

## Отзыв научного руководителя

на диссертационную работу Мунц Натальи Владимировны «Численный метод решения дифференциальных игр быстрого действия с линией жизни», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Исследования, проведенные в диссертационной работе Н.В. Мунц, связаны с изучением дифференциальных игр быстрого действия с линией жизни. В таких играх кроме терминального множества, при приведении системы на которое выигрывает первый игрок с результатом, равным времени приведения системы, также имеется «линия жизни», множество, при приведении системы на которое выигрывает второй игрок с результатом плюс бесконечность. Такие игры были сформулированы Р. Айзексом в его книге «Дифференциальные игры» в 1965 году. Позднее такие игры или аналогичные постановки изучались разными математиками — Л.А. Петросяном, М. Quincampoix, P. Cardaliaguet, P. Saint-Pierre. Однако эти исследования были фрагментарными и не закрывали всех аспектов, связанных с игрой: существование функции цены, существование обобщенного решения соответствующего уравнения типа Гамильтона – Якоби и его совпадение с функцией цены, формулировка и обоснование сходимости численной схемы для построения функции цены.

В рамках диссертационной работы была предпринята попытка провести именно систематическое исследование данного круга задач. В частности, изучался вопрос совпадения функции цены игры с линией жизни и аналогичной игры, в которой линия жизни отсутствует. Такое совпадение важно, так как имеется необходимость численно решать именно классические задачи без линии жизни, однако имеющийся алгоритм, предложенный итальянскими математиками M. Bardi, M. Falcone, P. Soravia, из-за конечности сетки, на которой вычисляется функция цены, фактически решает именно задачи с линией жизни (при использовании соответствующего краевого условия на внешней границе сетки). В первых двух главах работы формулируются и доказываются утверждения, связанные с указанными вопросами: существование и совпадение функции цены и обобщенного решения, сходимость численной схемы. Однако стоит отметить, что на изучаемую игру накладываются достаточно жесткие условия динамического преимущества игроков вблизи соответствующих множеств (первого игрока у терминального множества, второго — у линии жизни). Такие условия позволяют явно воспользоваться результатами книги Н.Н. Красовского и А.И. Субботина «Позиционные дифференциальные игры» (при доказа-

тельстве существования функции цены) и книги А.И. Субботина «Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка: перспективы динамической оптимизации» (при доказательстве существования обобщенного решения и его совпадения с функцией цены). Однако такие условия влекут непрерывность функции цены, что является достаточно редким для общих постановок игр быстрого действия.

При этом, однако, в одном из примеров в четвертой главе диссертации предложен достаточно общий метод «исправления» динамики игры, для того, чтобы новая динамика удовлетворяла условиям динамического преимущества игроков. Более того, если у первого игрока уже имеется динамическое преимущество у терминального множества, то функция цены игры с исправленной динамикой гарантированно будет совпадать с функцией цены исходной задачи в достаточно большой области. Также этот метод может послужить основой доказательств, связанных с играми в общей постановке (без условий динамического преимущества игроков).

Кроме теоретических исследований Н.В. Мунц была также проведена значительная практическая работа, связанная с реализацией численной схемы в виде компьютерной вычислительной программы. Программа была написана с использованием популярного языка программирования C#, что обеспечивает ее кроссплатформенность. Запуск программы возможен под управлением любых операционных систем, для которых реализована среда исполнения .NetCore. С использованием этой программы был просчитан ряд дифференциальных игр и задач управления. Последние также могут быть просчитаны с использованием предложенной схемы посредством введения фиктивного второго игрока с управлением, стесненным одноточечным множеством. Часть этих примеров включена в диссертацию. Многие просчитанные примеры не удовлетворяют условиям динамического преимущества игроков, но тем не менее имеется хорошее совпадение результатов, полученных программой Н.В. Мунц, с результатами других авторов, полученных иными вычислительными методами.

Следует отметить, что кроме научного программирования, связанного с реализацией вычислительной программы, Н.В. Мунц также проделала определенную программистскую работу, нацеленную на адекватное представление получаемых результатов вычислений в случае, когда возможна их визуализация (то есть в случае задач с размерностью фазового вектора 2 и 3). Для двумерных задач предложен и реализован алгоритм для построения поверхности графика разрывной функции двух аргументов. Для трехмерных задач предложена модификация классического алгоритма Marching Cubes, используемого для восстановления и сглаживания поверхности воксельных множеств (множеств, составленных из «кубиков», соот-

ветствующих ячейкам сетки, на которой велось вычисление). Предложенная модификация позволяет сохранять при дальнейшей обработке симметричность визуализируемых множеств уровня функции цены относительно координатных осей или плоскостей, в случае когда такая симметричность имеется.

Полученные в диссертации Н.В. Мунц результаты являются новыми. Они были представлены ею на семинарах в научных и учебных заведениях, на всероссийских и международных научных конференциях по игровой тематике. Также полученные результаты отражены в 11 публикациях в ведущих рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК и Аттестационным советом УрФУ.

За время научной работы Н.В. Мунц показала себя грамотным высококвалифицированным исследователем, способным качественно проводить как теоретические математические исследования, так и практическую работу, связанную с научными вычислениями и визуализацией. Стоит отметить высокую степень самостоятельности Н.В. Мунц при постановке исследовательских задач и их решении, уверенное владение математическим аппаратом, умение находить и применять имеющиеся математические знания для решения сформулированных задач.

Считаю, что диссертационная работа «Численный метод решения дифференциальных игр быстрого действия с линией жизни» удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 1.2.2 — Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ, а Мунц Наталья Владимировна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по данной специальности.

Научный руководитель  
кандидат физико-математических наук,  
старший научный сотрудник  
отдела динамических систем  
Федерального государственного  
бюджетного учреждения науки  
Институт математики и механики  
им. Н.Н. Красовского  
Уральского отделения Российской  
академии наук (ИММ УрО РАН)  
Кумков Сергей Сергеевич

*МКО*

06.12.2022.  
620990, Екатеринбург, ул. С.Ковалевс  
Тел. (343) 362-81-68, e-mail: sskumk@g

