные унитарные матрицы группы $SU(2)$, параметры Кейли-Клейна	28
1.1.7. Описание свободного движения твердого тела	30
1.1.7.1. Элементы специальной евклидовой группы $SE(3)$	30
1.1.7.2. Винты	31
1.1.7.3. Дуальные бикватернионы	32
1.2. Роль кватернионов в современном математическом моделировании	33
1.3. Обзор применения кватернионов в кинематических задачах управления ориентацией твердого тела и при исследовании движения технических систем	38
1.3.1. Применения кватернионов в кинематических задачах управления ориентацией твердого тела	38
1.3.2. Применения кватернионов при моделировании движения технических систем	45
1.3.2.1. Обзор работ, посвященных использованию кватернионов для описания и исследования движения технических систем	45
1.3.2.2. Обзор работ, посвященных исследованию карданной передачи	46
1.4. Применение кватернионов при автоматизации проектирования и в САПР	48
1.5. Выводы по 1 главе.....	51
ГЛАВА 2. ОТОБРАЖЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ КВАТЕРНИОНОВ В ПРОСТРАНСТВО ВЕКТОРОВ ПОВОРОТА В \mathbb{R}^3	53
2.1. Отображение конфигурационного пространства поворотов S^3 в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3	54
2.1.1. Конфигурационное пространство поворотов в виде трехмерного шара радиусом π	54
2.1.2. Расширение конфигурационного пространства поворотов до трехмерного шара радиусом 2π	57
2.1.3. Об отображении пространства \mathbb{R}^3 на сферу S^3	58
2.2. Образы траекторий эйлеровых поворотов в пространстве \mathbb{R}^3	59

2.2.1.	Эйлеровы траектории на сфере S^3	59
2.2.2.	Свойства образов эйлеровых траекторий в пространстве \mathbb{R}^3	64
2.3.	Постановка задачи управления ориентацией твердого тела.....	69
2.3.1.	Постановка задачи переориентации твердого тела в конфигурационном пространстве S^3	69
2.3.2.	Постановка задачи переориентации твердого тела в пространстве \mathbb{R}^3	70
2.3.2.	О постановке задачи оптимальной переориентации	72
2.4.	Выводы по главе 2.....	73
ГЛАВА 3. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА ВЕКТОРОВ ПОВОРОТА В \mathbb{R}^3		74
3.1.	Решение задачи управления в случае, когда поворот твердого тела задается полиномом пятой степени.....	74
3.1.1.	Построение программной траектории в виде полинома пятой степени	74
3.1.2.	Пример 1	76
3.1.3.	Пример 2	80
3.2.	Нахождение программной траектории, близкой к траектории эйлера поворота.....	81
3.2.1.	Построение интерполяционного многочлена	82
3.2.2.	Пример 3.....	84
3.2.3.	Интерполяция с помощью кубических сплайнов.....	88
3.2.4.	Пример 4	89
3.3.	Реализация программных траекторий.....	92
3.3.1.	Реализация программной траектории КА с помощью двигателей-маховиков.	92
3.3.2.	Пример 5	95
3.3.3.	Реализация программной траектории платформы Стюарта с помощью линейных приводов.....	97
3.3.4.	Пример 6	101
3.3	Выводы по главе 3	104
ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ УНИВЕРСАЛЬНОГО ШАРНИРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОННОГО ФОРМАЛИЗМА		106
4.1	Описание кинематики универсального шарнира с использованием кватернионного формализма.....	108
4.1.1.	Закон движения крестовины универсального шарнира в самолетных углах	108
4.1.2.	Закон движения крестовины универсального шарнира в кватернионах.....	113
4.1.3.	Траектории движения крестовины универсального шарнира в \mathbb{R}^3	116
4.1.4.	Изменение траектории движения крестовины универсального шарнира в \mathbb{R}^3 при плавном изменении угла между осями валов	120

4.2 Исследование динамических нагрузок, действующих на крестовину универсального шарнира с использованием кватернионного формализма	123
4.2.1. Исследование зависимости величины выходного момента от инерционных характеристик крестовины универсального шарнира	123
4.2.2. Балансировка оптимизацией инерционных характеристик крестовины.....	126
4.3 Выводы по главе 4	128
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	130
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	133

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность и степень разработанности темы. Кватернионы являются мощным инструментом математического и компьютерного моделирования, доказавшим свою эффективность во многих областях науки и техники. Они широко используются для различных приложений, таких, как компьютерная графика и анимация, виртуальная реальность, робототехника, аэрокосмическая техника и др. Кватернионы особенно полезны для представления поворотов и ориентаций в трехмерном пространстве. Формулы, использующие кватернионы, зачастую являются компактными и рациональными, что позволяет получать оригинальные результаты как в новых, так и в ранее изученных задачах.

Прикладные задачи с использованием кватернионной параметризации рассматривались в работах Бирюкова В.Г., Бранца В.Н., Гордеева В.Н., Копытова Н.П., Крищенко А.П., Маланина В.В., Малыкина Г.Б., Молоденкова А.В., Панкова А.А., Плотникова П.К., Сергеева А.Н., Стрелковой Н.А., Челнокова Ю.Н., Чуба В.Ф., Шмыглевского И.П., Chen Z., Dam E.B., Koch M., Lillholm M., Holm D.D., Madgwick S.O.H., Shoemaker K., Shuster M.D. и др. Как показывает анализ работ, находящихся в открытом доступе, результаты применения кватернионов при описании движения в реальных системах сосредоточены в области робототехники или космоса и плохо распространяются на другие технические системы из-за специфики задач. В работе [1] В. Н. Гордеев высказывает мысль, что отсутствие широкого распространения среди инженеров, скорее всего, связано со сложностью и неинтуитивностью кватернионов, которые представляют собой гиперкомплексные числа, а также с тем, что геометрическое представление движения, заданного кватернионами, требует глубокого понимания четырехмерной геометрии.

Использование кватернионного формализма является перспективным и способно привести к лучшему пониманию движения в технических системах, к его более эффективному анализу и новым важным результатам. Разработка

метода, который позволяет геометрически изображать закон движения, заданный кватернионами, в трехмерном пространстве, улучшает наглядность кватернионных методов и повышает их популярность при описании сферического движения в таких системах как шарнирные механизмы, карданные передачи, гироскопы и т.п.

Указанный метод удобно использовать при проектировании и компьютерном моделировании программных траекторий пространственных механизмов. Построение программной траектории является важным элементом решения задачи автоматизированного управления механическими системами, который, в частности, рассматривался в работах М. А. Велищанского, О. В. Ермошиной, А. П. Крищенко и др. Программная траектория понимается в обобщенном смысле как траектория в соответствующем s -мерном конфигурационном пространстве обобщенных координат. В случае сферического движения твердого тела в качестве таких координат классическим выбором являются углы Эйлера, или самолетные углы. Получаемое при этом конфигурационное пространство является трехмерным, но кинематические уравнения движения имеют особые точки, в которых производные угловых параметров имеют разрывы второго рода. Переход к кватернионной параметризации при описании сферического движения позволяет получить кинематические уравнения, не имеющие особенностей. При этом использование кватернионной параметризации имеет недостаток - конфигурационное пространство представляет собой единичную 3-сферу в четырехмерном пространстве, что лишает исследователя возможностей визуального анализа. Отображение этой четырехмерной 3-сферы в \mathbb{R}^3 с использованием эйлеровой параметризации ось-угол позволяет получить удобные для анализа трехмерные программные траектории пространственных механизмов.

Объектом исследования данной работы являются пространственные механизмы, звенья которых могут совершать сферическое движение.

Предметом исследования данной работы являются программные траектории сферического движения элементов пространственных механизмов.

Цель диссертационной работы: разработать метод проектирования и компьютерного моделирования для синтеза, анализа и графической визуализации программных траекторий сферического движения. Продемонстрировать продуктивность предложенного метода при разработке компьютерных моделей и алгоритмов проектирования программных траекторий сферического движения пространственных механизмов, а также его применимость к исследованию движения реальных технических систем на примере универсального шарнира. Для достижения цели диссертационной работы решены следующие **задачи:**

1. Анализ существующих методов математического моделирования ориентации твердого тела в трехмерном пространстве.
2. Разработка метода проектирования и компьютерного моделирования для синтеза, анализа и графической визуализации программных траекторий сферического движения.
3. Разработка алгоритмов, использующих метод отображения единичных кватернионов в трехмерное пространство векторов поворота, для проектирования и компьютерного моделирования программной траектории переориентации твердого тела за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях.
4. Разработка алгоритмов реализации программных траекторий в технических системах, в которых управление ориентацией осуществляется двигателями-маховиками или линейными приводами.
5. Компьютерное моделирование в кватернионной параметризации кинематики и динамики универсального шарнира. Проведение анализа траекторий движения крестовины универсального шарнира и динамических нагрузок, действующих на нее.

Методология и методы исследования: в основе работы лежат методы математического и компьютерного моделирования ориентации твердого тела, использующие кватернионную параметризацию.

Научная новизна и теоретическая значимость работы:

1. Разработан метод проектирования и компьютерного моделирования для синтеза, анализа и графической визуализации программных траекторий сферического движения.
2. Разработан алгоритм, использующий метод отображения единичных кватернионов в трехмерное пространство векторов поворота, для проектирования и компьютерного моделирования программной траектории переориентации твердого тела в виде многочлена пятой степени за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях.
3. Разработаны интерполяционные алгоритмы, использующие методы отображения единичных кватернионов в трехмерное пространство векторов поворота для проектирования и компьютерного моделирования программной траектории переориентации твердого тела близкой к траектории равномерного плоского поворота за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях.
4. Проведен анализ траекторий движения крестовины универсального шарнира, а также действующих на нее динамических нагрузок.

Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, подтверждается многочисленными вычислительными экспериментами, выполненными с помощью системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica, в которой были реализованы предложенные в диссертации модели, методы и алгоритмы. Итоги проведенных исследований и экспериментов представлены публикациями в рецензируемых научных изданиях и не противоречат положениям современной науки.

Практическая значимость полученных результатов состоит в возможности применения разработанных алгоритмов для проектирования движения в технических системах. В работе предлагаются варианты реализации таких алгоритмов для систем с двигателями-маховиками и для систем с линейными приводами.

Предложенные в диссертации модели и алгоритмы положены в основу двух зарегистрированных программных продуктов для ЭВМ.

Положения, выносимые на защиту:

1. Метод проектирования и компьютерного моделирования для синтеза, анализа и графической визуализации программных траекторий сферического движения.
2. Алгоритм, использующий метод отображения единичных кватернионов в трехмерное пространство векторов поворота, для проектирования и компьютерного моделирования программной траектории переориентации твердого тела в виде многочлена пятой степени за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях.
3. Интерполяционные алгоритмы, использующие методы отображения единичных кватернионов в трехмерное пространство векторов поворота, для проектирования и компьютерного моделирования программной траектории переориентации твердого тела близкой к траектории равномерного плоского поворота за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях.
4. Результаты анализа траекторий движения крестовины универсального шарнира, а также действующих на нее динамических нагрузок.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на международных и всероссийских конференциях:

- XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения «МИКМУС-2019» (Москва, ИМАШ РАН, 2019).
- Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (Fundamental and applied problems of mechanics FAPM-2019)» (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019).

- XLIV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся ученых – пионеров освоения космического пространства (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020).
- Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование СТММ2020» (Ижевск, УдГУ, 2020).
- III Международный семинар, посвященный 75-летию академика А.И. Субботина «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби CGS'2020» (Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 2020).
- Международная конференция «Проблемы прикладной механики» (Брянск, БГТУ, 2020).
- VI Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (Fundamental and applied problems of mechanics FAPM-2020)» (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020).
- XLV Академические чтения по космонавтике, посвященные памяти академика С.П. Королева и других выдающихся ученых – пионеров освоения космического пространства (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021).
- Международная конференция «Polynomial Computer Algebra PCA'2021» (Санкт-Петербург, ММИ им. Л. Эйлера, 2021).
- VII Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (Fundamental and applied problems of mechanics FAPM-2021)», посвященная 175-летию со дня рождения Николая Егоровича Жуковского (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2021).
- XXIII Всероссийская научно-техническая конференции «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации – 2022» (Пермь: ПНИПУ, 2022)
- VIII Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики (FAPM-2022)» (Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2022).
- XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь: ИМСС УрО РАН, 2023).

Публикации. Результаты исследования по теме диссертации опубликованы в 18 работах, из них 5 статей опубликовано в рецензируемых научных журналах, в том числе 3 статьи опубликовано в изданиях, входящих в международную базу цитирования Scopus. Получено 2 свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Работа изложена на 148 страницах текста, содержит 42 рисунка, 2 таблицы. Список литературы состоит из 129 наименований.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ПРИМЕНЕНИЯ КВАТЕРНИОНОВ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Кватернионы используются в математическом моделировании и, в частности, в системах автоматизированного проектирования (САПР) для описания ориентаций и вращений твердых тел. Они дают эффективный метод интерпретации трехмерных вращений с помощью четырехмерного пространства и используются для вычисления различных преобразований, таких, как повороты, отражения и перемещения. Кватернионы представляют собой мощный инструмент, который можно использовать для создания реалистичных 3D-моделей, например, для приложений виртуальной реальности. В САПР они могут использоваться для визуализации и управления 3D-объектами, обеспечивая высокую точность трехмерных геометрических моделей. Кватернионы широко применяются для анимации движения трехмерных объектов, поскольку позволяют легко создавать плавный переход поворота между двумя разными углами без дрожания или искажения.

В этой главе будет представлен аналитический обзор различных методов математического описания ориентации твердых тел, а также проведен сравнительный анализ с кватернионами. Особое внимание будет уделено практическому применению кватернионов для решения различных задач математического моделирования.

1.1. Обзор методов математического моделирования ориентации твердого тела в трехмерном пространстве

В данном разделе произведен обзор наиболее востребованных математических методов, используемых для описания ориентации твердого тела в трехмерном пространстве. Описано использование углов Эйлера, ортогональных матриц, кватернионов и других методов для представления ориентации тела в

трехмерном пространстве. Обсуждаются преимущества и недостатки каждого метода и последствия их применения для алгоритмов, используемых в различных приложениях. Также будет затронута задача определения ориентации тела в трехмерном пространстве.

1.1.1. Углы конечного вращения

Твердое тело может быть жестко связано с координатным трехгранником, в котором все точки тела неподвижны, начало координат этого трехгранника располагают в некоторой точке (как правило, это неподвижная точка, если тело совершает сферическое движение, и центр масс тела, если оно движется

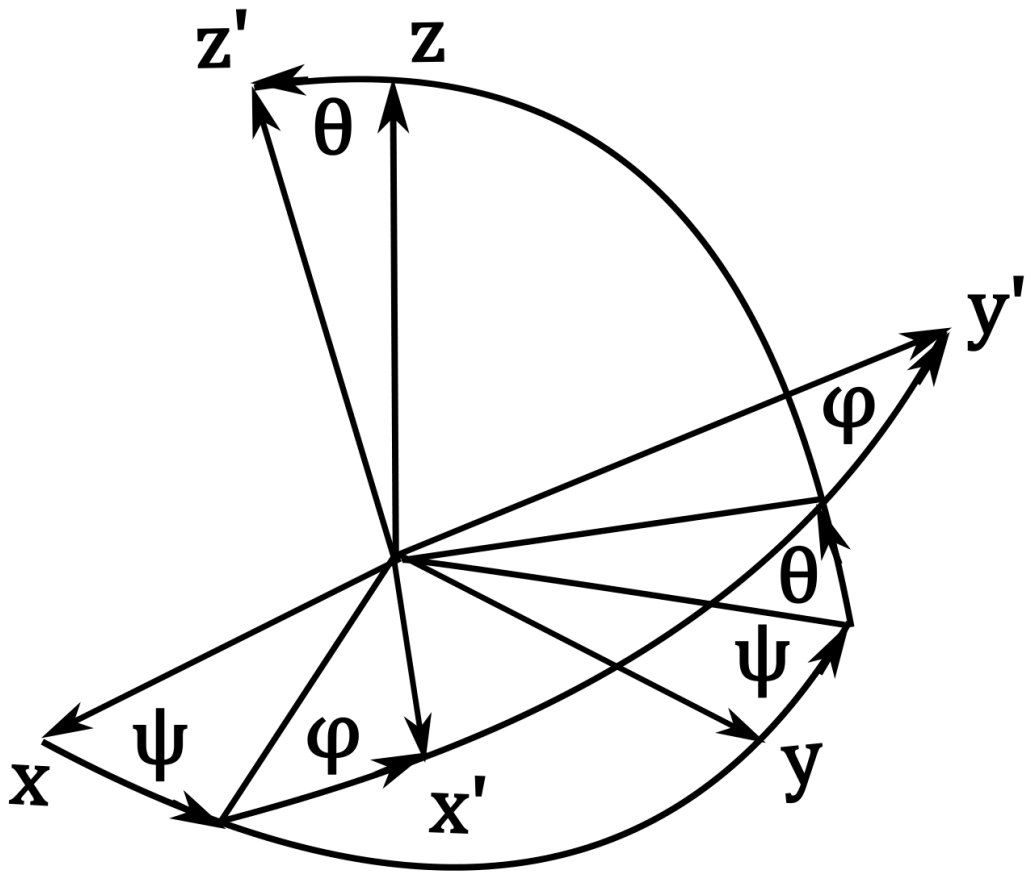


Рисунок 1.1 – Схема углов Эйлера

свободно). После этого положение тела определяют, сравнивая ориентацию присоединенного трехгранника с заданным эталонным трехгранником, который считается неподвижным [2].

Углы Эйлера [3,2,4,5,6,7,8] — самый старый способ задания ориентации. Углы ψ, θ, φ (рис. 1.1) определяют ориентацию подвижного трехгранника $x'y'z'$ относительно неподвижного xuz , задавая мысленные вращения неподвижного трехгранника в трех разных плоскостях, которые необходимо произвести для его совмещения со связанными осями. Первый поворот выполняется в плоскости xu на угол прецессии ψ , второй в плоскости uz на угол нутации θ и третий вновь в плоскости xu на угол собственного вращения φ .

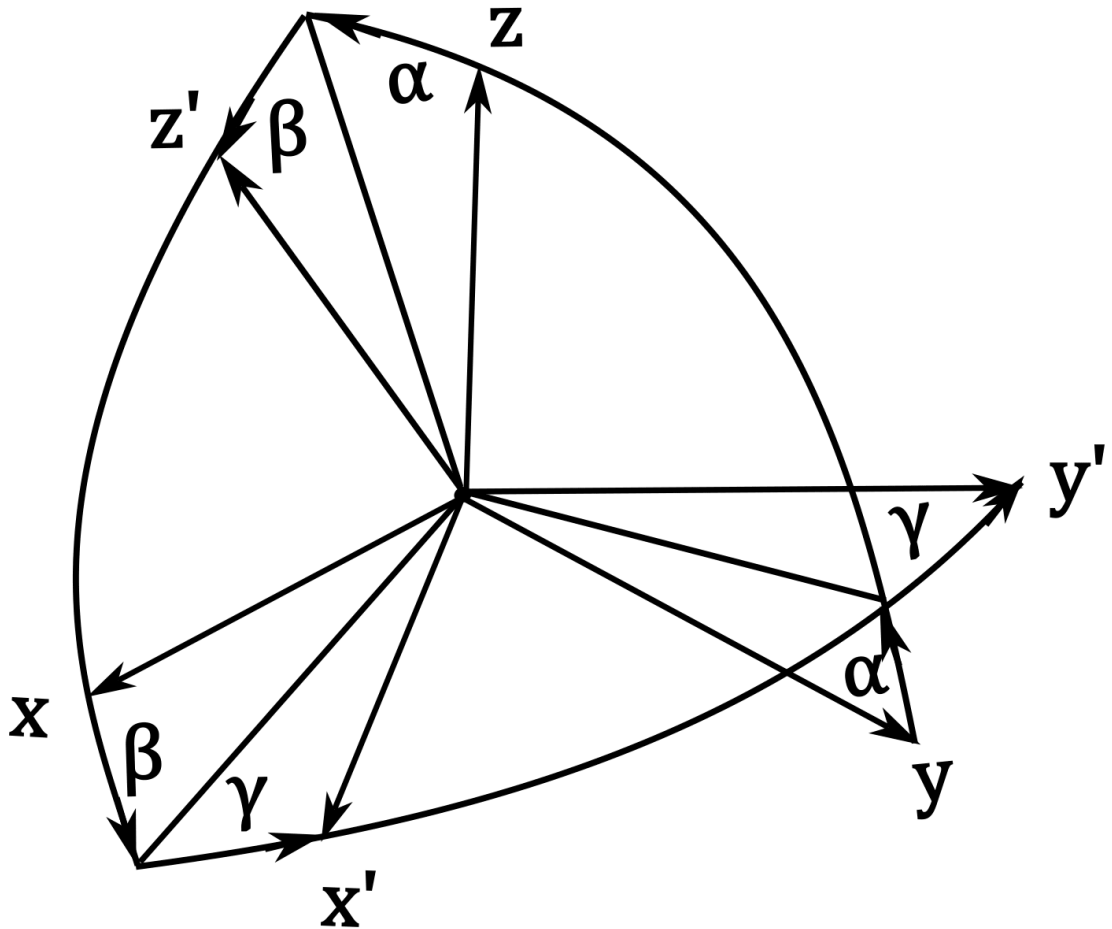


Рисунок 1.2 – Схема углов Крылова

Три угла Эйлера, описывающие ориентацию твердого тела в трехмерном пространстве, не наблюдаемы напрямую. То, что придает этим углам

конкретный смысл - это мысленно сконструированные повороты, которые, вообще говоря, могут быть и другими. Так, например, еще одну конструкцию поворотов, дают углы Крылова α, β, γ (рис. 1.2) [2].

Чтобы совместить неподвижный и подвижный трехгранники в этом случае, требуется произвести три последовательных поворота на углы α, β, γ вокруг осей x, y и z соответственно. Эта последовательность вращений обычно обозначается как 1-2-3. Углам Эйлера в свою очередь соответствует последовательность 3-1-3.

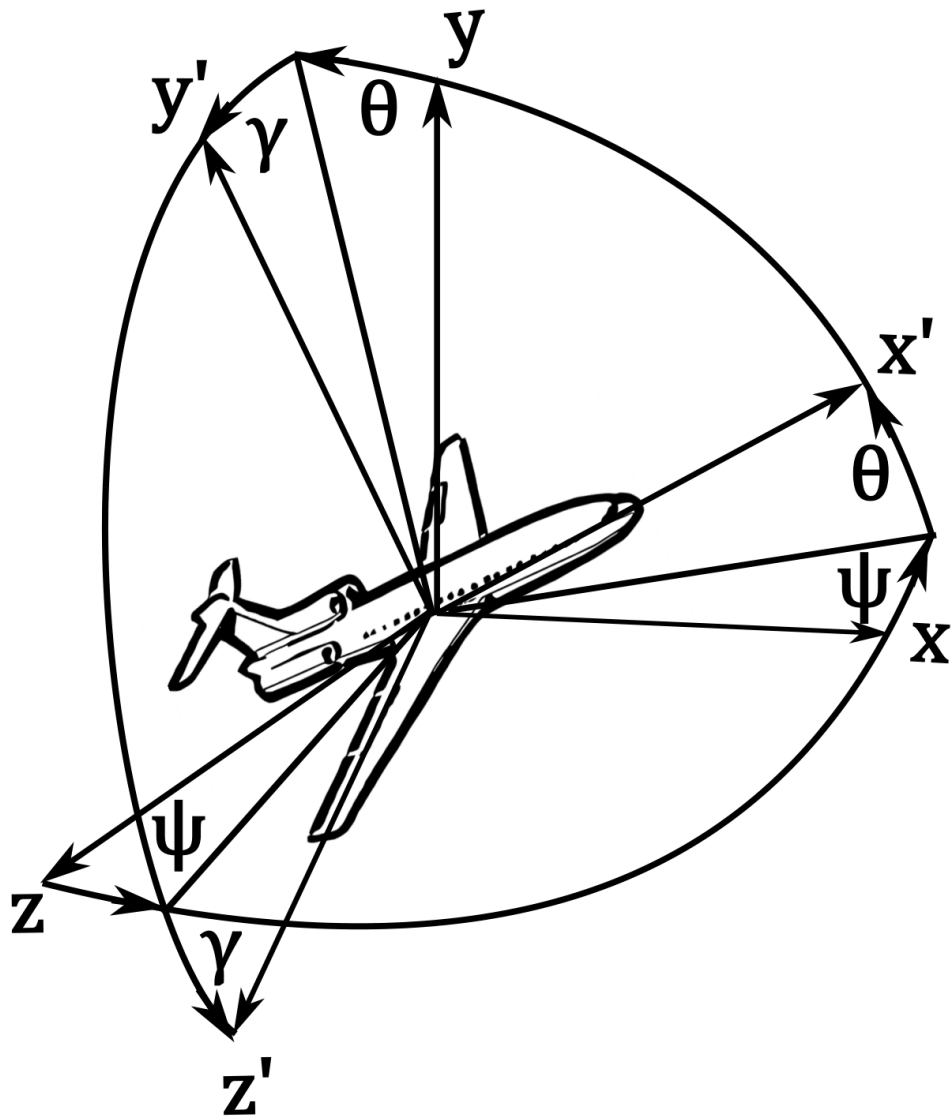


Рисунок 1.3 – Самолетные углы

Меня последовательность осей, вокруг которых требуется осуществить повороты, мы будем получать различные конструкции трех углов, описывающих ориентацию твердого тела, которые называются углами конечного вращения. Все наборы углов конечного вращения можно разделить на два класса: углы конечного вращения первого рода, к которому относятся системы, порождаемые углами Крылова, в которых поворот осуществляется вокруг всех трех осей:

$$1-2-3, 1-3-2, 2-1-3, 2-3-1, 3-1-2, 3-2-1,$$

и углы конечного вращения второго рода, порождаемые углами Эйлера, в которых для поворота используется только две оси:

$$1-2-1, 1-3-1, 2-1-2, 2-3-2, 3-1-3, 3-2-3.$$

Таким образом, существует всего 12 вариантов углов конечного вращения. Использование того или иного набора в большей степени обуславливается научной традицией. Так в русскоязычной научной литературе широко распространены самолетные углы [4,5] ψ, θ, γ - рысканье, тангаж, крен (рис. 1.3), которые соответствуют углам конечного вращения первого рода $2-3-1$, однако в англоязычных научных источниках те же рысканье, тангаж, крен (yaw, pitch, roll) соответствуют системе $3-2-1$.

Имеются и другие расхождения с англоязычной терминологией. Так, на Западе под углами Эйлера (Euler angles) имеется в виду любой набор углов конечного вращения [7]. При этом углы второго рода называются правильными углами Эйлера (proper Euler angles), а углы первого рода называются углами Тейта-Брайана (Tait-Bryan angles).

Углы Эйлера не случайно являются первым в истории способом задания ориентации. Разложение сферического движения на три плоских поворота [9] упрощает восприятие и интуитивно понятно. Именно по этой причине углы конечного поворота до сих пор пользуются широкой популярностью, особенно в технических областях. Но главное их достоинство заключается в том, что они представляют собой минимальный набор параметров, необходимый для описания ориентации твердого тела. При использовании углов конечного вращения в компьютерных алгоритмах это позволяет экономить память, что очень важно

при использовании вычислительных машин с сильно ограниченными ресурсами, например, бортовых компьютеров.

Однако за преимуществами углов конечного вращения кроется и их недостаток: минимальное количество используемых параметров приводит к тому, что некоторые ориентации твердого тела определяются с их помощью неоднозначно [2]. Так, углы первого рода теряют свою однозначность при значении второго угла $\beta = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, а углы второго рода теряют однозначность при значении второго угла $\theta = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Этот, казалось бы, малозначительный, недостаток приводит к серьезному последствию, заключающемуся в том, что при данных значениях вырождаются кинематические уравнения.

Одной из важных задач в приложениях, связанных с космической навигацией [10,11,12,13,14,15,83, 17,18,19], является расчет ориентации тела в пространстве по показаниям установленных на нем датчиков - акселерометра, гироскопа и компаса. Наиболее востребованными для решения этой задачи являются методы с использованием фильтров Калмана и Маджвика [20,21]. Особую роль при этом играет задача Дарбу [22, 23], которая заключается в определении ориентации тела по его известной угловой скорости. Основная связь между угловой скоростью тела и его координатами выражается с помощью кинематических уравнений, которые описывают зависимость между координатами тела, их производными и проекциями угловой скорости тела на оси связанного трёхгранника.

Однако, как было отмечено выше, кинематические уравнения Эйлера [4]:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{\Omega_1 \sin \varphi + \Omega_2 \cos \varphi}{\sin \theta}, \\ \dot{\theta} = \Omega_1 \cos \varphi - \Omega_2 \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \Omega_3 - \frac{\Omega_1 \sin \varphi + \Omega_2 \cos \varphi}{\operatorname{tg} \theta}, \end{cases}$$

вырождаются при углах $\theta = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, а кинематические уравнения для самолетных углов [4]:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = \frac{\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma}{\cos \theta}, \\ \dot{\theta} = \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma, \\ \dot{\gamma} = \Omega_1 - \frac{\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma}{\operatorname{ctg} \theta}, \end{cases}$$

вырождаются при углах $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. В указанных точках правые части дифференциальных уравнений обращаются в бесконечность. Как известно, стандартные методы численного интегрирования хорошо работают только для гладких правых частей. Поэтому численное интегрирование уравнений в окрестности указанных значений неизбежно приводит к большой погрешности и накладывает ограничения на использование углов конечного вращения.

Одним из способов решения указанной проблемы может быть возможность комбинирования углов первого и второго рода, однако это приведет к усложнению математического аппарата. Более оптимальным будет использование способа описания положения тела, в котором данная проблема отсутствует.

1.1.2. Специальные ортогональные матрицы группы $SO(3)$

Для задания положения подвижной системы координат $x'_1 x'_2 x'_3$ относительно неподвижной $x_1 x_2 x_3$ во время сферического движения твердого тела, может использоваться матрица направляющих косинусов [3,4,5,24,6,25]:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица состоит из косинусов углов между осями двух систем координат:

$$Q_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}_j = \cos(\theta x'_i, \theta x_j), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

которые подчиняются шестью условиям ортогональности:

$$\sum_{n=1}^3 Q_{in} Q_{jn} = \delta_{ij}, \quad \text{где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

с учетом этого условия матрица Q имеет только три независимых элемента. Определитель любой матрицы косинусов равен единице, и все такие матрицы

образуют группу по умножению, известную как специальная ортогональная группа матриц третьего порядка $SO(3)$.

Ориентацию твердого тела также можно отождествить с поворотом от неподвижной системы координат к подвижной. Поворот твердого тела математически можно описать как ортогональное линейное отображение трехмерного евклидова пространства самого на себя, сохраняющее расстояния между всеми точками. В операторном виде это можно записать так [2]:

$$\vec{r}' = R\vec{r},$$

где \vec{r} - радиус-вектор точки тела до поворота, \vec{r}' - радиус-вектор точки тела после поворота, R - оператор поворота.

Любому линейному оператору в некотором заданном координатном базисе может быть поставлена в соответствие матрица размером 3×3 . Матрица, соответствующая оператору поворота, называется матрицей поворота. При этом все возможные матрицы поворота образуют группу ортогональных матриц с определителем равным единице, т. е. $SO(3)$. Поэтому группу $SO(3)$ также называют группой вращений или группой поворотов.

Матрицы направляющих косинусов и матрицы поворота связаны соотношением [24]:

$$R = Q^T.$$

Таким образом, каждой ориентации твердого тела может быть поставлен в соответствие элемент группы $SO(3)$ - матрица направляющих косинусов или матрица поворота. Данное соответствие является взаимно-однозначным, в отличие от углов конечного вращения.

Матричный способ описания ориентации тела в трехмерном пространстве представляет положение тела как результат применения некоторого оператора поворота, что обеспечивает простую математическую интерпретацию сферического движения как последовательное применение различных операторов поворота. Композиция поворотов при таком представлении вычисляется с помощью простого перемножения матриц в отличие от углов конечного вращения, для которых вычислить композицию поворотов - весьма нетривиальная задача. Кроме

того, матрично-векторное исчисление - это мощный инструмент, используемый в 3D-графике для задач, связанных с управлением 3D-объектами и анимацией. Его можно использовать для эффективного решения таких задач, как повороты, масштабирование, расчет освещения и затемнения. Поэтому использование матричного описания при математическом моделировании сферического движения тела упрощает интеграцию моделей в существующие компьютерные системы. Наконец, использование $SO(3)$ эффективно в вычислительном отношении, что делает ее подходящей для расчетов в режиме реального времени.

Главным недостатком матричного способа является большое количество используемых параметров - 9 штук. Это приводит к перерасходу памяти при проведении компьютерного моделирования и, кроме того, может ускорять накопление ошибки в том случае, если данные датчиков (гироскопов и т. п.) недостаточно точны.

В отличие от углов конечного вращения, матрицы для решения задачи Дарбу требуют сразу девять кинематических уравнений [2]:

$$\dot{R} = R \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

однако все они линейны и не вырождаются при любых параметрах.

В целом можно сказать, что указанные недостатки не являются критическими и группа $SO(3)$ находит широкое применение при математическом моделировании сферического движения твердого тела, в первую очередь в области 3D-графики.

1.1.3. Параметры ось - угол. Векторы Эйлера и Родрига

Теорема Эйлера - Даламбера утверждает, что любая последовательность поворотов тела в трехмерном пространстве эквивалентна одному плоскому (или эйлерову) повороту вокруг некоторой фиксированной оси.

В предыдущем пункте упоминалось, что ориентацию твердого тела можно отождествить с поворотом от неподвижной системы координат к подвижной. Согласно указанной теореме, данный поворот можно осуществить с помощью

плоского поворота вокруг некоторой оси с ортом \vec{e} на некоторый угол χ . А значит, каждой ориентации твердого тела можно поставить в соответствие два параметра – ось \vec{e} и угол χ .

Более кратко параметры ось - угол могут быть представлены с помощью вектора поворота или вектора Эйлера [1,7]:

$$\vec{r} = \chi \vec{e},$$

данный вектор направлен вдоль оси поворота, а его длина равна углу поворота χ . Соответствие между ориентациями тела и векторами поворота не является взаимно однозначным. В частности, любой вектор поворота длиной $\chi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ задает ту же самую ориентацию, что и вектор длиной χ . Таким образом, существует счетная бесконечность векторов поворота, соответствующих одной и той же ориентации твердого тела.

Данный способ дает довольно простую геометрическую интерпретацию ориентации тела. Также векторное представление ориентации позволяет ввести метрику, чтобы оценивать близость двух ориентаций тела друг к другу. Однако, использование данного способа сопровождается некоторыми вычислительными трудностями, так для вычисления положения тела после поворота, используется формула Родрига [1,26]:

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= \vec{v} + \sin \chi (\vec{e} \times \vec{v}) + (1 - \cos \chi) \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{v}) = \\ &= \vec{v} \cos \chi + \sin \chi (\vec{e} \times \vec{v}) + (\vec{e} \cdot \vec{v})(1 - \cos \chi) \vec{e}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

здесь \vec{v} - радиус-вектор точки тела до поворота, \vec{v}' - радиус-вектор точки тела после поворота. Композиция поворотов предполагает последовательное использование данной формулы, что приводит к громоздким математическим выражениям. В связи с этим данный способ не получил широкого применения в приложениях, однако в данной работе будет показано, что в комбинации с кватернионным методом могут быть получены полезные результаты.

Еще один способ представить параметры ось - угол в виде вектора - вектор Родрига [1,26]:

$$\vec{g} = \operatorname{tg} \frac{\chi}{2} \vec{e}.$$

Композиция для векторов Родрига строится уже значительно проще, чем для векторов Эйлера, так последовательное применение поворотов \vec{g} и \vec{f} приводит к повороту [1]:

$$\frac{\vec{g} + \vec{f} - \vec{f} \times \vec{g}}{1 - \vec{g} \cdot \vec{f}}.$$

Еще одной существенной проблемой применения векторного представления ориентации является сложность кинематических уравнений и их интегрирования.

1.1.4. Тензор поворота

С понятиями матрицы поворота и вектора поворота тесно связано понятие тензора поворота. Формула Родрига (1.1) может быть переписана в матричном виде [1]:

$$\vec{v}' = [I + \sin \chi E + (1 - \cos \chi)E^2]\vec{v} = R\vec{v},$$

где I - единичная матрица, $E = \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix}$, R - матрица поворота.

Кроме того, формулу (1.1) можно представить в тензорной форме [27]:

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= [\cos \chi I + \sin \chi \vec{e} \times I + (1 - \cos \chi)\vec{e} \otimes \vec{e}] \cdot \vec{v} = \\ &= \left[\cos \chi I + \frac{\sin \chi}{\chi} \vec{r} \times I + \frac{(1 - \cos \chi)}{\chi^2} \vec{r} \otimes \vec{r} \right] \cdot \vec{v} = P \cdot \vec{v}, \end{aligned}$$

здесь I - единичный тензор, \vec{r} - вектор поворота, P - тензор поворота. Зная вектор поворота, можно вычислить тензор поворота и наоборот. Тензор поворота, так же, как и матрица поворота, позволяет интерпретировать ориентацию тела в пространстве как результат применения оператора поворота. Тензорное представление ориентации позволяет использовать для проведения расчетов тензорный анализ и оказывается особенно полезно в тех областях, где применение этого аппарата хорошо развито, например, в механике сплошных сред. Однако, как и с вектором поворота, основной проблемой данного представления является громоздкость получаемых математических выражений.

1.1.5. Кватернионы и параметры Родрига -Гамильтона

Кватернионами [28,2,29,30] называются элементы четырехмерного линейного пространства над полем действительных чисел, с некоторым базисом

$\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$:

$$\mathbf{q} = q_0 \mathbf{i}_0 + q_1 \mathbf{i}_1 + q_2 \mathbf{i}_2 + q_3 \mathbf{i}_3, \quad (1.2)$$

где $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$, которые образуют ассоциативную алгебру (со следующей таблицей умножения ортов:

$$\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_k, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_k = -\mathbf{i}_0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2,$$

$$\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1 = -\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2.$$

Как указано в [31], данная таблица была введена ирландским математиком Уильямом Роуэном Гамильтоном в 1843 году, и называется соглашением об умножении Гамильтона. Однако, в западном аэрокосмическом и робототехническом сообществе также применяется соглашение об умножении предложенное Малькольмом Шустером (Malcolm D. Shuster) в 1993 году [32]:

$$\mathbf{i}_0 \cdot \mathbf{i}_k = \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_k, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_k = -\mathbf{i}_0, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_2,$$

$$\mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_3, \quad \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{i}_2 = -\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{i}_3 = -\mathbf{i}_2.$$

Также данное правило умножения называют правилом JPL (Nasa's Jet Propulsion Laboratory).

Шустер, изменив правила умножения кватернионов, изменил следующую особенность. Дело в том, что с помощью матриц поворота удобно задавать так называемые пассивные повороты, при которых для совмещения неподвижного и подвижного базиса происходит поворот всего пространства, в частности, такие повороты задают углы конечного вращения. Кватернионы же, наоборот, удобны для задания активных поворотов, при которых пространство остается неподвижным. Поэтому при композиции двух поворотов, один из которых задан

кватернионом \mathbf{p} , а второй кватернионом \mathbf{q} при использовании умножения Гамильтона итоговый поворот задается кватернионом $\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$, при этом матрицы соответствующих поворотов связаны соотношением:

$$R(\mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) = R(\mathbf{p}) \cdot R(\mathbf{q}).$$

Это говорит о том, что при использовании умножения Гамильтона между кватернионами и матрицами поворота имеет место быть антигомоморфизм. Шустер, введя своё правило умножения кватернионов, получил гомоморфизм между матрицами и кватернионами, описывающими поворот:

$$R(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}) = R(\mathbf{p}) \cdot R(\mathbf{q}).$$

Введение второго правила умножения стало причиной появления неоднозначности в научных работах. Некоторые исследователи использовали правило Гамильтона, другие использовали правило Шустера, притом зачастую не оговаривая, какое правило они используют. Неоднозначность проявилась и в программных приложениях. Так в САЕ системах Wolfram Mathematica (Wolfram Research) и MATLAB (MathWorks) используется соглашение об умножении Гамильтона, а в пакете средств разработки DirectX, используемом во многих CAD/CAM системах, применяется соглашение об умножении Шустера. Известно, что ряд исследователей [33] выступают за отказ от использования соглашения Шустера, чтобы устранить указанную неоднозначность. В данной работе при вычислениях будет использоваться исключительно правило умножения, введенное Гамильтоном.

Рассмотрим две широко распространенные интерпретации кватернионов. Первая из них предполагает, что кватернионы представляют собой систему гиперкомплексных чисел и являются четырехмерным расширением комплексных чисел. Действительно, при таком подходе в записи (1.2) \mathbf{i}_0 интерпретируется как действительная единица, а $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ как три различные мнимые единицы. Однако, такая интерпретация не имеет существенного прикладного значения и является одной из причин того, что кватернионы до сих пор мало распространены в технических науках [1].

Вторая интерпретация - геометро-числовая - имеет ключевое значение при рассмотрении кватернионов как способа задания ориентации твердого тела. При этом подходе \mathbf{i}_0 по-прежнему интерпретируется как действительная единица, а $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ интерпретируются как орты осей координат x_1, x_2, x_3 в трехмерном евклидовом пространстве. Таким образом, кватернион (1.2) представляет собой совокупность (сумму) числа и вектора и может использоваться для одновременного задания параметров ось и угол.

При этом для задания поворота на угол χ вокруг оси \vec{e} принято использовать единичный кватернион или версор (versor) [2]:

$$\mathbf{q} = \cos \frac{\chi}{2} + \sin \frac{\chi}{2} \vec{e}, \quad (1.3)$$

где

$$q_0 = \cos \frac{\chi}{2}, q_1 = \sin \frac{\chi}{2} e_1, q_2 = \sin \frac{\chi}{2} e_2, q_3 = \sin \frac{\chi}{2} e_3.$$

Данные величины также могут быть использованы для описания ориентации тела и называются параметрами Родрига-Гамильтона.

Любой версор можно интерпретировать как кватернион вида (1.3); действительно, пусть версор имеет вид (1.2), тогда [7]:

$$\begin{aligned} \chi &= 2 \arccos q_0, \\ e_1 &= \frac{q_1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \\ e_2 &= \frac{q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}, \\ e_3 &= \frac{q_3}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, любой поворот может быть описан с помощью версора, и наоборот: любой версор описывает некоторый поворот. Все версоры образуют группу по умножению $Sp(1)$, при этом каждому элементу группы вращений $SO(3)$ можно поставить в соответствие сразу два версора \mathbf{q} и $-\mathbf{q}$, задающих одну и ту же ориентацию. В связи с этим говорят, что группа версоров $Sp(1)$ двулистным образом покрывает группу вращений $SO(3)$ [24].

Для того, чтобы определить положение тела после осуществления поворота, заданного версором \mathbf{q} используется формула [2]:

$$\vec{\mathbf{r}}' = \mathbf{q} \cdot \vec{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{q}^{-1}, \quad (1.4)$$

где $\vec{\mathbf{r}}$ - кватернион, действительная часть которого равна нулю, а векторная часть равна радиус-вектору некоторой точки тела до поворота, $\vec{\mathbf{r}}'$ - кватернион, действительная часть которого равна нулю, а векторная часть равна радиус-вектору точки тела после поворота.

Версоры получили широкое распространение в космической навигации. т. к. они обладают двумя преимуществами для применения на бортовых ЭВМ с ограниченными ресурсами. Первое преимущество заключается в том, что при использовании версоров бортовым ЭВМ не приходится все время производить вычисления, связанные с тригонометрическими функциями. Второе преимущество заключается в том, что по сравнению с матрицами поворота кватернионы более компактны и расходуют меньший объем памяти [34].

В компьютерной анимации версоры получили широкое распространение после выхода статьи Кена Шумейка (Ken Shoemake) в 1985 году [35]. В этой работе он описал сферическую линейную интерполяцию кватернионов (slerp). Оказалось, что версоры с легкостью позволяют интерполировать компьютерную анимацию между ключевыми кадрами и добиться эффекта плавного вращения, в то время как при использовании других способов задания ориентации эта процедура весьма усложнена.

Версоры имеют те же преимущества перед углами конечного вращения, что и матрицы поворота, а именно кинематические уравнения для версоров линейны и не вырождаются при любых значениях параметров [28]:

$$\begin{cases} 2\dot{q}_0 = -(q_1\Omega_1 + q_2\Omega_2 + q_3\Omega_3), \\ 2\dot{q}_1 = (q_0\Omega_1 - q_3\Omega_2 + q_2\Omega_3), \\ 2\dot{q}_2 = (q_0\Omega_2 - q_1\Omega_3 + q_3\Omega_1), \\ 2\dot{q}_3 = (q_0\Omega_3 - q_2\Omega_1 + q_1\Omega_2). \end{cases} \quad (1.4)$$

Уже упоминалось, что использование версоров вместо матриц поворота позволяет экономить память (4 параметра у версоров против 9 у матриц $SO(3)$). Однако эта экономия в некоторых случаях приводит к увеличению числа необходимых операций. Рассмотрим количество вычислительных операций, которые требуется осуществить для поворота вектора с помощью матрицы поворота и с помощью версора. При этом поворот вектора версором может осуществляться с помощью непосредственно формулы (1.4), либо по версору может быть составлена промежуточная матрица поворота, с помощью которой будет осуществлено преобразование.

Таблица 1.1 – Сравнение производительности матриц поворота и версоров при осуществлении операции поворота одного вектора

Метод	Количество умножений	Количество сложений	Всего операций
Матрицы поворота	9	6	15
Версоры без вычисления промежуточной матрицы	15	15	30
Версоры с вычислением промежуточной матрицы	21	18	39

Как видно из таблицы 1.1, самым производительным способом оказываются матрицы поворота, а вот версоры выгоднее использовать напрямую без вычисления промежуточной матрицы.

Однако в ситуации, когда требуется осуществить n вращений, ситуация несколько меняется (табл. 1.2). Если n достаточно большое, то разница в количестве вычислительных операций между матрицами поворота и версорами с вычислением промежуточной матрицы становится несущественной, а вот выигрыш по расходу памяти может быть большим. Поэтому представляется, что именно второй способ является наиболее эффективным для применения на ЭВМ.

Еще одним аргументом в пользу использования версоров на ЭВМ является то, что при объединении нескольких вращений неизбежны ошибки округления.

Таблица 1.2 – Сравнение производительности матриц поворота и версоров при осуществлении n операций поворота

Метод	Количество умножений	Количество сложений	Всего операций
Матрицы поворота	$9n$	$6n$	$15n$
Версоры без вычисления промежуточной матрицы	$15n$	$15n$	$30n$
Версоры с вычислением промежуточной матрицы	$9n+12$	$6n+12$	$15n+24$

Версоры минимизируют эту проблему, так как слегка смещенный кватернион может быть легко нормализован, тогда как для матриц поворота помимо нормализации придется дополнительно выполнять ортогонализацию.

1.1.4. Специальные унитарные матрицы группы $SU(2)$ и параметры Кейли-Клейна

Кватернионам описанным выражением (1.2) можно придать матричную интерпретацию, если в качестве базиса $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ выбрать так называемые спиновые матрицы Паули [36,2]:

$$\mathbf{i}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i}_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{i}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{i}_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что для данного базиса выполняются свойства умножения, введенные Гамильтоном, тогда кватернион с параметрами q_0, q_1, q_2, q_3 может интерпретироваться как матрица 2×2 с комплексными элементами [2]:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_0 + q_3 i & -q_2 + q_1 i \\ q_2 + q_1 i & q_0 - q_3 i \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что выполняется свойство:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q} = I,$$

т. е. \mathbf{Q} – унитарная матрица. Следовательно кватернионы описываются унитарными матрицами размером 2×2 .

Так как:

$$\|\mathbf{q}\| = \det \mathbf{Q},$$

то группа версоров $Sp(1)$ оказывается изоморфна специальной группе унитарных матриц второго порядка $SU(2)$.

Элементы матрицы \mathbf{Q} [37]:

$$\alpha = q_0 + q_3 i, \quad \beta = q_2 + q_1 i, \quad \gamma = -\bar{\beta} = -q_2 + q_1 i, \quad \delta = \bar{\alpha} = q_0 - q_3 i$$

называются параметрами Кейли - Клейна. Таким образом, вместо версора ориентация тела может быть задана с помощью соответствующей ему матрицы группы $SU(2)$ или ее параметров Кейли-Клейна.

Понятие параметров Кейли-Клейна тесно связано с проективной геометрией. Если рассматривать поворот твердого тела как преобразование, переводящее точки, лежащие на единичной сфере, в себя, то в результате такого преобразования стереографическая проекция сферы на комплексную плоскость (рис. 1.4) тоже преобразуется.

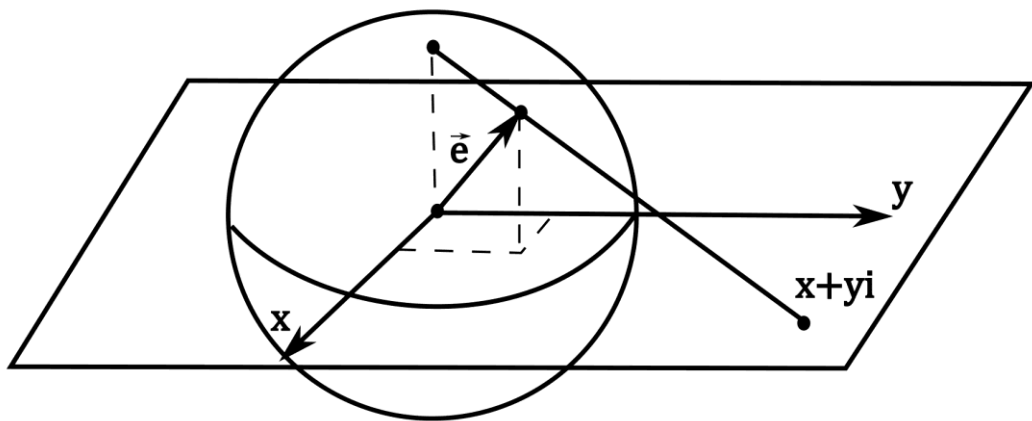


Рисунок 1.4 – Стереографическая проекция сферы на комплексную плоскость

При этом любая окружность, расположенная на комплексной плоскости, снова перейдет в окружность, а следовательно, стереографическая проекция претерпит дробно-линейное преобразование. Можно показать, что коэффициентами этого преобразования являются параметры Кейли-Клейна [2]:

$$x' + y'i = \frac{\alpha(x + yi) + \gamma}{\beta(x + yi) + \delta}.$$

1.1.5. Описание свободного движения твердого тела

В отличие от углов конечного вращения, которые являются именно набором параметров, задающих ориентацию твердого тела, матрицы поворота и кватернионы рассматриваются как единый математический объект, что позволяет рассматривать вращения как элементы различных математических теорий.

Свободное движение твердого тела, представляющее собой совокупность поступательного движения и вращения тела, также может быть представлено в виде цельного математического объекта – гомогенной матрицы, винта или бикватерниона. Кратко их рассмотрим.

1.1.7.1. Элементы специальной евклидовой группы SE(3)

Рассмотрим декартово произведение группы $SO(3)$ на \mathbb{R}^3 . Элементы данного множества могут быть записаны в виде так называемых гомогенных матриц [8]:

$$E = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & v_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & v_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \in SO(3), \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Матрица R задает поворот твердого тела, а вектор v - поступательное перемещение. Множество всех гомогенных матриц образует специальную евклидову группу SE(3) по умножению [8].

Положение тела после перемещения, описанного матрицей E , может быть вычислено по формуле [8]:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - радиус-вектор точки тела до перемещения, $\vec{r}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ - радиус-

вектор точки тела после перемещения.

1.1.7.2. Винты

Дуальными числами называют числа вида [1]:

$$a + b\varepsilon,$$

где $a, b \in \mathbb{R}$, а ε – дуальная единица, введенная У. Клиффордом и обладающая свойством: $\varepsilon^2 = 0$. Дуальные числа образуют двумерную коммутативную ассоциативную алгебру над полем действительных чисел.

Винты в математике обычно представляют в виде трехмерных векторов, компонентами которых являются дуальные числа [1]:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 + \psi_1^\circ \varepsilon \\ \psi_2 + \psi_2^\circ \varepsilon \\ \psi_3 + \psi_3^\circ \varepsilon \end{pmatrix} = \vec{\psi} + \vec{\psi}^\circ \varepsilon,$$

где $\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{\psi}^\circ = \begin{pmatrix} \psi_1^\circ \\ \psi_2^\circ \\ \psi_3^\circ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Таким образом, винт содержит в себе ин-

формацию сразу о двух трехмерных векторах, что удобно для представления многих механических величин.

Согласно теореме Моцци - Часлеса любое свободное перемещение тела может быть выполнено перемещением тела вдоль некоторой прямой (винтовой оси) и вращением вокруг этой прямой на некоторый угол. По аналогии с вектором поворота (п.1.1.3) вводится винт перемещения [1]:

$$\mathbf{\Psi} = \vec{\psi} + \vec{\psi}^\circ \varepsilon = \Phi \cdot \mathbf{E}, \quad (1.5)$$

где $\mathbf{E} = \vec{e} + \vec{e}^\circ \varepsilon$ - винт, задающий винтовую ось, \vec{e} - орт винтовой оси, \vec{e}° - момент вектора \vec{e} относительно начала координат, его необходимо знать для задания положения винтовой оси в пространстве, $\Phi = \varphi + \varphi^\circ \varepsilon$ - дуальное число, задающее перемещение тела относительно винтовой оси, φ - угол поворота вокруг винтовой оси, φ° - перемещение вдоль винтовой оси.

Если задан винт перемещения (1.5), то по его компонентам легко восстановить характеристики винтового движения [1]:

$$\varphi = |\vec{\psi}|, \varphi^\circ = \frac{\vec{\psi} \cdot \vec{\psi}^\circ}{|\vec{\psi}|}, \vec{e} = \frac{\vec{\psi}}{|\vec{\psi}|},$$

$$\vec{e}^\circ = \frac{\vec{\psi}^\circ - \frac{\vec{\psi} \cdot \vec{\psi}^\circ}{|\vec{\psi}|^2} \vec{\psi}}{|\vec{\psi}|}.$$

1.1.7.3. Дуальные бикватернионы

Дуальными бикватернионами называются кватернионы, компонентами которых являются дуальные числа [1]:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_0 + q_0^\circ \varepsilon \\ q_1 + q_1^\circ \varepsilon \\ q_2 + q_2^\circ \varepsilon \\ q_3 + q_3^\circ \varepsilon \end{pmatrix} = \mathbf{q} + \mathbf{q}^\circ \varepsilon,$$

где $\mathbf{q}, \mathbf{q}^\circ \in$ Бикватернионы содержат в себе информацию сразу о двух кватернионах и по аналогии с обычными кватернионами могут интерпретироваться как совокупность дуального числа и винта.

С помощью бикватерниона можно описать свободное движение твердого тела. При этом движение тела рассматривается как совокупность вращения, описываемого кватернионом \mathbf{q} и перемещения на вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Кватернион \mathbf{q}° определим следующим образом [1]:

$$\mathbf{q}^\circ = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{q},$$

где \mathbf{v} - кватернион действительная часть которого равна нулю, а векторная равна \vec{v} . Положение тела после перемещения, описанного бикватернионом \mathbf{Q} , может быть вычислено по формуле [1]:

$$\mathbf{R}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^{-1},$$

где бикватернион $\mathbf{R} = (1, 0, 0, 0, x_1, x_2, x_3)$, бикватернион $\mathbf{R}' = (1, 0, 0, 0, x'_1, x'_2, x'_3)$, $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - радиус-вектор точки тела до перемещения,

$\vec{r}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ - радиус-вектор точки тела после перемещения.

Проведенный обзор математических методов описания положения твердого тела нельзя назвать исчерпывающим, однако в нем приведены все основные способы, встречающиеся в приложениях. Можно с уверенностью утверждать, что версоры выгодно выделяются на фоне остальных способов, т.к. обладают рядом преимуществ, среди которых отсутствие вырождения (по сравнению с углами Эйлера), линейный вид кинематических уравнений (по сравнению с векторами вращения) и меньшее количество параметров (по сравнению с матрицами поворота).

1.2. Роль кватернионов в современном математическом моделировании

Кватернионы были введены ирландским математиком Уильямом Роуэном Гамильтоном еще в 1843 году, но не получили широкого распространения в математическом моделировании вплоть до двадцатого века. Хотя они имели некоторое применение в области физики, в основном они использовались как инструмент для изучения абстрактной математики. За последние несколько десятилетий кватернионы становятся все более популярными в компьютерной графике, робототехнике и некоторых других областях как способ представления вращения в трех измерениях.

Основной областью применения кватернионов является кинематика и динамика твердого тела. Особую пользу кватернионы имеют для расчета ориентации и положения трехмерных объектов в пространстве, таких как, спутники и космические корабли, например [38]. В конце 60-х годов прошлого века у космических инженеров появились технологии, позволяющие размещать компьютер на борту космических кораблей. В сочетании с Центром управления полетами на Земле и космонавтами на борту он должен был помогать контролировать космический корабль и управлять им. При этом ЭВМ должна была быть очень легкой и достаточно прочной, чтобы выдерживать экстремальные условия. Это неизбежно сказывалось на скорости обработки и объеме памяти. Бортовой компьютер должен был постоянно рассчитывать местоположение и ориентацию корабля. Существовало два основных способа сделать это: углы Эйлера и матрицы направляющих косинусов. К сожалению, использование обоих этих методов приводило к проблемам. Для углов Эйлера была вероятность просчетов, связанная с их вырождением, что могло привести к отказу систем управления. А при использовании матриц направляющих косинусов компьютер не успевал обновлять информацию достаточно быстро (так как ему приходилось решать 9 уравнений), когда корабль находился в быстрых фазах полета, таких как, выход на орбиту и посадка.

В ЦКБ опытного машиностроения придумали, как создать эффективную систему управления движением для ЭВМ. Они предложили представлять движения в трехмерном пространстве в виде операций с кватернионами, что позволило бы компьютеру работать только с 4 уравнениями вместо 9. Система управления на кватернионах действительно оказалась удачной. Она предотвращала опасность вырождения координат и необходимость вычисления большого количества значений тригонометрических функций, что могло приводить к перегрузке компьютера.

В результате кватернионы стали международным «космическим стандартом» [34] и активно используются при решении задач управления движением космическими аппаратами, космической навигации и т. п. Постепенно

популярность кватернионов перестала ограничиваться космической тематикой и стала более «приземленной».

Кватернион был упомянут как перспективный математический инструмент для описания кинематики роботов еще в работе [39]. Существуют две основные кинематические задачи управления роботом-манипулятором. Прямой задачей является определение положения и ориентации концевой эффектора манипулятора по известным угловым положениям шарниров и длинам плеч его звеньев. Обратная задача предполагает нахождение угловых положений шарниров и длины звеньев для заданных положения и ориентации концевой эффектора.

Традиционно эти задачи решались с помощью гомогенных матриц [40]. В работе [41] было показано, что основным преимуществом кватернионов перед гомогенными матрицами является более наглядное геометрическое представление параметров, однако вычислительная эффективность будет зависеть от типа используемых датчиков. В целом признается [42], что в некоторых случаях вычислительная эффективность кватернионов выше, чем у гомогенных матриц, и в настоящее время имеется множество работ по исследованию кинематики роботов с помощью кватернионов.

Анимация, являющаяся визуальным представлением изменений, начала свой путь с мультипликации. Позднее были разработаны более серьезные применения для физической визуализации систем частиц, отображение молекул для химии и т. д.

Исторически сложилось так, что в основе создания анимации лежит раскадровка [43], т.е. некоторый набор эскизов сцен с их текстовым описанием. На основе раскадровки производились так называемые ключевые кадры, создание которых доверялось наиболее высококлассным художникам. Кадры между ключевыми, так называемые промежуточные, создавались уже менее опытными художниками. Такой метод называется анимацией по ключевым кадрам, именно он лег в основу компьютерной анимации.

Как отмечается в [43], идея о том, что компьютер мог бы стать хорошей заменой для промежуточных художников при анимировании 3D объектов, была

высказана еще в 1968 году. Предполагалось, что по двум заданным ключевым кадрам компьютер должен провести интерполяцию и изобразить промежуточные кадры. Эта идея была реализована уже в 1971 году. Однако компьютерная интерполяция кадров сталкивалась с несколькими ключевыми проблемами, одной из которых была интерполяция сферического движения: используемый в то время математический аппарат не позволял эффективно создавать интерполяционное движение, что проявлялось резкостью смены кадров, дрожанием и выглядело неестественно.

В 1985 году Кеном Шумейком была предложена линейная интерполяция кватернионов (slerp) [35], которая предоставила способ легкого построения интерполяционных кадров на основе использования аппарата кватернионов. Траектория, построенная с помощью slerp, представляла собой дугу большого круга на 3-сфере между двумя версорами ориентации. Сферическое движение вдоль этой траектории было плавным и выглядело естественным. Метод, созданный Шумейком, оказался настолько удачным, что кватернионы стали основным методом описания вращений в трехмерной графике [44, 45].

Когда речь заходит о необходимости дискретизации конфигурационного пространства вращений, то кватернионы являются наиболее удачным представлением для этой цели. Так, например, в качестве равномерного разбиения поверхности гиперсферы версоров могут быть выбраны вершины правильных многогранников, вписанных в нее. Такие разбиения используются для перехода от континуальной задачи к дискретной при построении компьютерных решений задач математического моделирования [46,47].

Кватернионы также представляют собой удобный математический аппарат для геометрического моделирования. С их помощью можно решать задачи формообразования и механического расчета пространственных криволинейных и оболочечных конструкций [1]. Например, в качестве такого объекта для формообразования может быть выбран стержень с криволинейной осью. Такой стержень можно представить как набор последовательных положений поперечного сечения,двигающегося по пространственной криволинейной траектории, при

этом нормаль данного сечения все время направлена вдоль движения. При такой интерпретации к описанию и анализу формы стержня можно привлечь версоры ориентации.

Кватернионы активно используются в кристаллографии для моделирования роста кристаллов [48]. Они позволяют описать ориентацию кристаллической решетки и ее динамическое поведение во времени. Также их можно использовать при моделировании влияния физических нагрузок на кристаллы, для расчета структуры атомов в кристаллических материалах и для прогнозирования поведения кристалла при воздействии внешних сил.

Также они являются удобным инструментом в молекулярной химии [49,50], поскольку обеспечивают эффективную математическую модель для представления трехмерной структуры молекул и дают эффективный способ представления вращения, что позволяет вычислять такие свойства, как валентные углы, двугранные углы и молекулярные энергии. Они могут использоваться для предсказания молекулярных конформаций, которые можно применять при разработке лекарств, для предсказания взаимодействий фермент-субстрат и для изучения межмолекулярных сил. Кватернионы также обеспечивают удобный способ представления движения молекул, что полезно для изучения молекулярной динамики.

При описании релятивистских процессов в квантовой механике и теории относительности кватернионы могут быть использованы для параметризации групп пространственно-временной симметрии и реализации ряда их представлений [51,52,16]. Кватернионы применяются для моделирования физических явлений таких как искривление пространства-времени, движение частиц и спин-орбитальные взаимодействия. Кроме того, они могут быть привлечены к описанию более сложных физико-математических моделей, таких, как уравнение Дирака, описывающее поведение релятивистских фермионов, и уравнения Максвелла, описывающие поведение электромагнитных полей [53, 54]. Кватернионы оказываются полезны для упрощения расчета лагранжиана, гамильтониана и других величин в физике элементарных частиц [55], предоставляя мощный инструмент

для понимания поведения фундаментальных частиц и взаимодействий. Их можно задействовать для лучшей визуализации и понимания структуры пространства-времени, обеспечивая более интуитивное представление для поведения физических систем.

Важным компонентом теоретической физики являются нерелятивистские самосопряженные («майорановские») поля (или майорановские фермионы). В рамках описания этой теоретической модели используют представление Фока для кватернионных полей [56].

Применение кватернионов является особенно эффективным тогда, когда требуется не только установить ориентацию объекта в трехмерном пространстве, но и определить некоторую дополнительную скалярную величину. Одной из таких задач является расчет технических устройств в виде гибких стержней с подвижным сердечником, предназначенных для передачи на расстояние под разными углами продольной силы или продольного перемещения (гибкие тяги), крутящего момента или угла поворота (гибкие валы) [1]. Таким примером могут служить гибкие тяги для рычагов управления автомобилем, вал для глубинного вибратора бетона и т.п.

Из вышесказанного можно заключить, что кватернионы благодаря их способности представлять трехмерные вращения являются довольно популярным и мощным инструментом моделирования в различных областях.

1.3. Обзор применения кватернионов в кинематических задачах управления ориентацией твердого тела и при исследовании движения технических систем

1.3.1. Применение кватернионов в кинематических задачах управления ориентацией твердого тела

Задачи управления ориентацией твердого тела возникают во многих прикладных областях, например, в робототехнике, при стабилизации и управлении космическими и летательными аппаратами и т. п. Из-за широкого

распространения кватернионного формализма в этих отраслях большая часть задач управления ориентацией решается именно с использованием этого подхода. Можно привести множество работ, посвященных управлению ориентацией твердого тела с использованием кватернионов, например: [57,58,59,60,61,62,80,64,65].

Задачи управления ориентацией твердого тела, как и любые другие задачи управления движением, можно условно разделить на 3 категории [66]: геометрические, кинематические и динамические. В геометрических задачах требуется построить траекторию движения, обладающую неким желаемым свойством. В динамических задачах требуется найти силовое воздействие (управление), реализующее некоторую (возможно оптимальную) траекторию движения.

В данной работе рассматривается решение кинематических задач переориентации твердого тела, поэтому остановимся на них подробнее. В кинематических задачах управления ориентацией основной целью является переориентация твердого тела из его начального углового положения в нужное конечное положение путем придания телу необходимой угловой скорости. То есть, в отличие от динамических задач, в кинематических задачах в качестве управления рассматривается не силовое воздействие, а угловая скорость. Данная задача решается в классе задач программного движения (в том числе оптимального программного движения), при ее решении строится программная траектория и находится программное управление, реализующее программное движение.

Ещё одной целью в рамках кинематической задачи управления ориентацией твердого тела может быть поворот тела из первоначального заданного положения на некоторое определенное программное движение и дальнейшее асимптотически устойчивое движение по программной траектории. Такая задача решается в классе задач стабилизирующего движения (в том числе оптимального стабилизирующего движения), при ее решении строится стабилизирующая траектория и находится стабилизирующее управление, обеспечивающее выход на программную траекторию и дальнейшее асимптотически устойчивое движение вдоль нее.

Задачи управления в кинематической постановке являются важной частью теории управления ориентацией твердого тела, т. к., в отличие от динамических задач, часто обладают аналитическими решениями, которые успешно используются при конструировании программного движения. Также решение обратной задачи динамики на основе полученного аналитического решения позволяет построить программный закон для динамического (т. е. силового) управления движением твердого тела, который в некоторых случаях является весьма эффективным.

Кинематические задачи управления ориентацией изучаются и применяются в самых разных областях [66], включая теорию дифференциальных игр, платформенные инерциальные навигационные системы (БИНС), механику космических полетов, механику роботов-манипуляторов, задачи наведения, компьютерную анимацию и т. д. Особую практическую ценность кинематическое управление приобретает в задачах двухконтурного управления вращательным движением тела (например, космическим аппаратом) с использованием БИНС; при проектировании платформенных корректируемых систем ориентации и навигации; в задачах переориентации орбиты - плоскости орбиты и коррекция угловых элементов орбиты космического аппарата посредством реактивного ускорения перпендикулярного плоскости орбиты космического аппарата; при решении обратных задач кинематики роботов-манипуляторов и задач кинематического управления (т.е. управления движением по скорости) роботами-манипуляторами.

При решении задач кинематического оптимального управления в качестве целевых показателей, которые необходимо минимизировать, могут использоваться:

- 1) время движения (в задачах быстрогодействия) [67, 68],
- 2) интеграл от квадрата модуля угловой скорости твердого тела (в задачах оптимального программного разворота из заданного начального углового положения в заданное конечное угловое положение за фиксированное время) [69],

- 3) интеграл от модуля вектора программной или стабилизирующей угловой скорости твердого тела (в задачах оптимального программного или стабилизирующего разворота твердого тела) [70,71].

Все перечисленные критерии качества имеют конкретный физический смысл. В задачах быстрогодействия он очевиден, а второй и третий функционал тесно связаны с кинетической энергией вращающегося твердого тела и фактически требуют минимизировать ее расход на переориентацию твердого тела.

Далее рассмотрим работы, посвященные исследованию кинематических задач управлением ориентацией твердого тела, с использованием кватернионного формализма.

Кинематические задачи переориентации тела в кватернионной постановке впервые рассматривались в работах В.Н. Бранца и И.П. Шмыглевского [72,73,67,74], П.К. Плотникова [75], А.Н. Сергеева [75], Ю.Н. Челнокова [75,76,70,71,77], А.А. Панкова [76], А.В. Молоденкова [69], В.Г. Бирюкова [70], В.В. Маланина и Н.А. Стрелковой [68].

В работах [67, 68] изучалась задача кинематически оптимального в смысле быстрогодействия пространственного разворота твердого тела, в них строились кватернион оптимального программного переориентирования тела и оптимальная угловая скорость. Во всех упомянутых работах фазовой переменной является кватернион ориентации твердого тела, для него задаются граничные условия, а за управление принимается угловая скорость. Движение математически описывается с помощью кинематических уравнений для кватернионов [67,72, 71]:

$$2\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (1.6)$$

В данном уравнении \mathbf{q} является версором ориентации твёрдого тела относительно неподвижной системы отсчёта; $\boldsymbol{\omega}$, выступающая в роли управления, является кватернионом с нулевой действительной частью, векторная часть которого равна угловой скорости $\vec{\Omega}$ подвижной системы отсчета относительно неподвижной. Кватернионное дифференциальное уравнение (1.6) может быть переписано в виде 4 скалярных дифференциальных уравнений (1.4).

В работе [69] также рассматривалась задача оптимального кинематического управления разворотом твердого тела, однако в качестве целевого показателя использовался интеграл от квадрата угловой скорости.

В работах [72,73,67,74,76,75] рассматривались задачи кинематического управления, связанные с нелинейной стабилизацией. В них для описания движения использовались кватернионные кинематические уравнения в отклонениях. Эти уравнения возмущенного углового движения для версоров могут быть записаны в виде [67,75,71]:

$$2\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{q}^{\mathbf{P}}}(t) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}^{\mathbf{P}}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{k}} \cdot \overline{\mathbf{q}^{\mathbf{P}}}(t) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p} \quad (1.7)$$

или:

$$2\dot{\mathbf{p}}^* = \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{k}} + \mathbf{p}^* \cdot \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{P}}(t) - \boldsymbol{\omega}^{\mathbf{P}}(t) \cdot \mathbf{p}^*. \quad (1.8)$$

В задачах стабилизации различают три системы координат - неподвижную $x_1x_2x_3$, подвижную, которая связана с телом $x'_1x'_2x'_3$ и подвижную, которая движется по программному закону $x^p_1x^p_2x^p_3$. В записанных уравнениях (1.7) и (1.8) \mathbf{q} , как и прежде, является версором ориентации твёрдого тела относительно неподвижной системы отсчёта; версор ориентации $\mathbf{q}^{\mathbf{P}}(t)$ и кватернион угловой скорости $\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{P}}(t)$ определяют программный закон движения относительно неподвижной системы координат, при этом компоненты кватерниона $\boldsymbol{\omega}^{\mathbf{P}}(t)$ задаются в программной системе координат; \mathbf{p} и \mathbf{p}^* - версоры ориентации тела относительно программной системы координат, компоненты которых определены в неподвижной и связанной системе соответственно, они характеризуют рассогласование программной и связанной системы координат; $\boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{k}}$ и $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{k}}$ - кватернионы корректирующей угловой скорости (управления), компоненты которых заданы в связанной и фиксированной системах координат соответственно.

В указанных работах нелинейная стабилизация базируется на принципе обратной связи, на основании которой строится позиционное, интегральное или интегрально-позиционное корректирующее движение.

Отметим особенность работы [75], в ней для решения задачи стабилизации, поставленной в [67] вместо уравнений для версоров (1.7) и (1.8),

используются кинематические уравнения возмущенного движения в ненормированных кватернионах, идея которых также взята из [67]. Управлением в данном случае является кватернион угловой скорости с ненулевой действительной частью, т. е. управление четырехмерно. Данный подход, встречающийся также в [71], предлагает несколько видов корректирующего управления, которые являются четырехмерными аналогами позиционного, интегрального и интегрально-позиционного управлений.

В работах [70,71] рассматриваются задачи оптимизации нелинейной стабилизации.

В работе [72], рассматриваются различные задачи, связанные с приведением связанной системы к приборной системе координат. Например, построение кинематических управлений, приводящих связанную систему к неподвижной или подвижной приборной системе, и исследование полученных движений на устойчивость. Кроме того, рассматриваются задачи коррекции положения приборного базиса по датчикам при дефиците информации.

Главной особенностью всех перечисленных работ можно считать то, что использование кватернионного формализма позволило получить аналитические решения всех поставленных задач.

Полученные аналитические решения задач кинематического управления могут быть использованы для построения динамических (силовых) управлений. Для этого используется концепция обратной задачи динамики, которая позволяет, используя динамические уравнения Эйлера, по заданному программному движению построить закон программного динамического управления. На применении данной концепции построены решения динамических задач управления ориентацией в работах [78,79,80,81,82].

Подход, описанный выше, выгодно отличается от стандартных методов решения динамической задачи управления тем, что позволяет учитывать различного рода ограничения, наложенные на фазовые переменные и управления, однако он же накладывает некоторые ограничения на понятие оптимальности. Оптимальная (или, точнее, квазиоптимальная) траектория задачи управления будет

в первую очередь определяться выбранным методом построения программных траекторий и введенными оптимизационными параметрами. Такие квазиоптимальные траектории могут быть весьма актуальны, например, при управлении малыми космическими аппаратами.

Можно с уверенностью утверждать, что малые космические аппараты (КА) произвели революцию в освоении и исследовании космоса [83, 84]. Они имеют ряд преимуществ по сравнению с традиционными КА, что делает их привлекательными как для научной, так и для коммерческой космической отрасли. Одно из главных их преимуществ - стоимость. Космические корабли меньшего размера, как правило, дешевле строить, запускать и эксплуатировать. Это делает их привлекательными для компаний, университетов и частных предпринимателей, которые заинтересованы в освоении космоса, но не имеют доступа к большим бюджетам. Еще одним преимуществом малых КА является их размер и маневренность. Такие аппараты более маневренны, чем традиционные, что позволяет им получать доступ к областям космоса, недоступным для более крупных КА. Это дает ученым возможность исследовать более отдаленные области космоса, такие, как внешняя Солнечная система, или, наоборот, проводить исследования на более близком расстоянии для съемки и дистанционного зондирования. Наконец, малые космические аппараты полезны для различных задач, таких, как ретрансляция связи, сбор данных и миссии по возврату образцов. Небольшие космические аппараты также могут использоваться для наблюдения за астероидами, кометами и для облетов планет.

В целом, обладая небольшой массой и размерами малые космические аппараты являются менее требовательными к ресурсам, необходимым для управления их ориентацией. Это делает не столь актуальными требования минимизации расхода топлива, поэтому использование квазиоптимальных алгоритмов, полученных в работах [78,79], может быть более предпочтительным, чем алгоритмов, полученных, например, в [85,86], в силу их простоты.

Наиболее эффективными по быстрдействию и расходу топлива траекториями при управлении пространственным разворотом КА являются плоские, или

эйлеровы траектории [87]. Квазиоптимальные траектории, строящиеся, например, в [79], также в некоторых случаях могут являться плоскими, однако, выяснение этого факта требует анализа весьма сложных выражений. Альтернативой мог бы стать визуальный анализ таких траекторий, но использование кватернионов подразумевает задание движения на 3-сфере в четырехмерном пространстве, что физически исключает такую возможность.

В данной работе будет описан способ построения трехмерных образов указанных выше траекторий, которые позволяют дать визуальную оценку тому, является ли пространственный поворот плоским. Кроме того, упомянутое отображение может быть использовано для того, чтобы строить квазиоптимальные траектории сначала в трехмерном пространстве, а затем отображать их на 3-сферу версоров. При таком методе построение квазиоптимальных траекторий несколько облегчается, т. к. не требуется соблюдать информированность фазового вектора, как это необходимо в случае версоров. Использование, предлагаемого в работе, трехмерного отображения повышает эффективность использования квазиоптимальных траекторий за счет увеличения возможностей для их анализа.

1.3.2. Применения кватернионов при моделировании движения технических систем

1.3.2.1. Обзор работ, посвященных использованию кватернионов для описания и исследования движения технических систем

Как было изложено в предыдущих пунктах, использование кватернионов сильно развито в космической инженерии. В данном пункте мы рассмотрим, насколько широко кватернионы применяются при описании и исследовании движения технических систем, которые не связаны напрямую с космической тематикой.

Существует множество инженерных технических устройств, в которых присутствуют элементы, совершающие сферическое движение. Примерами таких устройств могут служить различные шарнирные механизмы, манипуляторы,

карданные передачи, гироскопы и т. п. При описании движения этих устройств вполне может использоваться кватернионный формализм, однако, как показывает анализ опубликованных работ, находящихся в свободном доступе, использование версоров ориентации является весьма редким. Широкое применение алгебры кватернионов можно отметить только в кинематике манипуляторов, здесь они применяются для описания движения манипуляторов и для решения прямой и обратной задачи кинематики, причем рассматриваются как манипуляторы с разомкнутыми кинематическими цепями [88,89], так и манипуляторы с параллельными кинематическими связями [90].

В остальном применение кватернионов при описании и изучении движения технических систем, не имеющих прямого отношения к космической тематике, на удивление ограничено. Несмотря на то, что для исследования кинематики и динамики многих инженерно-технических устройств требуется описывать пространственную ориентацию, кватернионы для этих целей практически не используются. В работе [1] высказана мысль о том, что это, вероятнее всего, связано с большей сложностью кватернионов по сравнению с традиционными методами ведь, для их понимания требуется более строгая математическая подготовка. Таким образом, использование описания ориентации на основе кватернионов остается в большинстве своем ограничено областью космической техники, где более распространено использование продвинутой математики.

При этом, как отмечается в [1], в перспективе использование кватернионного формализма, даже в изученных задачах [91], может привести к получению новых важных результатов, т. к. формулы, основанные на кватернионах, получаются компактными и рациональными.

1.3.2.2. Обзор работ, посвященных исследованию карданной передачи

Карданная передача представляет собой шарнирный механизм, позволяющий передавать крутящий момент между пересекающимися (или не соосными) валами. Широко используется в технических областях, где трудно добиться

точного выравнивания и соосности вращающихся элементов. Их применяют в качестве трансмиссий для соединения приводного вала с коробкой передач в автомобилестроении, сельскохозяйственном и транспортном машиностроении, также их можно встретить в металлургическом производстве, робототехнике, различных турбинах, печатных станках и т.п.

Основной элемент карданной передачи, который используется для соединения двух валов между собой, называется универсальным шарниром, шарниром Гука или шарниром неравных угловых скоростей. Первые использования универсального шарнира можно отнести к довольно далекому периоду: он применялся в Древней Греции и в Древнем Китае при изготовлении не переворачивающихся масляных ламп и чернильниц, а также императорского кресла. Первые работы, в которых описывается принцип работы этого шарнира, можно отнести к XVI веку, а именно - в 1550 году Джероламо Кардано [92] описал подвесное устройство, которое позволяло бы сохранять телу фиксированную ориентацию в пространстве. Почти столетие спустя Робертом Гуком [93] было предложено использовать универсальный шарнир при изготовлении астрономических инструментов и в силовых передачах. Уже значительно позднее, в XIX веке, появляются первые работы, посвященные теоретическим исследованиям кинематики универсального шарнира, их практически одновременно публикуют в 1841г. Р. Уиллис [94] и в 1845 г. Ж.-В. Понселе [95]. В данных работах устанавливалась связь между кинематическими характеристиками ведущего и ведомого валов. До сих пор формула, связывающая угловые скорости ведущего и ведомого валов, является одним из основных теоретических результатов исследования карданных передач:

$$\omega_{II} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_I} \omega_I,$$

где α - угол между валами, φ_I - угол поворота ведущего вала.

Исследования движения и свойств универсального шарнира и карданной передачи остаются актуальными и по сей день, что подтверждается множеством публикаций [96,97,98,99,100,101,102]. При этом для изучения используются

геометрические методы [63,103], аналитические методы [104,105], а также методы компьютерного анализа с использованием САПР [106,107]. В данных работах в основном описываются результаты кинематического анализа и некоторые методы динамического анализа карданных передач, однако можно отметить два общих факта. Во-первых, во всех работах, в которых рассматривается динамика карданной передачи, пренебрегают инерционными характеристиками крестовины универсального шарнира. Во-вторых, для описания сферического движения универсального шарнира не используются кватернионы; лишь в последние годы появились работы, в которых при рассмотрении кинематики и динамики шарнира Гука используются версоры ориентации [24,108,109].

В данной работе будет дано более полное описание кинематики и динамики универсального шарнира с использованием кватернионного формализма и показано, что учет инерционных характеристик влияет на усилие, передающееся на ведущий вал. Кроме того, будет продемонстрировано, что за счет изменения моментов инерции крестовины можно добиться уменьшения нагрузки, приходящейся на вилку ведущего вала и тем самым продлить срок эксплуатации универсального шарнира и карданной передачи в целом.

1.4. Применение кватернионов при автоматизации проектирования и в САПР

Кватернионы, являясь мощным и компактным инструментом для представления ориентации твердого тела, находят свое применение при автоматизации проектирования. По данному направлению имеется целый ряд работ, например [110,111,112].

Так, в работе [111] изучалась связь между геометрией на сфере и на плоскости, а также взаимосвязь алгебры кватернионов с геометрическими преобразованиями в пространстве. Было показано, что ортогональные преобразования представляют собой конечные повороты и существует изоморфное соответствие между операцией ортогонального преобразования и операцией умножения кватернионов. Осуществлена оценка производительности различных алгоритмов

ориентации, их преимуществ и недостатков, сделан вывод, что кватернионы являются универсальным методом преобразования. Наконец, на основе проведенных исследований разработана программа моделирования и проектирования поверхностей, алгоритмы графического ядра которой могут быть выбраны исходя из их целесообразности.

В работе [112] разработан метод, позволяющий на основе сигнала, формирующего пространственную групповую точечную модель, создавать проволочную модель объекта в виде последовательности кватернионов. Также синтезирован обратный алгоритм, позволяющий на основе кватернионного сигнала проволочной модели восстанавливать пространственную групповую точечную модель. Была решена задача определения параметров поворота пространственного группового точечного объекта при помощи фильтрации сигнала. Для этого был рассмотрен кватернионный фильтр, позволяющий проводить сравнение пространственного группового точечного объекта с неизвестными параметрами с эталонной моделью заданного класса.

В работе [110] на основе конфигурационных пространств, описываемых кватернионами, была создана теория, которая дает возможность точно отображать трехмерные допуски отдельных деталей и целых сборок. На основе этой теории разработаны математические модели классических допусков, которые можно использовать для определения точного положения поверхностей в пространстве в зависимости от назначенных им допусков. Также произведена топологическая классификация различных деталей и узлов, которая помогает представлять и анализировать их с заданными допусками. Созданы алгоритмы и программы для определения конфигурационных пространств деталей и сборок и анализа контактного состояния деталей в сборке.

Как видно из рассмотренных работ, кватернионы широко применяются для создания геометрических моделей 3D-объектов. Это обуславливается в первую очередь тем, что кватернионы позволяют обеспечить высокую точность трехмерного моделирования и простоту пространственных преобразований.

Большинство современных систем автоматизированного проектирования (САПР) позволяют работать с кватернионами. В качестве примеров можно привести систему двумерного геометрического автоматизированного проектирования (2D-CAD систему): DraftSight (Dassault Systèmes); системы трехмерного геометрического автоматизированного проектирования (3D-CAD системы): Blender (Blender Foundation), Autodesk Maya (Autodesk Inc.), Houdini (Side Effects Software); программное обеспечение, включающее систему геометрического проектирования (CAD), систему автоматизированной подготовки к производству (CAM), систему автоматизированных инженерных расчетов (CAE): Fusion 360 (Autodesk Inc.), SolidWorks (Dassault Systèmes) и др.

На сегодняшний день многие CAE-системы позволяют проводить кватернионные вычисления, среди них ANSYS (Ansys Inc.), COMSOL Multiphysics (Comsol Inc.), ABAQUS (Abaqus Inc.) и др. Среди CAE-систем стоит особенно выделить системы компьютерной алгебры (CAS) [113], данные системы предназначены для проведения символьных вычислений и имеют набор возможностей, позволяющих пройти полный цикл исследования от разработки математической модели до подготовки статьи к печати [114]. Основным преимуществом CAS-систем перед другими CAE-системами заключается в возможности проведения аналитических (символьных) вычислений и наличие широкого набора встроенных численных методов. К недостаткам CAS можно отнести отсутствие встроенной CAD-системы, однако оно нивелируется собственными возможностями визуализации и манипулирования трехмерными графическими объектами, а также способностью интегрирования с внешними CAD-системами.

Среди CAS-систем, имеющих широкие возможности для проведения кватернионных вычислений, можно перечислить Maple (Waterloo Maple), Wolfram Mathematica (Wolfram Research), Maxima (Macsyma group) и др.

Алгоритмы, изложенные в данной работе, были реализованы в системе Wolfram Mathematica. Являясь одним из признанных лидеров на рынке CAS-систем, она обладает широким спектром инструментов для обработки и визуализации данных, поддерживает многие языки программирования, и все это наряду

с возможностью работы с кватернионами делает Wolfram Mathematica оптимальным выбором.

1.5. Выводы по 1 главе

1. Обзор способов математического моделирования ориентации твердого тела в трехмерном пространстве показывает большое разнообразие таких методов. Каждый из них обладает своими преимуществами и недостатками. Так, использование углов конечного вращения является интуитивно понятным и требует минимального набора параметров, но приводит к кинематическим уравнениям, правая часть которых имеет разрыв в некоторых точках; матрицы поворота лишены указанного недостатка, но требуют задания сразу 9 параметров; векторы поворота Эйлера дают наглядную геометрическую интерпретацию вращения, но приводят к громоздким уравнениям и т. д. Кватернионы с этой точки зрения могут рассматриваться как метод, сочетающий в себе положительные стороны других способов описания, минимизирующий при этом их недостатки. Так, кинематические уравнения для версоров не вырождаются и являются линейными, как и для матриц поворота; при этом для задания ориентации требуется всего 4 параметра, поэтому их можно назвать одним из наиболее эффективных методов для описания положения тела в трехмерном пространстве.
2. Как показал анализ работ по моделированию, кватернионы стали важным математическим инструментом в самых разных областях. Наиболее интенсивно кватернионы применяются для описания кинематики и динамики твердых тел в работах по космической тематике и в компьютерной анимации. Также можно встретить кватернионы в работах по робототехнике, кристаллографии, молекулярной химии и теоретической физике. Таким образом, можно сделать вывод, что кватернионы являются довольно универсальным и мощным инструментом математического моделирования.
3. Использование кватернионов при автоматизации проектирования позволяет добиться компактности и точности математического представления

геометрических моделей. Поэтому многие современные САПР поддерживают работу с кватернионами.

4. Применение кватернионов в задачах кинематического управления ориентацией твердого тела дает возможность получить аналитические решения многих задач (в том числе классических), в которых традиционные методы задания ориентации позволяют получать лишь численные решения. Однако, как было указано, использование кватернионов усложняет анализ получаемых программных траекторий, т. к. они располагаются на 3-сфере версоров в четырехмерном пространстве, что делает невозможным их визуализацию. Использование способа трехмерного представления движения, заданного версорами, позволило бы улучшить анализ траекторий поворота.
5. Исследование работ, связанных с изучением сферического движения в технических системах таких как гироскопы, шарнирные механизмы, карданные передачи и т. п. позволяет сделать вывод, что кватернионный формализм в них практически не используется. Есть все основания полагать, что использования кватернионов при описании движения таких систем может привести к получению новых важных результатов, т. к. формулы, основанные на кватернионах, получаются компактными и рациональными.

ГЛАВА 2. ОТОБРАЖЕНИЕ ЕДИНИЧНЫХ КВАТЕРНИОНОВ В ПРОСТРАНСТВО ВЕКТОРОВ ПОВОРОТА В \mathbb{R}^3

Кватернионы являются мощным инструментом для описания ориентации тела, однако геометрическая интерпретация движения, заданного с их использованием, требует глубокого понимания четырехмерной геометрии, что сказывается на наглядности такого представления. Известно, что космонавтам для предотвращения нештатных ситуаций приходится заучивать контрольные показатели приборов, заданные в кватернионах, т. к. интуитивное их понимание затруднено. В некоторых работах, связанных с исследованием движения, заданного в кватернионах, сталкиваются с трудностями, которые вполне бы могли быть разрешены при возможности визуального анализа, в частности, проверка того является ли построенное вращение плоским и т. п.

Для возможности визуализации движения, представленного кватернионами, предлагается использовать их отображение на множество векторов поворота в \mathbb{R}^3 . Известно, что вектора поворота обладают одной из самых простых и интуитивно понятных геометрических интерпретаций, но не получили широкого распространения в связи с громоздкостью определяющих математических выражений. Основной идеей работы является совместить преимущества этих двух подходов - простоту формул кватернионов и наглядность векторов поворота.

В данной главе представлен алгоритм, позволяющий получить образы в пространстве векторов поворота для движений, заданных на единичной сфере кватернионов. Указанный алгоритм позволяет построить трехмерное изображение траектории вращения тела, чтобы провести ее визуальный анализ. Также ввиду важности эйлеровых поворотов проводится исследование их образов в пространстве векторов поворота. Кроме того, дается постановка задач о переориентации и оптимальной переориентации твердого тела с использованием пространства векторов поворота.

2.1. Отображение конфигурационного пространства поворотов S^3 в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3

2.1.1. Конфигурационное пространство поворотов в виде трехмерного шара радиусом π

В процессе сферического движения твердого тела оно описывает некоторую кривую на поверхности единичной сферы кватернионов:

$$S^3: q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1.$$

Поэтому, любая дважды дифференцируемая функция $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$, заданная на 3-сфере S^3 , может интерпретироваться как некоторая траектория в конфигурационном пространстве поворотов.

Как следует из геометрической интерпретации единичного кватерниона:

$$\mathbf{q} = \cos \frac{\chi}{2} + \sin \frac{\chi}{2} \vec{e} \quad (2.1)$$

ориентацию подвижных осей он задает в параметрах ось - угол, т. е. он определяет плоский поворот, который необходимо осуществить неподвижным осям, чтобы они совпали с подвижными, при этом \vec{e} задает орт оси поворота, а χ - угол поворота. Кватернионы, лежащие на 3-сфере S^3 , задают совокупность поворотов на всевозможные углы $0 \leq \chi \leq 2\pi$ вокруг всевозможных осей, заданных единичными векторами \vec{e} (рис. 2.1):

$$\begin{aligned} \vec{e}(\alpha, \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \cdot \vec{i}_1 + \sin \alpha \sin \beta \cdot \vec{i}_2 + \cos \alpha \cdot \vec{i}_3, \\ 0 &\leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для решения некоторых прикладных задач управления сферическим движением может быть удобно перейти от полностью лишенного наглядности задания траектории на гиперсфере S^3 $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$ в четырехмерном пространстве к ее заданию в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 .

В работах [115,2] отмечается, что множеству единичных кватернионов, задающих ориентацию, могут быть поставлены в соответствие точки пространства \mathbb{R}^3 , положение которых определяется радиус-вектором:

$$\vec{r} = \chi \vec{e}, \quad (2.3)$$

который, по сути, представляет собой вектор поворота. Таким образом, векторы поворота (2.3) могут рассматриваться как геометрическая интерпретация кватернионов, определяемых теми же самыми параметрами ось-угол.

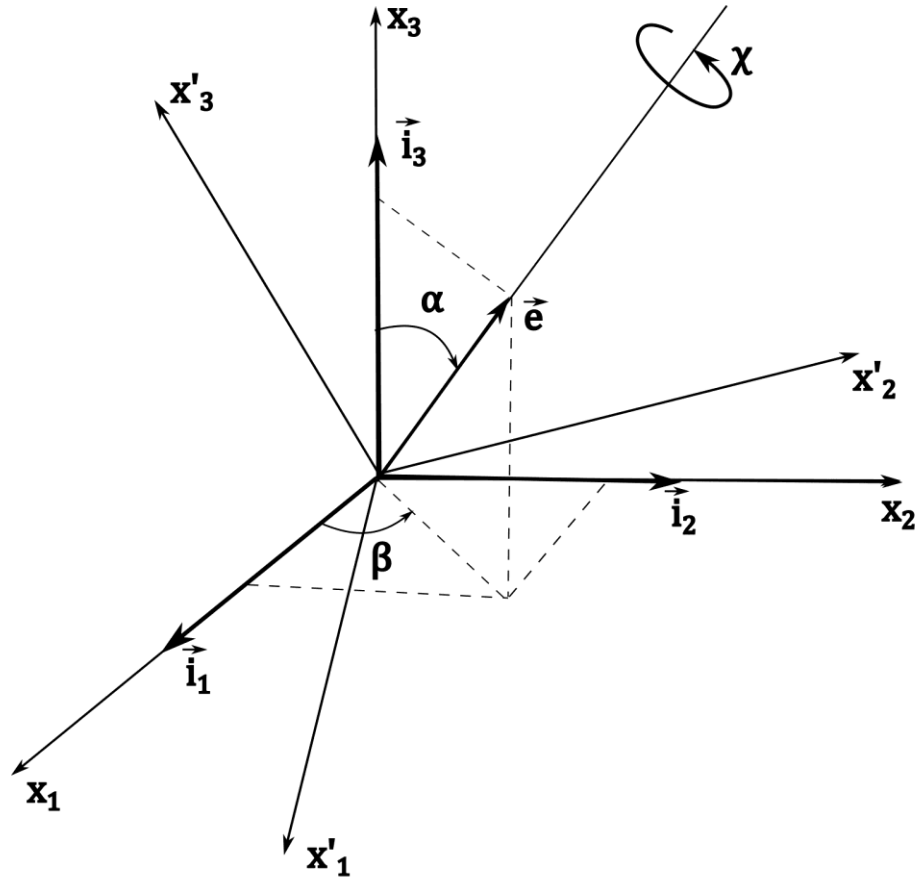


Рисунок 2.1 – Определение положения подвижной системы координат с помощью параметров ось - угол

Можно считать, что любая точка пространства \mathbb{R}^3 с радиус-вектором \vec{r} задает ориентацию твердого тела в параметрах ось - угол. При этом $0 \leq \chi < \infty$, а следовательно, одной ориентации подвижных осей соответствует счетная бесконечность точек пространства \mathbb{R}^3 , в частности, любой вектор поворота длиной χ задает ту же самую ориентацию, что и коллинеарный ему вектор длиной $\chi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}^+$, это может быть избыточным при описании сферического движения твердого тела. Для описания всех возможных ориентаций подвижных осей достаточно рассмотреть точки, для которых $0 \leq \chi \leq \pi$, совокупность этих точек

образует шар радиусом π в трехмерном евклидовом пространстве. Именно этот шар может быть рассмотрен в качестве конфигурационного пространства поворотов в \mathbb{R}^3 .

Точки шара радиусом π и кватернионы, задающие одинаковые параметры ось-угол могут быть связаны. Так, каждой точке шара с координатами:

$$\begin{cases} x_1 = \chi \sin \alpha \cos \beta, \\ x_2 = \chi \sin \alpha \sin \beta, \\ x_3 = \chi \cos \alpha, \end{cases} \quad (2.4)$$

соответствует единичный кватернион с компонентами:

$$\begin{cases} q_0 = \cos \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{2}, \\ q_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \sin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{2}, \\ q_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \sin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{2}, \\ q_3 = \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \sin \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{2}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Данные соотношения имеют особенность для начала координат, т. е. для точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, однако она легко устраняется, если полученные функции доопределить в начале координат их пределами

$$\begin{cases} q_0 \Big|_{\substack{x_1=0, \\ x_2=0, \\ x_3=0}} = 1, \\ q_1 \Big|_{\substack{x_1=0, \\ x_2=0, \\ x_3=0}} = \lim_{x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0} q_1 = 0, \\ q_2 \Big|_{\substack{x_1=0, \\ x_2=0, \\ x_3=0}} = \lim_{x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0} q_2 = 0, \\ q_3 \Big|_{\substack{x_1=0, \\ x_2=0, \\ x_3=0}} = \lim_{x_1 \rightarrow 0, x_2 \rightarrow 0, x_3 \rightarrow 0} q_3 = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Это полностью согласуется с соотношениями (2.1) и (2.3), из которых ясно, что единичному кватерниону $q = (1, 0, 0, 0)^T$ соответствует начало координат $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Из соотношений (2.5) могут быть найдены обратные соотношения, которые позволяют по компонентам кватерниона найти координаты точки в шаре:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2q_1 \arccos q_0}{\sqrt{1-q_0^2}} = q_1 \cdot Q(q_0), \\ x_2 = \frac{2q_2 \arccos q_0}{\sqrt{1-q_0^2}} = q_2 \cdot Q(q_0), \\ x_3 = \frac{2q_3 \arccos q_0}{\sqrt{1-q_0^2}} = q_3 \cdot Q(q_0), \end{cases} \quad (2.7)$$

где $Q(q_0) = \frac{2 \arccos q_0}{\sqrt{1-q_0^2}}$. Возникающая особенность при $q_0 = 1$ может быть устранена аналогично (2.6) доопределением функции её пределом:

$$\begin{cases} x_1 \Big|_{\substack{q_0=1, \\ q_1=0, \\ q_2=0, \\ q_3=0}} = \lim_{q_0 \rightarrow 1, q_1 \rightarrow 0, q_2 \rightarrow 0, q_3 \rightarrow 0} x_1 = 0, \\ x_2 \Big|_{\substack{q_0=1, \\ q_1=0, \\ q_2=0, \\ q_3=0}} = \lim_{q_0 \rightarrow 1, q_1 \rightarrow 0, q_2 \rightarrow 0, q_3 \rightarrow 0} x_2 = 0, \\ x_3 \Big|_{\substack{q_0=1, \\ q_1=0, \\ q_2=0, \\ q_3=0}} = \lim_{q_0 \rightarrow 1, q_1 \rightarrow 0, q_2 \rightarrow 0, q_3 \rightarrow 0} x_3 = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

2.1.2. Расширение конфигурационного пространства поворотов до трехмерного шара радиусом 2π

Несмотря на то, что каждой ориентации подвижных осей соответствует некоторая точка в шаре радиусом π , не каждый единичный кватернион будет иметь свой образ в этом шаре. Это связано с тем, что 3-сфера S^3 накрывает конфигурационное пространство вращений $SO(3)$ двулистным образом, т.е. каждой ориентации подвижных осей соответствуют две точки лежащие на S^3 . Ограничиваясь $0 \leq \chi \leq \pi$, мы рассматриваем только единичные кватернионы, для которых $q_0 \geq 0$. Для того, чтобы рассмотреть все единичные кватернионы нужно считать, что $0 \leq \chi \leq 2\pi$, тогда в соответствии с (2.3) образом гиперсферы S^3 в пространстве \mathbb{R}^3 будет являться шар радиусом 2π .

Любая траектория $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$, заданная на S^3 , может быть отображена в шар радиусом 2π трехмерного пространства \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{2q_1(t) \arccos q_0(t)}{\sqrt{1 - q_0^2(t)}}, \\ x_2(t) = \frac{2q_2(t) \arccos q_0(t)}{\sqrt{1 - q_0^2(t)}}, \\ x_3(t) = \frac{2q_3(t) \arccos q_0(t)}{\sqrt{1 - q_0^2(t)}}. \end{cases} \quad (2.9)$$

И наоборот любая траектория в шаре радиусом 2π может быть отображена на S^3 :

$$\begin{cases} q_0(t) = \cos \frac{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)}}{2}, \\ q_k(t) = \frac{x_k(t)}{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)}} \sin \frac{\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t)}}{2}, \quad k = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (2.10)$$

Поэтому шар радиусом 2π может рассматриваться в качестве трехмерного образа гиперсферы S^3 , одним из преимуществ которого можно считать возможность наглядного представления траектории сферического движения.

2.1.3. Об отображении пространства \mathbb{R}^3 на сферу S^3

Основным недостатком использования шара радиусом 2π в качестве конфигурационного пространства поворотов можно считать то, что траектории, непрерывные на S^3 , при отображении могут иметь разрыв на границе этого шара. Однако этот недостаток можно обойти, если расширить конфигурационное многообразие поворотов до всего пространства \mathbb{R}^3 .

Любая непрерывная траектория в пространстве \mathbb{R}^3 может быть отображена с помощью соотношений (2.10) в непрерывную траекторию на S^3 . Таким образом, каждой непрерывной траектории, лежащей на сфере S^3 , может быть найдена непрерывная траектория в пространстве \mathbb{R}^3 , которая является её прообразом. Такой подход позволяет не только обойти указанный выше недостаток,

но и упрощает процедуру интерполяции при построении программных траекторий, что будет показано в главе 3.

2.2. Образы траекторий эйлеровых поворотов в пространстве \mathbb{R}^3

Среди сферических движений твердого тела важное место занимают эйлеровы (плоские) повороты. Согласно известной теореме Эйлера-Даламбера, твердое тело из одной его ориентации в другую можно перевести с помощью одного поворота на некоторый угол вокруг некоторой оси. При этом траекторией эйлера поворота на S^3 будет являться геодезическая, соединяющая начальную и конечную ориентацию [116], что делает это движение в определенном смысле оптимальным.

Представляет интерес, что произойдет с траекториями эйлеровых поворотов при их отображении в пространство \mathbb{R}^3 .

2.2.1. Эйлеровы траектории на сфере S^3

Выберем две произвольные ориентации твердого тела $\mathbf{q}^{(1)} \in S^3$, $\mathbf{q}^{(2)} \in S^3$ и соединим их кривой, воспользовавшись для этого линейной сферической интерполяцией кватернионов [Shoemake]:

$$\mathbf{q}^{(12)}(u) = \frac{\sin\left(\left[\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)})\right](1-u)\right)}{\sin\left(\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)})\right)} \mathbf{q}^{(1)} + \frac{\sin\left(\left[\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)})\right]u\right)}{\sin\left(\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)})\right)} \mathbf{q}^{(2)}, \quad (2.11)$$

где $u \in [0,1]$.

Покажем, что (2.11) задает на поверхности S^3 геодезическую, которая является траекторией Эйлера поворота.

Утверждение 2.1

Кривая, определяемая сферической линейной интерполяцией (2.11), является геодезической линией на поверхности гиперсферы S^3 .

Доказательство:

Рассмотрим скорость движения вдоль кривой (2.11):

$$\frac{d}{du} \mathbf{q}^{(12)}(u) = \arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}) \left\{ -\frac{\cos([\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)})](1-u))}{\sin(\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}))} \mathbf{q}^{(1)} + \frac{\cos([\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)})]u)}{\sin(\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}))} \mathbf{q}^{(2)} \right\}.$$

Можно показать, что эта скорость постоянна и равна:

$$\left| \frac{d}{du} \mathbf{q}^{(12)}(u) \right| = \left| \arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}) \right|.$$

Введем натуральный параметр:

$$s = \left| \arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}) \right| u,$$

после замены параметров получаем кривую единичной скорости:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(12)}(s) = & \frac{\sin \left(\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}) \left(1 - \frac{s}{\left| \arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}) \right|} \right) \right)}{\sin(\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}))} \mathbf{q}^{(1)} + \\ & + \frac{\sin \left(\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}) \frac{s}{\left| \arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}) \right|} \right)}{\sin(\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}))} \mathbf{q}^{(2)}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $s \in [0, \left| \arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}) \right|]$. Кривая (2.12) и кривая (2.11) являются разными параметризациями одной и той же траектории на 3-сфере, при этом кривая (2.12) является геодезической тогда и только тогда, когда ее ускорение коллинеарно нормали к поверхности. При этом ускорение равно:

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathbf{q}^{(12)}(s) = -\mathbf{q}^{(12)}(s),$$

а нормаль к поверхности гиперсферы в точке $\mathbf{q}^{(12)}(s)$ равна:

$$\vec{\mathbf{n}}(\mathbf{q}^{(12)}(s)) = (-2q_0^{(12)}(s), -2q_1^{(12)}(s), -2q_2^{(12)}(s), -2q_3^{(12)}(s))^T = -2\mathbf{q}^{(12)}(s).$$

Таким образом, нормаль гиперсферы и ускорение при движении по (2.12) коллинеарны, что означает что она является геодезической; т. к. (2.11) задает ту

же самую траекторию, то она также является геодезической. *Утверждение доказано.*

Утверждение 2.2

Движение по кривой, определенной сферической интерполяцией (2.11), соответствует эйлеровому (плоскому) повороту твердого тела, ось которого определяется единичным направляющим вектором:

$$\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)})^2}} (q_0^{(1)} \vec{q}^{(2)} - q_0^{(2)} \vec{q}^{(1)} + \vec{q}^{(1)} \times \vec{q}^{(2)}).$$

Доказательство:

Для задания движения из точки $\mathbf{q}^{(1)}$ в точку $\mathbf{q}^{(2)}$ по кривой $\mathbf{q}^{(12)}(u)$ \mathbf{q}_{12} следует рассматривать параметр u как некоторую непрерывную монотонно возрастающую функцию от времени $u = f(t)$, такую, что $f(0) = 0$, $f(T) = 1$, где T - момент окончания движения:

$$\mathbf{q}^{(12)}(t) = \frac{\sin([\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)})](1 - f(t))}{\sin(\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}))} \mathbf{q}^{(1)} + \frac{\sin([\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)})]f(t))}{\sin(\arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)}))} \mathbf{q}^{(2)} \quad (2.13)$$

Обратим внимание, что вид функции $f(t)$ влияет на быстроту движения по траектории (2.11) и не влияет на вид этой траектории.

Кватернион угловой скорости:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = 2\dot{\mathbf{q}}^{(12)}(t)\tilde{\mathbf{q}}^{(12)}(t), \quad (2.14)$$

действительная часть этого кватерниона равна нулю, а векторная задает угловую скорость твердого тела:

$$\vec{\Omega}(t) = 2 \frac{\dot{f}(t) \mathcal{G}_{1,2}}{\sin \mathcal{G}_{1,2}} (q_0^{(1)} \vec{q}^{(2)} - q_0^{(2)} \vec{q}^{(1)} + \vec{q}^{(1)} \times \vec{q}^{(2)}) = 2 \dot{f}(t) \mathcal{G}_{1,2} \vec{e}, \quad (2.15)$$

Здесь $\mathcal{G}_{1,2} = \arccos(\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)})$, $\vec{q}^{(1)}$, $\vec{q}^{(2)}$ - векторные части кватернионов $\mathbf{q}^{(1)}$ и $\mathbf{q}^{(2)}$

соответственно, $\vec{e} = \frac{1}{\sin \mathcal{G}_{1,2}} (q_0^{(1)} \vec{q}^{(2)} - q_0^{(2)} \vec{q}^{(1)} + \vec{q}^{(1)} \times \vec{q}^{(2)})$.

Из (2.15) следует, что направление вектора угловой скорости совпадает с направлением вектора \vec{e} . Покажем, что данный вектор имеет единичную длину.

Введем в рассмотрение угол γ между векторами $\vec{q}^{(1)}$ и $\vec{q}^{(2)}$, тогда:

$$\vec{q}^{(1)} \cdot \vec{q}^{(2)} = |\vec{q}^{(1)}| |\vec{q}^{(2)}| \cos \gamma,$$

$$|\vec{q}^{(1)} \times \vec{q}^{(2)}| = |\vec{q}^{(1)}| |\vec{q}^{(2)}| \sin \gamma,$$

$$|\vec{q}^{(1)}|^2 = (q_1^{(1)})^2 + (q_2^{(1)})^2 + (q_3^{(1)})^2 = 1 - (q_0^{(1)})^2,$$

$$|\vec{q}^{(2)}|^2 = (q_1^{(2)})^2 + (q_2^{(2)})^2 + (q_3^{(2)})^2 = 1 - (q_0^{(2)})^2,$$

$$\begin{aligned} & \left| q_0^{(1)} \vec{q}^{(2)} - q_0^{(2)} \vec{q}^{(1)} + \vec{q}^{(1)} \times \vec{q}^{(2)} \right|^2 = \\ & = \left(q_0^{(1)} |\vec{q}^{(2)}| \right)^2 + \left(q_0^{(2)} |\vec{q}^{(1)}| \right)^2 - 2 q_0^{(1)} q_0^{(2)} |\vec{q}^{(1)}| |\vec{q}^{(2)}| \cos \gamma + |\vec{q}^{(1)}|^2 |\vec{q}^{(2)}|^2 \sin^2 \gamma = \\ & = |\vec{q}^{(1)}|^2 + |\vec{q}^{(2)}|^2 - 2 |\vec{q}^{(1)}|^2 |\vec{q}^{(2)}|^2 - 2 q_0^{(1)} q_0^{(2)} |\vec{q}^{(1)}| |\vec{q}^{(2)}| \cos \gamma + |\vec{q}^{(1)}|^2 |\vec{q}^{(2)}|^2 \sin^2 \gamma = \\ & = |\vec{q}^{(1)}|^2 + |\vec{q}^{(2)}|^2 - |\vec{q}^{(1)}|^2 |\vec{q}^{(2)}|^2 - 2 q_0^{(1)} q_0^{(2)} |\vec{q}^{(1)}| |\vec{q}^{(2)}| \cos \gamma - |\vec{q}^{(1)}|^2 |\vec{q}^{(2)}|^2 \cos^2 \gamma = \\ & = 1 - (q_0^{(1)})^2 (q_0^{(2)})^2 - 2 q_0^{(1)} q_0^{(2)} |\vec{q}^{(1)}| |\vec{q}^{(2)}| \cos \gamma - |\vec{q}^{(1)}|^2 |\vec{q}^{(2)}|^2 \cos^2 \gamma = \\ & = 1 - (q_0^{(1)} q_0^{(2)} + |\vec{q}^{(1)}| |\vec{q}^{(2)}| \cos \gamma)^2 = 1 - (\mathbf{q}^{(1)} \cdot \mathbf{q}^{(2)})^2 = \sin^2 \vartheta_{1,2}, \end{aligned}$$

поэтому:

$$|\vec{e}| = \frac{\left| q_0^{(1)} \vec{q}^{(2)} - q_0^{(2)} \vec{q}^{(1)} + \vec{q}^{(1)} \times \vec{q}^{(2)} \right|}{\sin \vartheta_{1,2}} = 1.$$

Итак, вектор \vec{e} действительно является единичным направляющим вектором оси поворота, как видно из (2.15), он зависит только от начального и конечного положений $\mathbf{q}^{(1)}$ и $\mathbf{q}^{(2)}$ и не зависит от времени, что говорит о постоянстве его направления в процессе движения по кривой $\mathbf{q}^{(12)}(t)$.

Постоянное направление вектора угловой скорости в процессе движения говорит о том, что движение является эйлеровым (плоским) поворотом. *Утверждение доказано.*

Пусть твердое тело совершает равномерный поворот с угловой скоростью, заданной кватернионом $\boldsymbol{\omega}$, тогда имеет место следующее кинематическое уравнение [28]:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \mathbf{q}.$$

Продифференцировав его по времени, получим дифференциальное уравнение, описывающее равномерный поворот на гиперсфере S^3 :

$$\ddot{\mathbf{q}} + \frac{1}{4} \omega^2 \mathbf{q} = 0. \quad (2.16)$$

Утверждение 2.3

Решением уравнения (2.16) является эйлеров (плоский) поворот, задаваемый соотношением (2.11).

Доказательство:

Общее решение уравнения (2.16) имеет вид:

$$\mathbf{q} = \mathbf{c}_1 \cos \frac{\omega t}{2} + \mathbf{c}_2 \sin \frac{\omega t}{2},$$

где \mathbf{c}_1 и \mathbf{c}_2 - кватернионы, определяемые начальными или граничными условиями поворота.

Рассмотрим поворот, определенный граничными положениями:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0, \mathbf{q}(T) = \mathbf{q}^T,$$

где T - время поворота. Заметим, что из формулы (2.15) следует, что они должны удовлетворять соотношению:

$$\omega T = 2 \arccos(\mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{q}^T)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 &= \mathbf{q}^0, \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{\mathbf{q}^T - \mathbf{q}^0 \cos \frac{\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}}. \end{aligned}$$

С учетом полученного решение уравнения (2.16) может быть записано в виде:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 \cos \frac{\omega t}{2} + \frac{\mathbf{q}^T - \mathbf{q}^0 \cos \frac{\omega T}{2}}{\sin \frac{\omega T}{2}} \cdot \sin \frac{\omega t}{2},$$

при этом (6) может быть преобразовано к виду:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0 \frac{\sin \left[\left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{\omega T}{2} \right]}{\sin \frac{\omega T}{2}} + \mathbf{q}^T \frac{\sin \left[\frac{\omega t}{2} \right]}{\sin \frac{\omega T}{2}}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Полученное выражение является частным случаем соотношения (2.11) при $u = \frac{t}{T}$. *Утверждение доказано.*

Отметим, что уравнение (2.16) может быть проинтерпретировано как уравнение четырехмерного гармонического осциллятора, что придает уравнению классической механики твердого тела некоторый квантово-полевой смысл, близкий к осцилляторной интерпретации уравнений Эйлера-Пуассона [117].

2.2.2. Свойства образов эйлеровых траекторий в пространстве \mathbb{R}^3

Выясним какой вид будут иметь образы траекторий эйлеровых поворотов в \mathbb{R}^3 . Для этого к траекториям эйлеровых поворотов (2.11) применим отображение (2.9). Полученный образ обозначим:

$$\vec{r}^{(12)}(u) = (x_1^{(12)}(u), x_2^{(12)}(u), x_3^{(12)}(u)), \quad (2.17)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^{(12)}(u) = \frac{2 q_1^{(12)}(u) \arccos(q_0^{(12)}(u))}{\sqrt{1 - (q_0^{(12)}(u))^2}} = q_1^{(12)}(u) \cdot Q(q_0^{(12)}(u)), \\ x_2^{(12)}(u) = \frac{2 q_2^{(12)}(u) \arccos(q_0^{(12)}(u))}{\sqrt{1 - (q_0^{(12)}(u))^2}} = q_2^{(12)}(u) \cdot Q(q_0^{(12)}(u)), \\ x_3^{(12)}(u) = \frac{2 q_3^{(12)}(u) \arccos(q_0^{(12)}(u))}{\sqrt{1 - (q_0^{(12)}(u))^2}} = q_3^{(12)}(u) \cdot Q(q_0^{(12)}(u)). \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Утверждение 2.4

Образом (2.17) траектории эйлера поворота, заданного линейной интерполяцией (2.11) в \mathbb{R}^3 , является плоская кривая, причем плоскость этой кривой проходит через начало координат.

Доказательство:

Докажем, что все точки кривой (2.17) лежат в одной плоскости, проходящей через начало координат. Для этого покажем, что любые три точки этой кривой, отличные от начала координат, лежат в одной плоскости с началом координат, т. е. смешанное произведение их радиус-векторов равно нулю:

$$(\vec{r}^{(12)}(u_1), \vec{r}^{(12)}(u_2), \vec{r}^{(12)}(u_3)) = 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x_1^{(12)}(u_1) & x_2^{(12)}(u_1) & x_3^{(12)}(u_1) \\ x_1^{(12)}(u_2) & x_2^{(12)}(u_2) & x_3^{(12)}(u_2) \\ x_1^{(12)}(u_3) & x_2^{(12)}(u_3) & x_3^{(12)}(u_3) \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} q_1^{(12)}(u_1)Q(q_0^{(12)}(u_1)) & q_2^{(12)}(u_1)Q(q_0^{(12)}(u_1)) & q_3^{(12)}(u_1)Q(q_0^{(12)}(u_1)) \\ q_1^{(12)}(u_2)Q(q_0^{(12)}(u_2)) & q_2^{(12)}(u_2)Q(q_0^{(12)}(u_2)) & q_3^{(12)}(u_2)Q(q_0^{(12)}(u_2)) \\ q_1^{(12)}(u_3)Q(q_0^{(12)}(u_3)) & q_2^{(12)}(u_3)Q(q_0^{(12)}(u_3)) & q_3^{(12)}(u_3)Q(q_0^{(12)}(u_3)) \end{vmatrix} = \\ & = Q(q_0^{(12)}(u_1)) \cdot Q(q_0^{(12)}(u_2)) \cdot Q(q_0^{(12)}(u_3)) \cdot \begin{vmatrix} q_1^{(12)}(u_1) & q_2^{(12)}(u_1) & q_3^{(12)}(u_1) \\ q_1^{(12)}(u_2) & q_2^{(12)}(u_2) & q_3^{(12)}(u_2) \\ q_1^{(12)}(u_3) & q_2^{(12)}(u_3) & q_3^{(12)}(u_3) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Последний определитель равен нулю, т. к. из (2.11) очевидно, что его строки являются линейными комбинациями векторов $\vec{q}^{(1)}$ и $\vec{q}^{(2)}$, т.е. они линейно зависимы. *Утверждение доказано.*

Утверждение 2.5

Если кватернионы $\mathbf{q}^{(1)}$ и $\mathbf{q}^{(2)}$ имеют нулевые действительные части, то образом (2.17) траектории эйлера поворота, заданного линейной интерполяцией (2.11) в \mathbb{R}^3 , является дуга окружности радиусом π .

Доказательство:

Из того, что $q_0^{(1)} = q_0^{(2)} = 0$, следует, что $q_0^{(12)}(u) = 0$.

Поэтому из соотношения (2.3):

$$\vec{r}^{(12)}(u) = \pi \vec{e}(u) = \pi \vec{q}^{(12)}(u),$$

где $\vec{q}^{(12)}(u)$ - векторная часть кватерниона. Тогда с учетом формулы (2.11) получаем:

$$\vec{r}^{(12)}(u) = \frac{\sin \left[\left[\arccos \left(\frac{\vec{r}^{(1)} \cdot \vec{r}^{(2)}}{|\vec{r}^{(1)}| |\vec{r}^{(2)}|} \right) \right] (1-u) \right]}{\sin \left[\arccos \left(\frac{\vec{r}^{(1)} \cdot \vec{r}^{(2)}}{|\vec{r}^{(1)}| |\vec{r}^{(2)}|} \right) \right]} \vec{r}^{(1)} + \frac{\sin \left[\left[\arccos \left(\frac{\vec{r}^{(1)} \cdot \vec{r}^{(2)}}{|\vec{r}^{(1)}| |\vec{r}^{(2)}|} \right) \right] u \right]}{\sin \left[\arccos \left(\frac{\vec{r}^{(1)} \cdot \vec{r}^{(2)}}{|\vec{r}^{(1)}| |\vec{r}^{(2)}|} \right) \right]} \vec{r}^{(2)}, \quad u \in [0,1].$$

Здесь $\vec{r}^{(1)} = \pi \vec{q}^{(1)}$, $\vec{r}^{(2)} = \pi \vec{q}^{(2)}$ - образы кватернионов $\mathbf{q}^{(1)}$ и $\mathbf{q}^{(2)}$ соответственно. Полученное уравнение задает в \mathbb{R}^3 дугу окружности радиусом π , которая соединяет точки с радиус-векторами $\vec{r}^{(1)}$ и $\vec{r}^{(2)}$. *Утверждение доказано.*

Утверждение 2.6

Если векторные части кватернионов $\mathbf{q}^{(1)}$ и $\mathbf{q}^{(2)}$ коллинеарны, образом (2.17) траектории эйлера поворота, заданного линейной интерполяцией (2.11) в \mathbb{R}^3 , является отрезок прямой, проходящей через начало координат.

Доказательство:

В данном случае кватернионы $\mathbf{q}^{(1)}$ и $\mathbf{q}^{(2)}$ могут быть записаны:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \cos \frac{\chi_1}{2} + \sin \frac{\chi_1}{2} \cdot \vec{e},$$

$$\mathbf{q}^{(2)} = \cos \frac{\chi_2}{2} + \sin \frac{\chi_2}{2} \cdot \vec{e},$$

тогда скалярное произведение равно:

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = \cos \left(\frac{\chi_2 - \chi_1}{2} \right).$$

С учетом этого выражение (2.11) переписывается так:

$$\mathbf{q}^{(12)}(u) = \frac{\sin\left[\frac{(\chi_2 - \chi_1)(1-u)}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\chi_2 - \chi_1}{2}\right)} \mathbf{q}^{(1)} + \frac{\sin\left[\frac{(\chi_2 - \chi_1)u}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\chi_2 - \chi_1}{2}\right)} \mathbf{q}^{(2)},$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(12)}(u) &= \frac{\sin\left[\frac{(\chi_2 - \chi_1)(1-u)}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\chi_2 - \chi_1}{2}\right)} \cos \frac{\chi_1}{2} + \frac{\sin\left[\frac{(\chi_2 - \chi_1)u}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\chi_2 - \chi_1}{2}\right)} \cos \frac{\chi_2}{2} + \\ &+ \left\{ \frac{\sin\left[\frac{(\chi_2 - \chi_1)(1-u)}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\chi_2 - \chi_1}{2}\right)} \sin \frac{\chi_1}{2} + \frac{\sin\left[\frac{(\chi_2 - \chi_1)u}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\chi_2 - \chi_1}{2}\right)} \sin \frac{\chi_2}{2} \right\} \vec{e}. \end{aligned}$$

Используя формулы произведений синусов и косинусов данное выражение преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(12)}(u) &= \cos\left[\frac{\chi_1 + (\chi_2 - \chi_1)u}{2}\right] + \sin\left[\frac{\chi_1 + (\chi_2 - \chi_1)u}{2}\right] \vec{e}. \mathbf{q}_{(12)} = \cos[\chi_1 + \\ &(\chi_2 - \chi_1)u] + \sin[\chi_1 + (\chi_2 - \chi_1)u] \vec{e} \end{aligned}$$

Введем новое обозначение

$$\chi(u) = \chi_1 + (\chi_2 - \chi_1)u,$$

тогда и

$$\mathbf{q} = \cos\chi + \sin\chi \vec{e}.$$

С учетом формулы (2.3) получаем:

$$\vec{r}^{(12)}(u) = \chi(u) \vec{e}, \quad u \in [0, 1],$$

т. е. образом траектории эйлера поворота в \mathbb{R}^3 в рассматриваемом случае является отрезок прямой, проходящей через начало координат, что доказывает утверждение.

Результаты данных утверждений проиллюстрированы на рис. 2.2. Точка A является образом кватерниона $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^T$ (в углах Эйлера данная ориентация

задается координатами $\varphi = 0, \theta = \psi = \frac{\pi}{2}$), точка B является образом кватерниона

$\left[0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right]^T$ (в углах Эйлера данная ориентация определяется неодно-

значно, ей соответствуют координаты, удовлетворяющие соотношениям

$\psi - \varphi = \frac{\pi}{2}, \theta = \pi$), точка C является образом кватерниона $\left[0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T$

(в углах Эйлера данная ориентация задается координатами

$\varphi = \frac{\pi}{4}, \theta = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right), \psi = \frac{3\pi}{4}$). Траектория AB удовлетворяет условиям

утверждения 2.4, траектория BC удовлетворяет условиям утверждения 2.5, тра-

ектория CA удовлетворяет условиям утверждения 2.6.

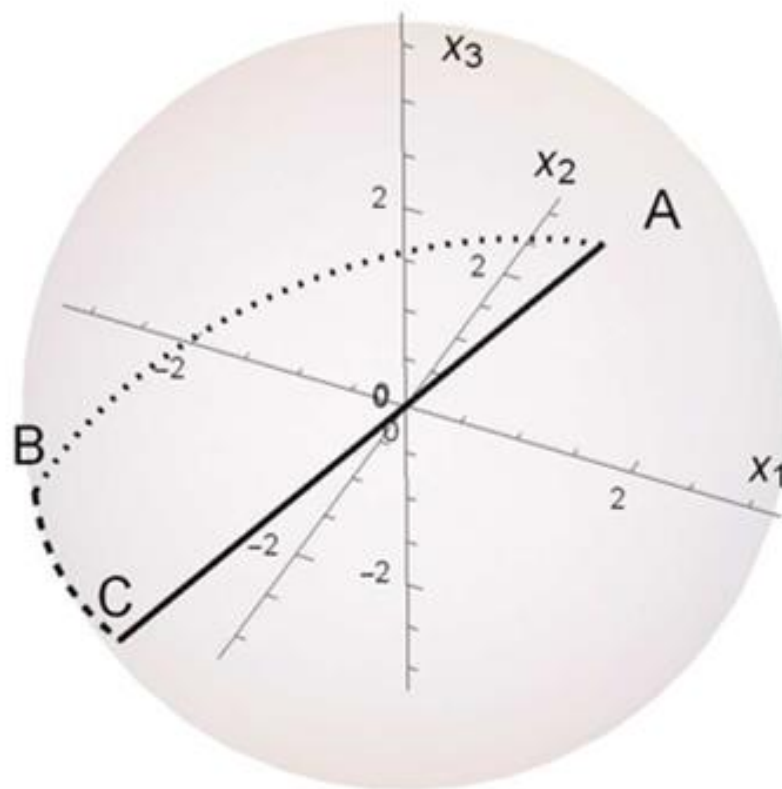


Рисунок 2.2 – Траектории плоских поворотов в шаре радиусом π

2.3. Постановка задачи управления ориентацией твердого тела

2.3.1. Постановка задачи переориентации твердого тела в конфигурационном пространстве S^3

При использовании кватернионной параметризации кинематические уравнения сферического движения, задающие связь между проекциями угловой скорости на подвижные оси и положением тела, имеют вид [24]:

$$\begin{cases} \dot{q}_0 = -\frac{1}{2}(q_1\Omega_1 + q_2\Omega_2 + q_3\Omega_3), \\ \dot{q}_1 = \frac{1}{2}(q_0\Omega_1 - q_3\Omega_2 + q_2\Omega_3), \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{2}(q_0\Omega_2 - q_1\Omega_3 + q_3\Omega_1), \\ \dot{q}_3 = \frac{1}{2}(q_0\Omega_3 - q_2\Omega_1 + q_1\Omega_2). \end{cases}, \quad (2.19)$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ - проекции вектора угловой скорости на связанные с вращающимся телом оси.

Рассмотрим кинематическую задачу о переориентации за время T твердого тела, движение которого определяется уравнениями (2.19). Пусть на ориентацию, угловую скорость и угловое ускорение тела наложены следующие граничные условия:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}^0, \quad \mathbf{q}(T) = \mathbf{q}^T, \quad \vec{\Omega}(0) = \vec{\Omega}^0, \quad \vec{\Omega}(T) = \vec{\Omega}^T, \quad \dot{\vec{\Omega}}(0) = \dot{\vec{\Omega}}^0, \quad \dot{\vec{\Omega}}(T) = \dot{\vec{\Omega}}^T. \quad (2.20)$$

Требуется найти программную траекторию динамической системы (2.19), удовлетворяющую граничным условиям (2.20), при заданном времени маневра T .

Программное динамическое (силовое) управление, реализующее программную траекторию, может быть найдено из динамических уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} M_1 = I_1\dot{\Omega}_1 + \Omega_2\Omega_3(I_3 - I_2), \\ M_2 = I_2\dot{\Omega}_2 + \Omega_3\Omega_1(I_1 - I_3), \\ M_3 = I_3\dot{\Omega}_3 + \Omega_1\Omega_2(I_2 - I_1). \end{cases}, \quad (2.21)$$

где M_1, M_2, M_3 - проекции управляющего момента \bar{M} на оси подвижной системы координат.

2.3.2. Постановка задачи переориентации твердого тела в пространстве \mathbb{R}^3

Переформулируем поставленную задачу, используя изоморфизм 3-сферы S^3 и шара радиусом 2π пространства \mathbb{R}^3 . В этом случае нужно перейти от описания движения в параметрах q_0, q_1, q_2, q_3 к описанию движения в параметрах x_1, x_2, x_3 . Из уравнений (2.9) получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2 \left(q_1 \dot{q}_0 \left(\frac{q_0 \arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^3}} - \frac{1}{1-q_0^2} \right) + \dot{q}_1 \frac{\arccos q_0}{\sqrt{1-q_0^2}} \right), \\ \dot{x}_2 = 2 \left(q_2 \dot{q}_0 \left(\frac{q_0 \arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^3}} - \frac{1}{1-q_0^2} \right) + \dot{q}_2 \frac{\arccos q_0}{\sqrt{1-q_0^2}} \right), \\ \dot{x}_3 = 2 \left(q_3 \dot{q}_0 \left(\frac{q_0 \arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^3}} - \frac{1}{1-q_0^2} \right) + \dot{q}_3 \frac{\arccos q_0}{\sqrt{1-q_0^2}} \right). \end{cases} \quad (2.22)$$

После последовательной подстановки в уравнения (2.22) формул (2.19) и (2.10) получаем кинематические уравнения для новых параметров вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3), \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3), \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3). \end{cases} \quad (2.23)$$

Из формулы (2.22) может быть найдено:

$$\left\{ \begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= 2 \left((2\dot{q}_1\dot{q}_0 + q_1\ddot{q}_0) \left(\frac{q_0 \arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^3}} - \frac{1}{1-q_0^2} \right) + \ddot{q}_1 \frac{\arccos q_0}{\sqrt{1-q_0^2}} + \right. \\
&\quad \left. + q_1\dot{q}_0^2 \left(\frac{3q_0^2 \arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^5}} + \frac{\arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^3}} - \frac{3q_0^2}{(1-q_0^2)^2} \right) \right), \\
\ddot{x}_2 &= 2 \left((2\dot{q}_2\dot{q}_0 + q_2\ddot{q}_0) \left(\frac{q_0 \arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^3}} - \frac{1}{1-q_0^2} \right) + \ddot{q}_2 \frac{\arccos q_0}{\sqrt{1-q_0^2}} + \right. \\
&\quad \left. + q_2\dot{q}_0^2 \left(\frac{3q_0^2 \arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^5}} + \frac{\arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^3}} - \frac{3q_0^2}{(1-q_0^2)^2} \right) \right), \\
\ddot{x}_3 &= 2 \left((2\dot{q}_3\dot{q}_0 + q_3\ddot{q}_0) \left(\frac{q_0 \arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^3}} - \frac{1}{1-q_0^2} \right) + \ddot{q}_3 \frac{\arccos q_0}{\sqrt{1-q_0^2}} + \right. \\
&\quad \left. + q_3\dot{q}_0^2 \left(\frac{3q_0^2 \arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^5}} + \frac{\arccos q_0}{\sqrt{(1-q_0^2)^3}} - \frac{3q_0^2}{(1-q_0^2)^2} \right) \right).
\end{aligned} \right. \quad (2.24)$$

Из формул (2.19) находим:

$$\left\{ \begin{aligned}
\ddot{q}_0 &= -\frac{1}{2}(\dot{q}_1\Omega_1 + \dot{q}_2\Omega_2 + \dot{q}_3\Omega_3 + q_1\dot{\Omega}_1 + q_2\dot{\Omega}_2 + q_3\dot{\Omega}_3), \\
\ddot{q}_1 &= \frac{1}{2}(\dot{q}_0\Omega_1 - \dot{q}_3\Omega_2 + \dot{q}_2\Omega_3 + q_0\dot{\Omega}_1 - q_3\dot{\Omega}_2 + q_2\dot{\Omega}_3), \\
\ddot{q}_2 &= \frac{1}{2}(\dot{q}_0\Omega_2 - \dot{q}_1\Omega_3 + \dot{q}_3\Omega_1 + q_0\dot{\Omega}_2 - q_1\dot{\Omega}_3 + q_3\dot{\Omega}_1), \\
\ddot{q}_3 &= \frac{1}{2}(\dot{q}_0\Omega_3 - \dot{q}_2\Omega_1 + \dot{q}_1\Omega_2 + q_0\dot{\Omega}_3 - q_2\dot{\Omega}_1 + q_1\dot{\Omega}_2).
\end{aligned} \right. \quad (2.25)$$

После последовательной подстановки формул (2.25), (2.19) и (2.10) в уравнения (2.25) получим уравнения вида:

$$\left\{ \begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= g_1(x_1, x_2, x_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dot{\Omega}_1, \dot{\Omega}_2, \dot{\Omega}_3), \\
\ddot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2, x_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dot{\Omega}_1, \dot{\Omega}_2, \dot{\Omega}_3), \\
\ddot{x}_3 &= g_3(x_1, x_2, x_3, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dot{\Omega}_1, \dot{\Omega}_2, \dot{\Omega}_3).
\end{aligned} \right. \quad (2.26)$$

Сформулируем задачу о переориентации твердого тела в параметрах x_1, x_2, x_3 , граничные условия (2.20) могут быть заменены следующими граничными условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_k(0) = \frac{2q_k^0 \arccos q_0^0}{\sqrt{1 - (q_0^0)^2}}, \\ x_k(T) = \frac{2q_k^T \arccos q_0^T}{\sqrt{1 - (q_0^T)^2}}, \\ \dot{x}_k(0) = f_k(x_1(0), x_2(0), x_3(0), \Omega_1^0, \Omega_2^0, \Omega_3^0), \\ \dot{x}_k(T) = f_k(x_1(T), x_2(T), x_3(T), \Omega_1^T, \Omega_2^T, \Omega_3^T), \\ \ddot{x}_k(0) = g_k(x_1(0), x_2(0), x_3(0), \Omega_1^0, \Omega_2^0, \Omega_3^0, \dot{\Omega}_1^0, \dot{\Omega}_2^0, \dot{\Omega}_3^0), \\ \ddot{x}_k(T) = g_k(x_1(T), x_2(T), x_3(T), \Omega_1^T, \Omega_2^T, \Omega_3^T, \dot{\Omega}_1^T, \dot{\Omega}_2^T, \dot{\Omega}_3^T), \end{array} \right. , \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.27)$$

Требуется найти оптимальную программную траекторию системы (2.23), удовлетворяющую условиям (2.27), при заданном времени маневра T .

Таким образом, задача управления движением (2.19) - (2.20), сформулированная в параметрах Родрига-Гамильтона, сводится к задаче управления движением точкой в шаре радиусом 2π . При этом движение точки описывается уравнениями (2.23) при ограничениях наложенными условиями (2.27). Это позволяет получить наглядную интерпретацию вращения твердого тела как движение точки в трехмерном евклидовом пространстве.

2.3.2. О постановке задачи оптимальной переориентации

Если программная траектория строится в классе функций, который допускает несколько решений, то может быть поставлена задача оптимального управления. В качестве критерия оптимальности может быть выбран некоторый функционал, зависящий от программного движения и программного управления:

$$I_1(\bar{\mathbf{q}}(t), \bar{\Omega}(t), \bar{M}(t)), \quad (2.28)$$

который достигает минимума на оптимальном программном движении.

Для траектории, строящейся в трехмерном пространстве, критерий качества, может быть переписан в виде:

$$I_2(\bar{r}(t), \bar{\Omega}(t), \bar{M}(t)) = I_1(q(\bar{r}(t)), \bar{\Omega}(t), \bar{M}(t)). \quad (2.29)$$

2.4. Выводы по главе 2

1. Предложен вариант отображения конфигурационного пространства поворотов, описываемого единичными кватернионами S^3 в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 . При таком отображении все возможные ориентации твердого тела могут быть описаны точками шара радиусом π , а образы всех единичных кватернионов расположатся в шаре радиусом 2π . Это позволяет визуализировать траектории поворотов твердых тел и интерпретировать их как траектории точек в трехмерном пространстве.
2. Показано, что сферическая линейная интерполяция, предложенная К. Шумейком (К. Shoemaker), представляет собой геодезическую на единичной сфере кватернионов S^3 , является траекторией плоского (эйлерова) поворота и может быть рассмотрена как решение уравнения четырехмерного осциллятора. Также показано, что образы траекторий плоских (эйлеровых) поворотов в трехмерном пространстве являются плоскими кривыми, плоскость которых проходит через начало координат. В некоторых частных случаях эти образы могут являться дугами окружности радиусом π или отрезком, проходящим через начало координат.
3. Предложены постановки задач о переориентации и оптимальной переориентации твердого тела с использованием отображения кватернионов в пространство \mathbb{R}^3 . При такой постановке задача может быть проинтерпретирована как задача управления движением точки в трехмерном пространстве, что позволяет использовать для решения задачи о повороте тела методы, используемые при решении задачи о движении материальной точки.

ГЛАВА 3. НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНФИГУРАЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА ВЕКТОРОВ ПОВОРОТА В \mathbb{R}^3

В данной главе будет рассмотрен метод решения задачи кинематического управления ориентацией твердого тела в конфигурационном пространстве в \mathbb{R}^3 , которая была поставлена в пункте 2.3.2. За его основу была взята идея построения квазиоптимальных управлений, изложенная в работах [78,79,81]. Главным преимуществом таких методов по сравнению с решениями классических задач оптимизации является простота синтеза программных законов движения. В данной работе, в отличие от упомянутых, квазиоптимальные программные управления строятся с использованием отображения кватернионов в трехмерное пространство, что обладает рядом преимуществ, среди которых возможность визуального анализа построенной траектории, меньшая размерность фазового вектора и отсутствие необходимости его нормировки. Помимо этого, предлагается два интерполяционных метода построения программных движений, решающих задачу из п. 2.3.2, траектории которых близки к равномерному плоскому повороту. Эффективность всех представленных методов демонстрируется на примерах, а также предлагаются варианты реализации построенных программных движений с использованием двигателей-маховиков для КА и с использованием линейных приводов для параллельного манипулятора.

3.1. Решение задачи управления в случае, когда поворот твердого тела задается в виде полинома пятой степени

3.1.1. Построение программной траектории в виде полинома пятой степени

Рассмотрим нахождение программной траектории, которая являлась бы решением задачи переориентации, поставленной в п. 2.3.2, в случае её задания в виде векторного полинома пятой степени:

$$\vec{r}(t) = \sum_{k=0}^5 \vec{a}_k t^k, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.1)$$

Как будет показано ниже, в данном классе функций, траектория однозначно определяется из условий (2.27), что делает постановку задачи оптимального управления излишней; будем говорить в этом случае о квазиоптимальном решении. Подобный метод, но использующий конфигурационное пространство единичных кватернионов изложен в [79], однако в отличие от него выражение (3.1) не требует нормировки.

Коэффициенты полинома (3.1) должны удовлетворять условиям (2.27), которые могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} \vec{a}_0 = \vec{r}_0, \\ \vec{a}_1 = \dot{\vec{r}}_0, \\ \vec{a}_2 = \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0, \\ \vec{a}_5 T^5 + \vec{a}_4 T^4 + \vec{a}_3 T^3 = \vec{r}_T - \vec{r}_0 - \dot{\vec{r}}_0 T - \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0 T^2, \\ 5\vec{a}_5 T^4 + 4\vec{a}_4 T^3 + 3\vec{a}_3 T^2 = \dot{\vec{r}}_T - \dot{\vec{r}}_0 - \ddot{\vec{r}}_0 T, \\ 20\vec{a}_5 T^3 + 12\vec{a}_4 T^2 + 6\vec{a}_3 T = \ddot{\vec{r}}_T - \ddot{\vec{r}}_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Последние три уравнения системы (3.2) могут быть переписаны в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} T^5 & T^4 & T^3 \\ 5T^4 & 4T^3 & 3T^2 \\ 20T^3 & 12T^2 & 6T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_5 \\ \vec{a}_4 \\ \vec{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_T - \vec{r}_0 - \dot{\vec{r}}_0 T - \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0 T^2 \\ \dot{\vec{r}}_T - \dot{\vec{r}}_0 - \ddot{\vec{r}}_0 T \\ \ddot{\vec{r}}_T - \ddot{\vec{r}}_0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Откуда:

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_5 \\ \vec{a}_4 \\ \vec{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^5 & T^4 & T^3 \\ 5T^4 & 4T^3 & 3T^2 \\ 20T^3 & 12T^2 & 6T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{r}_T - \vec{r}_0 - \dot{\vec{r}}_0 T - \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0 T^2 \\ \dot{\vec{r}}_T - \dot{\vec{r}}_0 - \ddot{\vec{r}}_0 T \\ \ddot{\vec{r}}_T - \ddot{\vec{r}}_0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6}{T^5} & -\frac{3}{T^4} & \frac{1}{2T^3} \\ -\frac{15}{T^4} & \frac{7}{T^3} & -\frac{1}{T^2} \\ \frac{10}{T^3} & -\frac{4}{T^2} & \frac{1}{2T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r}_T - \ddot{r}_0 - \dot{r}_0 T - \frac{1}{2} \ddot{r}_0 T^2 \\ \dot{r}_T - \dot{r}_0 - \ddot{r}_0 T \\ \ddot{r}_T - \ddot{r}_0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

или

$$\begin{aligned} \ddot{a}_3 &= \frac{10}{T^3} \left(\ddot{r}_T - \ddot{r}_0 - \dot{r}_0 T - \frac{1}{2} \ddot{r}_0 T^2 \right) - \frac{4}{T^2} \left(\dot{r}_T - \dot{r}_0 - \ddot{r}_0 T \right) + \frac{1}{2T} \left(\ddot{r}_T - \ddot{r}_0 \right), \\ \ddot{a}_4 &= -\frac{15}{T^4} \left(\ddot{r}_T - \ddot{r}_0 - \dot{r}_0 T - \frac{1}{2} \ddot{r}_0 T^2 \right) + \frac{7}{T^3} \left(\dot{r}_T - \dot{r}_0 - \ddot{r}_0 T \right) - \frac{1}{T^2} \left(\ddot{r}_T - \ddot{r}_0 \right), \\ \ddot{a}_5 &= \frac{6}{T^5} \left(\ddot{r}_T - \ddot{r}_0 - \dot{r}_0 T - \frac{1}{2} \ddot{r}_0 T^2 \right) - \frac{3}{T^4} \left(\dot{r}_T - \dot{r}_0 - \ddot{r}_0 T \right) + \frac{1}{2T^3} \left(\ddot{r}_T - \ddot{r}_0 \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, коэффициенты векторного полинома (3.1) однозначно определяются из (3.2).

Компьютерный эксперимент показал, что среднее время вычисления коэффициентов полинома (3.1) на 23 % меньше, чем коэффициентов полинома, предложенного в работе [23].

3.1.2. Пример 1

В качестве примера рассмотрим задачу о нахождении программной траектории разворота из положения:

$$\mathbf{q}^0 = (0.5, -0.5, -0.5, -0.5)^T$$

в положение:

$$\mathbf{q}^T = (0.5, -0.5, 0.5, -0.5)^T$$

за $T = 10$ с, которая удовлетворяет граничным условиям:

$$\ddot{\Omega}^0 = (0.5, 0, 0), \quad \ddot{\Omega}^T = (0, 0, -0.5), \quad \dot{\Omega}^0 = (0, 0, 0), \quad \dot{\Omega}^T = (0, 0, 0).$$

После вычисления коэффициентов полинома (3.1), округляя их до пятого знака после запятой, получаем:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -1.2092 + 0.3682t + 0.00872t^2 - 0.00911t^3 + 0.00046t^4, \\ x_2(t) &= -1.2092 - 0.2364t + 0.04167t^2 + 0.03116t^3 - 0.00509t^4 + 0.0002t^5, \\ x_3(t) &= -1.2092 + 0.3682t + 0.00872t^2 - 0.00911t^3 + 0.00046t^4. \end{aligned}$$

Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ представлены на рис. 3.1.

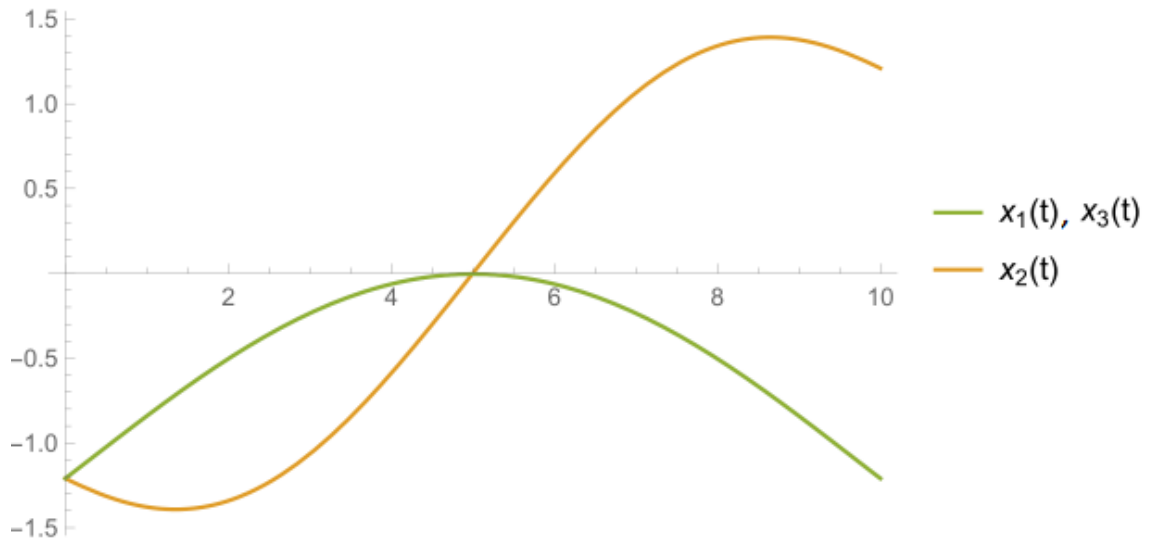


Рисунок 3.1 – Графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$

Одной из проблем квазиоптимальных траекторий, которые строились в работе [79], была сложность анализа того, является ли построенная программная траектория плоским поворотом. В случае использования трехмерного отображения кватернионов данную оценку можно произвести визуально. Траектория разворота в шаре радиусом 2π представлена на рис.3.2.

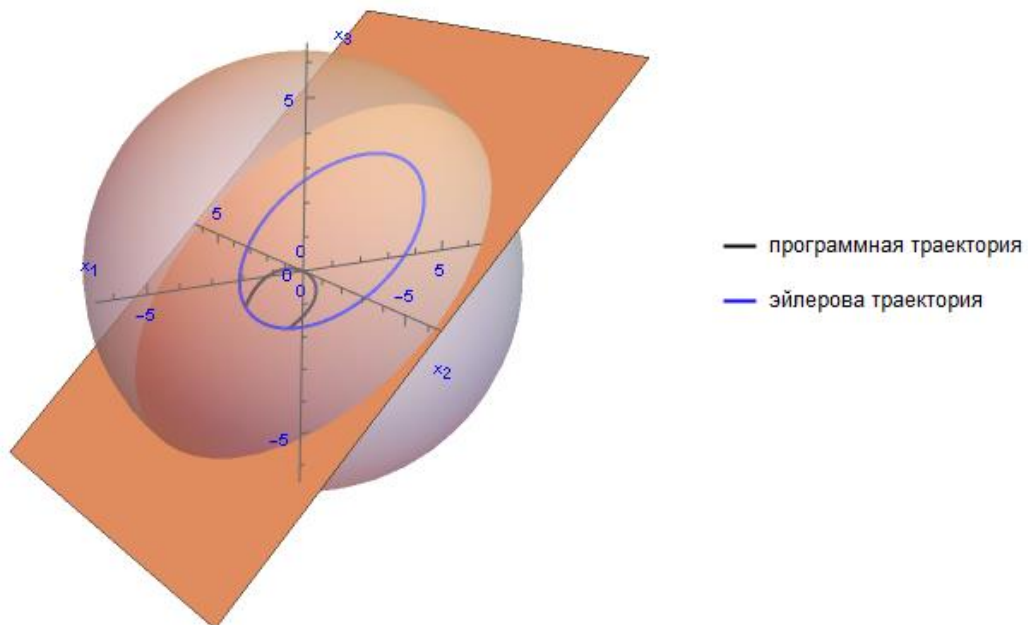


Рисунок 3.2 – Траектория программного разворота в шаре радиусом 2π

Как видно из представленного рисунка, программная траектория не совпадает с траекторией эйлера поворота, проходящей через ориентации \mathbf{q}^0 и \mathbf{q}^T . Это

указывает на то, что осуществляемый программный разворот твердого тела будет являться пространственным.

На рисунках 3.3, 3.4 и 3.5 представлены графики компонент кватерниона, угловой скорости и углового ускорения соответственно.

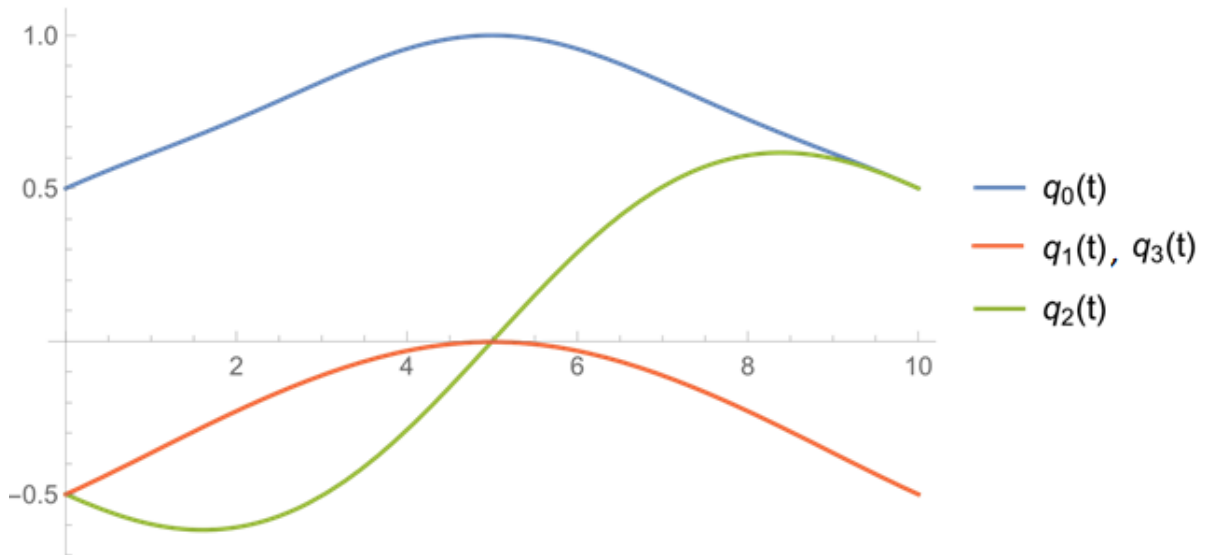


Рисунок 3.3 – Графики компонент кватерниона $q_0(t)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$

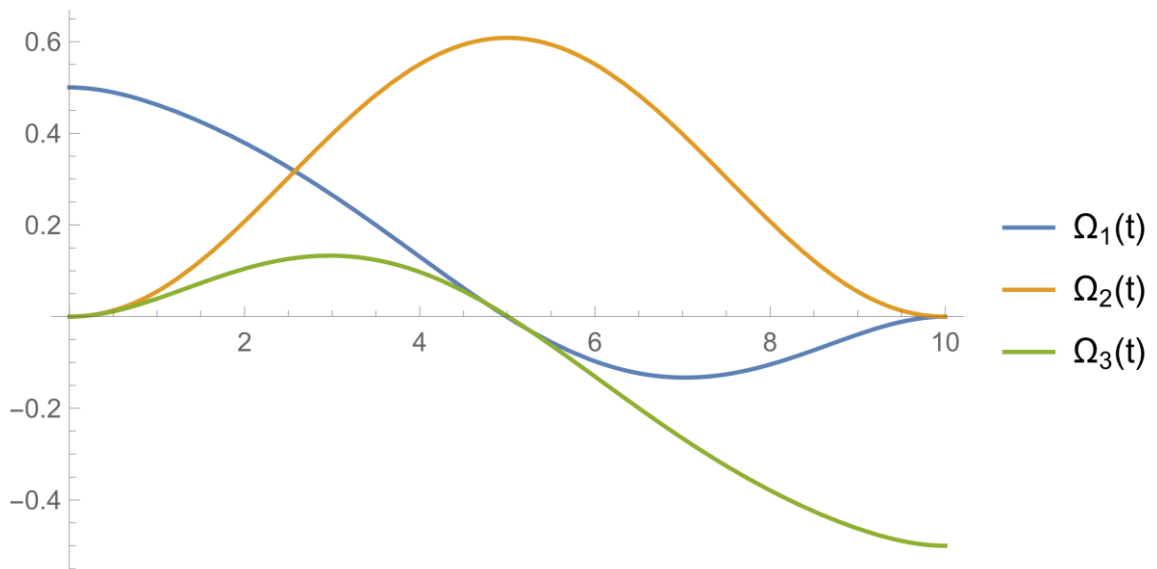


Рисунок 3.4 – Графики компонент угловой скорости $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$, $\Omega_3(t)$

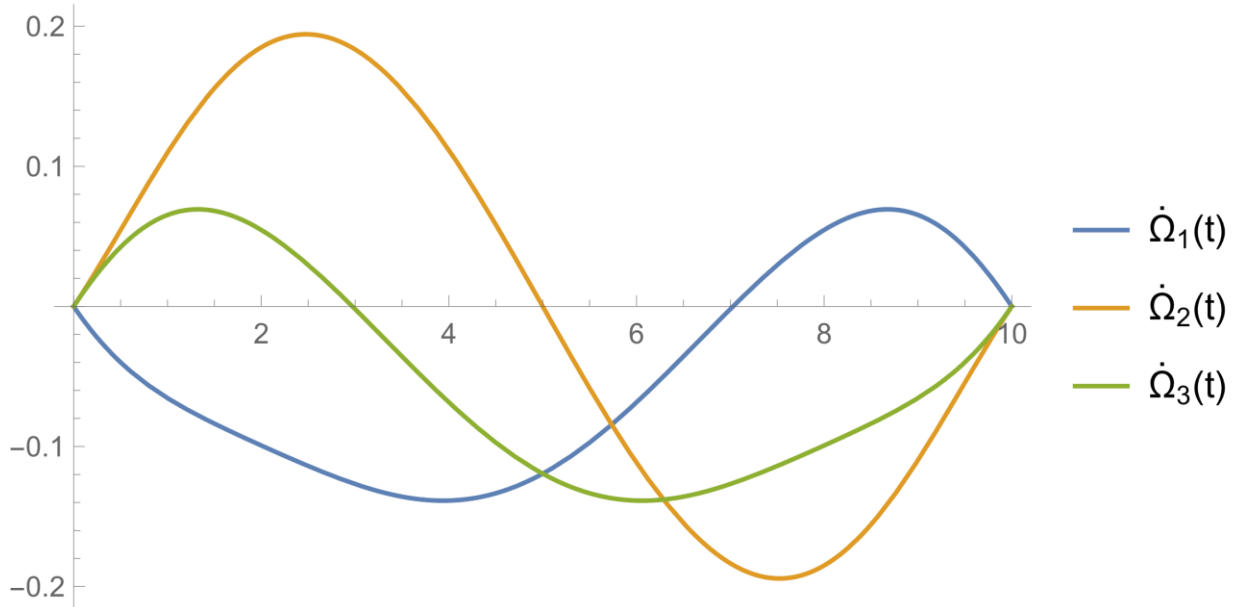


Рисунок 3.5 – Графики компонент углового ускорения $\dot{\Omega}_1(t)$, $\dot{\Omega}_2(t)$, $\dot{\Omega}_3(t)$

Методом решения обратной задачи динамики из уравнений (2.21) могут быть найдены проекции управляющего момента $M_1(t)$, $M_2(t)$, $M_3(t)$, что даст решение динамической задачи управления. На рис. 3.6 изображен пример графиков компонент управляющего момента, в предположении, что $I_1 = I_2 = 0.05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = 0.03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

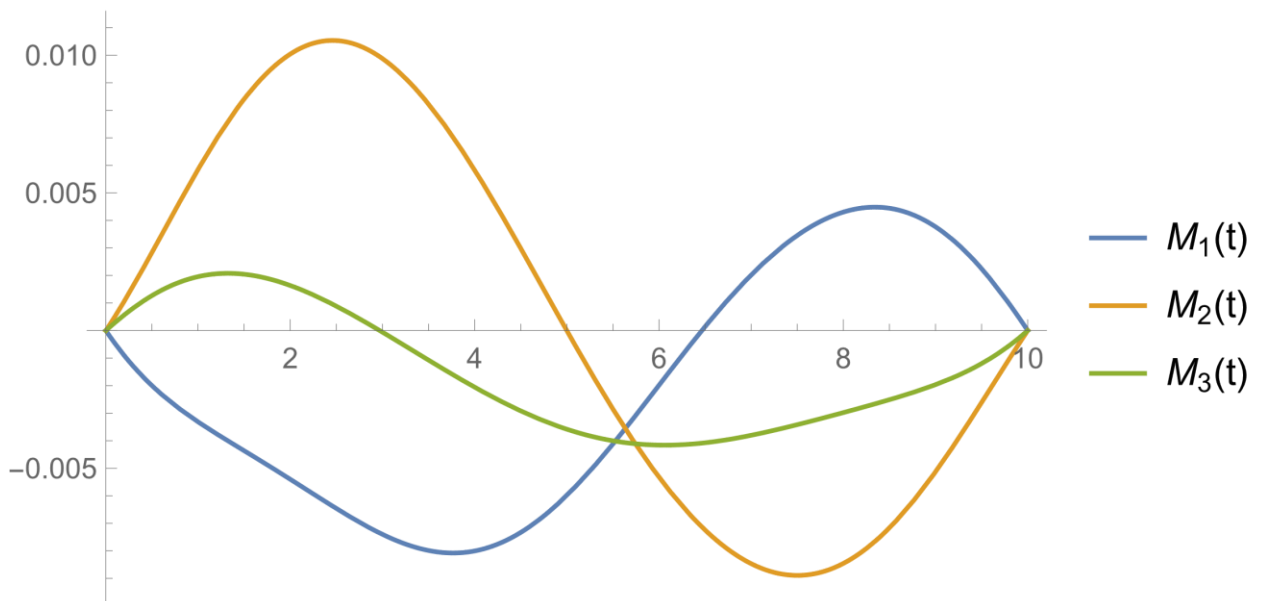


Рисунок 3.6 – Графики компонент управляющего момента $M_1(t)$, $M_2(t)$, $M_3(t)$

3.1.3. Пример 2

Покажем, что программная траектория (3.1) в некоторых случаях может описывать плоский разворот. Для этого рассмотрим задачу о нахождении программной траектории разворота из положения:

$$\mathbf{q}^0 = (0.5, -0.5, -0.5, -0.5)^T$$

в положение:

$$\mathbf{q}^T = (-0.5, -0.5, -0.5, -0.5)^T$$

за $T = 10$ с, которая удовлетворяет граничным условиям:

$$\vec{\Omega}^0 = (0, 0, 0), \vec{\Omega}^T = (0, 0, 0), \dot{\vec{\Omega}}^0 = (0, 0, 0), \dot{\vec{\Omega}}^T = (0, 0, 0).$$

После вычисления коэффициентов полинома (3.1), округляя их до пятого знака после запятой, получаем:

$$x_1(t) = -1.2092 - 0.01209t^3 + 0.00181t^4 - 0.00007t^5,$$

$$x_2(t) = -1.2092 - 0.01209t^3 + 0.00181t^4 - 0.00007t^5,$$

$$x_3(t) = -1.2092 - 0.01209t^3 + 0.00181t^4 - 0.00007t^5.$$

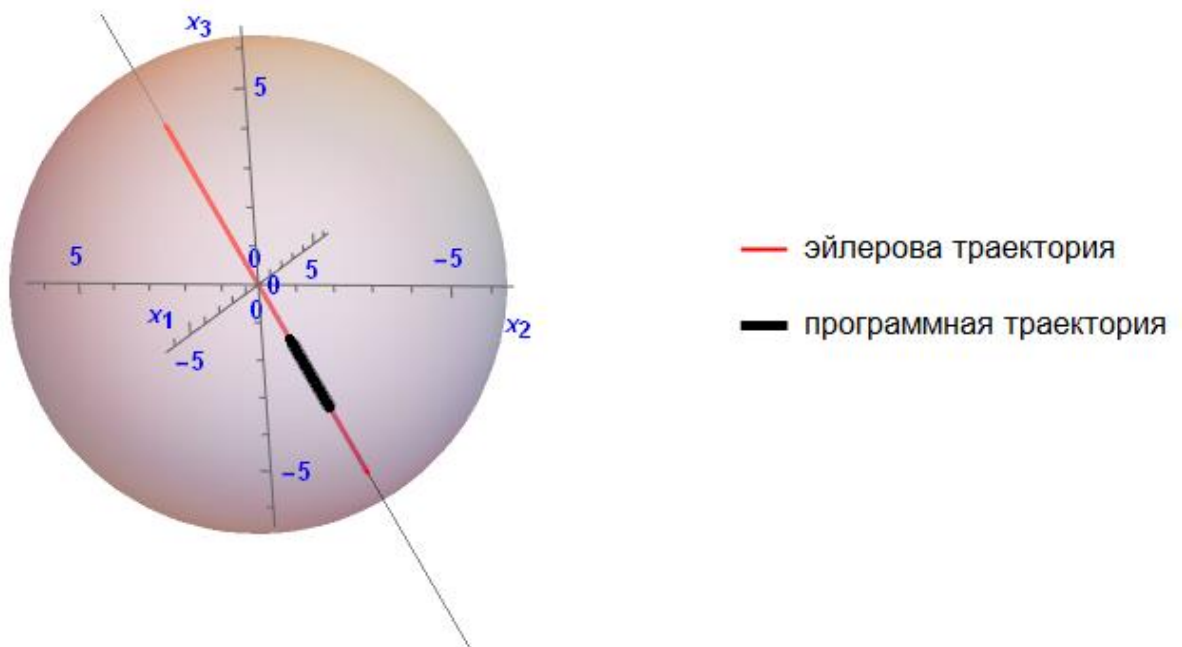


Рисунок 3.7 – Траектория разворота в шаре радиусом 2π

Как видно из рис. 3.7, программная траектория лежит на траектории эйлера разворота, проходящей через ориентации \mathbf{q}^0 и \mathbf{q}^T . Это указывает на то, что осуществляемый программный разворот является плоским.

3.2. Нахождение программной траектории, близкой к траектории эйлера поворота

Во многих случаях при рассмотрении задачи переориентации твердого тела наиболее предпочтительными программными движениями являются плоские развороты. Как было указано в разделе 2.2, траектории эйлеровых поворотов являются геодезическими на гиперсфере единичных кватернионов S^3 . С учетом этого их можно рассматривать как кратчайшие траектории, соединяющие две заданные ориентации на гиперсфере. Кроме того, в работе [87] указывается, что плоские развороты являются наиболее эффективными по быстрдействию и расходу топлива. Поэтому в некоторых задачах в качестве критерия оптимальности траектории может быть рассмотрена её близость к траектории эйлера поворота.

В данном пункте рассматривается метод построения программной траектории, при котором её близость к траектории эйлера поворота обеспечивается требованием наличия общих точек у программной траектории $\mathbf{q}(t)$ и эйлеровой траектории $\mathbf{q}_e(t)$. Эйлерова траектория, соединяющая положения \mathbf{q}^0 и \mathbf{q}^T , может быть найдена с помощью сферической линейной интерполяции (2.11):

$$\mathbf{q}_e(t) = \frac{\sin\left(\arccos(\mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{q}^T)\left(1 - \frac{t}{T}\right)\right)}{\sin(\arccos(\mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{q}^T))} \cdot \mathbf{q}^0 + \frac{\sin\left(\arccos(\mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{q}^T)\frac{t}{T}\right)}{\sin(\arccos(\mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{q}^T))} \cdot \mathbf{q}^T. \quad (3.6)$$

Будем искать траекторию эйлера поворота, имеющую n общих промежуточных точек с эйлеровой траектории $\mathbf{q}_e(t)$:

$$\mathbf{q}\left(\frac{iT}{n+1}\right) = \mathbf{q}_e\left(\frac{iT}{n+1}\right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.7)$$

и удовлетворяющую условиям (2.20) по положениям и угловым скоростям. Для простоты будем считать, что ограничений на угловые ускорения нет.

Для построения программной траектории в четырехмерном пространстве кватернионов, удовлетворяющей перечисленным условиям, мы вновь обратимся к рассмотрению её образа в трехмерном пространстве, т. к. в этом случае отсутствует необходимость нормировки.

3.2.1. Построение интерполяционного многочлена

Рассмотрим способ построения образа программной траектории $\mathbf{r}(t)$ в виде полинома степени $n + 3$; это минимальная степень полинома, которая позволяет удовлетворить всем перечисленным условиям:

$$\vec{r} = \sum_{k=0}^{n+3} \vec{a}_k t^k. \quad (3.8)$$

При этом из (3.13) и (2.9) следует, что должны выполняться следующие условия:

$$\vec{r}\left(\frac{iT}{n+1}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2q_{e1}\left(\frac{iT}{n+1}\right)\arccos q_{e0}\left(\frac{iT}{n+1}\right)}{\sqrt{1-\left(q_{e0}\left(\frac{iT}{n+1}\right)\right)^2}} \\ \frac{2q_{e2}\left(\frac{iT}{n+1}\right)\arccos q_{e0}\left(\frac{iT}{n+1}\right)}{\sqrt{1-\left(q_{e0}\left(\frac{iT}{n+1}\right)\right)^2}} \\ \frac{2q_{e3}\left(\frac{iT}{n+1}\right)\arccos q_{e0}\left(\frac{iT}{n+1}\right)}{\sqrt{1-\left(q_{e0}\left(\frac{iT}{n+1}\right)\right)^2}} \end{pmatrix}, \quad i = 0, \dots, n+1, \quad (3.9)$$

а также из (2.22):

$$\dot{r}(0) = \begin{pmatrix} 2q_1(0) \left(\frac{q_0(0) \arccos q_0(0)}{1 - (q_0(0))^{3/2}} - \frac{1}{1 - (q_0(0))^2} \right) \dot{q}_0(0) + \frac{1}{2} \frac{\arccos q_0(0)}{\sqrt{1 - (q_0(0))^2}} \dot{q}_1(0) \\ 2q_2(0) \left(\frac{q_0(0) \arccos q_0(0)}{1 - (q_0(0))^{3/2}} - \frac{1}{1 - (q_0(0))^2} \right) \dot{q}_0(0) + \frac{1}{2} \frac{\arccos q_0(0)}{\sqrt{1 - (q_0(0))^2}} \dot{q}_2(0) \\ 2q_3(0) \left(\frac{q_0(0) \arccos q_0(0)}{1 - (q_0(0))^{3/2}} - \frac{1}{1 - (q_0(0))^2} \right) \dot{q}_0(0) + \frac{1}{2} \frac{\arccos q_0(0)}{\sqrt{1 - (q_0(0))^2}} \dot{q}_3(0) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

и

$$\dot{r}(T) = \begin{pmatrix} 2q_1(T) \left(\frac{q_0(T) \arccos q_0(T)}{1 - (q_0(T))^{3/2}} - \frac{1}{1 - (q_0(T))^2} \right) \dot{q}_0(T) + \frac{1}{2} \frac{\arccos q_0(T)}{\sqrt{1 - (q_0(T))^2}} \dot{q}_1(T) \\ 2q_2(T) \left(\frac{q_0(T) \arccos q_0(T)}{1 - (q_0(T))^{3/2}} - \frac{1}{1 - (q_0(T))^2} \right) \dot{q}_0(T) + \frac{1}{2} \frac{\arccos q_0(T)}{\sqrt{1 - (q_0(T))^2}} \dot{q}_2(T) \\ 2q_3(T) \left(\frac{q_0(T) \arccos q_0(T)}{1 - (q_0(T))^{3/2}} - \frac{1}{1 - (q_0(T))^2} \right) \dot{q}_0(T) + \frac{1}{2} \frac{\arccos q_0(T)}{\sqrt{1 - (q_0(T))^2}} \dot{q}_3(T) \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

где

$$\dot{q}_0 = -\frac{1}{2}(q_{e1}(t)\Omega_1(t) + q_{e2}(t)\Omega_2(t) + q_{e3}(t)\Omega_3(t)),$$

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{2}(q_{e0}(t)\Omega_1(t) - q_{e3}(t)\Omega_2(t) + q_{e2}(t)\Omega_3(t)),$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{2}(q_{e0}(t)\Omega_2(t) - q_{e1}(t)\Omega_3(t) + q_{e3}(t)\Omega_1(t)),$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{2}(q_{e0}(t)\Omega_3(t) - q_{e2}(t)\Omega_1(t) + q_{e1}(t)\Omega_2(t)).$$

Следовательно, можно записать систему:

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \dot{\vec{r}}(0), \\ \sum_{k=1}^{n+3} \vec{a}_k k T^{k-1} = \dot{\vec{r}}(T), \\ \vec{a}_0 = \vec{r}(0), \\ \sum_{k=0}^{n+3} \vec{a}_k \left(\frac{iT}{n+1} \right)^{k-1} = \vec{r} \left(\frac{iT}{n+1} \right), \quad i = 1, \dots, n+1, \end{cases}$$

из которой однозначно определяются коэффициенты образа (3.8). За счет использования образов программных траекторий получаемая система имеет более низкую размерность, чем аналогичная система для версоров. Кроме того, опять же фазовый вектор (3.8) не требует нормировки. После решения полученной системы, используя соотношения (2.10), можно определить программную траекторию $\mathbf{q}(t)$. Закон изменения угловой скорости может быть найден из соотношений [24]:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 2(\dot{q}_1 q_0 - \dot{q}_0 q_1 - \dot{q}_3 q_2 + \dot{q}_2 q_3), \\ \Omega_2 &= 2(\dot{q}_2 q_0 - \dot{q}_0 q_2 - \dot{q}_1 q_3 + \dot{q}_3 q_1), \\ \Omega_3 &= 2(\dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_3 - \dot{q}_2 q_1 + \dot{q}_1 q_2). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Программные моменты, реализующие закон (3.8), могут быть найдены из динамических уравнений Эйлера (2.21).

3.2.2 Пример 3

В качестве примера рассмотрим закрутку малого КА, совершающего регулярную прецессию в орбитальной системе отсчета. Пусть в начальный момент положение и угловая скорость аппарата определяются условиями:

$$\mathbf{q}_0 = (0, 0, -0.131, 0.991)^T, \quad \vec{\Omega}_0 = (0, -0.831, 3.86)^T,$$

после закрутки через $T = 10$ с он переходит в положение, при котором связанные оси совпадают с орбитальной системой координат, и продолжает медленно вращаться вокруг местной вертикали:

$$\mathbf{q}_T = (1, 0, 0, 0)^T, \quad \vec{\Omega}_T = (0, 0, -0.2)^T.$$

Различные виды закруток [118,119] вокруг центров масс имеют особую актуальность для малых космических аппаратов. В связи с малыми размерами на них, как правило, отсутствует система терморегулирования, закрутка позволяет обеспечить равномерную освещенность и нагрев его поверхности [120].

Зададимся целью обеспечить близость программного разворота к плоскому повороту. Можно видеть из рис.3.8, что траектория, задаваемая полиномом (3.1), далека от поставленной цели. Поэтому для построения программной траектории воспользуемся интерполяционным многочленом (3.14).

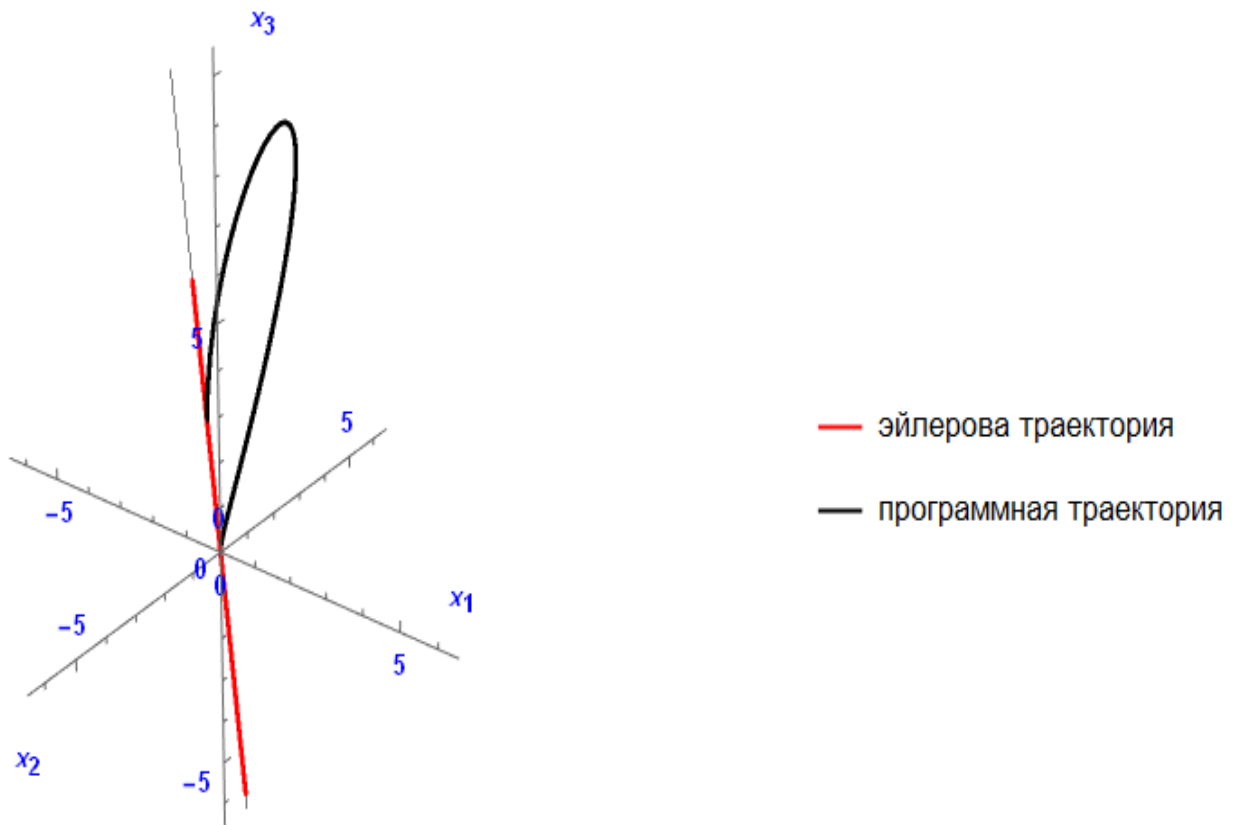
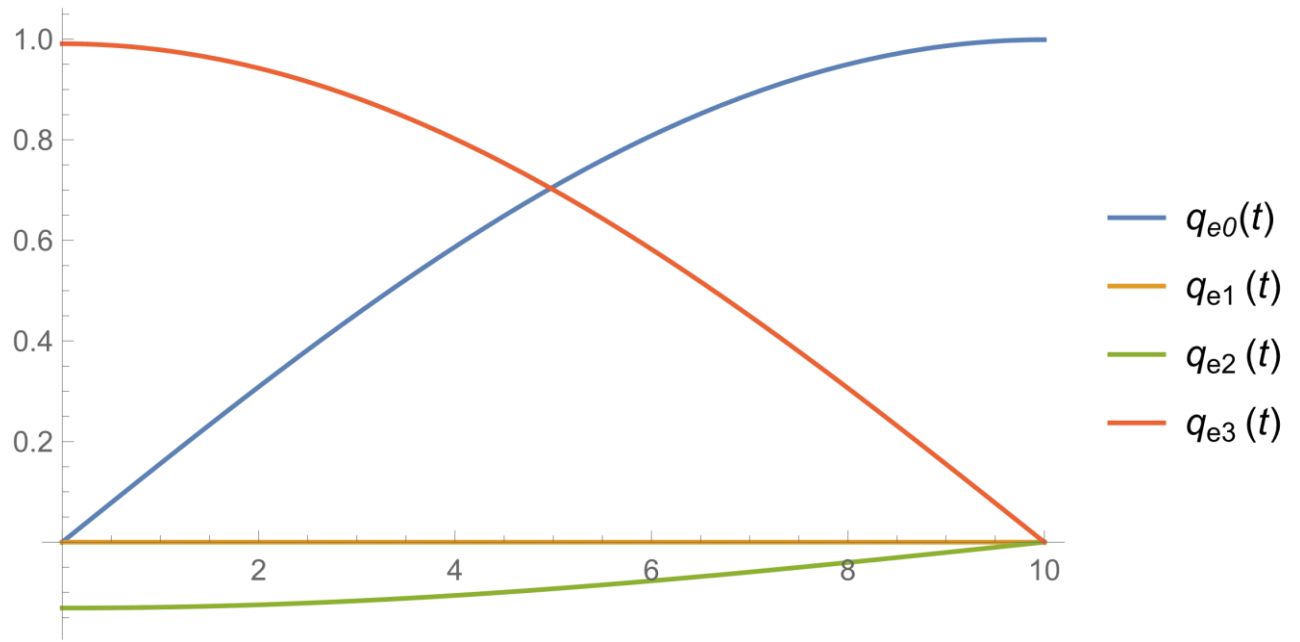
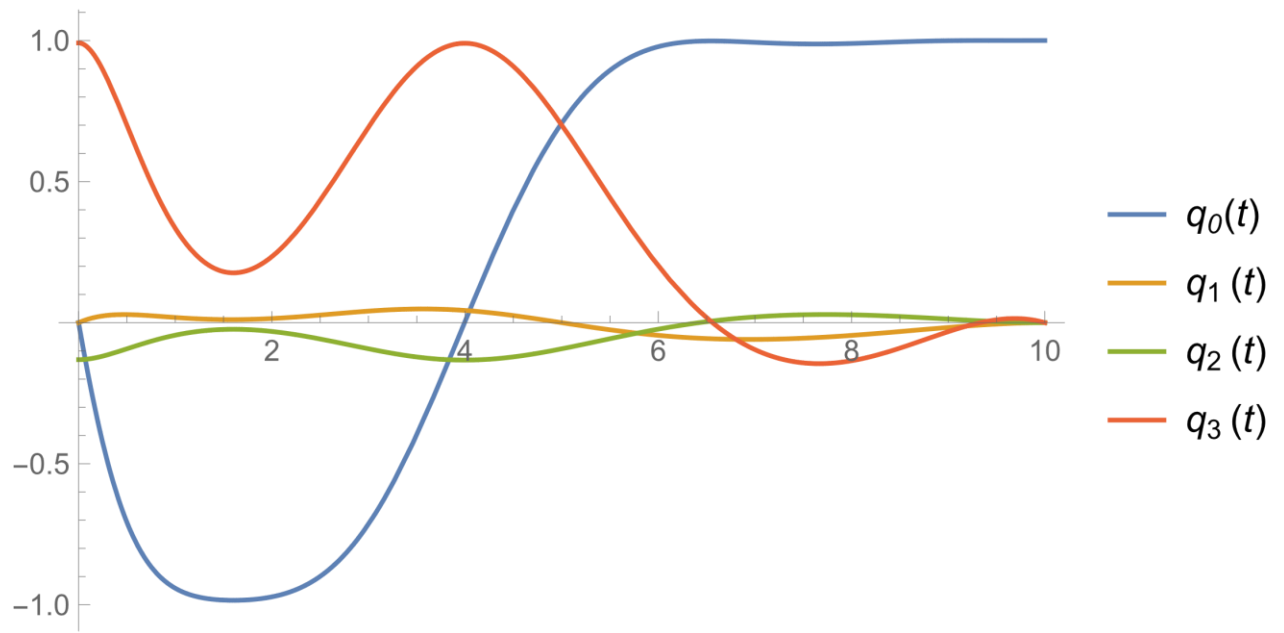


Рисунок 3.8 – Траектория программного разворота, задаваемая полиномом (3.1)

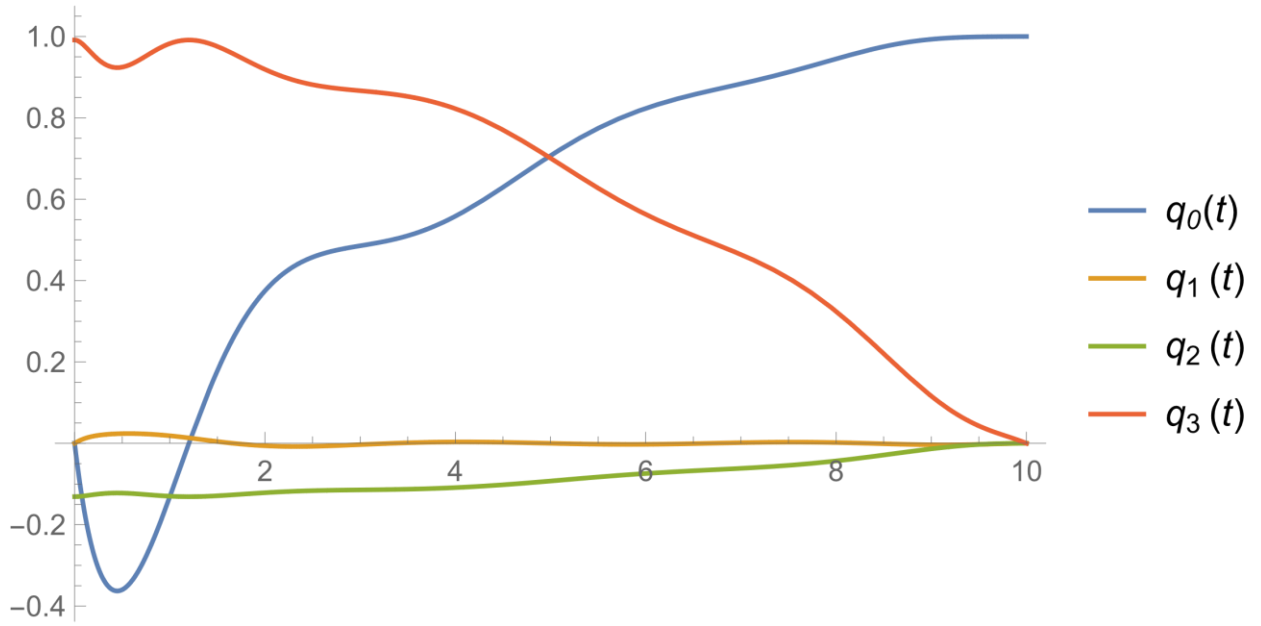
На рис.3.9 показаны графики изменения компонент кватерниона в случае движения по эйлеровой траектории $\mathbf{q}_e(t)$ и программной траектории $\mathbf{q}(t)$ (для $n = 1; 5; 20$).



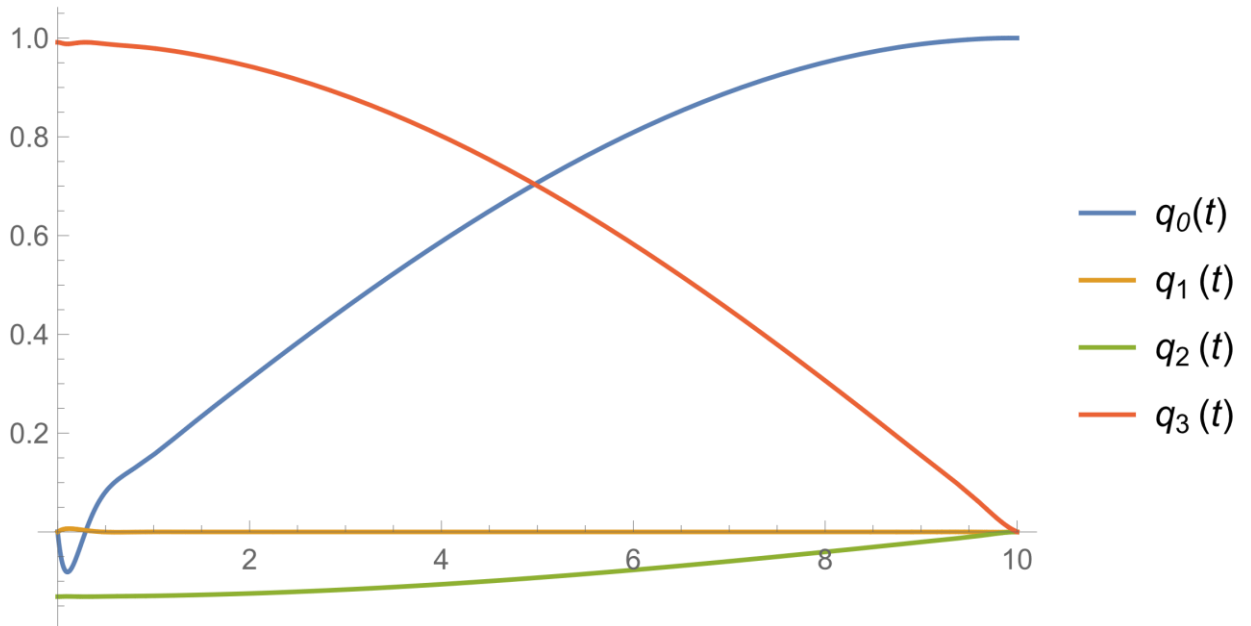
(a)



(b)



(c)



(d)

Рисунок 3.9 – (a) изменение компонент кватерниона $\mathbf{q}_e(t)$, (b) изменение компонент кватерниона $\mathbf{q}(t)$ при $n = 1$, (c) изменение компонент кватерниона $\mathbf{q}(t)$ при $n = 5$, (d) изменение компонент кватерниона $\mathbf{q}(t)$ при $n = 20$

Из этих графиков видно, что с увеличением n программная траектория приближается к эйлеровой. Однако при большом количестве узлов придется рассчитывать коэффициенты многочлена высокой степени, что приведет к накоплению вычислительной ошибки округления. Кроме того, такие

многочлены имеют склонность к осцилляции (колебаниям) между узлами. На рис. 3.10 представлена программная траектория, полученная с помощью интерполяционного многочлена на 50 узлах.

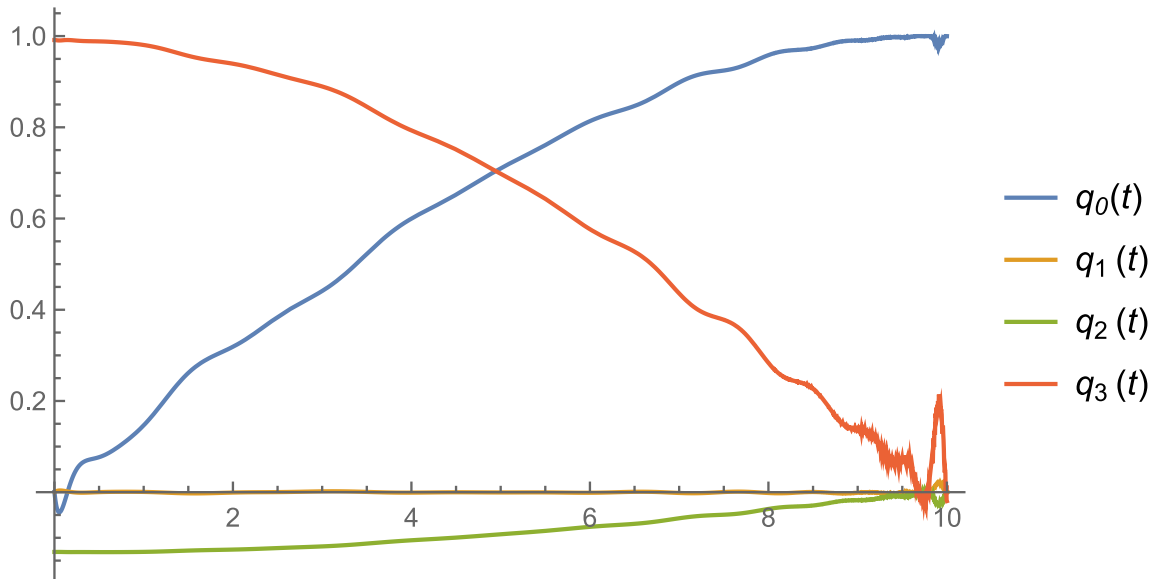


Рисунок 3.10 – Изменение компонент кватерниона $q(t)$ при $n = 50$

Как видно из данных графиков, программное движение начинает колебаться между узлами сетки, при увеличении количества узлов данные колебания будут только увеличиваться. Поэтому одной из проблем при использовании интерполяционных многочленов является определение оптимального количества узлов интерполяции.

3.2.3. Интерполяция с помощью кубических сплайнов

Решить проблему, возникающую при использовании интерполяционных многочленов высокой степени, можно, использовав интерполяцию кусочными многочленами. Одним из самых популярных методов на данном направлении является интерполяция с использованием кубических сплайнов. Рассмотрим построение образа $\vec{r}(t)$ программной траектории с помощью кубических сплайнов. Будем считать, что образ программной траектории в узлах интерполяции удовлетворяет условиям (3.9) - (3.11). На каждом интерполяционном промежутке $\left[\frac{iT}{n+1}, \frac{(i+1)T}{n+1} \right]$, ($i = 0, \dots, n$) образ программной траектории представляет собой некоторый кубический многочлен:

$$\vec{r}_i(t) = \vec{a}_{i0} + \vec{a}_{i1}t + \vec{a}_{i2}t^2 + \vec{a}_{i3}t^3, \quad (i = 0, \dots, n). \quad (3.13)$$

Для того, чтобы итоговая траектория $\vec{r}(t)$ была дважды непрерывно дифференцируема, потребуем, чтобы в узлах интерполяции полиномы $\vec{r}_i(t)$ имели бы равные первые и вторые производные. Дефект таких сплайнов равен 1:

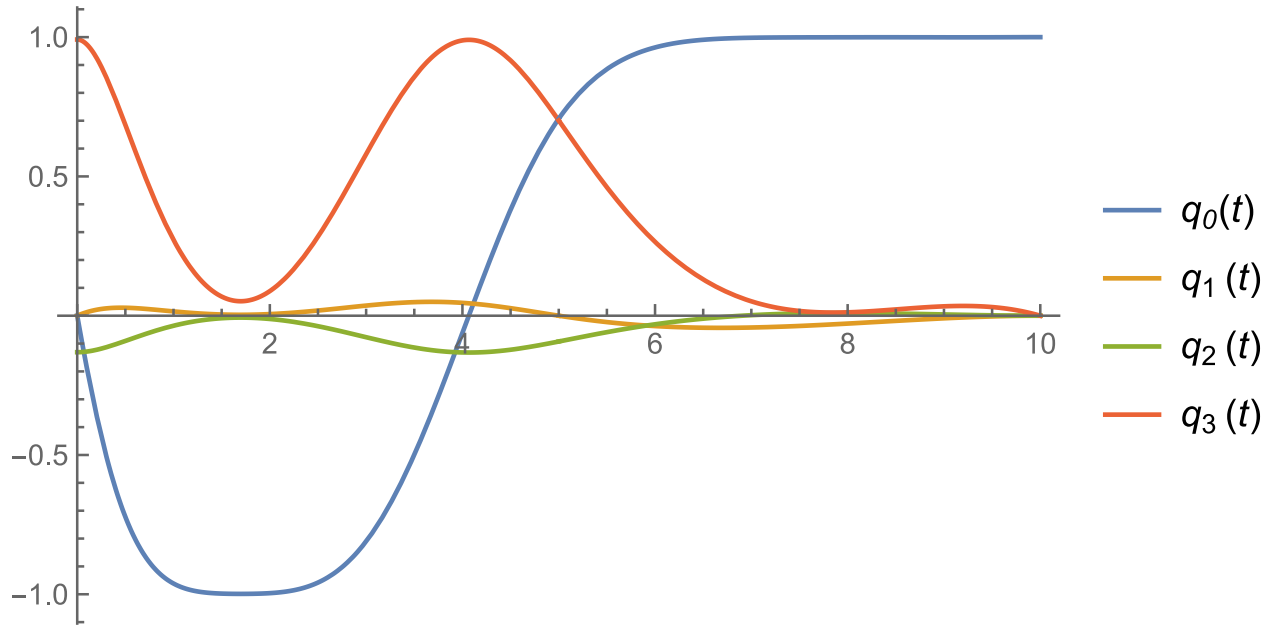
$$\dot{\vec{r}}_i\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right) = \dot{\vec{r}}_{i+1}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right), \quad \ddot{\vec{r}}_i\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right) = \ddot{\vec{r}}_{i+1}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right), \quad (i = \overline{0, n-1}).$$

Таким образом, коэффициенты полиномов (3.13) однозначно определяются из системы:

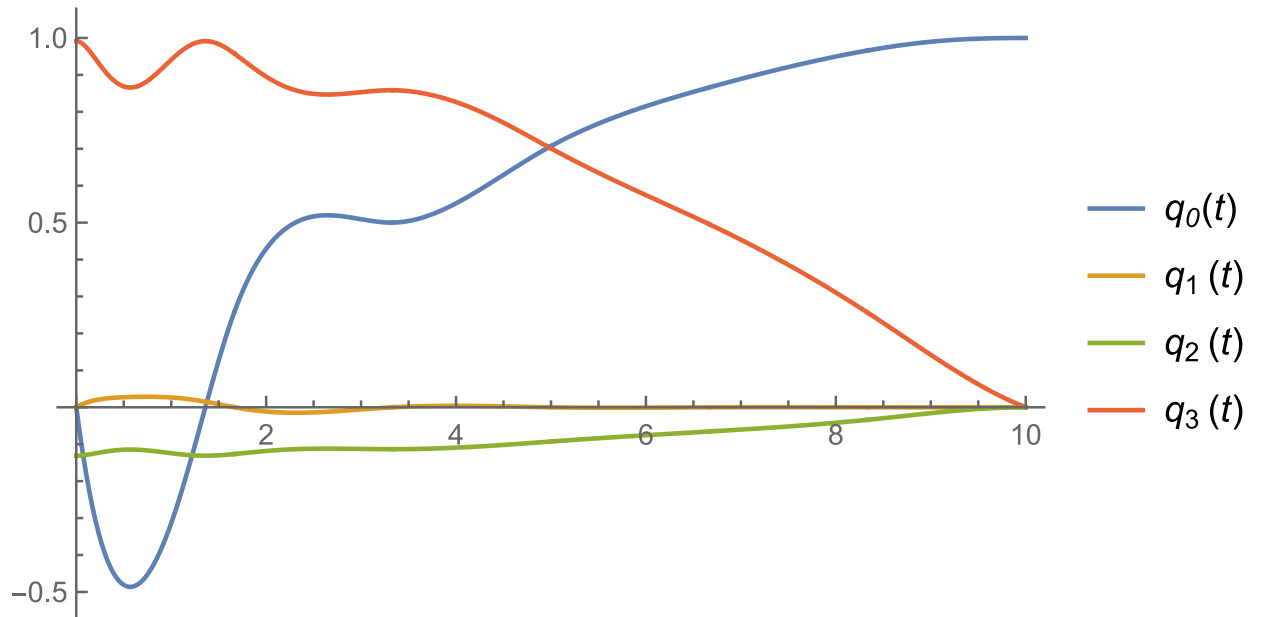
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_{00} = \vec{r}(0), \\ \vec{a}_{01} = \dot{\vec{r}}(0), \\ \vec{a}_{i0} + \vec{a}_{i1}\left(\frac{iT}{n+1}\right) + \vec{a}_{i2}\left(\frac{iT}{n+1}\right)^2 + \vec{a}_{i3}\left(\frac{iT}{n+1}\right)^3 = \vec{r}\left(\frac{iT}{n+1}\right), \quad i = 1, \dots, n, \\ \vec{a}_{i0} + \vec{a}_{i1}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right) + \vec{a}_{i2}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right)^2 + \vec{a}_{i3}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right)^3 = \vec{r}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right), \quad i = 0, \dots, n-1, \\ \vec{a}_{n0} + \vec{a}_{n1}T + \vec{a}_{n2}T^2 + \vec{a}_{n3}T^3 = \vec{r}(T), \\ \vec{a}_{n1} + 2\vec{a}_{n2}T + 3\vec{a}_{n3}T^2 = \dot{\vec{r}}(T), \\ \vec{a}_{i1} + 2\vec{a}_{i2}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right) + 3\vec{a}_{i3}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right)^2 = \\ = \vec{a}_{i+1,1} + 2\vec{a}_{i+1,2}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right) + 3\vec{a}_{i+1,3}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right)^2, \quad i = 0, \dots, n-1, \\ \vec{a}_{i2} + 3\vec{a}_{i3}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right) = \\ = \vec{a}_{i+1,2} + 3\vec{a}_{i+1,3}\left(\frac{(i+1)T}{n+1}\right), \quad i = 0, \dots, n-1. \end{array} \right.$$

3.2.4. Пример 4

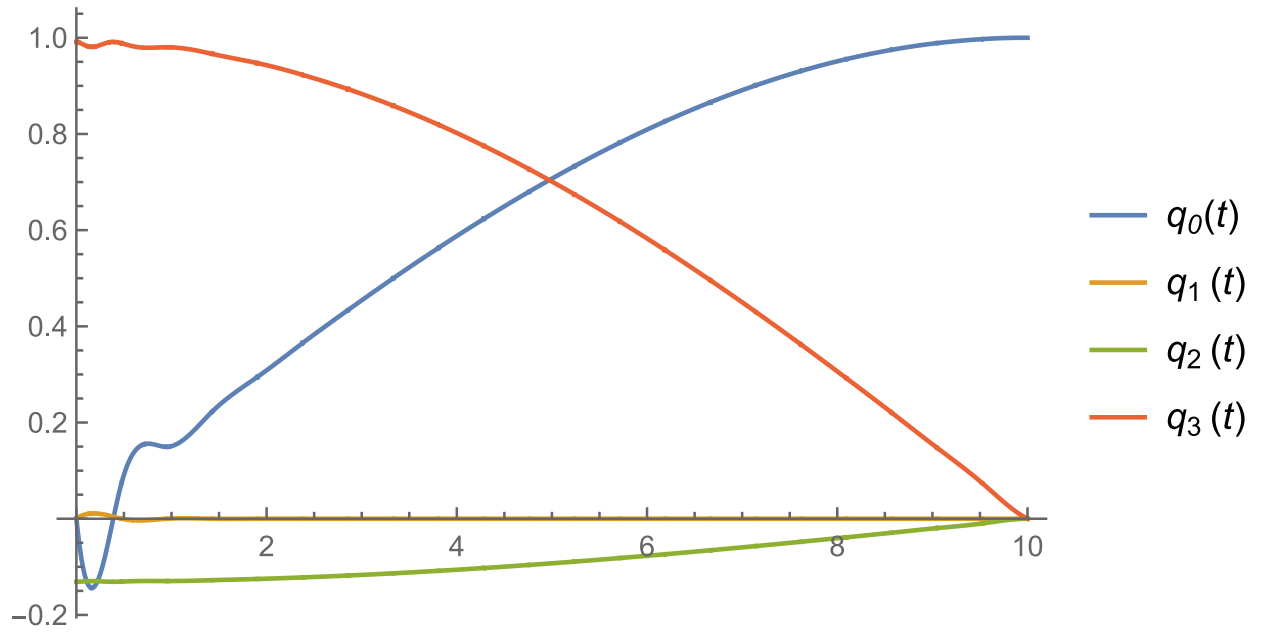
Рассмотрим решение примера из пункта 3.2.2 с использованием кубических сплайнов. На рис.3.11 показаны графики изменения компонент кватерниона программной траектории $\mathbf{q}(t)$ (для $n = 1; 5; 20$ и 50).



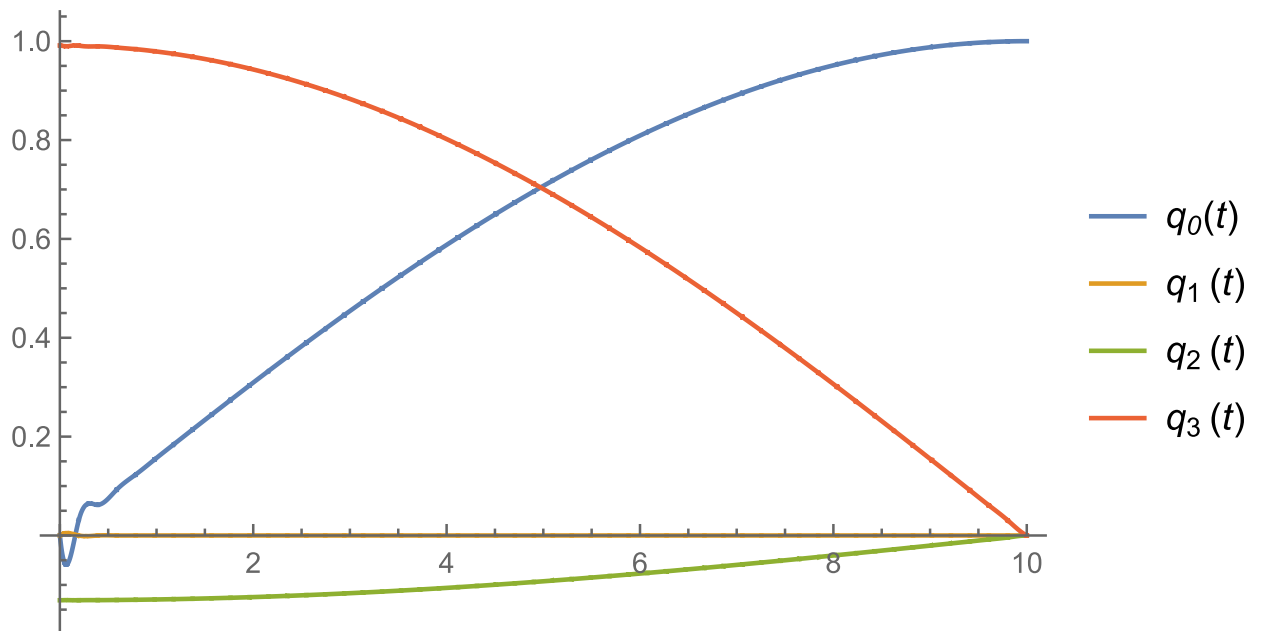
(a)



(b)



(c)



(d)

Рисунок 3.11 – (а) изменение компонент кватерниона $\mathbf{q}(t)$ при $n = 1$, (б) изменение компонент кватерниона $\mathbf{q}(t)$ при $n = 5$, (с) изменение компонент кватерниона $\mathbf{q}(t)$ при $n = 20$, (д) изменение компонент кватерниона $\mathbf{q}(t)$ при $n = 50$

Как видно из рисунка, при $n = 1; 5; 20$ существенные отличия от интерполяционного многочлена отсутствуют, однако при большом количестве узлов ($n=50$) колебаний не возникает.

3.3. Реализация программных траекторий

В данном разделе рассмотрим некоторые варианты практического исполнения программного движения, построенного с использованием описанных методов.

3.3.1. Реализация программной траектории КА с помощью двигателей-маховиков

Рассмотрим реализацию управления угловой скоростью твердого тела с помощью внутренних двигателей-маховиков, такой способ зачастую применяется на космических аппаратах [121,122,123]. Маховики представляют собой инерциальные устройства, которые при вращении создают гироскопический момент, передающийся через опоры на корпус КА. В основе управления с помощью двигателей-маховиков лежит закон сохранения момента количества движения (кинетического момента). Как правило, для полноценного управления ориентацией достаточно трех маховиков, однако зачастую предусматривается четвертый резервный. Способы позиционирования маховиков относительно корпуса КА могут быть различны, но самыми популярными являются две схемы: три размещаются вдоль осей инерции КА, четвертый по биссектрисе одного из октантов [124]; либо четыре маховика размещаются вдоль ребер некоторой четырехгранной пирамиды [125].

Введем связанную с твердым телом систему координат $Ox'y'z'$, точка O совпадает с центром масс тела, а оси совпадают с главными центральными осями инерции. Угловое положение связанной системы координат $Ox'y'z'$ определяется относительно неподвижной системы $Oxyz$. Следуя работе [125], рассмотрим систему одинаковых маховиков, оси которых расположены параллельно боковым ребрам четырехгранной пирамиды (рис. 3.12).

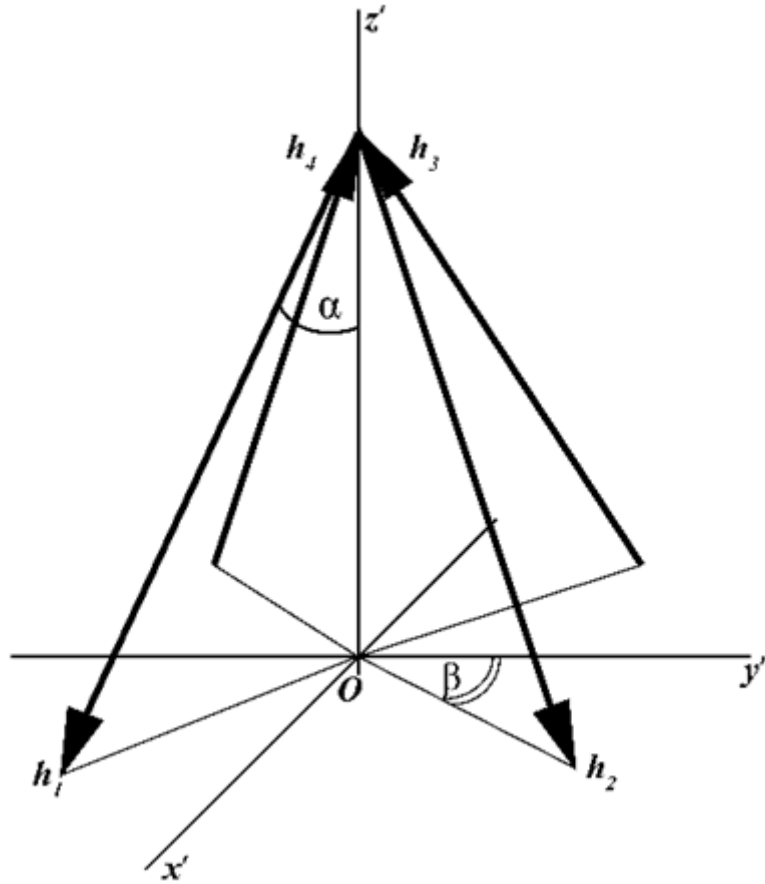


Рисунок 3.12 – Схема расположения осей двигателей-маховиков

Орты \vec{h}_i , $i = 1, \dots, 4$ осей маховиков имеют в системе координат $Ox'y'z'$ следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
 \vec{h}_1 &= (\sin \alpha \sin \beta, -\sin \alpha \cos \beta, -\cos \alpha), \\
 \vec{h}_2 &= (\sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta, -\cos \alpha), \\
 \vec{h}_3 &= (\sin \alpha \sin \beta, -\sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha), \\
 \vec{h}_4 &= (\sin \alpha \sin \beta, \sin \alpha \cos \beta, \cos \alpha).
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Примем в дальнейшем значения углов $\alpha = 67^\circ$ и $\beta = 32^\circ$, т. к. в работе [125] установлено, что именно при этих значениях достигаются наиболее широкие возможности управления.

При отсутствии внешних моментов из теоремы об изменении кинетического момента получаем:

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = 0. \tag{3.15}$$

Так как в нашем случае кинетический момент удобно проецировать на подвижные оси $Ox'y'z'$, то полная производная вектора кинетического момента может быть выражена через относительную:

$$\frac{d\vec{K}_o}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{K}_o}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{K}_o = 0, \quad (3.16)$$

где $\frac{d\vec{K}_o}{dt}$ - абсолютная производная кинетического момента, а $\frac{\tilde{d}\vec{K}_o}{dt}$ - относитель-

ная. В проекциях на подвижные оси:

$$\begin{cases} \frac{dK_1}{dt} + \Omega_2 K_3 - \Omega_3 K_2 = 0, \\ \frac{dK_2}{dt} + \Omega_3 K_1 - \Omega_1 K_3 = 0, \\ \frac{dK_3}{dt} + \Omega_1 K_2 - \Omega_2 K_1 = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

где K_1, K_2, K_3 - проекции вектора \vec{K}_o на оси $Ox'y'z'$.

С учетом (3.14):

$$\begin{cases} K_1 = I \sin \alpha \sin \beta (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) + I_1 \Omega_1, \\ K_2 = I \sin \alpha \cos \beta (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) + I \Omega_2, \\ K_3 = I \cos \alpha (-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) + C \Omega_3, \end{cases} \quad (3.18)$$

где $\omega_i, i = 1, \dots, 4$ - угловая скорость i -го маховика, I - момент инерции маховика относительно оси вращения.

Тогда, если известен программный закон изменения угловой скорости твердого тела, то из уравнений (3.17) может быть найден закон изменения кинетического момента, после чего из системы (3.18) могут быть найдены угловые скорости двигателей маховиков. При этом при решении системы (3.18) неизвестными считаются угловые скорости лишь трех маховиков, четвертый является резервным и отключен.

Также вместо уравнений (3.17) и (3.18) может быть рассмотрена система дифференциальных уравнений относительно функций $\omega_i(t), i = 1, \dots, 4$, полученная из (3.17) путем подстановки (3.18):

$$\left\{ \begin{array}{l}
 I \sin \alpha \sin \beta (\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_4) + I \Omega_2 \cos \alpha (-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) - \\
 - I \Omega_3 \sin \alpha \cos \beta (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) = I_2 \Omega_2 \Omega_3 - I_3 \Omega_3 \Omega_2 - I_1 \dot{\Omega}_1, \\
 \\
 I \sin \alpha \cos \beta (-\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_4) + I \Omega_3 \sin \alpha \sin \beta (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) - \\
 - I \Omega_1 \cos \alpha (-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) = I_3 \Omega_3 \Omega_1 - I_1 \Omega_1 \Omega_3 - I_2 \dot{\Omega}_2, \\
 \\
 I \cos \alpha (-\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2 + \dot{\omega}_3 + \dot{\omega}_4) + I \Omega_1 \sin \alpha \cos \beta (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4) - \\
 - I \Omega_2 \sin \alpha \sin \beta (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) = I_1 \Omega_1 \Omega_2 - I_2 \Omega_2 \Omega_1 - I_3 \dot{\Omega}_3,
 \end{array} \right. \quad (3.19)$$

По известному закону изменения угловой скорости твердого тела из уравнений (3.19) находятся законы изменения угловых скоростей трех из четырех двигателей-маховиков в конфигурационной схеме - «четырёхгранная пирамида», четвертый является резервным.

3.3.2. Пример 5

На рисунках 3.13 - 3.16 представлены графики угловых скоростей двигателей-маховиков для примера из раздела 3.1.2, при различных вариантах выбора резервного двигателя. Для расчетов приняты следующие значения:

$$I_1 = I_2 = 0.05 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I_3 = 0.03 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, I = 0.01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad \text{а} \quad \text{двигатели-маховики} \quad \text{в}$$

начальный момент времени не вращаются.

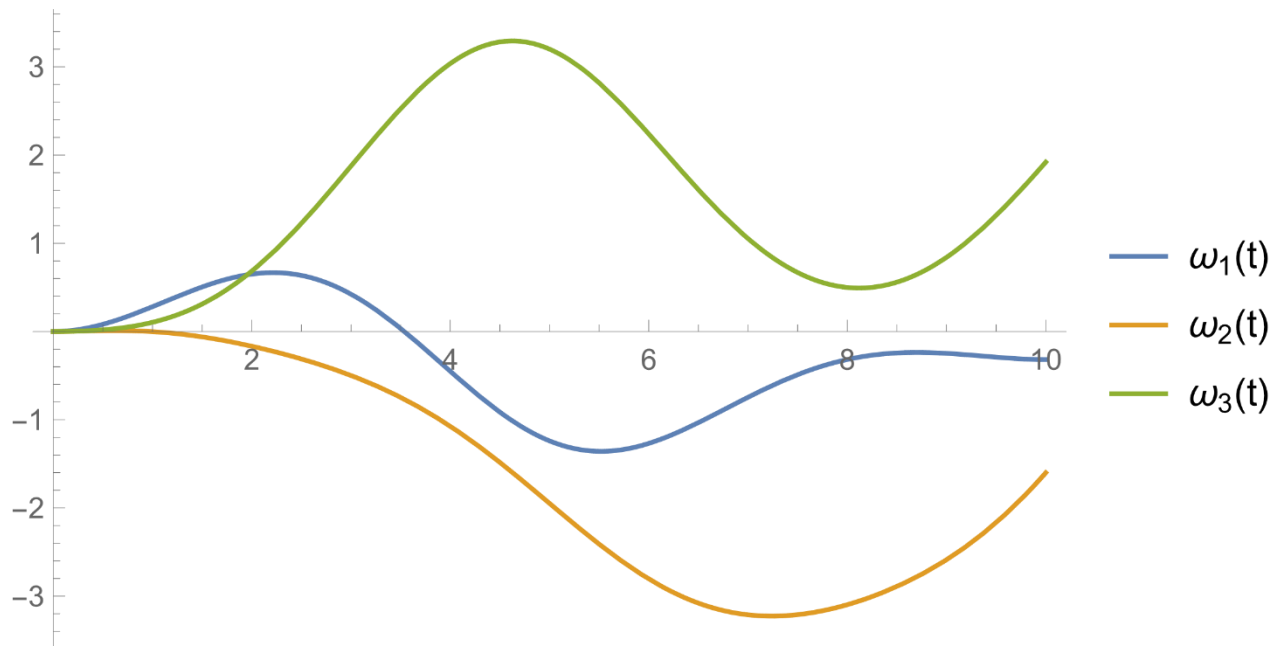


Рисунок 3.13 – Угловые скорости ДМ, 4-й маховик – резервный

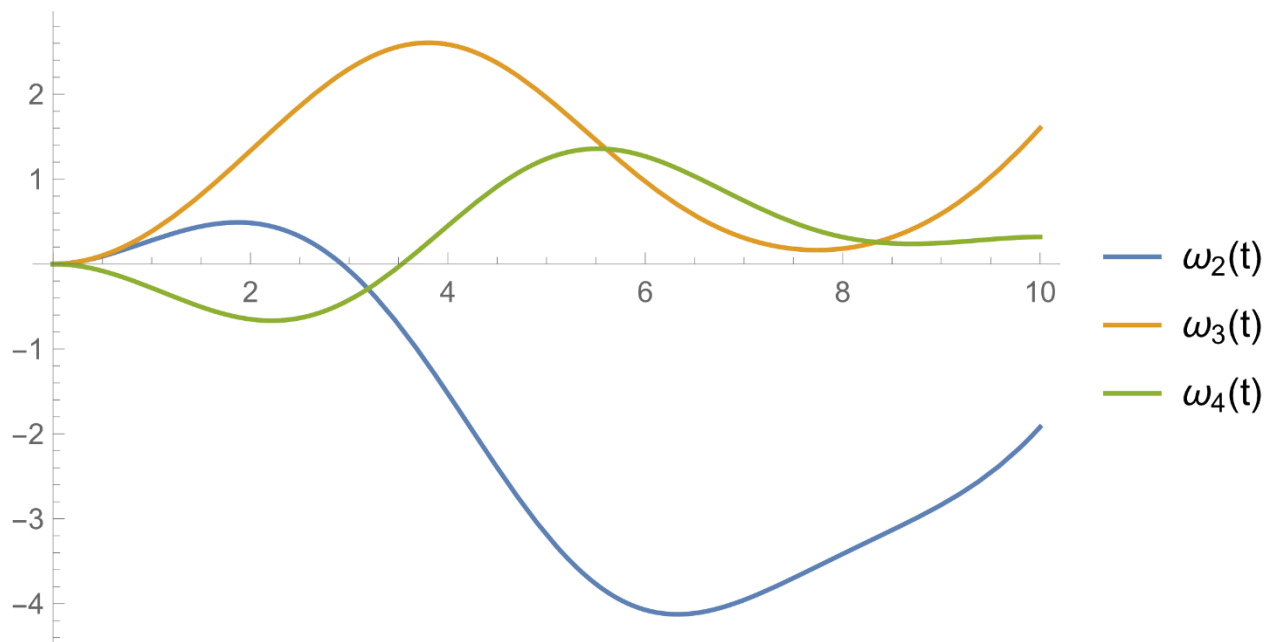


Рисунок 3.14 – Угловые скорости ДМ, 1-й маховик – резервный

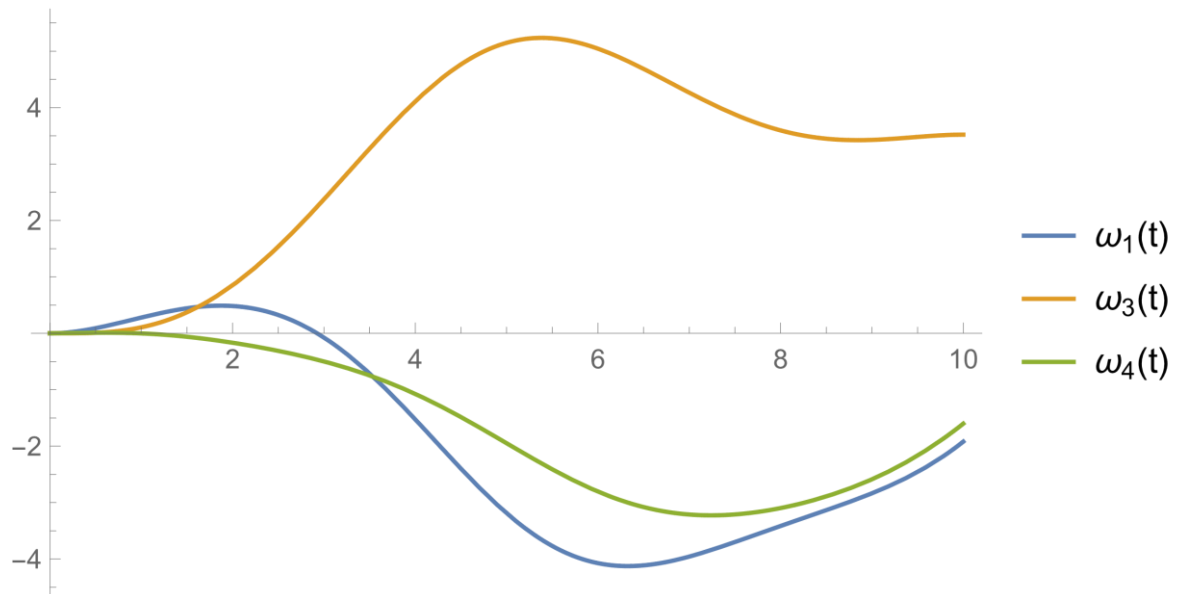


Рисунок 3.15 – Угловые скорости ДМ, 2-й маховик – резервный

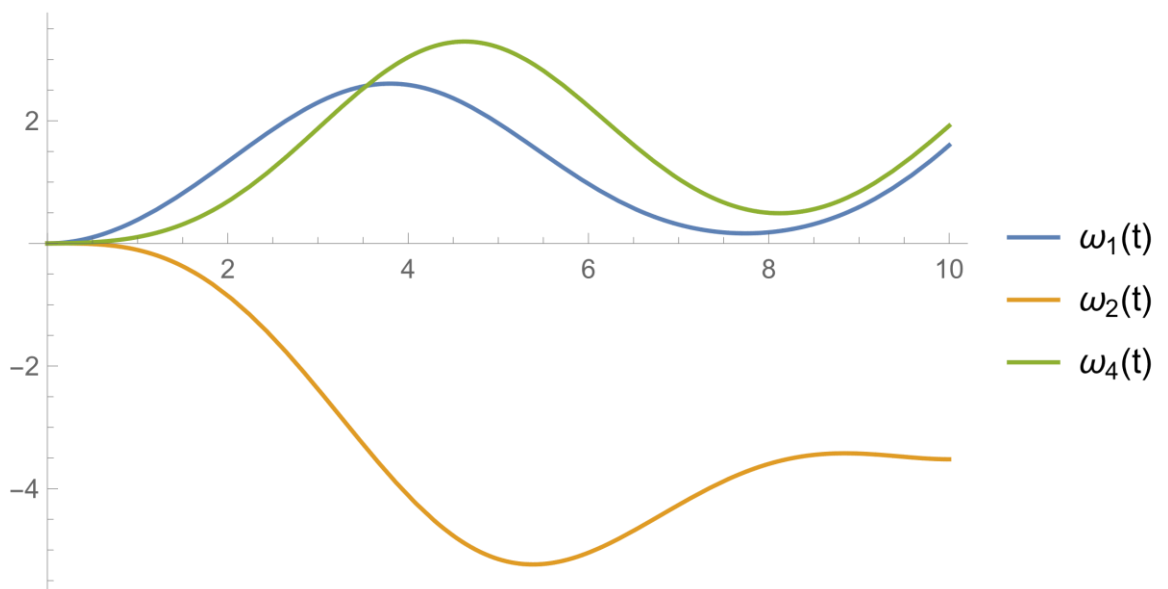


Рисунок 3.16 – Угловые скорости ДМ, 3-й маховик – резервный

3.3.3. Реализация программной траектории платформы Стюарта с помощью линейных приводов.

Платформа Стюарта является разновидностью параллельного манипулятора [90,126,127,128], представляющего собой позиционную платформу с шестью приводными устройствами (гексапод), которая находит широкое применение в робототехнике, аэрокосмической и морской технике. Схема данного

механизма была опубликована в статье Д. Стюарта (D. Stewart) в 1965 году. Платформа состоит из двух параллельных площадок, соединенных шестью линейными приводами посредством 12 универсальных шарниров (рис. 3.17), это позволяет платформе двигаться, используя все шесть степеней свободы.

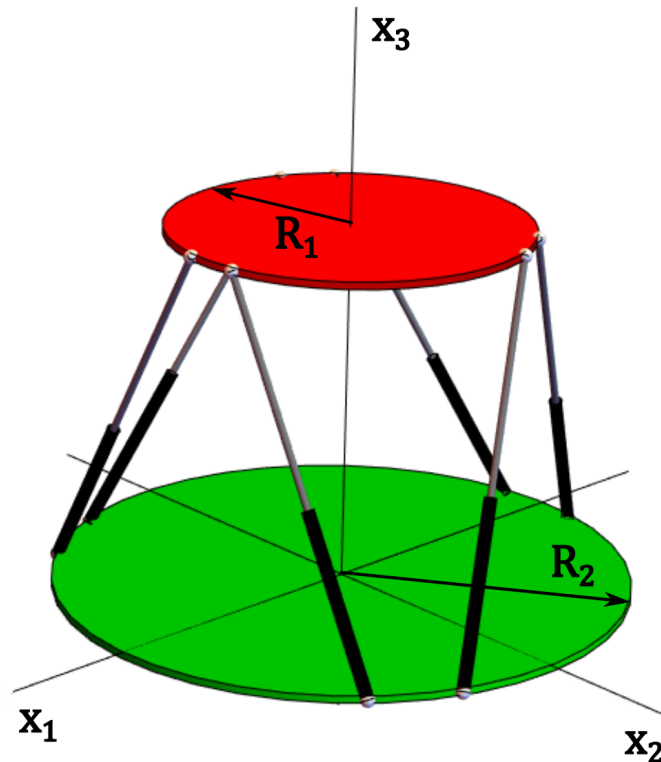


Рисунок 3.17 – Схема платформы Стюарта

Платформа Стюарта, благодаря своей способности точно и быстро перемещаться во всех направлениях, используется для моделирования полета в аэрокосмической отрасли, при проведении подводных исследований, при позиционировании спутниковых антенн и при проведении медицинских процедур и операций. Также она применяется во многих приложениях робототехники, таких, как роботы-манипуляторы, сварочные роботы и автономные транспортные средства. При эксплуатации фрезерных и токарных станков платформа Стюарта позволяет точно контролировать движение режущего инструмента. Помимо перечисленного, гексаподы широко эксплуатируются в развлекательных приложениях - таких как симуляторы езды, симуляторы виртуальной реальности (VR) и т. п.

Пусть программное движение платформы Стюарта задано в виде:

$$\vec{r}_c = \vec{r}_c(t), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(t), \quad (3.20)$$

где \vec{r}_c - радиус-вектор центра масс подвижной платформы, \mathbf{q} - кватернион ориентации подвижной платформы. Управление движением платформы осуществляется за счет изменения длин линейных приводов. Решим обратную задачу кинематики для платформы Стюарта: найдем по заданному программному закону движения платформы программные законы изменения длин приводов.

Найдем матрицу поворота для платформы. Для этого воспользуемся связью между компонентами кватерниона и компонентами матрицы поворота [24]:

$$R(t) = \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_0q_3 + q_1q_2) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

С учетом схемы расположения приводов (рис. 3.18) найдем законы движения их точек крепления. Точки крепления приводов к основанию $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$ остаются все время неподвижными:

$$\vec{r}_{O_1} = \begin{pmatrix} R_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \delta_2\right) \\ R_2 \sin\left(\frac{\pi}{3} - \delta_2\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{O_2} = \begin{pmatrix} R_2 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \delta_2\right) \\ R_2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \delta_2\right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_{O_3} = \begin{pmatrix} R_2 \cos(\pi - \delta_2) \\ R_2 \sin(\pi - \delta_2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{O_4} = \begin{pmatrix} R_2 \cos(\pi + \delta_2) \\ R_2 \sin(\pi + \delta_2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

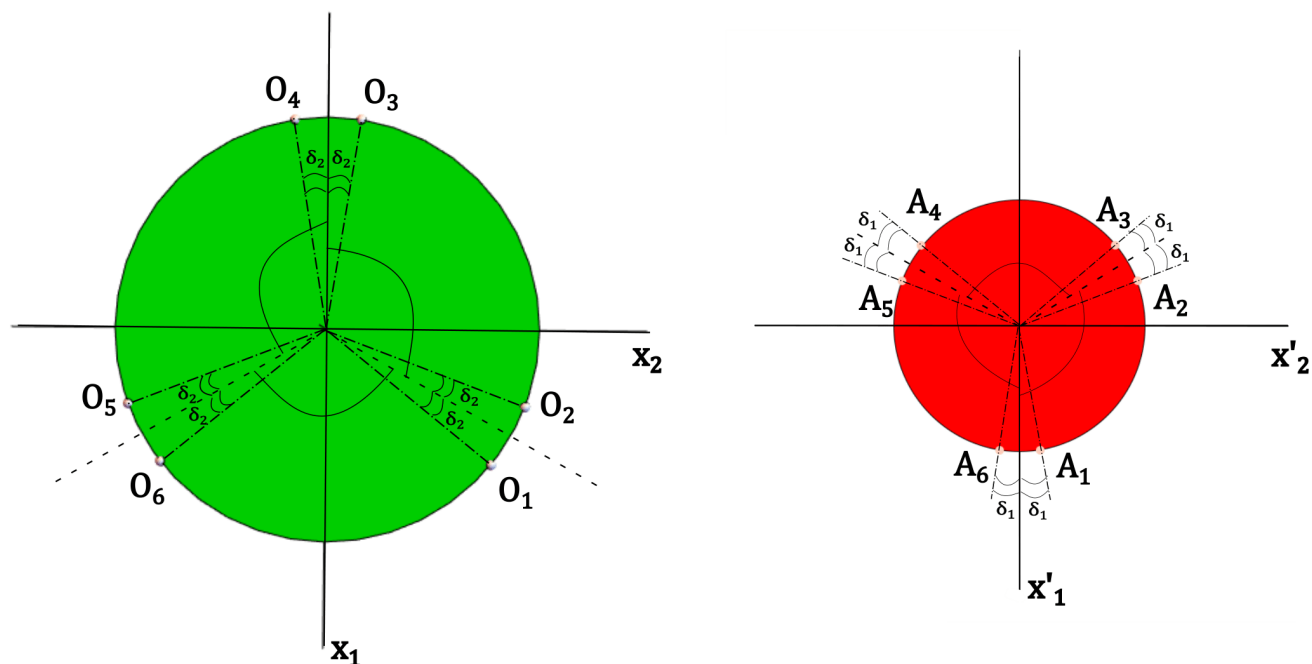


Рисунок 3.18 – Схема крепления приводов

$$\vec{r}_{O_5} = \begin{pmatrix} R_2 \cos\left(\frac{5\pi}{3} - \delta_2\right) \\ R_2 \sin\left(\frac{5\pi}{3} - \delta_2\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_{O_6} = \begin{pmatrix} R_2 \cos\left(\frac{5\pi}{3} + \delta_2\right) \\ R_2 \sin\left(\frac{5\pi}{3} + \delta_2\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Законы движения точек крепления приводов к подвижной платформе $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ определяются с учетом закона (3.20)–(3.21):

$$\vec{r}_{A_1}(t) = \vec{r}_C(t) + R(t) \cdot \begin{pmatrix} R_1 \cos \delta_1 \\ R_1 \sin \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{r}_{A_2}(t) = \vec{r}_C(t) + R(t) \cdot \begin{pmatrix} R_1 \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \delta_1\right) \\ R_1 \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \delta_1\right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_{A_3}(t) &= \vec{r}_C(t) + R(t) \cdot \begin{pmatrix} R_1 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \delta_1\right) \\ R_1 \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \delta_1\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{r}_{A_4}(t) &= \vec{r}_C(t) + R(t) \cdot \begin{pmatrix} R_1 \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \delta_1\right) \\ R_1 \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \delta_1\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{r}_{A_5}(t) &= \vec{r}_C(t) + R(t) \cdot \begin{pmatrix} R_1 \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \delta_1\right) \\ R_1 \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \delta_1\right) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{r}_{A_6}(t) &= \vec{r}_C(t) + R(t) \cdot \begin{pmatrix} R_1 \cos \delta_1 \\ -R_1 \sin \delta_1 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Программные длины приводов могут быть найдены как модули соответствующих векторов:

$$l_i(t) = |\overrightarrow{O_i A_i}| = |\vec{r}_{A_i}(t) - \vec{r}_{O_i}|, \quad i = 1, \dots, 6.$$

3.3.4. Пример 6

В качестве примера рассмотрим программное перемещение стола Стюарта с параметрами $R_1 = 5$ м, $R_2 = 8$ м, $\delta_1 = \delta_2 = \pi/20$ из положения:

$$\vec{r}_C(0) = (0, -1, 10)^T, \quad \mathbf{q}(0) = \left(\cos \frac{\pi}{16}, 0, \sin \frac{\pi}{16}, 0 \right)^T,$$

в положение:

$$\vec{r}_C(T) = (0, 1, 10)^T, \quad \mathbf{q}(T) = \left(\cos \frac{\pi}{16}, \sin \frac{\pi}{16}, 0, 0 \right)^T,$$

за время $T = 10$ с. В качестве программного движения центра масс возьмем закон равномерного прямолинейного движения:

$$\vec{r}_C(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cdot \vec{r}_C(0) + \frac{t}{T} \cdot \vec{r}_C(T).$$

В качестве программного поворота возьмем закон, найденный с помощью метода из пункта 3.1.1, в предположении нулевых граничных угловых скоростей и ускорений (рис. 3.19). Законы изменения длин стержней представлены на рис. 3.20.

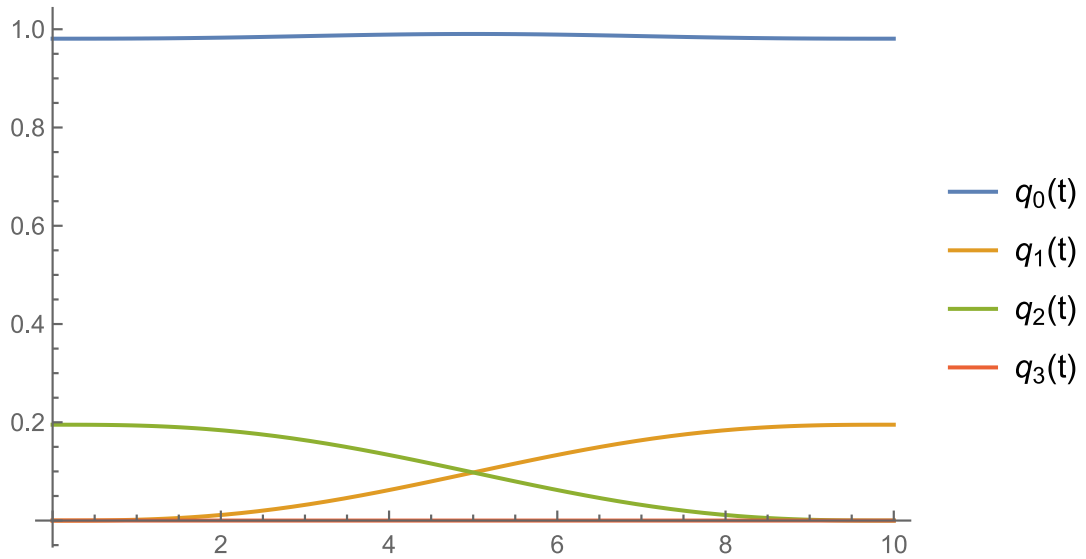


Рисунок 3.19 – Программный закон поворота

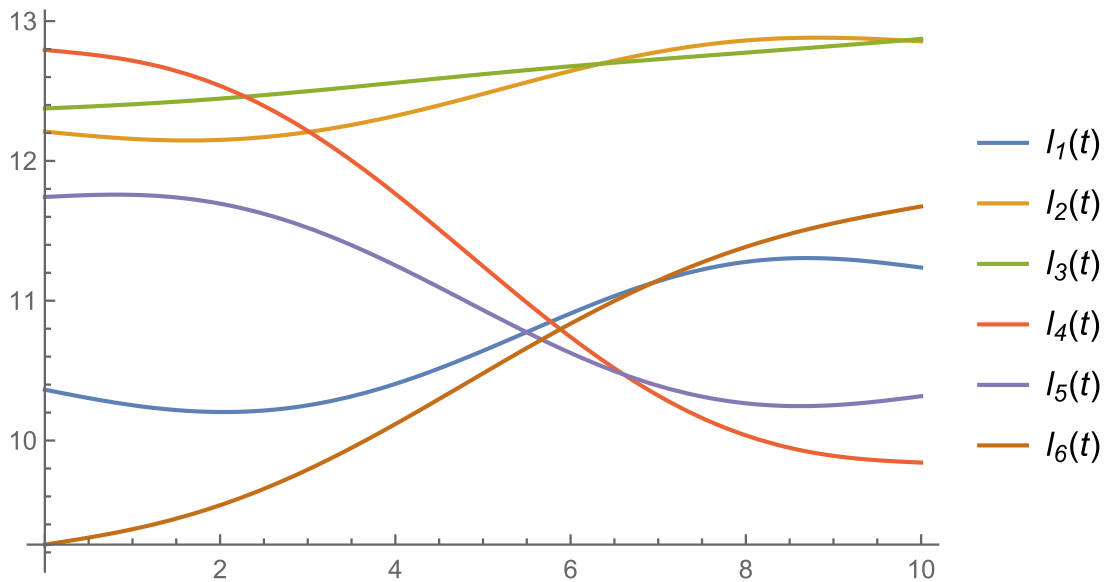
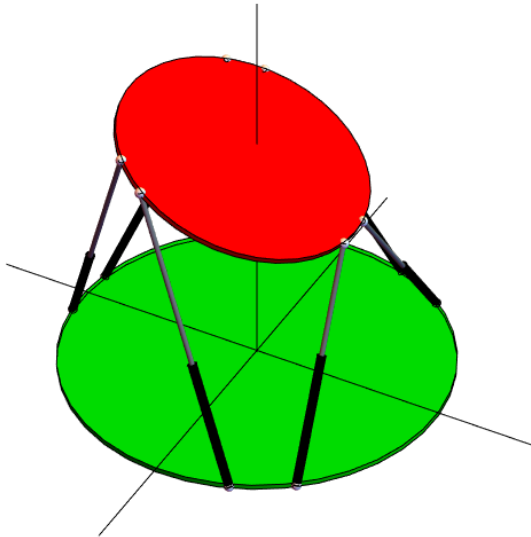
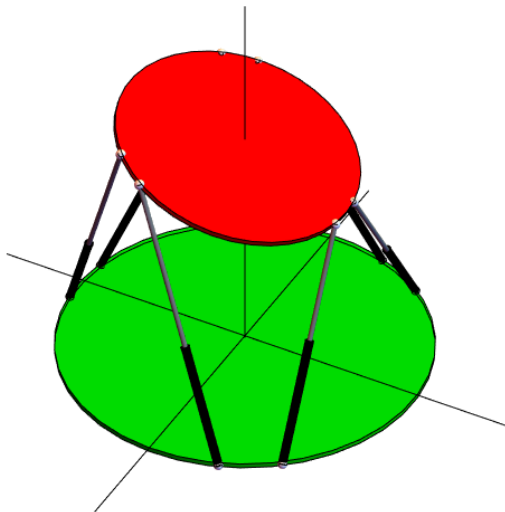


Рисунок 3.20 – Программный закон изменения длин приводов

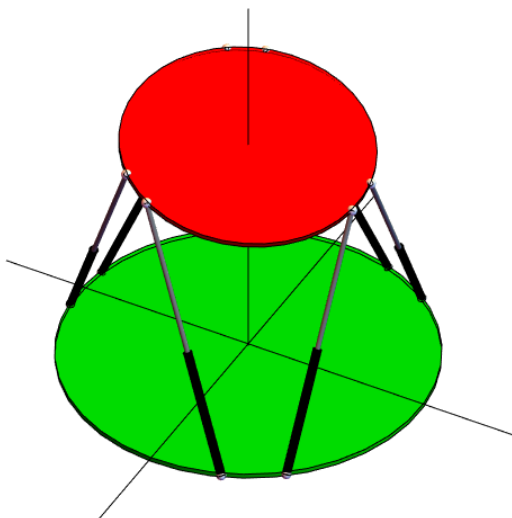
На рис. 3.21 проиллюстрировано движение платформы Стюарта.



Время: $t = 0$
 Кватернион ориентации: (0.980785; 0.; 0.19509; 0)
 Длины стержней:
 10.3637
 12.2099
 12.3753
 12.7939
 11.7422
 9.25561



Время: $t = 2.5$
 Кватернион ориентации: (0.984342; 0.0202191; 0.175105; 0)
 Длины стержней:
 10.2147
 12.1702
 12.471
 12.3943
 11.622
 9.65427



Время: $t = 5$
 Кватернион ориентации: (0.990377; 0.0978597; 0.0978597; 0)
 Длины стержней:
 10.6418
 12.4792
 12.6205
 11.247
 10.9333
 10.4803

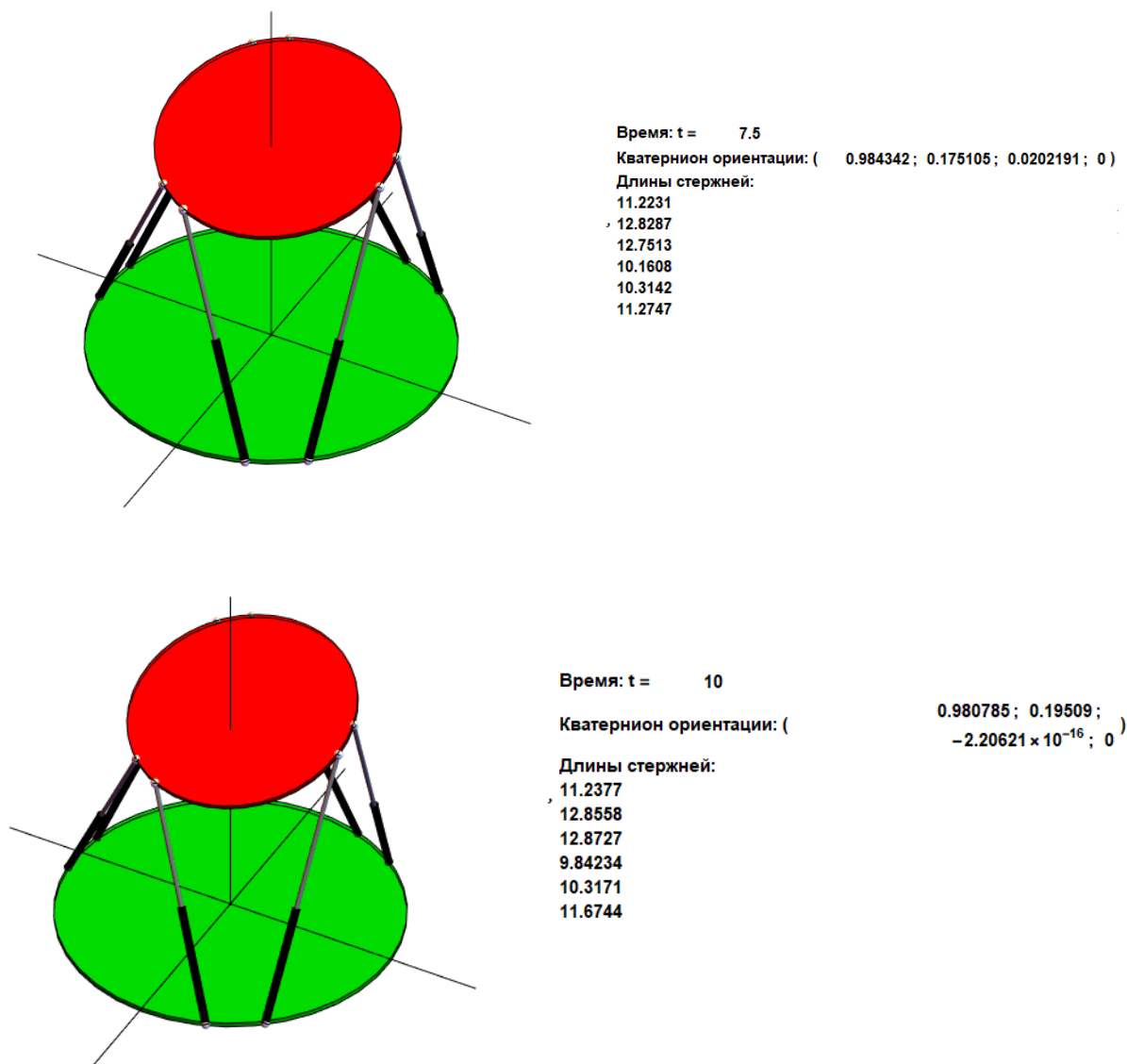


Рисунок 3.21 – Положение платформы Стюарта в моменты времени
 $t = 0; 2.5; 5; 7.5; 10$ с

3.3 Выводы по главе 3

1. Предложен метод построения квазиоптимальной программной траектории поворота твердого тела, использующий отображения кватернионов в трехмерное евклидово пространство. При этом способе образ траектории поворота в \mathbb{R}^3 ищется в виде полинома пятой степени от времени, после чего находится её прообраз на единичной сфере кватернионов S^3 . Данный способ выгодно отличается от ранее известного способа построения квазиоптимальной траектории, указанной в работе [79], тем,

- что позволяет провести визуальный анализ построенной программной траектории, в частности, сравнить ее с траекторией плоского поворота.
2. Также предложено два интерполяционных метода нахождения программной траектории поворота, близкой к траектории равномерного плоского поворота. В первом из них образ траектории программного поворота строится в виде многочлена степени $n + 3$, а близость этой траектории к эйлеровой обеспечивается наличием n общих равноотстоящих узлов. Во втором методе приближение строится в виде кубических сплайнов дефекта 1.
 3. Эффективность описанных методов продемонстрирована на примерах. В отличие от построения квазиоптимальной траектории на единичной сфере кватернионов S^3 , использование ее отображения в трехмерное пространство обладает рядом преимуществ, среди которых меньшее количество координат и отсутствие необходимости нормировки фазового вектора в каждый момент времени.
 4. Предложено два варианта реализации построенных программных траекторий: с помощью двигателей-маховиков, расположенных параллельно ребрам четырехгранной пирамиды; а также с помощью шести линейных манипуляторов.

ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ УНИВЕРСАЛЬНОГО ШАРНИРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КВАТЕРНИОННОГО ФОРМАЛИЗМА

Карданная передача является шарнирным механизмом, позволяющим сообщать крутящий момент от одного вала к другому, при этом оси валов не обязательно должны располагаться вдоль одной прямой. В автомобилестроении, сельскохозяйственном и транспортном машиностроении, а также в металлургическом производстве такие передачи широко применяются в качестве трансмиссий. Важность данного механизма подтверждается большим количеством работ, посвященных его изучению, например, [63,107].

Одним из ключевых элементов карданной передачи является универсальный шарнир, который также часто называют шарниром Гука или шарниром неравных угловых скоростей. Он используется для соединения двух валов - ведомого и ведущего. Простые конструкции карданных передач предусматривают наличие минимум двух универсальных шарниров, соединенных промежуточным валом, что необходимо для выравнивания угловых скоростей на входном и выходном валу. Типовая схема передачи представлена на рис. 4.1.

Можно констатировать, что и по сей день многие аспекты, касающиеся работы универсального шарнира, остаются неисследованными. Так по-прежнему основным результатом кинематического анализа является формула, связывающая угловые скорости ведущего и ведомого валов. Кроме того, среди особенностей работ, связанных с исследованием динамики карданных передач, можно выделить пренебрежение инерционными характеристиками крестовины для упрощения расчетов. Для полноценного анализа динамических нагрузок этого явно недостаточно. При этом в работе [96] отмечается, что ресурс работы

универсального шарнира до 75% обуславливает эксплуатационные характеристики и ресурс передачи в целом.

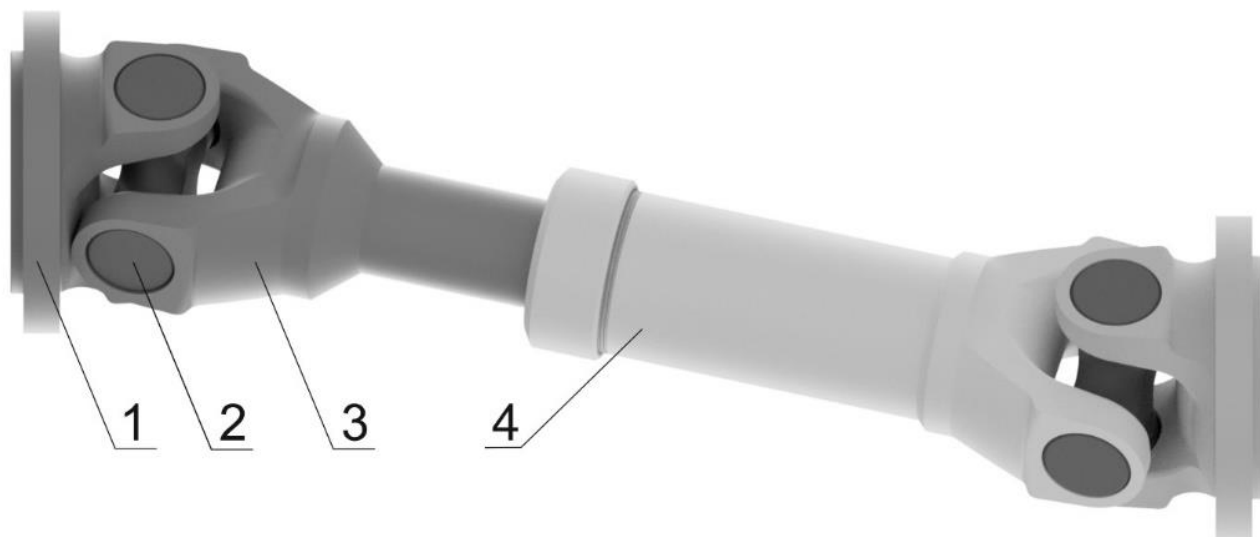


Рисунок 4.1 – Схема карданной передачи: 1 – фланец; 2 – крестовина шарнира; 3 – вилка; 4 – скользящая вилка

Одним из путей к получению качественно новых результатов анализа движения универсального шарнира могло бы стать использование кватернионного формализма. Однако до недавнего времени работы, использующие алгебру кватернионов при описании движения универсального шарнира, отсутствовали полностью, и лишь в 2020-2021 гг. появились работы [24,108,109], посвященные данной теме. В данной главе развиваются идеи указанных работ и предлагается новый метод построения траекторий сферического движения универсального шарнира, использующий отображение кватернионов в трехмерное пространство. Эти траектории позволяют проиллюстрировать движение шарнира и провести его визуальный анализ.

Помимо прочего, в данной главе продемонстрировано, что использование кватернионов позволяет провести лаконичный анализ динамических нагрузок, действующих на универсальный шарнир, с учетом инерции крестовины и показана возможность снижения этих нагрузок за счет изменения инерционных параметров.

4.1 Описание кинематики универсального шарнира с использованием кватернионного формализма

В данном разделе рассматривается кинематика крестовины универсального шарнира, дается кватернионное описание ее движения и описывается метод построения траекторий в трехмерном пространстве.

4.1.1. Закон движения крестовины универсального шарнира в самолетных углах

Рассмотрим движение универсального шарнира (рис. 4.2), состоящего из ведущего вала I , ведомого вала III и соединяющей их крестовины II . При этом оба вала располагаются в одной плоскости, но составляют друг с другом угол α . Пусть известен закон вращения ведущего вала $\varphi_1(t)$, требуется определить закон движения крестовины универсального шарнира, а также закон изменения ее угловой скорости.

При движении крестовины ее центр - точка O будет оставаться неподвижной, таким образом, крестовина будет совершать сферическое движение. Традиционно при решении инженерных задач для задания ориентации твердого тела используют углы конечного вращения - углы Эйлера или самолетные углы. Положение крестовины шарнира неравных угловых скоростей в ее сферическом движении будем описывать, используя самолетные углы: ψ - курс, ϑ - тангаж, γ - крен (рис. 4.2). Неподвижная система отсчета выбирается так, чтобы ее ось Ox_3 была направлена вдоль оси ведущего вала, а оси подвижной системы отсчета Ox'_1 и Ox'_3 направляются вдоль осей крестовины, в этом случае ϑ - угол между Ox_1 и Ox'_1 (совпадает с $\varphi_1(t)$), γ - угол Ox_3 и Ox'_3 , ψ - угол рысканья в данной задаче все время равен нулю.

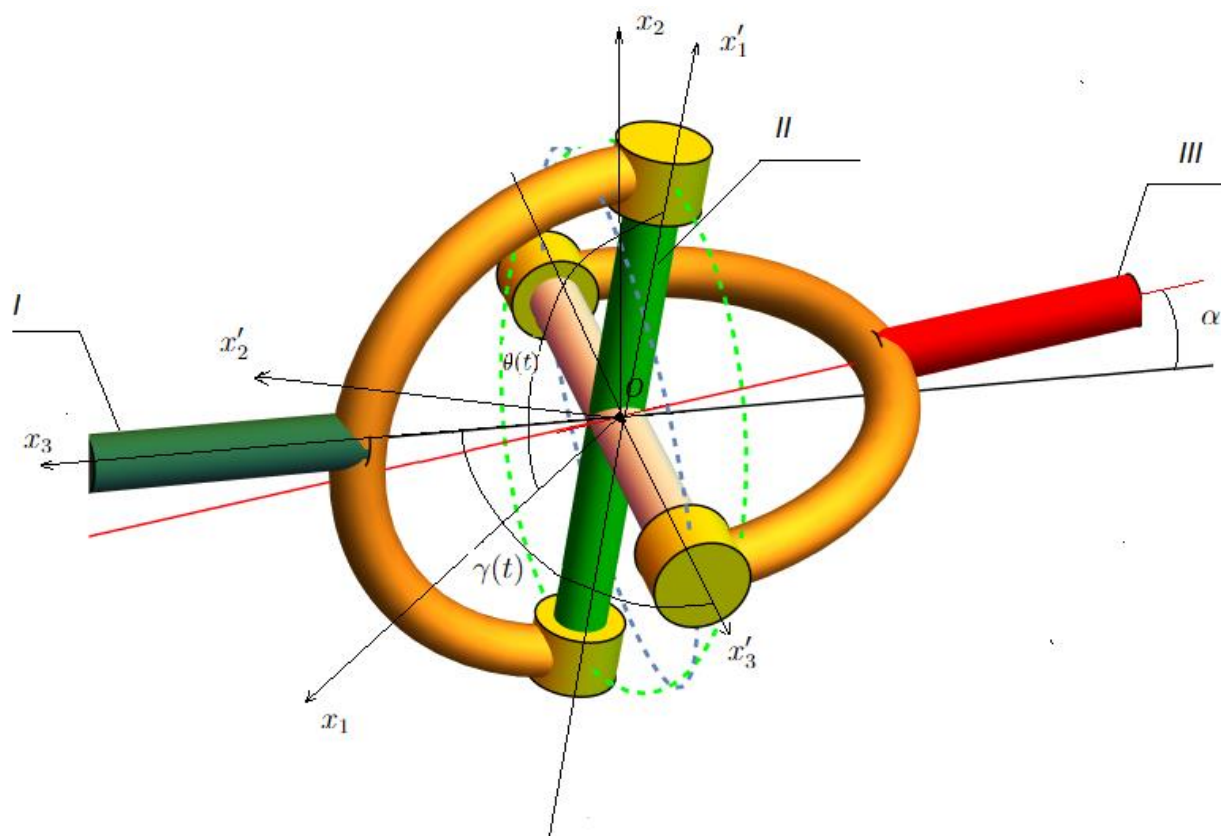


Рисунок 4.2 – Схема универсального шарнира

Докажем, что для углов ϑ , γ , α и $\varphi_{II}(t)$ в каждый момент времени справедливы соотношения:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma \cos \vartheta = 1, \quad \operatorname{tg} \varphi_{II} = \operatorname{tg} \vartheta \cos \alpha.$$

Чтобы доказать эти равенства, вычислим матрицу поворота. Для совмещения неподвижной системы с подвижной необходимо сначала повернуть систему Ox_1, x_2, x_3 на угол ϑ вокруг третьей оси, матрица этого поворота:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

затем нужно повернуть полученную систему на угол γ вокруг первой оси:

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

данные повороты являются пассивными, тогда матрица итогового поворота:

$$\begin{aligned} R &= R_1 \cdot R_2 = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\cos \gamma \sin \vartheta & \sin \gamma \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \gamma \cos \vartheta & -\sin \gamma \cos \vartheta \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

здесь элементы матрицы $R_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}'_j$, где \vec{e}'_j и \vec{e}_i - орты осей систем координат $Ox'_1x'_2x'_3$ и $Ox_1x_2x_3$.

Введем в рассмотрение единичный вектор оси ведомого вала \vec{e} :

$$\vec{e} = \sin \alpha \vec{e}_2 + \cos \alpha \vec{e}_3.$$

Очевидно, что ось Ox'_3 перпендикулярна оси ведомого вала, поэтому из условия $\vec{e} \cdot \vec{e}'_3 = 0$ находим:

$$\vec{e} = \sin \alpha \vec{e}_2 \cdot \vec{e}'_3 + \cos \alpha \vec{e}_3 \cdot \vec{e}'_3 = \sin \alpha \sin \gamma \cos \vartheta - \cos \alpha \cos \gamma = 0,$$

откуда:

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma \cos \vartheta = 1 \quad (4.1)$$

Орт \vec{e}'_3 оси Ox'_3 можно получить из вектора $(0, -1, 0)^T$ повернув его сначала на угол $-\alpha$ вокруг оси Ox_1 . Матрица этого поворота:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

а затем вокруг оси ведомого вала \vec{e} на угол φ_{II} , матрица этого поворота:

$$R_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{II} & -\cos \alpha \sin \varphi_{II} & \sin \varphi_{II} \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \varphi_{II} & \cos \varphi_{II} + \sin^2 \alpha (1 - \cos \varphi_{II}) & (1 - \cos \varphi_{II}) \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin \alpha \sin \varphi_{II} & (1 - \cos \varphi_{II}) \sin \alpha \cos \alpha & \cos \varphi_{II} + (1 - \cos \varphi_{II}) \cos^2 \alpha \end{pmatrix},$$

данные повороты являются активными, тогда матрица итогового поворота:

$$R = R_2 \cdot R_1,$$

следовательно:

$$\vec{e}'_3 = R \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi_{II} \\ -\cos \varphi_{II} \cos \alpha \\ \cos \varphi_{II} \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Также ясно, что:

$$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix},$$

тогда, т. к. $\vec{e}'_1 \cdot \vec{e}'_3 = 0$:

$$\sin \varphi_{II} \cos \vartheta - \cos \varphi_{II} \cos \alpha \sin \vartheta = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \operatorname{tg} \vartheta \cos \alpha. \quad (4.2)$$

Из соотношения (4.1) следует (учитывая $\vartheta = \varphi_1$):

$$\gamma(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} \alpha \cos \theta(t)),$$

таким образом, закон движения крестовины с использованием самолетных углов имеет вид:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \varphi_1(t), \\ \gamma(t) &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1(t)), \\ \psi(t) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Дифференцирование уравнения (4.2) по координате φ_1 приводит к получению аналога угловой скорости ведомого вала:

$$\omega_{II\varphi} = \frac{d\varphi_{II}}{d\varphi_1} = \frac{\cos \alpha}{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \varphi_1}. \quad (4.4)$$

Действительная же угловая скорость ведомого вала связана с ее аналоговой скоростью равенством:

$$\omega_{II} = \frac{d\varphi_{II}}{dt} = \frac{d\varphi_{II}}{d\varphi_I} \cdot \frac{d\varphi_I}{dt} = \omega_{II\varphi} \omega_I.$$

Большой интерес здесь представляет то, как меняется угол крена $\gamma(\varphi_I)$ при повороте ведущего вала, т. к. он определяет зону контактной нагрузки на шипы крестовины универсального шарнира. На рис. 4.3 показан график изменения угла крена за один поворот ведущего вала при $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

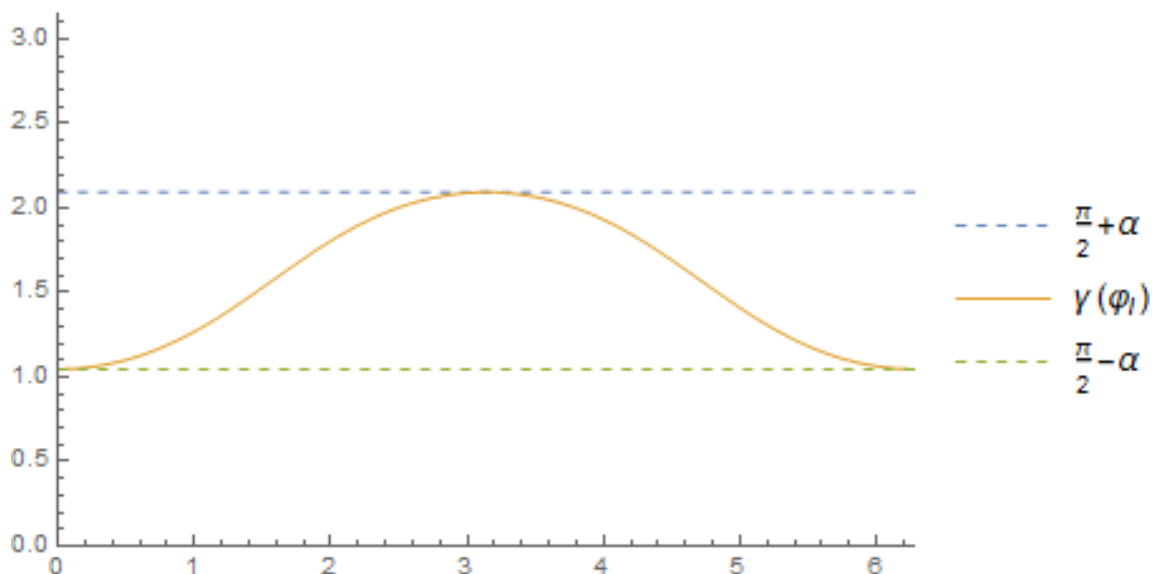


Рисунок 4.3 – Изменение угла крена за один оборот ведущего вала

Из рис. 4.3 видно, что область зон контакта равна 2α . Зоны контакта расположены центросимметрично относительно неподвижной точки крестовины на каждой паре соосных шипов (рис. 4.4). Экспериментальное исследование влияния несимметричности нагружения было выполнено в работе [129]. В ней отмечено, что в работе шарнира участвует только одна сторона рабочей поверхности шипа крестовины. Изношенность другой стороны практически отсутствует. Делается заключение, что для повышения долговечности работы шарнира нерабочая его часть может быть резервом. Были проведены испытания – 1000 часов работы шарнира, и было установлено, что на поверхностях рабочих шипов появились вмятины глубиной до 2 мкм. Далее крестовина была развернута на 180° , что позволило нагрузить нерабочую сторону подшипника, и продолжили испытание

еще в течение 600 часов. Описанный эксперимент повысил долговечность работы универсального шарнира 1,5 раза.

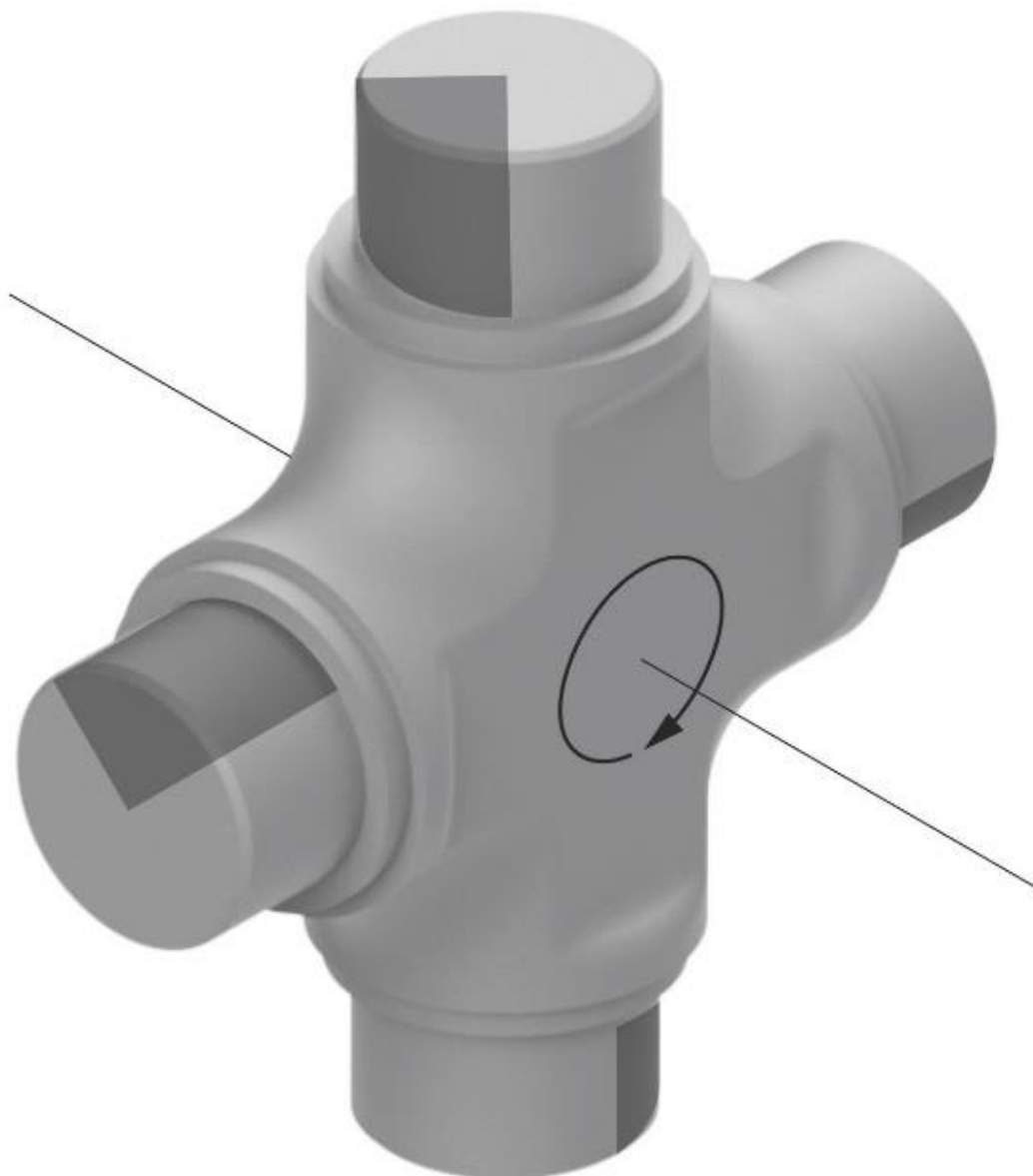


Рисунок 4.4 – Схема расположения зон контакта шипов крестовины

4.1.2. Закон движения крестовины универсального шарнира в кватернионах

Несмотря на относительную простоту уравнений (4.3), использование самолетных углов связано с рядом трудностей. Основной проблемой при их применении является вырождение соотношений, определяющих угловую скорость крестовины при $\theta = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Как следствие - при численном интегрировании кинематических и динамических уравнений вблизи критических точек

возникает большая погрешность. Указанный недостаток характерен для любых углов конечного вращения, однако его полностью лишены кватернионы, поэтому перейдем от задания ориентации крестовины в самолетных углах к заданию ориентации в кватернионах.

Воспользуемся связью между компонентами версоров и самолетными углами:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\
 q_1 &= \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \\
 q_2 &= \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \\
 q_3 &= \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Подставляем (4.3) в (4.5) и получаем закон движения крестовины в кватернионах:

$$\begin{aligned}
 q_0(\varphi_I) &= \cos \frac{\varphi_I}{2} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_I) \right], \\
 q_1(\varphi_I) &= \cos \frac{\varphi_I}{2} \sin \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_I) \right], \\
 q_2(\varphi_I) &= \sin \frac{\varphi_I}{2} \sin \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_I) \right], \\
 q_3(\varphi_I) &= \sin \frac{\varphi_I}{2} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_I) \right].
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

При знании закона (4.6) можно найти проекции угловой скорости крестовины либо на подвижные оси:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= 2(\dot{q}_1 q_0 - \dot{q}_0 q_1 - \dot{q}_3 q_2 + \dot{q}_2 q_3), \\
 \Omega_2 &= 2(\dot{q}_2 q_0 - \dot{q}_0 q_2 - \dot{q}_1 q_3 + \dot{q}_3 q_1), \\
 \Omega_3 &= 2(\dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_3 - \dot{q}_2 q_1 + \dot{q}_1 q_2),
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

либо на неподвижные:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= 2(\dot{q}_1 q_0 - \dot{q}_0 q_1 - \dot{q}_2 q_3 + \dot{q}_3 q_2), \\
 \omega_2 &= 2(\dot{q}_2 q_0 - \dot{q}_0 q_2 - \dot{q}_3 q_1 + \dot{q}_1 q_3), \\
 \omega_3 &= 2(\dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_3 - \dot{q}_1 q_2 + \dot{q}_2 q_1).
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

В качестве примера рассмотрим движение крестовины при равномерном вращении ведущего вала с угловой скоростью ω_1 . Пусть $\alpha = \pi / 6$, $\omega_1 = 0.5$ рад/с, тогда $\theta(t) = 0.5t$, график изменения компонент кватерниона ориентации указан на рис.4.5, изменение проекций угловой скорости крестовины на подвижные и неподвижные оси показано на рис.4.6 и рис.4.7 соответственно.

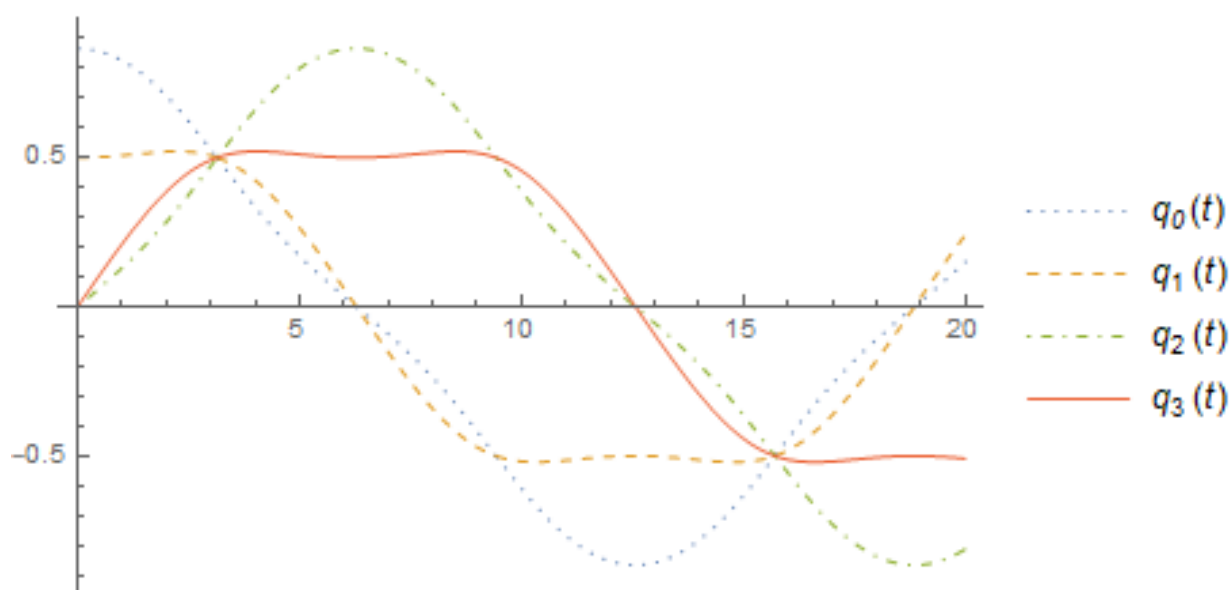


Рисунок 4.5 – Графики изменения компонент кватерниона ориентации

$$q_0(t), q_1(t), q_2(t), q_3(t)$$

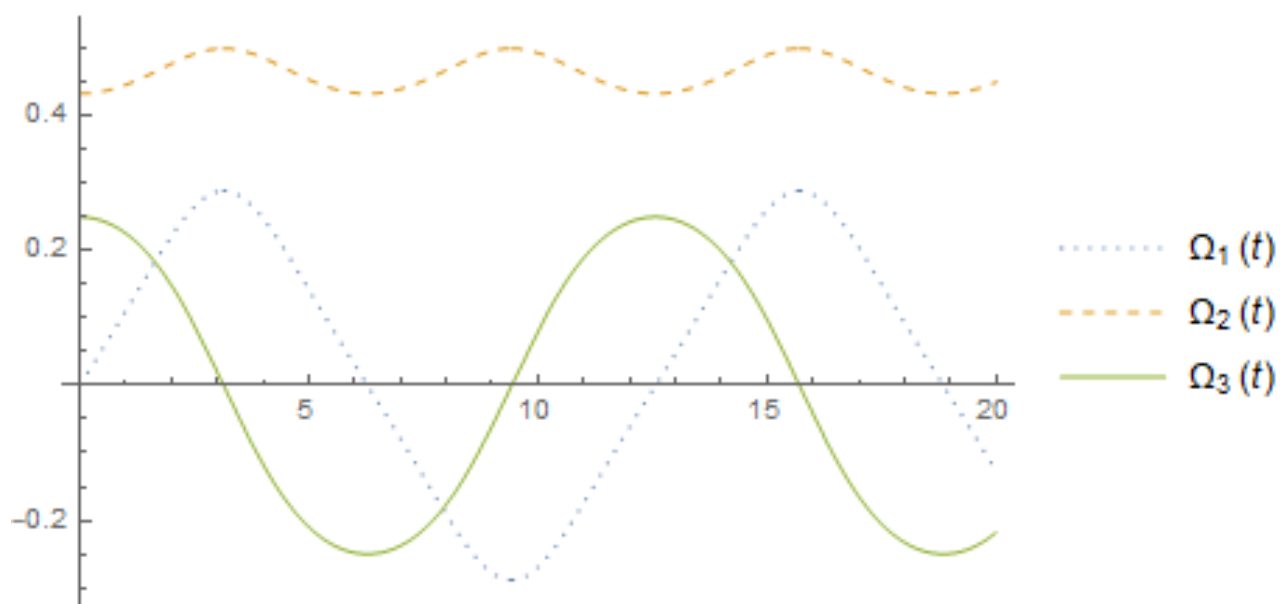


Рисунок 4.6 – Графики изменения проекций угловой скорости $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$, $\Omega_3(t)$ на подвижные оси

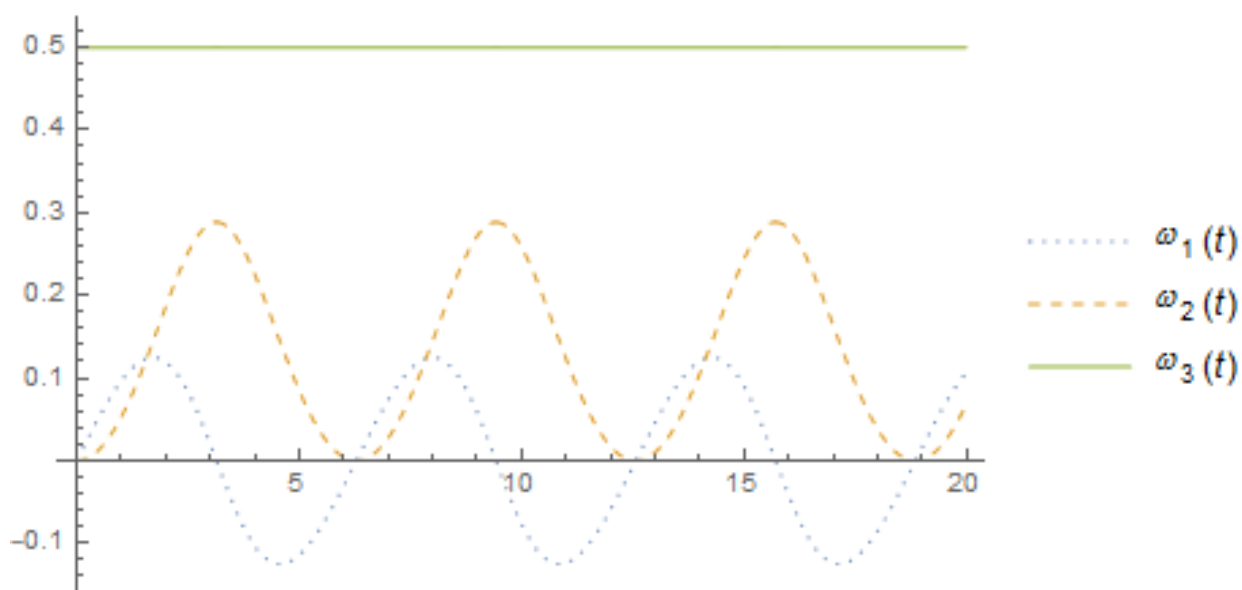


Рисунок 4.7 – Графики изменения проекций угловой скорости $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ на неподвижные оси

4.1.3. Траектории движения крестовины универсального шарнира в \mathbb{R}^3

В отличие от самолетных углов, кватернионы для описания движения твердого тела требуют задания не трех, а сразу четырех параметров. Этот факт несколько осложняет наглядную интерпретацию движения крестовины, однако

данное неудобство можно обойти, воспользовавшись отображением кватернионов в трехмерное пространство (2.9) и обратно (2.10). Это позволяет получить трехмерные траектории движения крестовины:

$$x_1(\varphi_1) = \frac{2 \cos \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1) \right] \arccos \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1) \right] \right)}{\sqrt{1 - \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1) \right] \right)^2}},$$

$$x_2(\varphi_1) = \frac{2 \sin \frac{\varphi_1}{2} \sin \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1) \right] \arccos \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1) \right] \right)}{\sqrt{1 - \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1) \right] \right)^2}},$$

$$x_3(\varphi_1) = \frac{2 \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1) \right] \arccos \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1) \right] \right)}{\sqrt{1 - \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arctg(\operatorname{tg} \alpha \cos \varphi_1) \right] \right)^2}}.$$

При использовании данного отображения движение крестовины интерпретируется как движение материальной точки в трехмерном пространстве, что упрощает визуальный анализ движения.

На рис.4.8 представлены траектории движения крестовины при равномерном вращении ведущего вала с угловой скоростью $\omega = 0.5$ рад/с и углах $\alpha = 0, \alpha = \pi / 6$ и $\alpha = \pi / 3$. Данные траектории могут быть использованы для проведения наглядного анализа. При $\alpha = 0$ получается окружность, которая соответствует эйлерову повороту крестовины, при увеличении угла между валами траектории перестают быть плоскими и все сильнее отклоняются от окружности. Замкнутость траекторий указывает на периодический характер движения

крестовины. На рис. 4.8 проиллюстрировано вращение универсального шарнира при $\alpha = \pi / 6$ и соответствующее ему движение точки по трехмерной траектории.

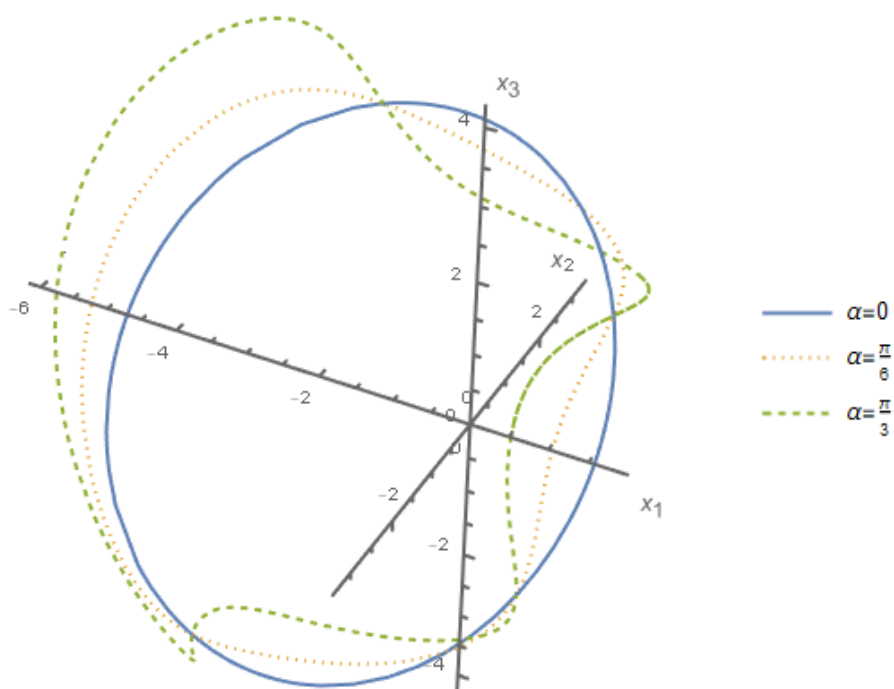
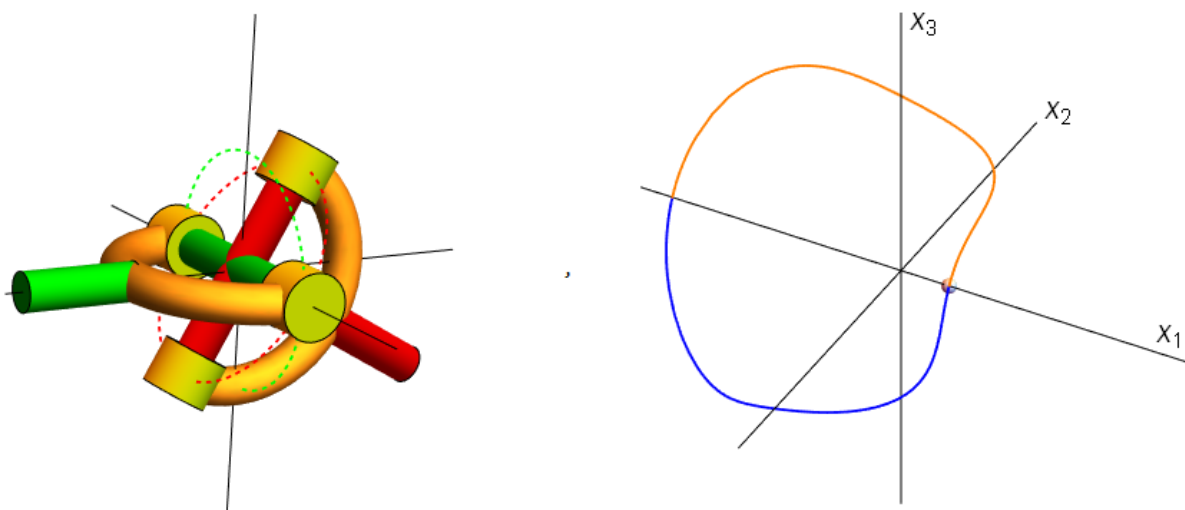
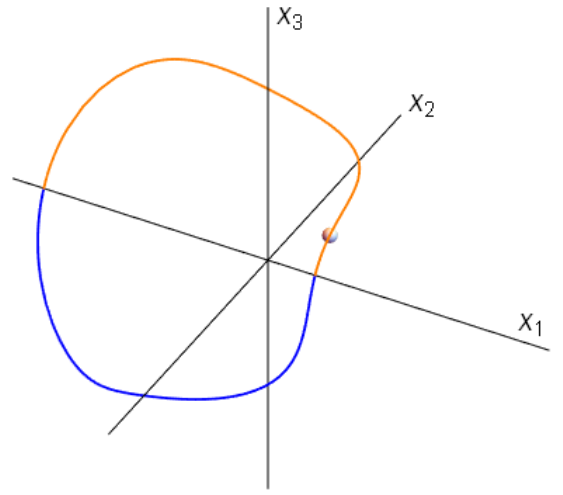
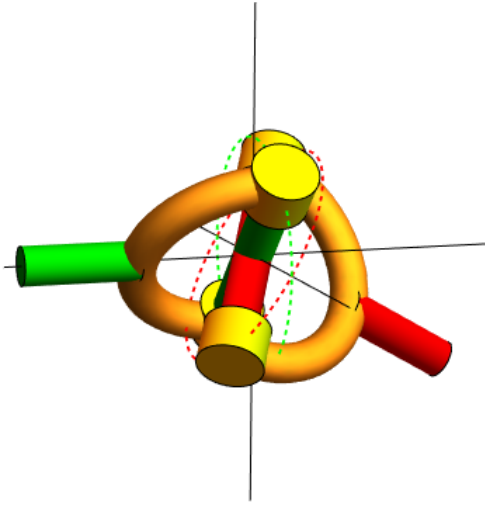


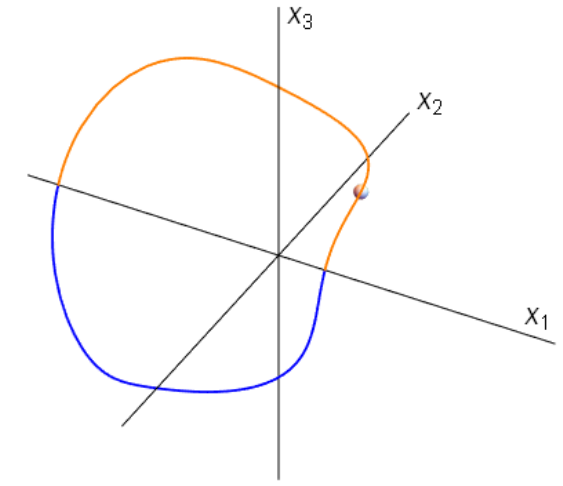
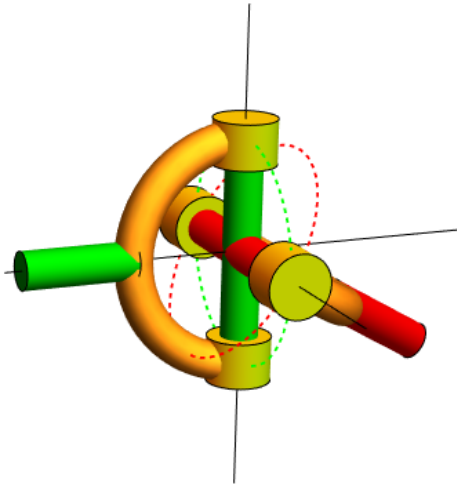
Рисунок 4.8 – Траектории движения крестовины в трехмерном шаре радиусом 2π при $\alpha = 0$, $\alpha = \pi / 6$ и при $\alpha = \pi / 3$



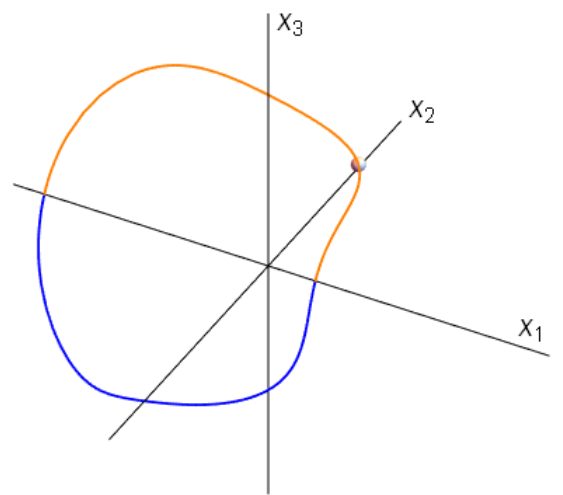
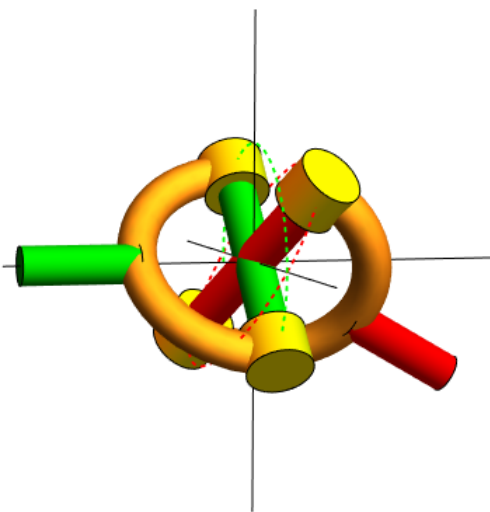
(a)



(b)



(c)



(d)

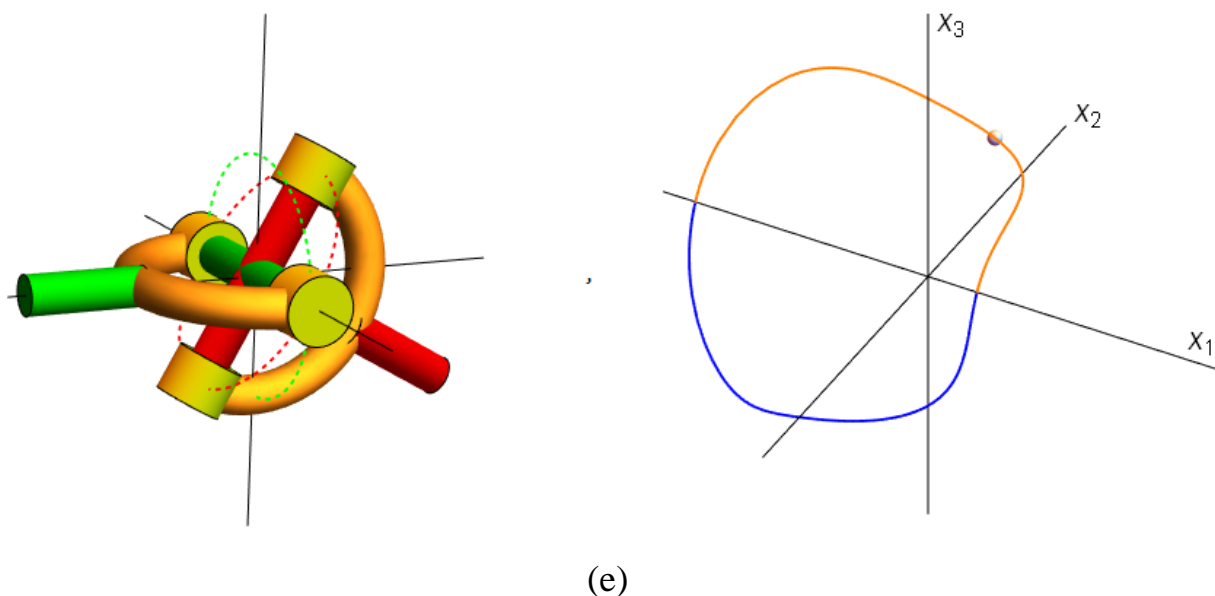


Рисунок 4.9 – Положения универсального шарнира и точки на трехмерной траектории при угле поворота ведущего вала φ_1 : (a) – $\varphi_1 = 0$, (b) – $\varphi_1 = \pi / 4$, (c) – $\varphi_1 = \pi / 2$, (d) – $\varphi_1 = 3\pi / 4$, (e) $\varphi_1 = \pi$

Траектория движения на рис. 4.9 разделена на две части: оранжевая соответствует первому полному обороту ведущего вала, а синяя - второму полному обороту. Таким образом, чтобы пройти всю траекторию движения, ведущему валу необходимо сделать два полных оборота. Это связано с тем, что кватернионы задают ориентацию тела неоднозначно (одной ориентации соответствуют два кватерниона).

4.1.4. Изменение траектории движения крестовины универсального шарнира в \mathbb{R}^3 при плавном изменении угла между осями валов

В некоторых механизмах в процессе движения допускается относительное смещение ведущего и ведомого валов универсального шарнира, что может привести к изменению угла между осями. Примером такого смещения могут являться колебания подвески карданного вала.

Влияние изменения угла между осями валов на вращение крестовины универсального шарнира удобно проиллюстрировать с помощью траекторий в \mathbb{R}^3 . Для примера рассмотрим изменение траектории вращения крестовины универсального шарнира при плавном изменении угла между осями валов от 0 до

некоторого фиксированного значения α^* за время T . Приведем несколько вариантов функций плавного пуска и торможения:

$$\alpha_1(t) = \alpha^* \left(6 \left(\frac{t}{T} \right)^5 - 15 \left(\frac{t}{T} \right)^4 + 10 \left(\frac{t}{T} \right)^3 \right),$$

$$\alpha_2(t) = \alpha^* \left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right),$$

$$\alpha_3(t) = \alpha^* \left(35 \left(\frac{t}{T} \right)^4 - 84 \left(\frac{t}{T} \right)^5 + 70 \left(\frac{t}{T} \right)^6 - 20 \left(\frac{t}{T} \right)^7 \right).$$

Графики данных функций представлены на рис. 4.10 при $\alpha^* = \pi/6$, $T = 1$ с.

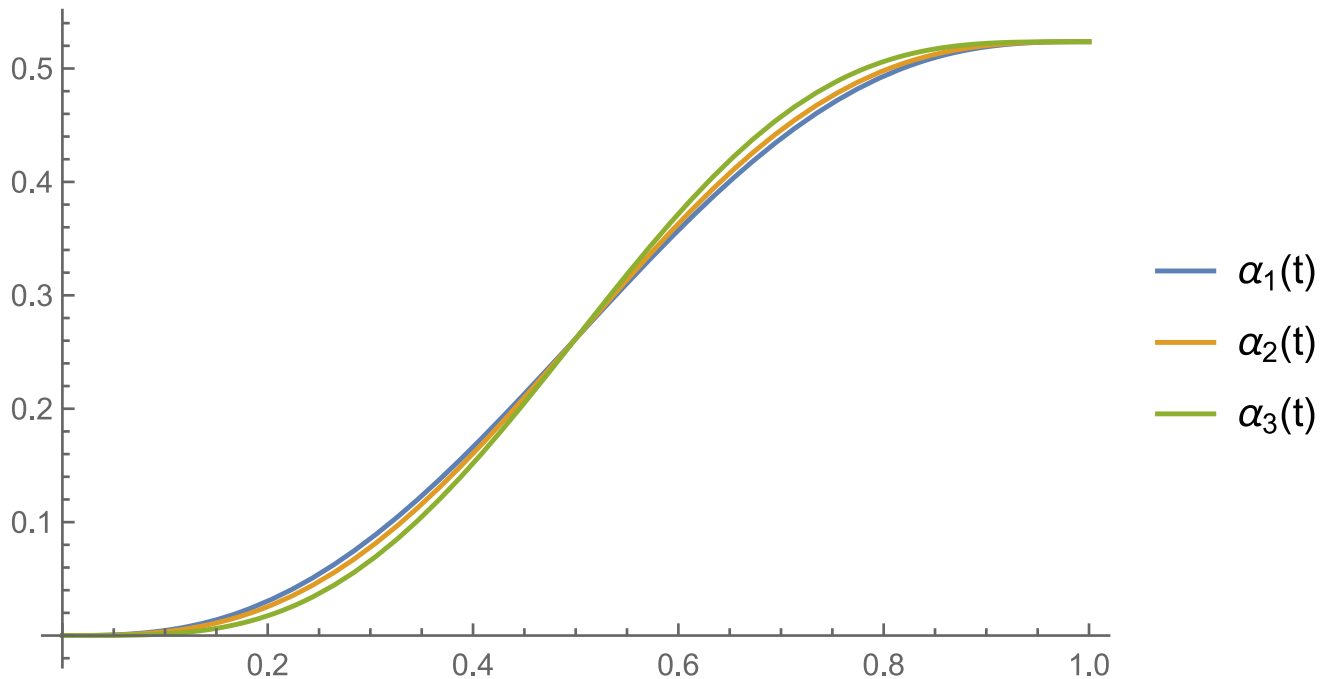


Рисунок 4.10 – Графики функций плавного изменения угла между осями валов

На рис. 4.11 представлены траектории переходного процесса движения крестовины при равномерном вращении ведущего вала с угловой скоростью

$\omega = 0.5$ рад/с для предложенных функций пуска и торможения.

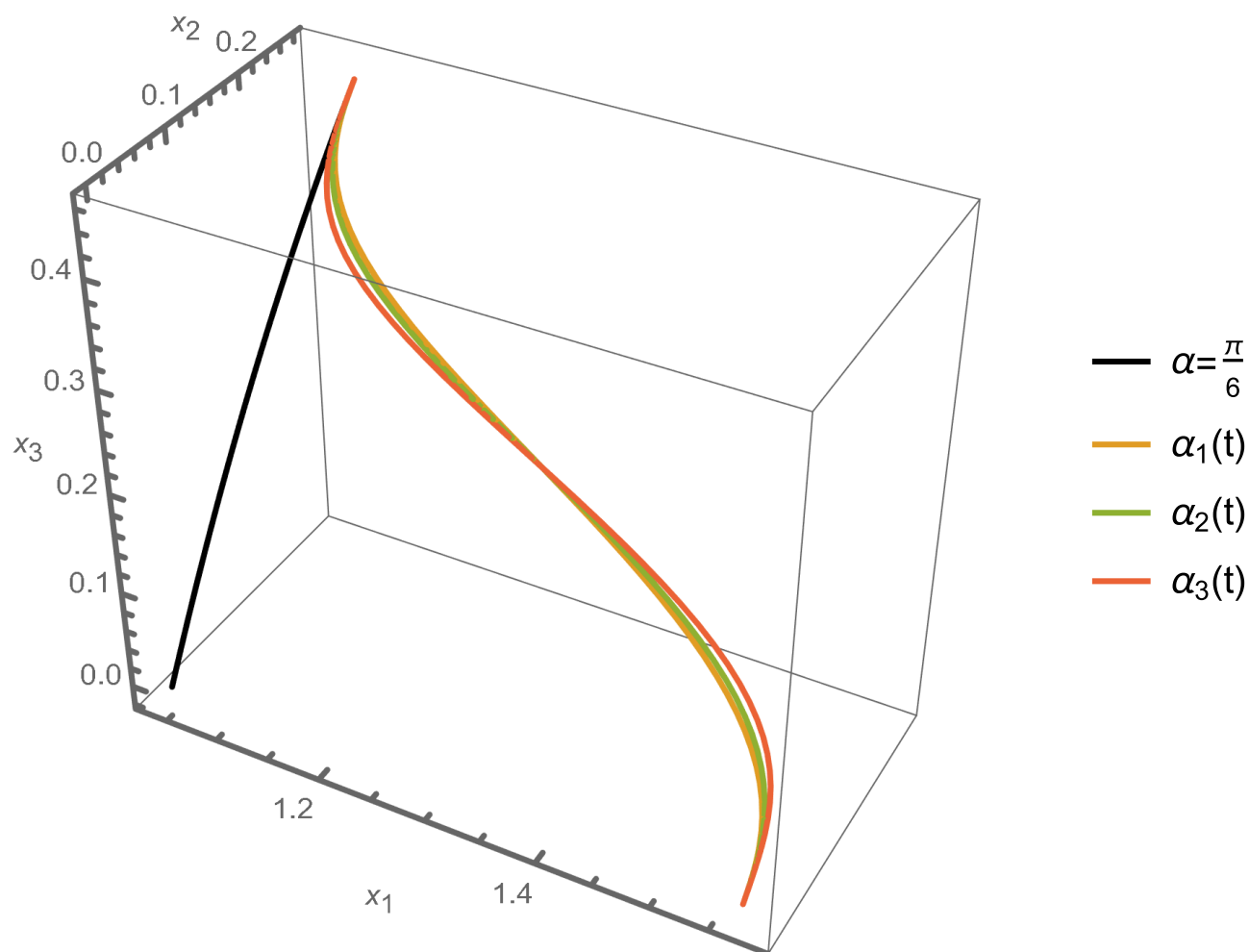


Рисунок 4.11 – Траектории переходного движения крестовины для различных функций плавного пуска и торможения

Черным цветом показана траектория, соответствующая постоянному углу между валами $\alpha = \pi/6$. Из рисунка видно, что наиболее плавный переход на эту траекторию обеспечивается функцией $\alpha_3(t)$.

4.2 Исследование динамических нагрузок, действующих на крестовину универсального шарнира с использованием кватернионного формализма

4.2.1. Исследование зависимости величины выходного момента от инерционных характеристик крестовины универсального шарнира

Вычисление скорости крестовины по формуле (4.7) требует знания компонент кватерниона как функций времени, однако для этого в формулах (4.6) нужно подставить закон вращения ведущего вала $\varphi_I = \varphi_I(t)$. Не зная закона вращения ведущего вала, можно воспользоваться аналогом угловых скоростей:

$$\begin{aligned}\Omega_{1\varphi}(\varphi_I) &= 2 \left(\frac{dq_1(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_0(\varphi_I) - \frac{dq_0(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_1(\varphi_I) - \frac{dq_3(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_2(\varphi_I) + \frac{dq_2(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_3(\varphi_I) \right), \\ \Omega_{2\varphi}(\varphi_I) &= 2 \left(\frac{dq_2(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_0(\varphi_I) - \frac{dq_0(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_2(\varphi_I) - \frac{dq_1(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_3(\varphi_I) + \frac{dq_3(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_1(\varphi_I) \right), \\ \Omega_{3\varphi}(\varphi_I) &= 2 \left(\frac{dq_3(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_0(\varphi_I) - \frac{dq_0(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_3(\varphi_I) - \frac{dq_2(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_1(\varphi_I) + \frac{dq_1(\varphi_I)}{d\varphi_1} q_2(\varphi_I) \right).\end{aligned}\quad (4.9)$$

при этом угловая скорость связана с ее аналогом соотношениями:

$$\Omega_1 = \Omega_{1\varphi} \cdot \omega_I,$$

$$\Omega_2 = \Omega_{2\varphi} \cdot \omega_I,$$

$$\Omega_3 = \Omega_{3\varphi} \cdot \omega_I.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что для вращающейся крестовины выполняется первый интеграл (предполагая постоянство угловой скорости ведущего вала):

$$\frac{d\Omega_{3\varphi}(\varphi_I)}{d\varphi_1} + \Omega_{1\varphi}(\varphi_I)\Omega_{2\varphi}(\varphi_I) = 0,$$

который может служить средством верификации при проведении численного моделирования.

Рассмотрим динамику универсального шарнира. На крестовину универсального шарнира действуют реакции подшипников ведущей и ведомой вилки с моментами M_1 и M_2 (рис. 4.12). Момент M_1 задан и определен мощностью, передаваемой на ведущий вал универсального шарнира и его угловой скоростью:

$$M_1 = \frac{P}{\omega_1}$$

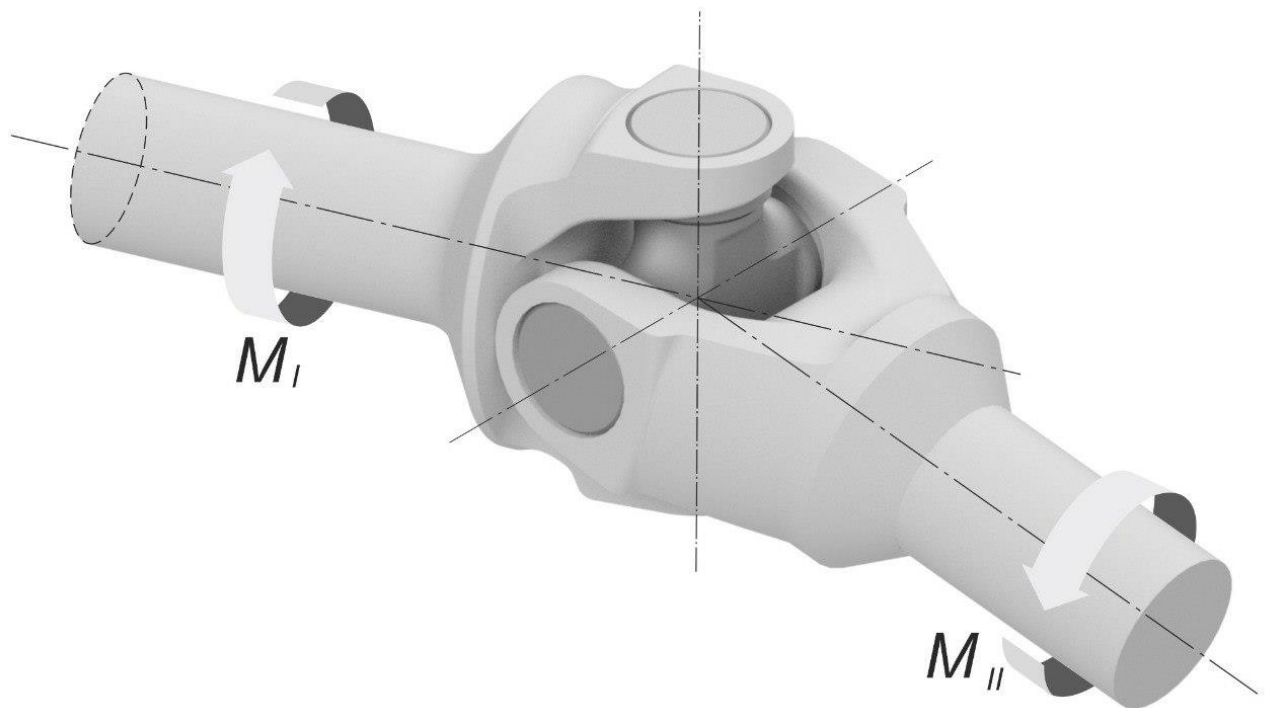


Рисунок 4.12 – Внешние моменты, действующие на крестовину (M_1 - момент на ведущем валу, M_{II} - реактивный момент)

Для определения момента M_{II} воспользуемся общим уравнением динамики:

$$M_1 \omega_1 - M_{II}(\varphi_1) \omega_{II\varphi}(\varphi_1) \omega_1 + M_{1\varphi}^\Phi \Omega_{1\varphi}(\varphi_1) \omega_1^3 + M_{2\varphi}^\Phi \Omega_{2\varphi}(\varphi_1) \omega_1^3 + M_{3\varphi}^\Phi \Omega_{3\varphi}(\varphi_1) \omega_1^3 = 0,$$

где $\omega_{II\varphi}(\varphi_1)$ - аналог угловой скорости ведомого вала, определяемый соотношением (4.4), $\Omega_{i\varphi}(\varphi_1)$ - проекции аналога вектор угловой скорости крестовины на связанные оси, определяемые равенствами (4.9), $M_{i\varphi}^\Phi$ - проекции аналога момента

сил инерции на связанные оси. Проекции аналога вектора момента сил инерции как функции угла поворота ведущего вала на связанные оси определяются равенствами:

$$M_{1\varphi}^{\Phi} = -I_1 \frac{d\Omega_{1\varphi}}{d\varphi_1} - \Omega_{2\varphi}(\varphi_1)\Omega_{3\varphi}(\varphi_1)(I_3 - I_2),$$

$$M_{2\varphi}^{\Phi} = -I_2 \frac{d\Omega_{2\varphi}}{d\varphi_1} - \Omega_{3\varphi}(\varphi_1)\Omega_{1\varphi}(\varphi_1)(I_1 - I_3),$$

$$M_{3\varphi}^{\Phi} = -I_3 \frac{d\Omega_{3\varphi}}{d\varphi_1} - \Omega_{1\varphi}(\varphi_1)\Omega_{2\varphi}(\varphi_1)(I_2 - I_1),$$

где I_1, I_2, I_3 - моменты инерции крестовины относительно связанных осей. Проекции момента сил инерции на связанные оси связаны с их аналогами соотношениями (предполагая постоянство угловой скорости ведущего вала):

$$M_1^{\Phi} = M_1^{\Phi} \cdot \omega_1^2,$$

$$M_2^{\Phi} = M_2^{\Phi} \cdot \omega_1^2,$$

$$M_3^{\Phi} = M_3^{\Phi} \cdot \omega_1^2.$$

Обычно инерционными характеристиками крестовины пренебрегают, и в этом случае момент на ведомом валу определяется соотношением:

$$M_{\text{ист}}(\varphi_1) = \frac{M_I}{\omega_{\text{и}\varphi}(\varphi_1)}.$$

Если же учитывать инерционные характеристики крестовины, то момент на ведомом валу определяется соотношением:

$$M_{\text{и}}(\varphi_1) = \frac{M_I + (M_1^{\Phi}\Omega_{1\varphi}(\varphi_1) + M_2^{\Phi}\Omega_{2\varphi}(\varphi_1) + M_3^{\Phi}\Omega_{3\varphi}(\varphi_1))\omega_1^2}{\omega_{\text{и}\varphi}(\varphi_1)}.$$

Рассмотрим пример численного моделирования зависимости крутящего момента на ведомом валу при значениях $M_I = 4 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $\omega_1 = 110 \text{ рад/с}$, $\alpha = 30^\circ$, $I_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. На рис. 4.13 представлены результаты данного моделирования. Пунктирной линией изображено

изменение крутящего момента на ведомом валу без учета инерционных характеристик крестовины, а сплошной - с их учетом.

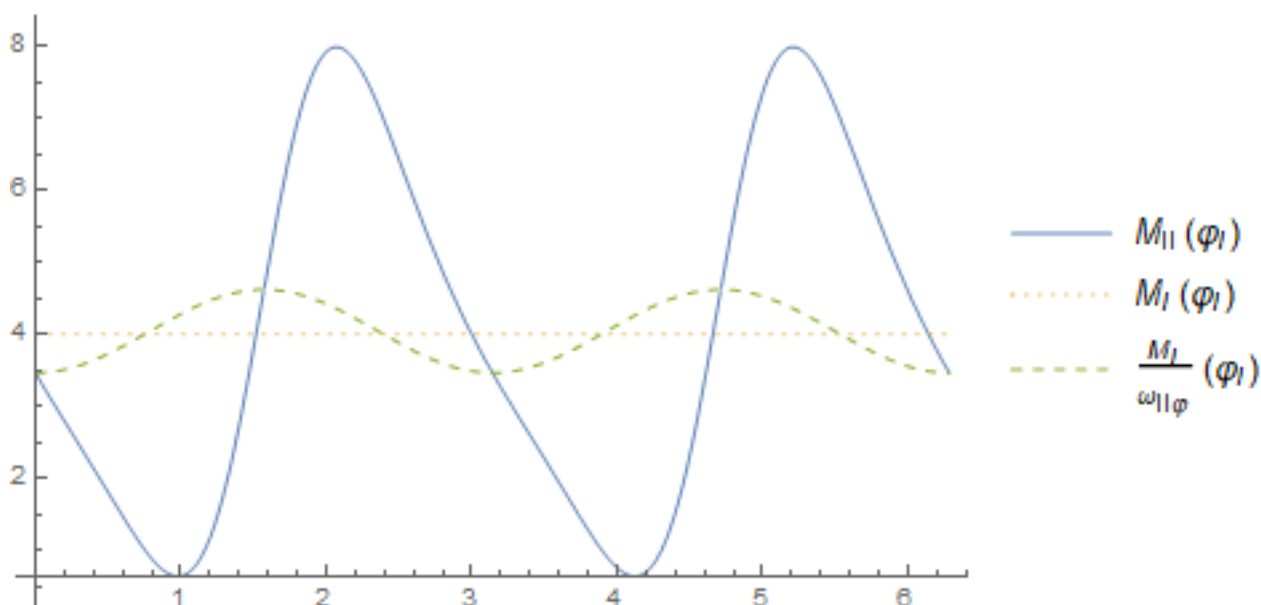


Рисунок 4.13 – Графики изменения крутящего момента для значений моментов инерции $I_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Анализ изменений крутящего момента на выходном валу показывает, что учет массовых характеристик крестовины влияет как на величину момента, так и на его амплитуду. Крутящий момент на выходном валу равен моменту, действующему на контактирующие с ним шипы. Возникающие при этом циклические контактные напряжения большой амплитуды приводят к быстрому износу крестовины и узла в целом.

4.2.2. Балансировка за счет оптимизации инерционных характеристик крестовины

Рассмотрим иллюстративный пример, демонстрирующий возможность изменять величину динамических нагрузок в подшипниках кинематической пары на вилке выходного вала за счет варьирования инерционных характеристик крестовины. При значениях $M_I = 4 \text{ Н} \cdot \text{м}$, $\omega_I = 110 \text{ рад/с}$, $\alpha = 30^\circ$ и шаровом тензоре инерции $I_1 = I_2 = I_3 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ выполнено численное моделирование

зависимости крутящего момента на ведомом валу. На рис. 4.14 представлены результаты данного моделирования, для сравнения изображено изменение крутящего момента на ведомом валу без учета инерционных характеристик крестовины и с их учетом.

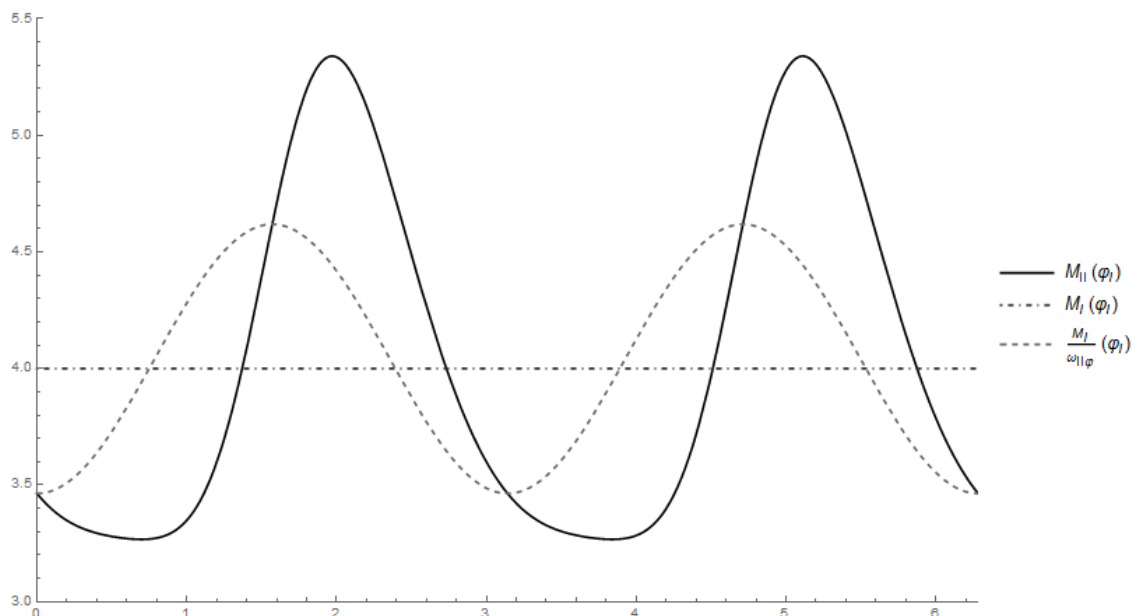


Рисунок 4.14 – Графики изменения крутящего момента для начальных моментов инерции $I_1 = I_2 = I_3 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

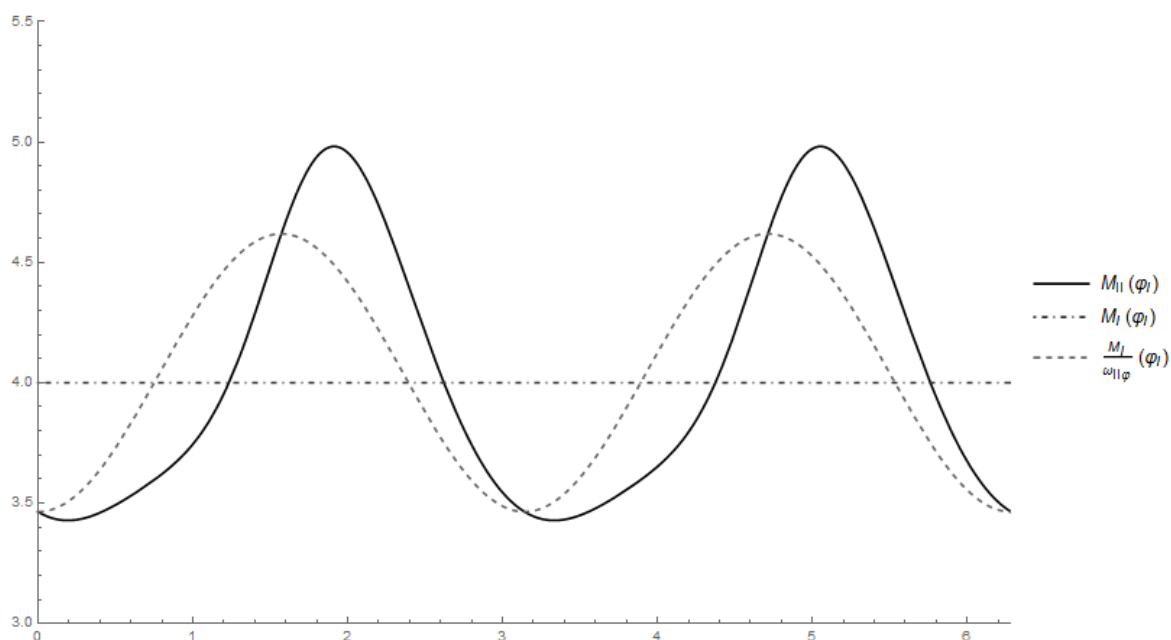


Рисунок 4.15 – Графики изменения крутящего момента для измененных моментов инерции $I_1 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$

Результат изменения инерционных характеристик крестовины представлен на рис. 4.15 при следующих их значениях моментов инерции: $I_1 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

В рассмотренном примере первый инвариант тензора инерции остается постоянным, но меняется распределение масс крестовины, совершающей сферическое движение. Это сказывается на динамических свойствах механической системы и приводит к уменьшению максимального значения крутящего момента на выходном валу.

4.3 Выводы по главе 4

1. Проведено исследование движения крестовины универсального шарнира. Предложен метод визуальной интерпретации закона ее движения, заданного в кватернионах, путем отображения последних в трехмерный шар радиусом 2π . Получаемые при таком отображении траектории позволяют произвести некоторый визуальный анализ сферического движения. В частности, замкнутость траекторий очевидным образом указывает на периодический характер движения, а отклонение траектории от плоской указывает на отклонение движения крестовины от простого поворота.
2. Предложен метод анализа динамических нагрузок в шарнирах неравных угловых скоростей. Показано, что учет инерционных характеристик крестовины приводит к увеличению величины момента, действующего на шипы, контактирующие с вилкой ведомого вала. Учитывая, что значения крутящего момента на входном валу меньше достигаемых значений на выходном валу, помимо разворота крестовины на 180 град, предложенного в работе [129], можно рекомендовать разворот крестовины на 90 град вокруг оси перпендикулярной плоскости крестовины, что приведет к смене шипов, принимающих нагрузку от ведущего вала, на шипы, передающие нагрузку ведомому валу.

3. Анализ изменений крутящего момента на выходном валу показывает, что посредством изменения массовых характеристик крестовины можно уменьшить или даже практически устранить добавочные динамические нагрузки и связанную с этим вибрацию, тем самым уменьшить износ контактирующих поверхностей и продлить ресурс работы машинного агрегата.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен новый метод в описании сферического движения твердых тел, предполагающий совмещение двух известных методов - кватернионов и векторов поворота. Он позволил объединить достоинства обоих методов - простоту математических выражений кватернионов и простоту геометрической интерпретации векторов поворота и тем самым расширить широко распространенный кватернионный формализм средствами трехмерного визуального анализа. В основе данного метода лежит отображение конфигурационного пространства вращений, описываемого единичными кватернионами, в трехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^3 векторов поворота. Все возможные ориентации твердого тела при этом задаются точками трехмерного шара радиусом π , а образы всех единичных кватернионов располагаются в трехмерном шаре радиусом 2π . Это позволило разработать и реализовать новый метод проектирования и компьютерного моделирования для синтеза, анализа и графической визуализации программных траекторий сферического движения в технических системах. Траектории вращения твердых тел после отображения в пространство векторов поворота интерпретируются как траектории движения точек в трехмерном пространстве. По виду трехмерной траектории можно судить о некоторых свойствах рассматриваемого сферического движения; так, замкнутость траектории указывает на периодический характер движения, а сравнив форму программной траектории с формой эйлеровой траектории, можно судить о близости программного вращения к плоскому повороту.

Рассмотрено применение изложенного подхода при решении двух задач, обладающих большой практической значимостью. Первая из них предполагает получение программной траектории переориентации твердого тела за заданное время из одного углового положения тела в другое при известных краевых условиях на скорость и ускорение. Во второй исследуется движение универсального шарнира и проводится анализ действующих на него динамических нагрузок.

Задача переориентации твердого тела решалась с использованием концепции квазиоптимальных траекторий, однако, в отличие от известных работ, в которых применяются единичные кватернионы, для их построения использовалось пространство векторов поворота, что обладает некоторыми преимуществами. Во-первых, построение программной траектории в пространстве векторов поворота позволяет сразу произвести ее визуальный анализ - например сравнить с траекторией эйлера поворота. Во-вторых, при построении программных траекторий отсутствует необходимость нормирования фазового вектора. В-третьих, более низкая размерность фазового вектора (3 координаты у вектора поворота против 4 у кватернионов) позволяет иметь дело с системами меньшей размерности.

По итогу проделанной работы были разработаны три алгоритма проектирования программного разворота твердого тела при заданных краевых условиях на угловое положение, скорость и ускорение. Первый из них предполагает задание программной траектории в виде многочлена пятой степени. Однако такая траектория не всегда соответствует плоскому повороту, поэтому также предложено два метода, использующих интерполяционный многочлен и кубические сплайны, обеспечивающие близость программной траектории к траектории равномерного эйлера разворота. На основе разработанных алгоритмов были созданы и зарегистрированы программы для ЭВМ с использованием системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Эффективность полученных алгоритмов была продемонстрирована на конкретных числовых примерах, а также рассмотрены способы реализации получаемых программных траекторий с помощью двигателей маховиков (для космических аппаратов) и с помощью линейных приводов (для платформы Стюарта).

Стоит подчеркнуть, что в рамках рассмотренных методов задание программного движения в пространстве поворотов является вспомогательным промежуточным шагом, после которого обязательно происходит переход к закону программного движения в кватернионах.

Продуктивность рассмотренных методов также продемонстрирована в рамках исследования движения универсального шарнира. Были получены компактные и рациональные формулы, позволяющие проанализировать динамические нагрузки, действующие на шарнир неравных угловых скоростей, учитывая инерционные параметры крестовины. В результате анализа было установлено, что истинное значение момента на выходном валу при учете инерционных характеристик крестовины оказывается выше, чем при пренебрежении ими. Также анализ показал, что значения крутящего момента на входном валу меньше достигаемых значений на выходном валу, на основании чего был сделан вывод, что разворот крестовины на 90 градусов вокруг оси, перпендикулярной плоскости крестовины, который приводит к смене шипов, принимающих нагрузку от ведущего вала, на шипы, передающие нагрузку ведомому валу, позволит продлить эксплуатационный ресурс универсального шарнира. Кроме вышесказанного, было показано, что посредством изменения массовых характеристик крестовины можно уменьшить динамические нагрузки и тем самым уменьшить износ контактирующих поверхностей.

Рекомендации и перспективы дальнейшего развития темы

Рассмотренный подход, использующий кватернионы и их отображение в пространство поворотов, доказал свою эффективность при проектировании и исследовании сферического движения в технических системах и может быть полезен в первую очередь для инженеров и исследователей, занимающихся данными вопросами.

В рамках дальнейшей разработки темы может быть установлена более тесная связь между формой траектории и характеристиками движения (например, кинетической энергией). Это позволит проводить более глубокий визуальный анализ получаемого программного движения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гордеев В. Н. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике / В. Н. Гордеев. – Киев : Издательство «Сталь», 2016. – 316 с. – ISBN 978-617-676-099-3.
2. Журавлев В. Ф. Основы теоретической механики : учебник для студентов вузов в области прикладных математики и физики / В. Ф. Журавлев. – Москва : Физматлит, 2008. – 304 с. – ISBN 978-5-9221-0907-9.
3. Борисов А. В. Динамика твердого тела / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 384 с. – ISBN 5-93972-055-2.
4. Ермолин В. С. Теоретическая механика. Часть I. Кинематика. Учебное пособие. / В. С. Ермолин, В. С. Королев, Е. Ю. Потоцкая. – Санкт-Петербург : СПбГУ, ВВМ, 2013. – 225 с. – ISBN 978-5-9651-0695-0.
5. Кэрт Б. Э. Кинематика (с дополнительными главами) : учебное пособие / Б. Э. Кэрт, Ж. Н. Андреева, О.Г. Агошков. – Санкт-Петербург : Балтийский государственный технический университет, 2014. – 222 с. – ISBN 978-5-85546-847-2.
6. Brannon R. M. Rotation: A review of useful theorems involving proper orthogonal matrices referenced to three-dimensional physical space. 2002. 190 p. URL: <https://my.mech.utah.edu/~brannon/public/rotation.pdf> (дата обращения 17.03.2023).
7. Diebel J. Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. October 20, 2006. 35 p. URL: https://www.astro.rug.nl/software/kapteyn-beta/_downloads/attitude.pdf (дата обращения 17.03.2023).
8. Holm D. D. Geometric mechanics. Part 2: rotating, translating and rolling / D. D. Holm. – London : Imperial College Press, 2008. – 312 p. – ISBN 978-1-84816-156-6.

9. Корнев В. В. Кватернионное решение обратной задачи кинематики твердого тела / В. В. Корнев // Математика. Механика. – 2005. – № 7. – С. 56–58.
10. Аванесов Г. А., Красиков В. А., Никитин А. В., Сазонов В. В. Определение вращательного движения космического аппарата в режиме астрокоррекции по измерениям звездного датчика БОКЗ-М // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2010. №32. 22 с. URL: https://keldysh.ru/papers/2010/source/prep2010_30.pdf (дата обращения: 17.03.2023).
11. Беленький А. Д. Режим ориентации на Солнце космического аппарата «Метеор-М» №2 / А. Д. Беленький, В. Н. Васильев, М. Е. Семенов // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. – 2015. – Т.147, №4 – С. 29–37.
12. Бирюков В. Г. Задачи определения ориентации и управления угловым движением твердого тела (космического аппарата) : спец. 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации (в технических отраслях)» : дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. Г. Бирюков ; Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Институт проблем точной механики и управления РАН. – Саратов, 2005. – 151 с. – Место защиты: Саратов. Институт проблем точной механики и управления РАН.
13. Дмитроченко Л.А., Сачков Г.П. Функциональные алгоритмы и уравнения ошибок определения параметров ориентации в инерциальных навигационных системах // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=56986> (дата обращения 17.03.2023). Дата публикации: 26.03.2015.
14. Режим поиска Земли космического аппарата «Метеор-М» №2 / А. Д. Беленький, В. Н. Васильев, А. С. Семенов и др. // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. – 2012. – Т.130, №5 – С. 13–18.
15. Севастьянов Н. Н. Концепция построения системы ориентации и управления движением спутника связи «Ямал». Штатная схема

функционирования / Н. Н. Севастьянов // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 2 (22). – С. 85–96.

16. Ханукаев Ю. И. Динамика в кватернионном описании / Ю. И. Ханукаев // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4(5). – С. 2564–2566.

17. Челноков Ю. Н. Исследование алгоритмов определения инерциальной ориентации движущегося объекта / Ю. Н. Челноков, С. Е. Перляев, Л. А. Челнокова // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, вып. 1. – С. 80–95.

18. Чуб В. Ф. Основы инерциальной навигации / В. Ф. Чуб. – Москва : URSS, 2021. – 192 с. – ISBN 978-5-9710-8326-9.

19. Barfoot T. Pose estimation using linearized rotations and quaternion algebra / T. Barfoot, J. R. Forbes, P. T. Furgale // Acta Astronautica. – 2011. – Vol. 68, Iss. 1-2. – pp. 101–112.

20. Жидкова Н. В., Волков В. Л. Моделирование бесплатформенной системы ориентации // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1 (часть 1). URL: <https://science-education.ru/ru/article/view?id=17099> (дата обращения 17.03.2023). Дата публикации: 22.01.2015.

21. Madgwick S. O. H. An efficient orientation filter for inertial and inertial/magnetic sensor arrays. April 30, 2010. 32 p. URL: https://x-io.co.uk/downloads/madgwick_internal_report.pdf (дата обращения 17.03.2023).

22. Севастьянов Г. Д. О линейности кинематической задачи Дарбу для тела с неподвижной точкой / Г. Д. Севастьянов. // Математика. Механика. – 2005. – № 7. – С. 195–198.

23. Molodentkov A. V. On the solution of the Darboux problem / A. V. Molodentkov. // Mechanics of Solids. – 2007. – Vol. 42, №2. – С. 167–176.

24. Мисюра Н. Е. Кватернионные модели в кинематике и динамике твердого тела : учебное пособие / Н. Е. Мисюра, Е. А. Митюшов. – Екатеринбург :

Издательство Уральского университета, 2020. – 120 с. – ISBN 978-5-7996-3150-5.

25. Groβekatthöfer K., Yoon Z. Introduction into quaternions for spacecraft attitude representation. May 31, 2012. 16 p. URL: <https://argos.vu/wp-content/uploads/2016/12/Quaternions.pdf> (дата обращения 17.03.2023).

26. Dai J. S. Euler-Rodrigues formula variations, quaternion conjugation and intrinsic connections / J. S. Dai // *Mechanism and Machine Theory*. – 2015. – Vol. 92. – pp. 144–152.

27. Жилин П. А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П. А. Жилин. – Санкт-Петербург : Нестор, 2001. – 275 с. – ISBN 5-303-00024-9.

28. Голубев Ю. Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела // *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*. 2013. №39. 23 с. URL: https://keldysh.ru/papers/2013/prep2013_39.pdf (дата обращения: 17.03.2023).

29. Jia Y.-B. Quaternions // *Foundations of robotics and computer vision (Com S 477/577)*. Lecture notes. Dec. 8, 2022. URL: <https://faculty.sites.iastate.edu/jia/files/inline-files/quaternion.pdf> (дата обращения: 17.03.2023)

30. Siminovitch D. Rotations in NMR: Part I. Euler-Rodrigues parameters and quaternions / D. Siminovitch // *Concepts in Magnetic Resonance*. – 1997. – Vol. 9 (3). – pp. 149–171.

31. Амелькин Н. И. Кинематика и динамика твердого тела / Н. И. Амелькин. – Москва : МФТИ, 2000. – 63 с. – ISBN 5-7417-0140-X.

32. Shuster M. D. A survey of attitude representations / M. D. Shuster. // *Journal of Astronautical Sciences*. – 1993. – Vol. 41, No. 4. – pp. 439–517.

33. Why and how to avoid the flipped quaternion multiplication / H. Sommer, I. Gilitschenski, M. Bloesch et al. // *Aerospace*. – 2018. – Vol. 5, No. 3. – 72.

34. Батурич Ю. М. Кватернионы выходят в космос / Ю. М. Батурич // *Математическая составляющая* / Ред. Н. Н. Андреев, С. П. Коновалов, Н. М.

Панюнин. – Москва : Фонд «Математические этюды», 2019. – 367 с. – ISBN 978-5-906825-02-5. – С. 24–25.

35. Shoemake K. Animating rotation with quaternion curves / K. Shoemake // SIGGRAPH '85 proceedings, July 22–26, 1985 – San Francisco, 1985. – Vol. 19, No. 3. – pp. 245–254.

36. Гельфанд И. М. Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения / И. М. Гельфанд, З. Я. Шапиро. // Успехи математических наук. – 1952. – Т. 7, вып. 1 (47). – С. 3–117.

37. Мирмович Э. Г. Алгебра кватернионов и вращения в трехмерном пространстве / Э. Г. Мирмович, Т. В. Усачева // Научные и образовательные проблемы гражданской защиты. – 2009. – № 1. – С. 71–77.

38. Коровин В. В., Попов А. В., Усюкин В. И. Кватернионные параметры Родрига-Гамильтона в модели космической тросовой связки. DOI: 10.18698/2308-6033-2012-8-445 // Инженерный журнал наука и инновации. 2012. № 8 (8). URL: <http://engjournal.ru/catalog/machin/rocket/445.html> (дата обращения 17.03.2023). Дата публикации: 30.12.2012.

39. Capkonic F. A quaternion representation of rotation and robot motion synthesis / F. Capkonic // Artificial Intelligence and Information-Control System of Robots. – 1984. – pp. 105–108.

40. Paul R. P. Robot Manipulators: mathematics, programming, and control / R. P. Paul. – Massachusetts : MIT Press, 1981. – 279 p.

41. Chen Z. Application of quaternion in robot control / Z. Chen, J. C. Hung // IFAC Proceedings Volumes, July, 1987 – München, 1987. – Vol. 20, Iss. 5, Part 4. – pp. 259–263.

42. Борисенко Л. А. Развитие методов моделирования кинематики манипулятора с использованием кватернионов / Л. А. Борисенко // Вестник Белорусско-Российского университета. – 2006. – № 4 (13). – С. 77–82.

43. Dam E. B., Koch M., Lillholm M. Quaternions, interpolation and animation. July 17, 1998. 103 p. URL:

<https://web.mit.edu/2.998/www/QuaternionReport1.pdf> (дата обращения 17.03.2023).

44. Побегайло А. П. Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике / А. П. Побегайло. – Минск : БГУ, 2010. – 216 с. – ISBN 978-985-518-281-9.

45. Smooth interpolation of orientations with angular velocity constraints using quaternions / A. H. Barr, B. Currin, S. Gabriel et al. // SIGGRAPH '92 proceedings, July 26–31, 1992 – Chicago, 1992. – Vol. 26, No. 2. – pp. 313–320.

46. Берестова С. А., Копытов Н. П., Митюшов Е. А. Дискретные ориентации космического аппарата. DOI: 10.18698/2308-6033-2017-7-1661 // Инженерный журнал наука и инновации. 2017. № 7 (67). URL: <http://engjournal.ru/catalog/arise/adb/1661.html> (дата обращения 17.03.2023). Дата публикации: 20.06.2017.

47. Копытов Н. П. Равномерное распределение точек на гиперповерхностях: моделирование случайных равновероятных вращений / Н. П. Копытов, Е. А. Митюшов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2015. – Т. 25, вып. 1. – С. 29–35.

48. Quaternion correlation for tracking crystal motions / Q. Shi, F. Latourte, F. Hild et al. // Measurement Science and Technology. – 2016. – Vol. 27, No. 9. – 095006.

49. Волошин В. П. Описание вращательных движений молекул в компьютерных моделях воды с помощью кватернионов / В. П. Волошин, Ю. И. Наберухин. // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. – 2020. – Т. 12, № 1. – С. 69–80.

50. Kneller G. R. Superposition of molecular structures using quaternions / G. R. Kneller. // Molecular Simulation. – 1991. – Vol. 7. – pp. 113–119.

51. Березин А. В. Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – Москва : Едиториал УРСС, 2003. – 200 с. – ISBN 5-354-00403-9.

52. Федоров Ф. И. Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – Москва : УРСС, 2003. – 380 с. – ISBN 5-354-00433-0.
53. A generalization of quaternions and their applications / H.- Y. Lin, M. Cahay, B. N. Velambi et al. // *Symmetry*. – 2022. – Vol. 14, Iss. 3. – 599.
54. Rastall P. Quaternions in relativity / P. Rastall. // *Reviews of Modern Physics*. – 1964. – Vol. 36, Iss. 3. – pp. 820–832.
55. De Leo S. Quantum mechanics: from complex to complexified quaternions / S. De Leo, W. A. Rodrigues Jr. // *International Journal of Theoretical Physics*. – 1997. – Vol. 36, №. 12. – pp. 2725–2757.
56. Говорков А. Б. Представление Фока для кватернионных полей / А. Б. Говорков. // *Теоретическая и математическая физика*. – 1986. – Т. 69, №1. – С. 69–77.
57. Капитанюк Ю. А. Траекторное управление твердым телом относительно подвижного объекта / Ю. А. Капитанюк, Д. А. Хвостов, С. А. Чепинский // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. – 2014. – Т.14, № 2(90). – С. 60–64.
58. Королев А. Ю. Применение кватернионов для моделирования зеркальных систем в динамике / А. Ю. Королев, А. В. Демин // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. – 2003. – Т.3, № 4. – С. 126–133.
59. Левский М. В. Задача оптимального управления пространственным разворотом космического аппарата за фиксированное время / М. В. Левский // *Вестник МАИ*. – 2009. – Т. 16, № 5. – С. 186–194.
60. Левский М. В. Оптимальное управление ориентацией космического аппарата / М. В. Левский // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. – 2008. – Т. 51, № 5. – С. 30–36.
61. Маштаков Я. В., Ткачев С. С. Построение углового движения космического аппарата при межпланетарном перелете // *Препринты ИПМ им. М. В.*

Келдыша. 2015. №24. 16 с. URL: https://keldysh.ru/papers/2015/prep2015_24.pdf
(дата обращения: 17.03.2023).

62. Сапунков Я. Г. Алгоритм оптимального по энергии разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях / Я. Г. Сапунков, А. В. Молоденков // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2015. – Т. 16, № 8. – С. 536–544.

63. Теория механизмов и машин : учеб. для вузов / К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К. Мусатов и др. – Москва : Высшая школа, 1987. – 495 с.

64. Федулов Р. В. Наведение оптической аппаратуры малого космического аппарата дистанционного зондирования / Р. В. Федулов, А. С. Шишкин // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2013. – № 2 (22). – С. 97–104.

65. Lee U. Quaternion based optimal spacecraft reorientation under complex attitude constrained zones / U. Lee, M. Mesbahi // Advances in the astronautical sciences. – 2013. – Vol. 150. – pp. 1995–2010.

66. Челноков Ю. Н. Теория кинематического управления движением твердого тела / Ю. Н. Челноков. // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2017. – Т. 18, № 7. – С. 435–446.

67. Бранец В. Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – Москва : Наука, 1973. – 320 с

68. Маланин В. В. Оптимальное управление ориентацией и винтовым движением твердого тела / В. В. Маланин, Н. А. Стрелкова. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. – 204 с. – ISBN 5-93972-351-9.

69. Молоденков А. В. Кватернионное решение задачи оптимального в смысле минимума энергетических затрат разворота твердого тела / А. В. Молоденков. // Проблемы механики и управления: межвузовский сборник научных трудов. – 1995. – С. 122–131.

70. Бирюков В. Г. Кинематическая задача оптимальной нелинейной стабилизации углового движения твердого тела / В. Г. Бирюков, Ю. Н. Челноков. // Математика. Механика – 2002. – № 4. – С. 172–174.
71. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. / Ю. Н. Челноков. – Москва : Физматлит, 2006. – 512 с. – ISBN 5-9221-0680-5.
72. Бранец В. Н. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. – Москва : Наука, 1992. – 280 с
73. Бранец В. Н. Кинематическая задача ориентации во вращающейся системе координат / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 6. – С. 36–43.
74. Бранец В. Н. Применение кватернионов в задачах управления положением твердого тела / В. Н. Бранец, И. П. Шмыглевский. // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 4. – С. 24–31.
75. Плотников П. К. Кинематическая задача управления ориентацией твердого тела / П. К. Плотников, А. Н. Сергеев, Ю. Н. Челноков. // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – № 5. – С. 9–18.
76. Панков А. А. Исследование кватернионных законов кинематического управления ориентацией твердого тела по угловой скорости / А. А. Панков, Ю. Н. Челноков. // Известия РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 6. – С. 3–13.
77. Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением / Ю. Н. Челноков. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с. – ISBN 978-5-9221-1270-3.
78. Велищанский М. А. Квазиоптимальная переориентация космического аппарата / М. А. Велищанский, А. П. Крищенко, С. Б. Ткачев // Механика твердого тела. – 2002. – вып. 32. – С. 144–153.

79. Велищанский М. А. Реализация плоского поворота космического аппарата квазиоптимальным алгоритмом переориентации. DOI: 10.7463/1012.0465320 // Наука и образование. 2012. № 10. URL: <http://engineering-science.ru/doc/465320.html> (дата обращения 17.03.2023).

80. Велищанский М. А., Крищенко А. П. Задача терминального управления для системы второго порядка при наличии ограничений. DOI: 10.7463/0815.0793667 // Наука и образование. 2015. № 8. URL: <http://engineering-science.ru/doc/793667.html> (дата обращения 17.03.2023).

81. Ермошина О. В. Синтез программных управлений ориентацией космического аппарата методом обратных задач динамики / О. В. Ермошина, А. П. Крищенко // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2000. – №2. – С. 155–162.

82. Velishchanskii M. A. Synthesis of spacecraft reorientation algorithms using the concept of the inverse dynamic problem / M. A. Velishchanskii, A. P. Krishchenko, S. B. Tkachev. // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2003. – Vol. 42, Iss. 5. – pp. 811–818.

83. Гансвинд И. Н. Малые космические аппараты – новое направление космической деятельности / И. Н. Гансвинд // Международный научно-исследовательский журнал. – 2018. – № 12 (78) (часть 2). – С. 84–91.

84. Овчинников М. Ю. «Малыши» завоевывают мир. 15 с. URL: <https://www.keldysh.ru/events/ovch.pdf> (дата обращения 17.03.2023).

85. Левский М. В. Об одной задаче пространственного разворота космического аппарата / М. В. Левский // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2008. – Т. 51, № 7. – С. 22–27.

86. Левский М. В. Управление переориентацией космического аппарата с минимальным интегралом энергии / М. В. Левский // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 12. – С. 25–42.

87. Алексеев К. Б. Сравнение способов ориентации космического аппарата с оценкой быстродействия и расхода топлива / К. Б. Алексеев, И. В. Персев,

А. В. Шадян // *Машиностроение и инженерное образование*. – 2008. – № 1 (14). – С. 41–46.

88. Position and orientation control of robot manipulators using dual quaternion feedback / H.-L. Pham, V. Perdereau, B. V. Adorno et al. // *Proceedings of the 2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, November 10, 2010 – Taipei, 2010. – pp. 658–663.

89. Sariyildiz E. Solution of inverse kinematic problem for serial robot using quaternions / E. Sariyildiz, H. Temeltas // *Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation*, August 9–12, 2009 – Changchun, 2009. – pp. 26–31.

90. Анкудинов В. Х. Кинематическая модель гексапода. Часть II. Бикватернионные модели / В. Х. Анкудинов, А. В. Максимов // *Электромагнитные волны и электронные системы*. – 2019. – № 3. – С. 23–32.

91. Ковалев А. М. Применение параметров Родрига-Гамильтона для исследования прецессионных движений твердого тела с неподвижной точкой / А. М. Ковалев, Г. В. Горп, Д. А. Данилюк // *Труды ИПММ НАН Украины*. – 2014. – Т.28. – С. 93–101.

92. Cardanus H. *De subtilitate rerum* / H. Cardanus. – Norimbergae : Johanness Petreius, 1550. – 670 p.

93. Hooke R. *A description of helioscopes, and some other instruments* / R. Hooke. – London : Jhon Martin, 1676. – 34 p.

94. Willis R. *Principles of Mechanism* / R. Willis. – London : John W. Parker, 1841. – 491 p.

95. Poncelet J. V. *Traité de mécanique appliquée aux machines. Part I* / J. V. Poncelet. – Liège : Librairie scientifique et industrielle, 1845. – 769 p.

96. Новые материалы и технологии, применяемые при производстве карданных передач / В. И. Кравченко, В. А. Струк, Г. А. Костюкович и др. // *Вестник Белорусско-Российского университета*. – 2006. – №4 (13). – С. 91–99

97. LeCain N. Tutorial of Hertzian contact stress analysis. December 3, 2011. 8 p. URL: https://wp.optics.arizona.edu/optomech/wp-content/uploads/sites/53/2016/10/Tutorial_LeCainNicholas.pdf (дата обращения 17.03.2023).
98. Vesali F. Dynamics of universal joints, its failures, and some propositions for practically improving its performance and life expectancy / F. Vesali, M. A. Rezvani, M. Kashfi // *Journal of Mechanical Science and Technology*. – 2012. – Vol. 26. – pp. 2439–2449.
99. Datey S. N. Finite element analysis of universal joint / S. N. Datey, S. D. Khamankar, H.C. Kuttarmare // *Journal of Mechanical and Civil Engineering*. – 2014. – Vol. 11, Iss. 3. – pp. 64–69.
100. Сравнительный анализ конструкций карданных шарниров неравных угловых скоростей / С. П. Ереско, Т. Т. Ереско, Е. В. Кукушкин и др. // *Вестник СибГАУ*. – 2015. – Т. 16, №3. – С. 720–728.
101. Amaresh Goud E. Study & analysis of universal joint with the replacement of different material / E. Amaresh Goud, P. Hussain // *Journal of Engineering Sciences*. – 2019. – Vol. 10, Iss. 12. – pp. 1037–1047.
102. Petrescu F. The structure, geometry, kinematics of a universal joint / F. Petrescu, R. Petrescu // *Independent journal of Management & Production*. – 2019. – Vol. 10, Iss. 8. – pp. 1713–1724.
103. Karadere G. A new approach to the kinematic analysis of universal joints: Psrt 2: Investigation of various assemblings / G. Karadere, O. Koprmas, E. Güllü // *Materials Testing*. – 2010. – Vol. 52, №5. – pp. 332–337.
104. Жилин П. А. Динамика твердого тела : учебное пособие / П. А. Жилин. – Санкт-Петербург : Издательство Политехнического университета, 2015. – 639 с. – ISBN 978-5-7422-4857-6.
105. Горшков А. Д. Определение кинематических характеристик шарнира Гука аналитическим методом / А. Д. Горшков. // *European Science*. – 2016. – № 2 (12). – С. 26–30.

106. Моделирование динамики карданной передачи на программном комплексе Simulation X / А. А. Джомартов, С. У. Джолдасбеков, Г. Уалиев и др. // Доклады национальной академии наук Республики Казахстан. – 2014. – Т. 3. – С. 27–34.

107. Yadav K. Modeling and finite element analysis of universal joint / K. Yadav, H. Jain // Advancement in Mechanical Engineering and Technology. – 2021. – Vol. 4, Iss. 1. – pp. 1

108. Митюшов Е. А. Кватернионные модели в кинематике и динамике сферического движения элементов сложных технических систем / Е. А. Митюшов, Н. Е. Мисюра // Прогрессивные технологии и системы машиностроения. – 2020. – №4 (71). – С. 27–34.

109. Mityushov E. A. A quaternionic description of kinematics and dynamics universal joint / E. A. Mityushov, N. E. Misyura // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1901. – 012121.

110. Гаер М. А. Разработка и исследование геометрических моделей пространственных допусков сборок с использованием кватернионов : спец. 05.02.08 «Технология машиностроения» : дис. ... канд. техн. наук / М. А. Гаер ; Иркутский государственный технический университет. – Иркутск, 2005. – 148 с. – Место защиты: Иркутский государственный технический университет.

111. Дегтярев М. Ю. Алгоритмы моделирования поверхностей с применением методов ориентации твердого тела : спец. 05.13.12 «Системы автоматизации проектирования (промышленность)» : дис. ... канд. техн. наук / М. Ю. Дегтярев ; ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет». – Санкт-Петербург, 2006. – 128 с. – Место защиты: ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный политехнический университет».

112. Рябинин К. Б. Обработка и распознавание трехмерных изображений групповых точечных объектов и точечных полей на базе их кватернионных моделей : спец. 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» : дис. ... канд. техн. наук / К. Б. Рябинин ; Марийский

государственный технический Университет. – Йошкар-Ола, 2008. – 208 с. – Место защиты: Ульяновский государственный технический университет.

113. Татарников. О. Обзор программ для символьной математики / О. Татарников. // КомпьютерПресс. – 2006. – № 7. – С. 100–107.

114. Таранчук В. Б. Основные функции систем компьютерной алгебры : пособие для студентов фак. Прикладной математики и информатики / В. Б. Таранчук. – Минск : БГУ, 2013. – 59 с.

115. Арнольд В. И. Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов / В. И. Арнольд. – Москва : МЦНМО, 2014. – 40 с. – ISBN 978-5-4439-0109-1.

116. Novelia A. On geodesics of the rotation group $SO(3)$ / A. Novelia, O.M. O'Reilly // Regular and chaotic dynamics. – 2015. – Vol. 20, No. 6. – pp. 729–738.

117. Аббаров Д. Л. Точная разрешимость уравнений Эйлера-Пуассона. Глобальная динамика и дзета-функции / Д. Л. Аббаров. – Москва : Научный мир, 2021. – 614 с. – ISBN 978-5-91522-489-5.

118. Александров А. Ю. Электродинамическая стабилизация программного вращения ИСЗ в орбитальной системе координат / А. Ю. Александров, А. А. Тихонов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. – 2012. – №2 – С. 79–90.

119. Сазонов В. В. Двухосная закрутка спутника в плоскости орбиты / В. В. Сазонов, С. Ю. Чебуков, Е. Ю. Кузнецова // Космические исследования. – 2000. – Т. 38, №3. – С. 296–306.

120. Чебуков С. Ю. Исследование динамики двухосной закрутки спутника в плоскости орбиты : спец. 01.02.01 «Теоретическая механика» : дис. ... канд. физ.-мат. наук / С. Ю. Чебуков ; ИПМ им. Келдыша. – Москва, 1998. – 92 с.

121. Балковой Н. Н. Разработка и исследование системы управления динамическим моментом двигателя-маховика системы ориентации и стабилизации космического аппарата : спец. 05.09.03 «Электротехнические комплексы и

системы» : дис. ... канд. техн. наук / Н. Н. Балковой ; Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Акционерное общество «Научно-производственный центр «Полус». – Томск, 2018. – 228 с. – Место защиты: Новосибирский государственный технический университет.

122. Васильев В. Н. Системы ориентации космических аппаратов / В. Н. Васильев. – Москва : ФГУП «НПП ВНИИЭМ», 2009. – 310 с. – ISBN 978-5-903194-06-3.

123. Некрасов В. В. Построение математической модели микроконтроллерной системы управления двигателя-маховика в режиме заданной скорости / В. В. Некрасов // Вопросы электромеханики. Труды ВНИИЭМ. – 2019. – Т.171, №4 – С. 3–8.

124. Митюшов Е. А. Оптимальная стабилизация космического аппарата в инерциальной системе координат на базе бесплатформенной инерциальной навигационной системы / Е. А. Митюшов, Н. Е. Мисюра, С. А. Берестова // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2018. – Т. 28, вып. 2. – С. 252–259.

125. Игнатов А. И., Давыдов А. А., Сазонов В. В. Анализ динамических возможностей систем управления малым космическим аппаратом, построенных на базе двигателей-маховиков // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2005. №47. URL: https://keldysh.ru/papers/2005/rep47/rep2005_47.html (дата обращения: 17.03.2023).

126. Гапоненко Е. В. Динамика управляемого движения робота-трипода с шестью степенями подвижности : спец. 01.02.06 «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры» : дис. ... канд. техн. наук / Е. В. Гапоненко ; Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова. – Белгород, 2014. – 219 с. – Место защиты: Курск. Юго-Западный государственный университет.

127. Динамика платформы Стюарта / Б. Р. Андриевский, Д. Г. Арсеньев, С. А. Зегжда и др. // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2017. – Т. 4 (62), вып. 3. – С. 489–505.

128. Мамаев Ю. А. Динамика движения робота-станка с параллельной кинематикой (гексапода) для окончательной обработки деталей сложной геометрии : спец. 01.02.06 «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры» : дис. ... канд. техн. наук / Ю. А. Мамаев ; Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова. – Белгород, 2014. – 140 с. – Место защиты: Курск. Юго-Западный государственный университет.

129. Повышение долговечности подшипников карданного шарнира неравных угловых скоростей / С. П. Ереско, Т. Т. Ереско, Е. В. Кукушкин и др. // Системы Методы Технологии. – 2018. – №2 (38). – С. 19–24.